【线性代数】正交投影 - 青峰碧陋室 - CSDN博客

笔记本：	math
创建时间：	2017/9/26 3:40
作者：	87681654
URL：	http://blog.csdn.net/tengweitw/article/details/41174555

【线性代数】正交投影

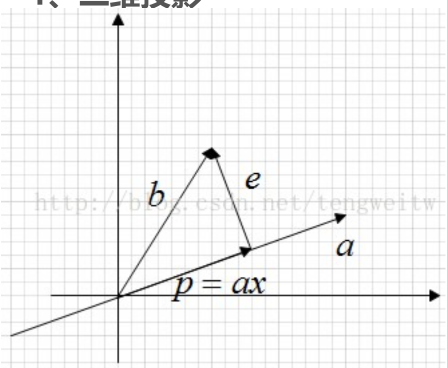
标签： 线性代数 正交向量 投影矩阵

2014-11-16 18:07 6706人阅读 评论(0) 收藏

分类： 线性代数（12）

我们在初中就应该学过投影，那么什么是投影呢？形象点说，就是将你需要投影的东西上的每一点向你要投影的平面作垂线，垂线与
的集合就是你的投影。注意这里我们的投影是向量的投影，几何的投影(并不一定是垂直投影的)可见度娘百科。同样的，我们从简单的二
始讨论。

1、二维投影



上图表示的是，向量b在向量a上的投影。显然有如下表达式：

$$e=b-p=b-xa$$

$$a^Te=0\rightarrow a^T(b-xa)=0\rightarrow xa^Ta=a^Tb\rightarrow x=\frac{a^Tb}{a^Ta}$$

$$p=ax=a\frac{a^Tb}{a^Ta}$$

$$Pb=p\rightarrow P=\frac{aa^T}{a^Ta}$$

其中，**P为投影矩阵**，由P的表达式可以看出，它具有如下性质：

$$P^T=P$$

$$P^2=P$$

2、三维投影

三维投影，就是将一个向量投影到一个平面上。同上面一样，假设是将b向量投影到平面上的p向量，则有表达式：

$$e=b-p$$

e是垂直与平面的向量。由于p向量在平面上，则p向量可以由该平面的2个线性无关向量(正如，在xy平面的任何向量都可以由x轴，y轴

$$p=x_1a_1+x_2a_2$$
$$=Ax$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

由于e垂直平面，则e向量垂直与平面中的任意向量，则有：

$$e = b - p = b - Ax$$

$$a_1^T\left(b - Ax\right) = 0$$

$$a_2^T\left(b - Ax\right) = 0$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b - Ax \end{bmatrix} = 0 \rightarrow A^T\left(b - Ax\right) = 0$$

将上式化简求得x：

$$A^T Ax = A^T b$$

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

又因为p=Ax，Pb=p，**则得到投影矩阵为：**

$$P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

由P的表达式可以看出，它具有如下性质：

$$P^T = P$$

$$P^2 = P$$

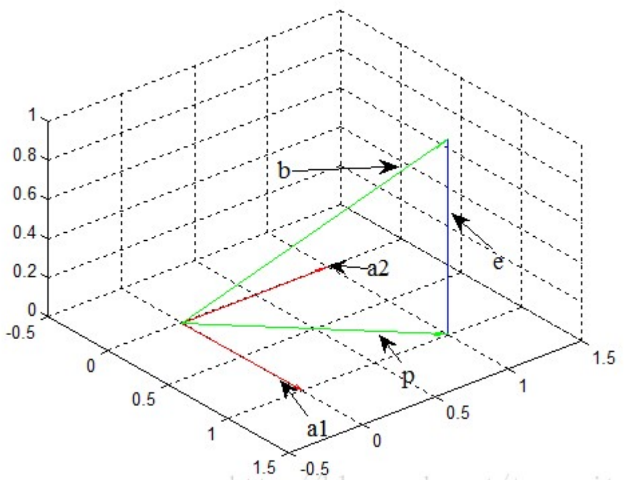
上面的投影矩阵是通式，当投影在一维情况时，A即为直线上的任意一个向量a,投影矩阵为：

$$P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T = a\left(a^T a\right)^{-1} a^T = \frac{aa^T}{a^T a}$$

注意：一个数值的逆是它的倒数。

3、举例说明

下面以一个实例来说明：



如上图，假设我们要将向量b投影到水平面上，其投影为p，a1,a2为水平面的两个线性无关向量，它们的参数分别为：

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

那么A=[a1 a2]即：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由上面我们求得的通式，可得投影矩阵P:

$$P=A\left(A^{T}A\right)^{-1}A^{T}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

知道投影矩阵P后，我们可以得到b在水平面上的投影p为：

$$p=Pb=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

显然，p与我们图中所示的结果相同。这里我们是以三维情况进行举例的，更高维情况，我们无法用图像来描述，但是通式也是成立的。

三维图的matlab程序如下：

[plain]

```
clear all
clc

a1=[1 0 0];
a2=[0 1 0];
b=[1 1 1];
p=[1 1 0];
e=b-p;
quiver3(0,0,0,a1(1),a1(2),a1(3),1,'color','r')
hold on
quiver3(0,0,0,a2(1),a2(2),a2(3),1,'color','r')
hold on
quiver3(0,0,0,b(1),b(2),b(3),1,'color','g')
hold on
quiver3(0,0,0,p(1),p(2),p(3),1,'color','g')
hold on
quiver3(p(1),p(2),p(3),e(1),e(2),e(3),1,'color','b')
```

原文：http://blog.csdn.net/tengweitw/article/details/41174555

作者：nineheadedbird

- 上一篇 【线性代数】正交向量与正交子空间
- 下一篇 【线性代数】最小二乘与投影矩阵

- Python即将成为第一语言
- Android自定义控件全知道
- 推导正交投影变换
- 【线性代数】标准正交矩阵与Gram-Schmidt正交化
- 构建企业级高性能OLAP引擎--董西成
- TensorFlow入门基础知识详解
- openGL之正交投影、颜色立方体---openGL学习...
- 线性代数导论17——正交矩阵和Gram-Schmidt...
- JDK9新特性解读
- 重温线性代数（2）——向量空间
- 正交矩阵和Gram-Schmidt正交化
- 【线性代数】最小二乘与投影矩阵
- 华为工程师，带你实战C++
- 【线性代数】正交投影