Geração de colunas: aplicações e idéia geral

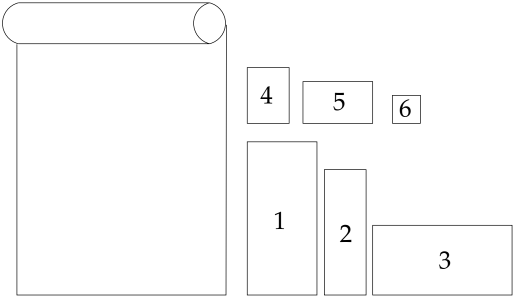
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Computação - IC
MO824B/MC928A – TÓPICOS EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

Outubro de 2006

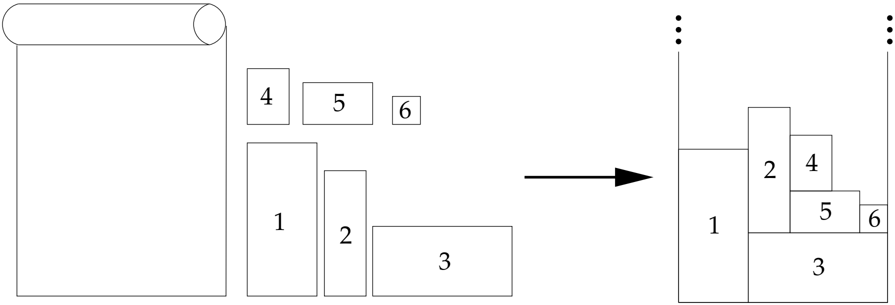
1. Aplicação
   - PEBF em 2 estágios
   - Formulação

2. Geração de colunas
   - Idéia geral
   - Geração de colunas - aplicação no PEBF

Problema de Empacotamento Bidimensional em Faixas



Problema de Empacotamento Bidimensional em Faixas



Problema de empacotamento bidimensional em faixas

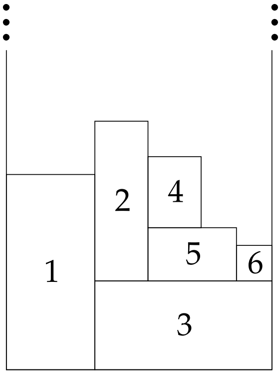
Definição - PEBF

Dados:

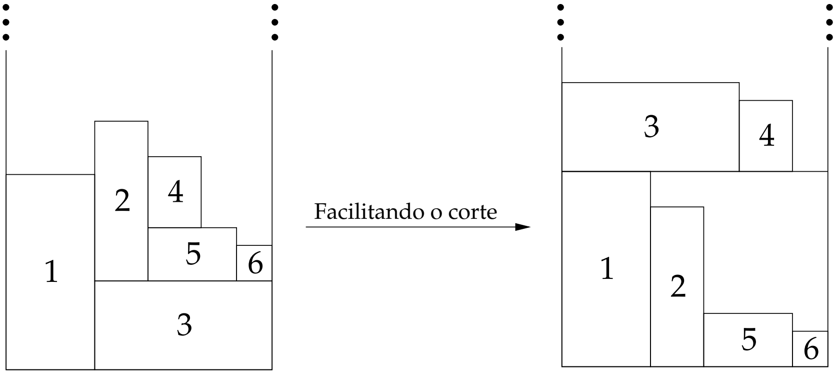
- S uma faixa de largura L e altura infinita;
- uma lista de itens retangulares $I = (r_1, \ldots, r_n)$, onde cada item $r_i = (l_i, a_i)$ é tal que $l_i \in (0, L]$, para $i = 1, \ldots, n$, l_i é a largura e a_i é a altura do item r_i.

O objetivo do PEBF consiste em empacotar os itens de I em S utilizando a menor altura possível de S.

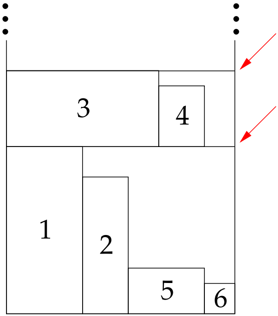
Modos de corte



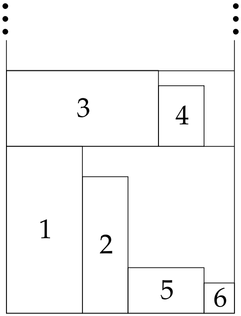
Modos de corte

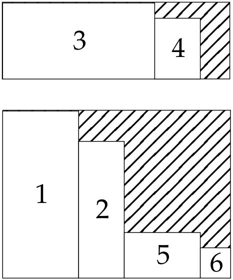


Estágios de corte

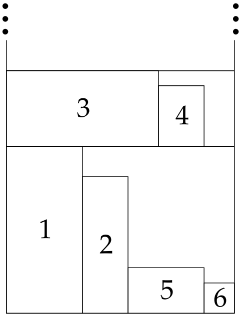


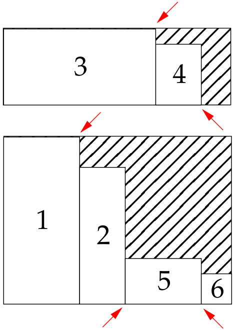
Estágios de corte



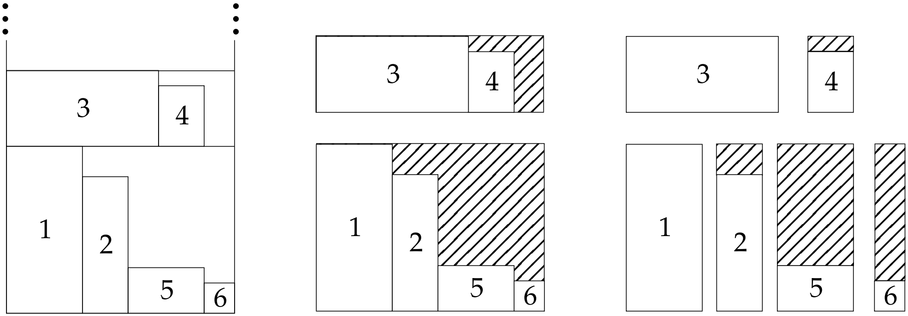


Estágios de corte

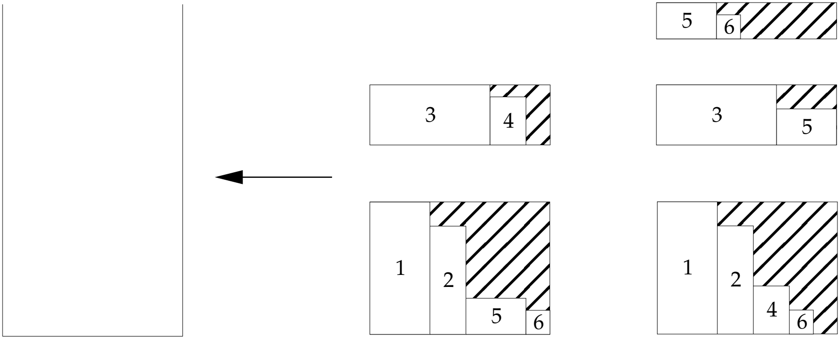




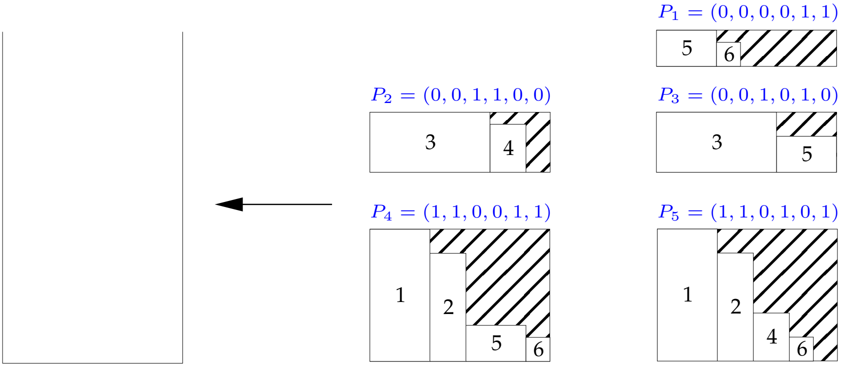
Estágios de corte



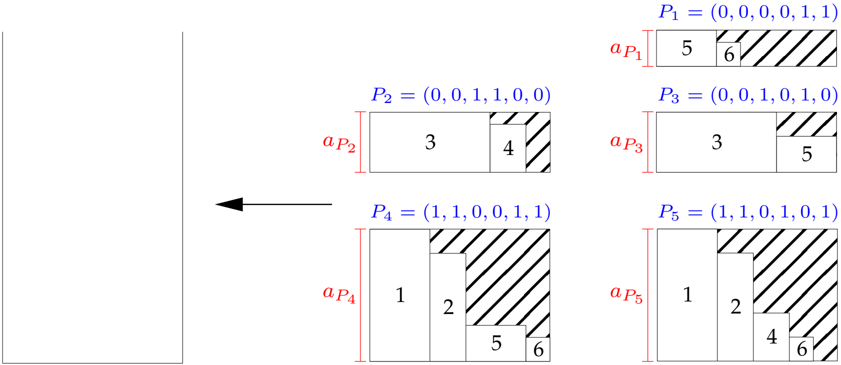
Padrões de corte



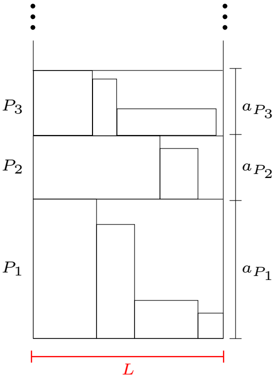
Padrões de corte



Padrões de corte



Padrões de corte



Formulação PLI

$$
\begin{array}{llll}
\text{(PEBF)} & \min & \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} a_p\lambda_p & \\
& \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} p_i\lambda_p = 1 & \forall i \in I \\
& & \lambda_p \in \{0,1\} & \forall p \in \mathcal{P}
\end{array}
$$

- $\mathcal{P} = \{p \in \{0,1\}^n | \sum_{i\in I} l_i p_i \leq L\}$ é o conjunto dos padrões válidos;
- variável de decisão $\lambda_p = 1$ sse o padrão p é utilizado na solução;
- $a_p = \max_{i\in I}(p_i a_i)$.

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \vdots \\ r_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots & p_{|\mathcal{P}|} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_{|\mathcal{P}|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema:

- $|\mathcal{P}|$ pode ser exponencial em n...
- o que torna impraticável resolver a relaxação linear de (PEBF)!

Uma solução:

- Geração de colunas!

Geração de colunas

idéia geral

- Dado um problema de otimização $\min\{cx|Ax \leq b, x \geq 0\}$, onde $A : m \times n$ e n exponencial;
- $\Rightarrow$ *pricing* explicitamente cada coluna é inviável!
- Se as colunas p em A podem ser representadas por um poliedro $\mathcal{P}$, então *pricing* pode ser realizado de forma implícita, isto é, resolvendo-se outro problema de otimização:

$$\min_{p \in \mathcal{P}} \overline{c}_p, \text{ onde } \overline{c}_p \text{ é o custo reduzido da coluna } p.$$

Geração de colunas

idéia geral

- Dado um problema de otimização $\min\{cx | Ax \leq b, x \geq 0\}$, onde $A : m \times n$ e n exponencial;
- $\Rightarrow$ *pricing* explicitamente cada coluna é inviável!
- Se as colunas p em A podem ser representadas por um poliedro $\mathcal{P}$, então *pricing* pode ser realizado de forma implícita, isto é, resolvendo-se outro problema de otimização:

$$\min_{p \in \mathcal{P}} \overline{c}_p, \text{ onde } \overline{c}_p \text{ é o custo reduzido da coluna } p.$$

"Qualquer esquema de *pricing* em que os custos reduzidos das colunas não são explicitamente calculados é chamado de **geração de colunas**."

Geração de colunas - aplicação no PEBF

custo reduzido

$$
\begin{array}{llrll}
\text{(PEBF)} & \min & \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} a_p\lambda_p & & \\
 & \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} p_i\lambda_p = 1 & \forall i \in I & (\pi) \\
 & & \lambda_p \geq 0 & \forall p \in \mathcal{P} & \\
\text{(Dual)} & \max & \displaystyle\sum_{i\in I} \pi_i & & \\
 & \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{i\in I} \pi_i p_i \leq a_p & \forall p \in \mathcal{P} &
\end{array}
$$

Geração de colunas - aplicação no PEBF

Pricing

- Custo reduzido é dado por $\overline{a}_p = a_p - \sum_{i \in I} \pi_i p_i$;
- $I^k = \{i \in I : a_i \leq a_k\}$ para uma certa altura a_k;
- Como queremos $p = \arg\min \bar{a}_p$ basta resolver, para cada altura a_k:

Geração de colunas - aplicação no PEBF

Pricing

- Custo reduzido é dado por $\overline{a}_p = a_p - \sum_{i \in I} \pi_i p_i$;
- $I^k = \{i \in I : a_i \leq a_k\}$ para uma certa altura a_k;
- Como queremos $p = \arg\min \bar{a}_p$ basta resolver, para cada altura a_k:

$$
\begin{aligned}
M_k = \quad & \max \quad \sum_{i \in I^k} \pi_i p_i \\
& \text{s.a.} \quad \sum_{i \in I^k} l_i p_i \leq L \\
& \qquad p_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I^k.
\end{aligned}
$$