张量是一个多义词，请在下列义项上选择浏览（共3个义项）

- 物理中力学名称
- 黑洞投资创始人、富力地产董事长张力之子
- 无锡市滨湖区华庄街道周潭社区党总支委员

张量（物理中力学名称）

锁定

本词条由“科普中国”百科科学词条编写与应用工作项目 审核 。

张量（tensor）理论是数学的一个分支学科，在力学中有重要应用。张量这一术语起源于力学，它最初是用来表示弹性介质中各点应力状态的，后来张量理论发展成为力学和物理学的一个有力的数学工具。张量之所以重要，在于它可以满足一切物理定律必须与坐标系的选择无关的特性。张量概念是矢量概念的推广，矢量是一阶张量。张量是一个可用来表示在一些矢量、标量和其他张量之间的线性关系的多线性函数。

中文名	张量	提出时间	1846年
外文名	Tensor	应用学科	力学，数学
提出者	威廉·罗恩·哈密顿	适用领域范围	连续介质力学

目录

物理名称

张量（Tensor）是一个定义在的一些向量空间和一些对偶空间的笛卡儿积上的多重线性映射，其坐标是|n|维空间内，有|n|个分量的一种量， 其中每个分量都是坐标的函数， 而在坐标变换时，这些分量也依照某些规则作线性变换。r 称为该张量的秩或阶（与矩阵的秩和阶均无关系）。

在同构的意义下，第零阶张量 （r = 0） 为标量 （Scalar），第一阶张量 （r = 1） 为向量 （Vector）， 第二阶张量 （r = 2） 则成为矩阵 （Matrix）。例如，对于3维空间，r=1时的张量为此向量：（x,y,z）。由于变换方式的不同，张量分成协变张量 （Covariant Tensor，指标在下者）、逆变张量 （Contravariant Tensor，指标在上者）、 混合张量 （指标在上和指标在下两者都有） 三类。

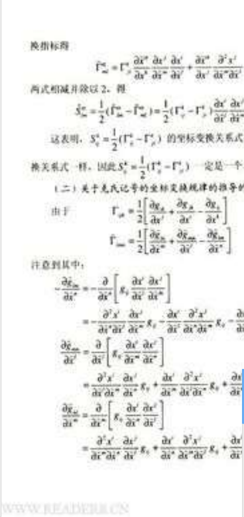
在数学里，张量是一种几何实体，或者说广义上的“数量”。张量概念包括标量、向量和线性算子。张量可以用坐标系统来表达，记作标量的数组，但它是定义为“不依赖于参照系的选择的”。张量在物理和工程学中很重要。例如在扩散张量成像中，表达器官对于水的在各个方向的微分透性的张量可以用来产生大脑的扫描图。可能最重要的工程上的例子就是应力张量和应变张量了，它们都是二阶张量，对于一般线性材料他们之间的关系由一个四阶弹性张量来决定。

虽然张量可以用分量的多维数组来表示，张量理论存在的意义在于进一步说明把一个数量称为张量的涵义，而不仅仅是说它需要一定数量的有指标索引的分量。特别是，在坐标转换时，张量的分量值遵守一定的变换法则。张量的抽象理论是线性代数分支，现在叫做多重线性代数。

背景知识

“张量”一词最初由威廉·罗恩·哈密顿在1846年引入，但他把这个词用于指代现在称为模的对象。该词的现代意义是沃尔德马尔·福格特在1899年开始使用的。

这个概念由格雷戈里奥·里奇-库尔巴斯特罗在1890年在《绝对微分几何》的标题下发展出来，随着1900年列维-奇维塔的经典文章《绝对微分》（意大利文，随后出版了其他译本）的出版而为许多数学家所知。随着1915年左右爱因斯坦的广义相对论的引入，张量微积分获得了更广泛的承认。广义相对论完全由张量语言表述，爱因斯坦从列维-奇维塔本人那里学了很多张量语言（其实是Marcel Grossman,他是爱因斯坦在苏黎世联邦理工学院的同学，一个几何学家，也是爱因斯坦在张量语言方面的良师益友 - 参看Abraham Pais所著《上帝是微妙的（Subtle is the Lord）》），并学得很艰苦。但张量也用于其它领域，例如连续力学，譬如应变张量（参看线性弹性）。



张量图册

注意“张量”一词经常用作张量场的简写，而张量场是对流形的每一点给定一个张量值。要更好的理解张量场，必须首先理解张量的基本思想。

规定

1.求和约定

指在给定的项中凡有一上和一下两个相同的指标就表示对该指标从1到空间维数*N*求和。例如，在三维空间中，$a_i x^i = a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3$

2.张量指标

包括哑指标和自由指标。哑指标是指各项中一上和一下成对的相同指标。例如，上式中的指标*i*就是哑指标。自由指标是指在方程的所有项中只出现一次的指标。[1]

定义

有两种定义张量的方法：

1. 按变换规律定义

若一坐标系 $\left\{x^i\right\}$ 中 N^{r+s} 个量 $T^{i1\cdots ir}_{j1\cdots js}$ 与另一坐标系 $\left\{x^{i'}\right\}$ 中 N^{r+s} 个量 $T^{i1'\cdots ir'}_{j1'\cdots js'}$ 间满足交换规律

$$T^{i1'\cdots ir'}_{j1'\cdots js'} = \frac{\partial x^{i1'}}{\partial x^{i1}} \cdots \frac{\partial x^{ir'}}{\partial x^{ir}} \frac{\partial x^{j1'}}{\partial x^{j1}} \cdots \frac{\partial x^{js'}}{\partial x^{js}} T^{i1\cdots ir}_{j1\cdots js}$$

则 $T^{i1\cdots ir}_{j1\cdots js}$ 称为*r*阶逆变和*s*阶协变混合张量的分量。若*s*=0，则 $T^{i1\cdots ir}$ 称为*r*阶逆变张量的分量。若*r*=0，则 $T_{j1\cdots js}$ 称为*s*阶协变张量的分量。上述这种张量记法称为分量记法。

2.按不变性定义

凡可以在任何坐标系中写成下列不变性形式的量定义为*r*+*s*阶张量：

$$T = T^{i1\cdots ir}_{j1\cdots js} g_{i1} \cdots g_{ir} g^{j1} \cdots g^{js} = T^{i1'\cdots ir'}_{j1'\cdots js'} g_{i1'} \cdots g_{ir'} g^{j1'} \cdots g^{js'}$$

式中 $g_i\left(g^j\right)$ 和 $g_{i'}\left(g^{j'}\right)$ 分别为坐标系 $\left\{x^i\right\}$ 和 $\left\{x^{i'}\right\}$ 中的协（逆）变基矢量。上述这种张量记法称为不变性记法或并矢记法。[1]

基本运算

1． 加减法

两个或多个同阶同型张量之和（差）仍是与它们同阶同型的张量。

2． 并积

两个张量的并积是一个阶数等于原来两个张量阶数之和的新张量。

3． 缩并

使张量的一个上标和一个下标相同的运算，其结果是一个比原来张量低二阶的新张量。

4． 点积

两个张量之间并积和缩并的联合运算。例如，在极分解定理中，三个二阶张量*R*、*U*和*V*中一次点积*R*·*U*和*V*·*R*的结果是二阶张量*F*。

5． 对称化和反称化

对已给张量的*n*个指标进行*n*1不同置换并取所得的*n*1个新张量的算术平均值的运算称为对称化。把指标经过奇次置换的新张量取反符号后再求算术平均值的运算称为反称化。

6． 加法分解

任意二阶张量可以唯一地分解为对称部分和反称部分之和。例如，速度梯度 L_{ij} 可以分解为 $L_{ij} = D_{ij} + W_{ij}$，其中 D_{ij} 和 W_{ij} 分别为 L_{ij} 的对称和反称部分，即 $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(L_{ij} + L_{ji}\right)$ 和 $W_{ij} = \frac{1}{2}\left(L_{ij} - L_{ji}\right)$。

1． 商法则

肯定某些量的张量性的法则。[1]

特殊张量

特殊张量主要有四种：

①度量张量 两个基矢量点积的结果。$g_{ij}=g_i \bullet g_j$ 和 $g^{ij}=g^i \bullet g^j$ 分别称为协变和逆变度量张量，而混合度量张量 $g_j^i=g^i \bullet g_j=\delta_j^i$，这里 δ_j^i（或写为 δ_{ij}）为克罗内克符号，它定义为：$\delta_j^i=1\,(i=j),0\,(i \neq j)$

②交错张量或爱丁顿张量 可定义为 $e_{ijk}=\sqrt{g}e_{ijk},\varepsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}$，这里 $\sqrt{g}=|g_{mn}|$ 表示元素 g_{mn} 为行列式，而置换符号 $e_{ijk}\left(e^{ijk}\right)$ 表示 $e_{ijk}\left(e^{ijk}\right)=1$（$(i,j,k)$ 是(1,2,3)的偶次置换），-1（(i,j,k) 是(1,2,3)的奇次置换），0（其余情形）

③转置张量 对任意二阶张量 $L=L_{ij}g^ig^j$ 的分量指标置换的结果，记为 $L^T=L_{ji}g^ig^j$。

④正交张量 保持映象长度不变的二阶张量。

克里斯机费尔符号 第一类和第二类克里斯托费尔符号分别定义为：$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ 和 $\begin{pmatrix} l \\ ij \end{pmatrix}=g^{ik}[ij,k]$。[1]

协变导数与算符

1.协变导数

协变矢量 T_i 和逆变矢量 T^i 关于 x^j 的协变导数分别定义为：$T_{i;j}=\frac{\partial T_i}{\partial x^j}-\begin{pmatrix} l \\ ij \end{pmatrix}T_i$ 和 $T_{ij}^i=\frac{\partial T^i}{\partial x^j}-\begin{pmatrix} i \\ jl \end{pmatrix}T^b$。上列结果可以推广到高阶张量的协变导数。

2.不变性微分算符

推广矢量分析概念，对于任意张量场*T*有四种不变性微分算符，即梯度▽*T*，散度▽·*T*，旋度▽×*T*和拉普拉斯算符▽ ^{2} *T*。

在直角坐标系下，协变和逆变间的差别消失，故可规定所有指标均写成下标，另外，由于克里斯托费尔符号为零，所以协变导数变成为普通偏导数。[1]

例子

张量可以表述为一个值的序列，用一个向量值的定义域和一个标量值的值域的函数表示。这些定义域中的向量是自然数的向量，而这些数字称为指标。例如，3阶张量可以有尺寸2、5和7。这里，指标的范围是从<1,1,1,>到<2,5,7>。张量可以在指标为<1,1,1>有一个值，在指标为<1,1,2>有另一个值，等等一共70个值。（类似的，向量可以表示为一个值的序列，用一个标量值的定义域和一个标量值的值域的函数表示，定义域中的数字是自然数，称为指标，不同的指标的个数有时称为向量的维度。）

一个张量场是在欧几里得空间中的每一点都给定一个张量值。这样不是像上面的例子中简单的有70个值，对于一个3阶张量，维度为<2,5,7>，空间中的每一个点有70个值和它相关。换句话说，张量场表示某个张量值的函数，其定义域为欧几里得空间。不是所有的函数都行 -- 更多关于这些要求的细节参看张量场。

不是所有自然中的关系都是线性的，但是很多是可微的因而可以局部的用多线性映射来局部的逼近。这样多数物理学中的量都可以用张量表示。

作为一个简单的例子，考虑水中的船。我们要描述它对受力的反应。力是一个向量，而船的反应是一个加速度，它也是一个向量。通常加速度不是和受力的方向相同，因为船体的特定形状。但是，这个力和加速之间的关系实际上是线性的。这样一个关系可以用一个（1,1）类型（也就是说，它把一个向量变成另一个向量）的张量表示。这个张量可以用矩阵表示，当它乘以一个向量时就得到另一个作为结果。坐标系改变的时候，表示一个向量的数字会改变，同样，表示这个张量的矩阵中的数字也会改变。

工程上，刚体或流体内的应力也用一个张量表示；"张量"一词的拉丁语就表示引起张力的某种拉伸。如果材料内的一个特定的表面元素被选出来，在表面一侧的材料会对另一侧的施加一个力。通常，该力不和表面正交，但是它将线性的依赖于表面的朝向。这可以精确用（2,0）类型的张量精确的描述，或者更精确地说，是用一个类型为（2,0）的张量*场*来表示，因为张量可能在每一个不同。

另外一些著名的几何中张量的例子有二次型，以及曲率张量。物理张量的例子有能动张量，惯量和极化张量。

几何和物理的量可以通过考虑它们的表述内在的自由度来分类。标量是那些可以用一个数表示的 --- 速率,质量,温度,等等。有一些向量类型的量，例如力，它需要一个数字的列表来表述。最后，象二次型这样的量需要用多维数组来表示。后面这些量只能视为张量。

实际上，张量的概念相当广泛，可以用于上面所有的例子；标量和向量是张量的特殊情况。区别标量和向量以及区别这两者和更一般的张量的特征是表示它们的数组的指标的个数。这个数称为张量的阶。这样，标量是0阶张量（不需要任何指标），而向量是一阶张量。

张量的另外一个例子是广义相对论中的黎曼曲率张量，它是维度为<4,4,4,4>（3个空间维度 + 时间维度 = 4个维度）的4阶张量。它可以当作256个分量（256 = 4 × 4 × 4 × 4）的矩阵（或者向量，其实是个4维数组）。只有20个分量是互相独立的，这个事实可以大大简化它的实际表达。

张量密度

张量场也可有一个“密度”。密度为 r 的张量和普通张量一样坐标变换，但是它还要乘以雅可比矩阵的行列式值的第 r 次幂。这个的最佳解释可能是使用向量丛：其中，切丛的行列式丛是一个线丛，可以用来'扭转'其它丛 r 次。

张量相关

1.张量的理论来源。

亚瑟·凯莱(Arthur Cayley)着力研究的不变量理论(invariant theory)导致了矩阵理论的建立，引进了现代意义上的行列式的代数表达,这成为射影几何的重要工具。凯莱的不变量理论产生于19世纪前半叶的英国着重对代数及代数在几何方面的应用研究这样的背景下。矩阵理论对线性变换的研究引进了向量的代数定义，而这是张量概念的先导。

另一方面,格奥尔格·弗雷德里希·波恩哈德·黎曼(Georg Friedrich Bernhard Riemann)提出的n维流形的概念，这在客观上提出了深入研究代数形式的课题。黎曼的几何思想在拓展几何学的同时,提高了代数在表达几何对象方面的抽象程度。黎曼之后，在克里斯托弗、里奇和列维-契维塔等人的努力下,形成了张量分析这样的数学方法，黎曼几何学也因此而建立起来了。

2.张量的定义、性质与应用价值

从代数角度讲， 它是向量的推广。我们知道，向量可以看成一维的“表格”（即分量按照顺序排成一排），矩阵是二维的“表格”（分量按照纵横位置排列）， 那么n阶张量就是所谓的n维的“表格”。张量的严格定义是利用线性映射来描述的。与矢量相类似，定义由若干坐标系改变时满足一定坐标转化关系的有序数组成的集合为张量。

从几何角度讲， 它是一个真正的几何量，也就是说，它是一个不随参照系的坐标变换而变化的东西。向量也具有这种特性。

标量可以看作是0阶张量，矢量可以看作1阶张量。张量中有许多特殊的形式， 比如对称张量、反对称张量等等。

有时候，人们直接在一个坐标系下，由若干个数（称为分量）来表示张量，而在不同坐标系下的分量之间应满足一定的变换规则（参见协变规律，反变规律），如矩阵、多变量线性形式等都满足这些规律。一些物理量如弹性体的应力、应变以及运动物体的能量、动量等都需用张量来表示。在微分几何的发展中，C.F.高斯、B.黎曼、E.B.克里斯托费尔等人在19世纪就导入了张量的概念，随后由G.里奇及其学生T.列维齐维塔发展成张量分析，A.爱因斯坦在其广义相对论中广泛地利用了张量。

黎曼几何作为非欧几何的一种,它与罗巴切夫斯基几何相比，有着实质性的不同。罗氏几何主要工作是建立了一整套区别于欧几里得的《几何原本》的逻辑体系； 而黎曼几何的核心问题是以微分几何为基础,建立曲线坐标系中的微分方法。罗氏几何是第一个被提出的非欧几何学，它的基本观点是： 第一,第五公设不能被证明; 第二，可以在新的公理体系中展开一连串推理,得到一系列在逻辑上无矛盾的新的定理，形成新的理论。罗氏几何学的公理系统区别于欧式几何学之处,仅仅是把欧式几何平行公理改为: 从直线外一点，至少可以做两条直线和这条直线平行。黎曼几何与罗氏几何的平行公理相反： 过直线外一点,不能做直线和已知直线平行。也就是说，黎曼几何规定: 在同一平面内任何两条直线都有公共点,黎曼几何学不承认存在平行线。很自然就有另一条公设： 直线可以延长至任意长度，但长度是有限的,这可以类比为一个球面。黎曼几何是通过微分几何的途径建立起来的，因此与罗氏几何根本不同。

黎曼几何学的公理体系引进了一种弯曲的几何空间(它可以通过拉梅引进的曲线坐标系描述),黎曼在构想这种几何学的时候，就想设法建立起相应的代数结构。这个目标黎曼本人没有实现,但沿着他开辟的道路，克里斯托夫和里奇完成了新几何学的构建。换句话说,张量分析构成了黎曼几何学的核心内容。这表现在若干方面: 1.黎曼空间中的曲率是一个张量，其有关运算需采用绝对微分法； 2. 黎曼空间的度量以度量张量表达; 3. 黎曼空间的平行定义为标积保持不变(即与曲线的夹角保持不变),依赖克里斯托夫符号； 4. 黎曼空间的直线(短程线)方程的建立依赖协变微分。正因为有了张量分析这个工具，黎曼几何才获得了类似于微积分一样的计算功能,从而摆脱了停留在逻辑构造层面上的束缚，从根本上与微分几何实现了传承,并实现了微分几何从直线坐标系到曲线坐标系的进步，使得几何学与代数学更紧密地联系起来。

要而言之,张量分析的产生一方面是向量分析的推广，另一方面是微分几何的发展推动。张量分析与黎曼几何在相互交织中发展,互相促进。

参考资料

1. 词条作者：戴天民，《中国大百科全书》74卷（第一版）力学 词条：张量：中国大百科全书出版社，1985：574页