Introdução

$$
\text{(LP)} \quad \begin{array}{ll} \min & cx \\ \text{s.a.} & Ax \geq b \\ & Bx \geq d \\ & x \geq 0. \end{array}
$$

▷ Propriedades desejáveis da matriz B:

1. contém a vasta maioria das restrições.
2. tem uma *estrutura especial* que faz com que o programa linear sobre $Bx \geq d$ seja muito mais fácil que o problema original.

Algoritmos de Geração de Colunas

Cid C. de Souza – IC-UNICAMP

Outubro de 2005

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ O problema (LP) é equivalente a:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.a.:} \quad & Ax \geq b \\ & x = \sum_{i=1}^{q} z_i x^i \qquad (1) \\ & \sum_{i=1}^{q} z_i = 1 \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

▷ Este problema tem dois conjuntos de variáveis: x e z.

▷ **Idéia**: eliminar as variáveis x usando as equações em (1).

Decomposição de Dantzig-Wolfe

Teorema: (Minkowski) Se $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, então existem vetores $x^1, \ldots, x^q, x^{q+1}, \ldots, x^r$ em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$P = \text{conv}(\{x^1, \ldots, x^q\}) + \text{cone}(\{x^{q+1}, \ldots, x^r\})$$

Os *pontos extremos* de P estão contidos em $\{x^1, \ldots, x^q\}$ e os *raios extremos* de P no conjunto $\{x^{q+1}, \ldots, x^r\}$.

▷ Suponha que $\{x \in \mathbb{R}^n_+ | Bx \geq d\}$ seja um politopo.

▷ Sejam $\{x^1, \ldots, x^q\}$ os pontos extremos deste politopo.

▷ Então qualquer ponto $\overline{x}$ de $\{x \in \mathbb{R}^n | Bx \geq d, x \geq 0\}$ pode ser escrito como:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{q} z_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{q} z_i = 1, \quad z_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, q.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ **Definição**: $f_i := cx^i$ e $p^i := Ax^i$ para todo $i = 1, \ldots, q$.

▷ O problema original (LP) é equivalente a:

$$
\text{(DW)} \quad
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{q} f_i z_i \\
\text{s.a.:} \quad & \sum_{i=1}^{q} p^i z_i \geq b \\
& \sum_{i=1}^{q} z_i = 1 \\
& z \geq 0.
\end{aligned}
$$

▷ (DW) é chamado de *problema mestre de Dantzig-Wolfe*.

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

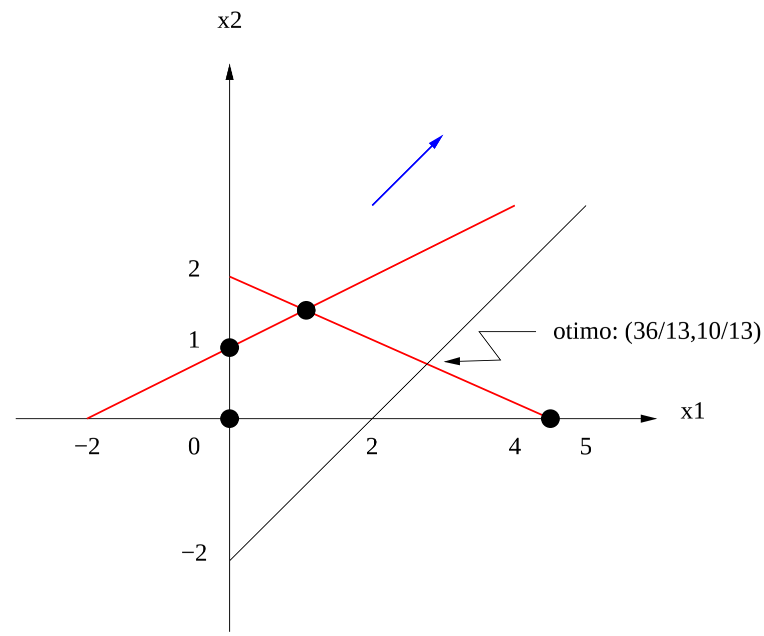
▷ Novo problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c(\sum_{i=1}^{q} z_i x^i) \\
\text{s.a.:} \quad & A(\sum_{i=1}^{q} z_i x^i) \geq b \\
& \sum_{i=1}^{q} z_i = 1 \\
& z \geq 0.
\end{aligned}
$$

▷ Simplificação:

$$c(\sum_{i=1}^{q} z_i x^i) = \sum_{i=1}^{q} (cx^i) z_i \quad \text{e} \quad A(\sum_{i=1}^{q} z_i x^i) = \sum_{i=1}^{q} (Ax^i) z_i.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)



Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ **Exemplo**:

$$
\begin{array}{lrr}
\min & -x_1 - x_2 & \\
\text{s.a.:} & x_1 - x_2 \leq 2 & (2) \\
 & 4x_1 + 9x_2 \leq 18 & (3) \\
 & -2x_1 + 4x_2 \leq 4 & (4) \\
 & x_1, x_2 \geq 0. &
\end{array}
$$

▷ restrições do tipo $\leq$ ...

▷ $Ax \geq b$ representado pela restrição (2).

▷ $Bx \geq d$ representados pelas restrições (3) e (4).

▷ Pontos extremos de do politopo $\{x \in \mathbb{R}^2_+ | Bx \geq d\}$:

$$x^1 = (0,0),\ x^2 = (4\tfrac{1}{2}, 0),\ x^3 = (1\tfrac{1}{17}, 1\tfrac{9}{17}) \text{ e } x^4 = (0,1).$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ O *problema mestre* é dado por:

$$\begin{aligned} \min \quad & \min 0z_1 - 4\frac{1}{2}z_2 - 2\frac{10}{17}z_3 - z_4 \\ \text{s.a.} \quad & 0z_1 + 4\frac{1}{2}z_2 - \frac{8}{17}z_3 - z_4 \leq 2 \\ & z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 \\ & z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0. \end{aligned}$$

▷ *Problema mestre*:

- Solução ótima: $z_1 = z_4 = 0$, $z_2 = 0.497$ e $z_3 = 0.503$.
- Valor ótimo: -3.538.

▷ *Problema original* : solução ótima $x_1^* = \frac{36}{13} \simeq 2.769$ e $x_2^* = \frac{10}{13} \simeq 0.769$.

▷ (x_1^*, x_2^*) não é ponto extremo de $\{x \in \mathbb{R}_+^2 | Bx \geq d\}$.

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ Todo ponto (x_1, x_2) deste politopo é dado por:

$$(x_1, x_2) = (0,0)z_1 + (4\frac{1}{2}, 0)z_2 + (1\frac{1}{17}, 1\frac{9}{17})z_3 + (0,1)z_4$$

com $z_i \geq 0$ para todo $i \in \{1,2,3,4\}$ e $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$.

▷ Como $A = [1, -1]$, temos que $p^i = Ax^i$ é dado por:

$$p^1 = [1,-1][0,0]^T = 0 \qquad p^2 = [1,-1][4\frac{1}{2}, 0]^T = 4\frac{1}{2},$$

$$p^3 = [1,-1][1\frac{1}{17}, 1\frac{9}{17}]^T = -\frac{8}{17} \qquad p^4 = [1,-1][0,1]^T = -1,$$

Para os coeficientes da função objetivo, como $f^i = cx^i$, tem-se:

$$f^1 = [-1,-1][0,0]^T = 0 \qquad f^2 = [-1,-1][4\frac{1}{2}, 0]^T = -4\frac{1}{2},$$

$$f^3 = [-1,-1][1\frac{1}{17}, 1\frac{9}{17}]^T = -2\frac{10}{17} \qquad f^4 = [-1,-1][0,1]^T = -1,$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ *Problema mestre restrito*:

$$
(\text{DWR}) \quad
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda} f_i z_i & (8)\\
\text{s.a.:} & \displaystyle\sum_{i \in \Lambda} p^i z_i \geq b & (9)\\
& \displaystyle\sum_{i \in \Lambda} z_i = 1 & (10)\\
& z \geq 0. &
\end{array}
$$

▷ Λ é um conjunto *muito pequeno* de colunas do *problema mestre* e **contém uma *base*** ($\Longrightarrow |\Lambda| \geq m_1 + 1$).

▷ Seja (u, u_0) o vetor de *variáveis duais* na solução ótima de (DWR): u dual de (9) e u_0 dual de (10).

▷ **Custo reduzido** de uma variável z_i, $i = 1, \ldots, q$:

$$\xi_i = f_i - up^i - u_0.$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

▷ *Problema mestre*:

$$
(\text{DW}) \quad
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} f_i z_i & (5)\\
\text{s.a.:} & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} p^i z_i \geq b & (6)\\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{q} z_i = 1 & (7)\\
& z \geq 0. &
\end{array}
$$

▷ (6) são as restrições *acopladoras*.

▷ Se $A : m_1 \times n$ e $B : m_2 \times n$, (LP) tem $m_2 - 1$ restrições a mais que (DW) !

▷ Mas, o número de variáveis em (DW) é igual ao número de pontos extremos de $\{x \in \mathbb{R}^n_+ : Bx \geq d\}$, portanto, **é exponencial !**

▷ **Saída**: *geração de colunas* !

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

- (DWS(u, u_0)) é chamado de *subproblema* ou *problema escravo de Dantzig-Wolfe*.
- Se $\{x \in \mathbb{R}^n_+ | Bx \geq d\}$ é um politopo não vazio, o valor ótimo de (DWS(u, u_0) é finito. Se o politopo for vazio, o *subproblema* é inviável e o *problema mestre* também !
- Qualquer método que procura a variável não-básica com menor custo reduzido (problema de minimização) sem fazer *explicitamente* o cálculo deste custos para **todas** as variaveis é chamado de **geração de colunas**.
- **Nota**: não faz sentido deixar o conjunto de *restrições acopladoras* vazio pois, neste caso, o subproblema corresponderia ao problema original.

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

- Se $\xi_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, q$, então a solução ótima de (DWR) (mestre restrito) é ótima para (DW) (mestre completo) também.
- Se $\xi_j < 0$ para algum $j \in \{1, \ldots, q\}$, a coluna $(p^j, 1)$ é adicionada a (DWR) enquanto outra coluna sai.
- Encontrando uma coluna com custo reduzido mínimo:

$$\begin{aligned} \min\{f_i - up^i - u_0 | i = 1, \ldots, q\} &= \min\{cx^i - uAx^i - u_0 | i = 1, \ldots, q\} \\ &= \min\{(c - uA)x^i - u_0 | i = 1, \ldots, q\} \end{aligned}$$

- Como sempre existe um ponto extremo ótimo para um programa linear com ótimo finito, o problema acima reduz-se a:

$$(\text{DWS}(u, u_0)) \quad \begin{array}{ll} \min & (c - uA)x - u_0 \\ \text{s.a.} & Bx \geq d \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Estruturas bloco angulares

▷ Programa Linear na forma *bloco angular* :

$$
\begin{array}{llcccccccl}
 & \max & c^1x^1 & + & c^2x^2 & + & \dots & + & x^Kx^K & \\
 & \text{s.a.} & A^1x^1 & + & A^2x^2 & + & \dots & + & A^Kx^K & = b \\
(\text{BA}) & & D^1x^1 & & & & & & & \leq d_1 \\
 & & & & D^2x^2 & & & & & \leq d_2 \\
 & & & & & & \dots & & & \leq \dots \\
 & & & & & & & & D^Kx^K & \leq d_K \\
 & & x^1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1} & & x^2 \in \mathbb{Z}_+^{n_2} & & \dots & & x^K \in \mathbb{Z}_+^{n_K} &
\end{array}
$$

Decomposição de Dantzig-Wolfe (cont.)

Algoritmo de Dantzig-Wolfe (*Geração de colunas*)

Passo 1:
Assuma que o problema mestre (DW) é viável.
Encontre um conjunto inicial de colunas Λ para o problema mestre restrito (DWR) que forme uma base.

Passo 2:
Resolva (DWR) e encontre as variáveis duais ótimas (u, u_0).

Passo 3:
Resolva o subproblema (DWS(u, u_0)) e seja x^j a solução ótima.
Se $\xi_j = f_j - up^j - u_0 \geq 0$ **pare**, a solução ótima de (DWR) é ótima para (DW) também. Se não vá para o **Passo 4**

Passo 4:
Adicione a coluna $[p^j, 1] = [Ax^j, 1]$ ao problema mestre restrito (DWR). Faça $\Lambda \longleftarrow \Lambda \cup \{j\}$ e vá para o **Passo 2**.

Estruturas bloco angulares

- O *problema mestre* da **relaxação linear**:

$$
\text{(DWBA)} \quad
\begin{array}{lll}
\max & \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k}(c^k x^{k,t})\lambda_{k,t} & \\
\text{s.a.} & \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k}(A^k x^{k,t})\lambda_{k,t} = b & \\
 & \sum_{t=1}^{T_k}\lambda_{k,t} = 1, & k = 1,\ldots,K \\
 & \lambda_{k,t} \geq 0, t = 1,\ldots,T^k, & k = 1,\ldots,K
\end{array}
$$

- Coluna associada a $x \in X^k$: $[c^k x, A^k x, e_k]^T$.
- Variáveis duais associadas às *restrições acopladoras*: $\{\pi_i\}_{i=1}^m$.
- Variáveis duais associadas às *restrições de convexidade*: $\{\mu_k\}_{k=1}^K$.

Estruturas bloco angulares

- $X^k = \{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k} \mid D^k x^k \leq d_k\}$ para $k = 1,\ldots,K$;
- Pontos **viáveis** de X^k: $\{x^{k,t}\}_{t=1}^{T_k}$;
- Pelo Teorema de Minkowski:

$$
X^k = \{x^k \in \mathbb{R}_+^{n_k} \mid x^k = \sum_{t=1}^{T_k}\lambda_{k,t}x^{k,t}, \quad \sum_{t=1}^{T_k}\lambda_{k,t} = 1, \quad \lambda_{k,t} \in \{0,1\},\ t = 1,\ldots,T_k\}
$$

Estruturas bloco angulares

▷ **Limitante dual para o valor ótimo da relaxação**:

- Subproblemas: $(c^k - \pi A^k)x - \mu_k - \xi_k \leq 0, \forall x \in X^k$.
- Para $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_K)$, $(\pi, \mu + \xi)$ é dual viável para (DWBA).
  Por quê ?
- Logo, $z(\text{DWBA}) \leq \pi b + \sum_{k=1}^{K}(\mu_k + \xi_k)$.

▷ **Critério de parada alternativo para o algoritmo**:
se as soluções dos subproblemas $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^K)$ satisfazem às restrições acopladoras então elas formam uma solução ótima para o problema original (custo igual ao limitante dual).

$$\sum_k c^k \tilde{x}^k = \sum_k \pi A^k \tilde{x}^k + \sum_k \mu_k + \sum_k \xi_k = \pi b + \sum_k (\mu_k + \xi_k)$$

Estruturas bloco angulares

▷ Problema *mestre restrito*:

$$(\text{DWRBA}) \quad \max\{\tilde{c}\tilde{\lambda} \mid \tilde{A}\tilde{\lambda} = \tilde{b}, \tilde{\lambda} \geq 0\},$$

onde $\tilde{b} = [b, \mathbb{1}]^T$ e $\tilde{A}$ é um subconjunto das colunas da matriz de coeficientes de (DW) contendo uma base.

▷ *Limitante primal* para o valor ótimo da relaxação: toda solução viável de (DWRBA) é viável para (DWBA). Logo, se $\tilde{\lambda}^*$ é a solução ótima de (DWRBA) a qual estão associadas as variáveis duais π e μ, tem-se:

$$z(\text{DWRBA}) = \tilde{c}\tilde{\lambda}^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_i b_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k \leq z(\text{DWBA}).$$

▷ *Geração de colunas*: para todo $k = 1, \ldots, K$ resolva o subproblema correspondente

$$\xi_k = \max\{(c^k - \pi A^k)x - \mu_k \mid x \in X^k\}.$$

Se $\xi_k > 0$ para algum k, adiciona coluna no mestre se não a solução é ótima (para a relaxação !).

Geração de colunas para IP 0–1

▷ Ao terminar de resolver o problema mestre da *relaxação*, a solução tipicamente não é inteira. Só temos um limitante *dual* sobre o valor ótimo !

▷ **Solução** : usar geração de colunas dentro de um algoritmo *branch-and-bound*, obtendo-se um algoritmo do tipo **branch-and-price**.

▷ Problema original :

$$
\begin{array}{lll}
 & \max & \displaystyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k} c^k x^k \\
(\text{IP}) & \text{s.a.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \\
 & & D^k x^k \leq d_k \qquad k = 1, \ldots, K \\
 & & x^k \in \mathbb{B}^{n_k} \qquad k = 1, \ldots, K
\end{array}
$$

Qualidade dos limitantes

▷ *Qual o melhor limitante dual que pode ser obtido para o problema inteiro resolvendo-se a relaxação do* **problema mestre** *?*

▷ **Proposição 1**

$$z(DWBA) = \max\{\sum_{k=1}^{K} c^k x^k | \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b, x^k \in conv(X^k), k = 1, \ldots, K\}$$

▷ *Geração de colunas × Relaxação Lagrangeana:* dualizar as restrições acopladoras (K subproblemas lagrangeanos independentes e fáceis de resolver).

▷ Seja z_{LD} o valor ótimo do dual lagrangeano quando os K subproblemas lagrangeanos são resolvidos **exatamente**.

▷ **Teorema 1** $w_{LD} = z(\textbf{DWBA})$.

Geração de colunas para IP 0–1

- ▷ Seja S o conjunto de todas as soluções viáveis, $S_0 = S \cap \{x \mid x_j^\ell = 0\}$ e $S_1 = S \cap \{x \mid x_j^\ell = 1\}$.
- ▷ *Como alterar o problema mestre e o subproblema em S_0 e S_1 ?*
- ▷ Se $x_j^k = \sum_{t=1}^{T_k} \lambda_{k,t} x_j^{k,t} = \delta$, para $\delta \in \{0,1\}$, $x_j^{k,t}$ deve ter valor δ para todo par (k,t) onde $\lambda_{k,t} > 0$.
- ▷ O problema mestre (IPM(S_i)) para S_i, $i \in \{0,1\}$, será:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{k\neq\ell} \sum_t (c^k x^{k,t})\lambda_{k,t} + \sum_{t \mid x_j^{\ell,t}=i} (c^\ell x^{\ell,t})\lambda_{\ell,t} \\
\text{s.a.} & \sum_{k\neq\ell} \sum_t (A^k x^{k,t})\lambda_{k,t} + \sum_{t \mid x_j^{\ell,t}=i} (A^\ell x^{\ell,t})\lambda_{\ell,t} = b, \\
 & \sum_{t=1}^{T_k} \lambda_{k,t} = 1, \forall\ k \neq \ell, \\
 & \sum_{t \mid x_j^{\ell,t}=i} \lambda_{\ell,t} = 1, \\
 & \lambda_{k,t} \geq 0,\ t = 1,\ldots,T^k,\ k = 1,\ldots,K.
\end{array}
$$

Geração de colunas para IP 0–1

- ▷ Reformulação (problema mestre de DW) :

$$
\begin{array}{llll}
 & \max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} (c^k x^{k,t})\lambda_{k,t} & \\
\text{(IPM)} & \text{s.a.} & \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} (A^k x^{k,t})\lambda_{k,t} = b & \\
 & & \sum_{t=1}^{T_k} \lambda_{k,t} = 1 & k = 1,\ldots,K \\
 & & \lambda_{k,t} \geq 0, \quad t = 1,\ldots,T^k & k = 1,\ldots,K
\end{array}
$$

- ▷ Como $x^{k,t} \in X^k$ são vetores 0–1 **distintos**, $\tilde{x}^k = \sum_{t=1}^{T_k} \tilde{\lambda}_{k,t} x^{k,t}$ está em $\mathbb{B}^{n_k}$ *se e somente se* $\tilde{\lambda}$ é inteiro.
- ▷ Assim, se a solução ótima de (IPM) $\tilde{\lambda}$ é fracionária, existem ℓ e j tais que $\tilde{x}_j^\ell$ é fracionária. Logo, pode-se fazer uma ramificação usual *nesta* variável.

Problemas implícitos de empacotamento e partição

▷ Dados: conjunto finito $M = \{1, \dots, m\}$ e K subconjuntos de M descritos *implicitamente*. **Encontrar** um empacotamento ou partição de M formado por alguns deste subconjuntos.

▷ Modelo geral:
$z = \max\{\sum_{i=1}^{K} c^k x^k : \sum_{i=1}^{K} A^k x^k \leq b, x^k \in X^k,\ \text{para todo } k = 1, \dots, K\}$.

▷ Especializando: $x^k = (y^k, w^k)$, com $y^k \in \{0,1\}^m$ sendo o vetor de incidência de um subconjunto k de M; $c^k = (e^k, f^k)$, $A^k = (I, 0)$ e $b = \mathbb{1}$.

▷ Variáveis auxiliares w^k: necessárias para impor que um subconjunto representado por y^k seja viável e para o cálculo do seu custo. *(exemplos ... !)*

▷ A formulação torna-se:

$$z = \max\{\sum_{k=1}^{K}(c^k y^k + f^k w^k) \mid \sum_{k=1}^{K} y^k \leq \mathbb{1}_m, (y^k, w^k) \in X^k, k = 1, \dots, K\}.$$

Geração de colunas para IP 0–1

▷ O subproblema referente a X^ℓ para S_i, $i \in \{0,1\}$, será:

$$\xi_\ell(S_i) = \max\{(c^\ell - \pi A^\ell)x - \mu_\ell \mid x \in X^\ell, x_j = i\}.$$

Para os demais valores de k, o subproblema permanece *inalterado !*

▷ Outra idéia para ramificação no *branch-and-bound*:
fazer *branching* em uma variável fracionária $\lambda_{k,t}$.

▷ Dificuldades com esta alternativa:

- árvore de enumeração tende a ficar muito *desbalanceada* pois fixando-se $\lambda_{k,t}$ em *zero* praticamente não se altera o problema original.
- Na prática é difícil impor a condição $\lambda_{k,t} = 0$ e, assim, a mesma solução pode voltar a ser gerada.

Multi-item Lot-sizing

▷ São dadas demandas d_t^k para os itens $k = 1, \dots, K$ em um horizonte de tempo $t = 1, \dots, n$. Todos itens são produzidos em uma única máquina, esta máquina produz no máximo um item por período e tem uma capacidade de produção C_t^k para cada item k e período t. Os custos de produção (p), armazenamento (h) e *setup* (f) são conhecidos.

Objetivo: minimizar o custo de produção.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{n} (p_t^k x_t^k + h_t^k s_t^k + f_t^k y_t^k) & \\ \text{s.a.} & \sum_{k=1}^{K} y_t^k \leq 1, & t = 1, \dots, n \\ & (x^k, s^k, y^k) \in X^k, & k = 1, \dots, K \end{array}$$

onde $X^k = \{ (x^k, s^k, y^k) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{B}^n \mid s_{t-1}^k + x_t^k = d_t^k + s_t^k, \; x_t^k \leq C_t^k y_t^k, \; t = 1, \dots, n \}$.

Problemas implícitos de empacotamento e partição

▷ Sendo $(y^{k,t}, w^{k,t})$ a t-ésima solução viável no conjunto X^k e $\lambda_{k,t}$ a variável correspondente a esta solução, o *problema mestre* torna-se:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T_k} (e^k y^{k,t} + f^k w^{k,t}) \lambda_{k,t} & \\ \text{s.a.} & \sum_{k=1}^{K} \sum_{t \mid y_i^{k,t}=1} \lambda_{k,t} \leq 1, & \forall\, i \in M \\ & \sum_{t=1}^{T_k} \lambda_{k,t} = 1, & k = 1, \dots, K \\ & \lambda_{k,t} \in \{0,1\}, \quad t = 1, \dots, T^k, & k = 1, \dots, K \end{array}$$

▷ Exemplos de problemas que se *encaixam* nesta forma especial:
- *Multi-item Lot-sizing*;
- *Clustering* (Classificação);
- *Capacitated Vehicle Routing* (CVRP).

Roteamento de Veículos com Capacidade (CVRP)

▷ *Dados*: grafo $G = (V, E)$, com $|V| = n$ e $|E| = m$, representado locais sendo o vértice 0 um depósito e o restante clientes; custos c_e para cada aresta $e \in E$; K veículos idênticos com capacidade de carga C e *demanda* d_i para cada cliente $i \in V \setminus \{0\}$.

▷ *Solução viável*: conjunto de subciclos contendo o depósito e tais que:
(i) cada vértice $i \in V \setminus \{0\}$ está em exatamente um subciclo;
(ii) a soma das demandas em cada subciclo é menor ou igual a C.

▷ *Nota*: cada subciclo denota a rota de um dos veículos.

▷ *Objetivo*: minimizar a soma dos custos dos subciclos.

Clustering (Classificação)

▷ *Dados*: um grafo $G = (V, E)$ com $n = |V|$ e $m = |E|$, custos c_e nas arestas, pesos d_i nos vértices e uma capacidade C para as classes.

Objetivo: Particionar os vértices de V em K classes (possivelmente vazias) tal que a soma dos pesos nos vértices de cada classe não exceda C, minimizando a soma dos custos das arestas internas às classes.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \sum_{e \in E} (c_e w_e^k) & \\
\text{s.a.} & \displaystyle\sum_{k=1}^{K} y_i^k = 1, & i \in V \\
 & (w^k, y^k) \in X^k, & k = 1, \ldots, K,
\end{array}
$$

onde $X^k = \{\ (w^k, y^k) \in \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n \mid w_{ij}^k \leq y_i^k, w_{ij}^k \leq y_j^k,$
$w_{ij}^k \geq y_i^k + y_j^k - 1, (i,j) \in E, \sum_{i \in V} d_i y_i^k \leq C\ \}$

e $y_i^k = 1$ ($w_{ij}^k = 1$) *se e somente se* o(s) vértice(s) i (e j) está (estão) na classe k.

Partição com conjuntos Idênticos

- Os problemas de Classificação de Roteamento têm a propriedade de que os *clusters* e os veículos, respectivamente, são intercambiáveis, ou seja, independem de k.
- Neste caso, a geração de colunas pode ser especializada ainda mais. Fazendo $X^k = X$, $(e^k, f^k) = (e, f)$ e $T_k = T$ para todo k, define-se $\lambda_t = \sum_{k=1}^{K} \lambda_{k,t}$ e o problema mestre será:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^{T}(ey^t + fw^t)\lambda_t & \\ \text{s.a.} & \sum_{t|y_i^t=1} \lambda_t = 1,\ \forall i \in M, & (\pi_i) \\ & \sum_{t=1}^{T} \lambda_t = K, & (\mu) \\ & \lambda \in \mathbb{B}^T. & \end{array}$$

Roteamento de Veículos com Capacidade (CVRP)

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{e \in E} (c_e w_e^k) & \\ \text{s.a.} & \sum_{k=1}^{K} y_i^k = 1, & \forall\, i \in V \setminus \{0\} \\ & (w^k, y^k) \in X^k, & k = 1, \dots, K \end{array}$$

onde X^k é o conjunto de pontos $(w^k, y^k) \in \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ satisfazendo:

$$\begin{array}{ll} \sum_{e \in \delta(i)} w_e^k = 2y_i^k, & \forall\, i \in V \setminus \{0\} \\ \sum_{i \in V} d_i y_i^k \leq C, & \forall\, i \in V \setminus \{0\} \\ \sum_{e \in E(S)} w_e^k \leq \sum_{i \in S \setminus \{k\}} y_i^k, & \forall\, k \in S,\ S \subseteq V \setminus \{0\} \\ y_0^k = 1. & \end{array}$$

Partição com conjuntos Idênticos

▷ *Prova da Proposição 3* : supor que $0 < \tilde{\lambda}_k < 1$ e que $y_i^k = 1$. Como $\sum_{t|y_i^t=1} \tilde{\lambda}_t = 1$, existe ℓ tal que $0 < \tilde{\lambda}_k < 1$. Como não existem duas colunas iguais na base, existe $j \in M \setminus \{i\}$ tal que $y_i^k = 1$ ou $y_j^\ell = 1$ mas não ambos. Então:

$$1 = \sum_{t|y_i^t=1} \tilde{\lambda}_t > \sum_{t|y_i^t=y_j^t=1} \tilde{\lambda}_t,$$

a desigualdade é estrita pois a última somatória **não** inclui simultaneamente as variáveis $\tilde{\lambda}_k$ e $\tilde{\lambda}_\ell$. $\square$

Partição com conjuntos Idênticos

▷ Subproblema: é único !

$$\xi = \max\{(e - \pi)y + fw - \mu : (y, w) \in X\}.$$

▷ *Branching* de Ryan e Foster (1981):

- seja $\tilde{\lambda}$ uma solução básica viável do problema mestre *relaxado*;
- Proposição 3. Se $\tilde{\lambda}$ é fracionária, então existem duas linhas i e j em M tais que $0 < \sum_{t|y_i^t=y_j^t=1} \tilde{\lambda}_t < 1$.
- *Branching*: o conjunto de soluções S é dividido em $S_0 = S \cap \{\sum_{t|y_i^t=y_j^t=1} \lambda_t = 0\}$ e $S_1 = S \cap \{\sum_{t|y_i^t=y_j^t=1} \lambda_t = 1\}$; Ou seja, em S_1 considera-se apenas colunas que cobrem ambas as linhas i e j. Todas as demais estão em S_0.