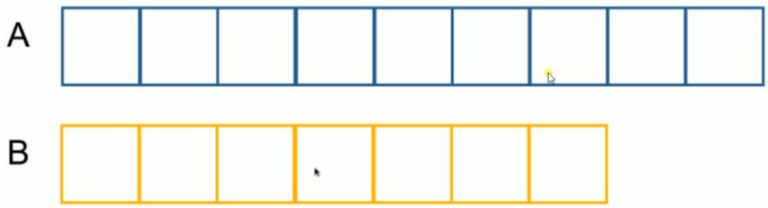
双序列型动态规划

- 顾名思义，有两个序列/字符串，需要进行一些操作
- 每个序列本身是一维的
- 可以转化为二维动态规划

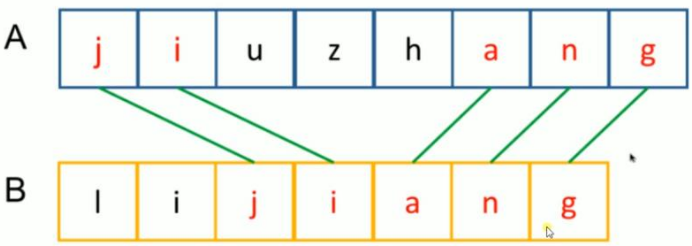


LintCode 77 Longest Common Subsequence

- 题意：
- 给定两个字符串A，B
- 一个字符串的子串是这个字符串去掉某些字符（可能0个）之后剩下的字符串
- 找到两个字符串的最长公共子串的长度
- 例子：
- 输入：A="jiuzhang", B="lijiang"
- 输出：5（最长公共子串是jiang）

题目分析

- 公共子串一定是对应的字符按顺序都相等
- 找到最长的对应对子，且对子连线不能相交



动态规划组成部分一：确定状态

- 设A长度是m, B长度是n
- 现在我们考虑最优策略产生出的最长公共子串（虽然还不知道是什么）
- 最后一步：观察A[m-1]和B[n-1]这两个字符是否作为一个对子在最优策略中

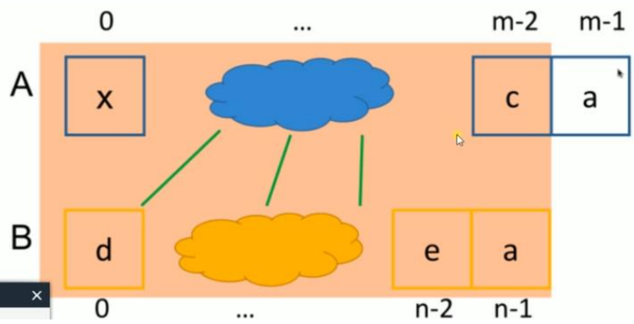
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是L→选定了L个对应的对子

最长公共子串

情况一：对子中没有A[m-1]

推论：A和B的最长公共子串就是A前m-1个字符和B前n个字符的最长公共子串



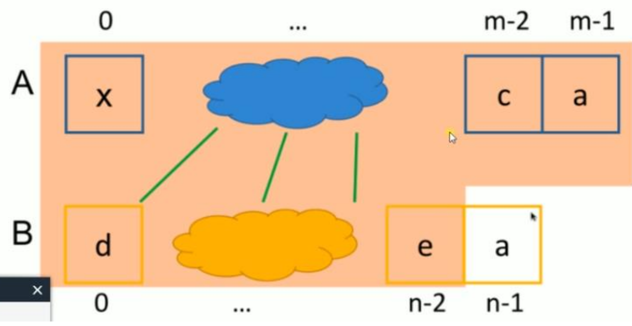
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是L→选定了L个对应的对子

最长公共子串

情况二：对子中没有B[n-1]

推论：A和B的最长公共子串就是A前m个字符和B前n-1个字符的最长公共子串



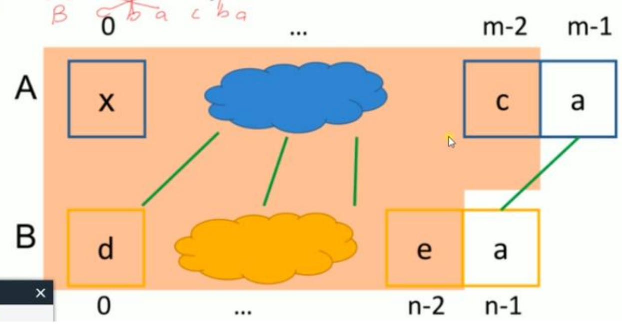
动态规划组成部分一：确定状态

- 最长公共子串也是公共子串：长度是L→选定了L个对应的对子

最长公共子串

情况三：对子中有A[m-1]-B[n-1]

推论：A和B的最长公共子串就是A前m-1个字符和B前n-1个字符的最长公共子串+A[m-1]



子问题

- 要求A[0..m-1]和B[0..n-2]的最长公共子串，A[0..m-2]和B[0..n-1]的最长公共子串和A[0..m-2]和B[0..n-2]的最长公共子串

- 原来是求A[0..m-1]和B[0..n-1]的最长公共子串

- 子问题

f[i][j]

- 状态：设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符[0..j-1]的最长公共子串的长度

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符[0..j-1]的最长公共子串的长度

- 要求f[m][n]

0~n-1 0~n-1

已知 f[i][j] A i j

i: 0~m

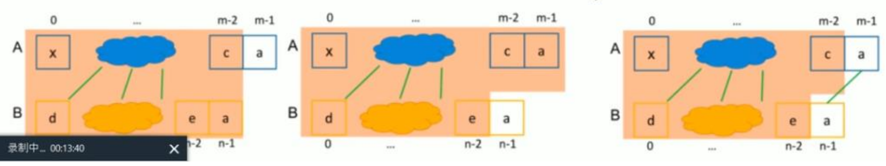
j: 0~n

f[i][j] = max{f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1]+1|A[i-1]=B[j-1]}

情况一：A[0..i-2]和B[0..j-1]的最长公共子串

情况二：A[0..i-1]和B[0..j-2]的最长公共子串

情况三：A[0..i-2]和B[0..j-2]的最长公共子串+A[i-1]



ynamic Programming on Double Sequence

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

九章算法

- f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符[0..j-1]的最长公共子串的长度
- 转移方程：f[i][j] = max{f[i-1][j], f[i][j-1], f[i-1][j-1]+1|A[i-1]=B[j-1]}
- 初始条件：空串和任何串的最长公共子串长度是0
  - f[0][j] = 0, j=0..n
  - f[i][0] = 0, i=0..m

动态规划组成部分四：计算顺序

九章算法

- f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]
- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]
- …
- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]
- 答案是f[m][n]
- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)

计算顺序是由转移方程决定的。

LintCode 29 Interleaving String

九章算法

- 题意：
- 给定三个字符串A, B, X
- 判断X是否是由A, B交错在一起形成
  - 即A是X的子序列，去掉A后，剩下的字符组成B
- 例子：
- 输入：A=“aabcc” B=“dbbac”, X=“aadbbcbcac”
- 输出：True（X=“aadbbcbcac”）

动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

- 首先，如果X的长度不等于A的长度+B的长度，直接输出False
- 设A长度是m, B长度是n，X的长度是m+n
- 最后一步：假设X是由A和B交错形成的，那么X的最后一个字符X[m+n-1]
  - 要么是A[m-1]　　X = ABAAABBBA
    - 那么X[0..m+n-2]是由A[0..m-2]和B[0..n-1]交错形成的
  - 要么是B[n-1]
    - 那么X[0..m+n-2]是由A[0..m-1]和B[0..n-2]交错形成的

子问题

九章算法

- 要求X[0..m+n-1]是否由A[0..m-1]和B[0..n-1]交错形成
- 需要知道X[0..m+n-2]是否由A[0..m-2]和B[0..n-1]交错形成，以及X[0..m+n-2]是否由A[0..m-1]和B[0..n-2]交错形成
- 子问题
- 状态：设f[s][i][j]为X前s个字符是否由A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]交错形成
- 但是s=i+j，所以可以简化为：设f[i][j]为X前i+j个字符是否由A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]交错形成

动态规划组成部分二：转移方程

九章算法

- 设f[i][j]为X前i+j个字符是否由A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]交错形成

f[i][j] = (f[i-1][j] AND X[i+j-1]==A[i-1]) OR (f[i][j-1] AND X[i+j-1]==B[j-1])

f[i][j]	f[i-1][j] AND X[i+j-1]==A[i-1]	f[i][j-1] AND X[i+j-1]==B[j-1]
X前i+j个字符是否由A前i个字符和B前j个字符交错形成	情况一：X前i+j-1个字符由A前i-1个字符和B前j个字符交错形成，X第i+j个字符等于A第i个字符	情况二：X前i+j-1个字符由A前i个字符和B前j-1个字符交错形成，X第i+j个字符等于B第j个字符

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

九章算法

- 设f[i][j]为X前i+j个字符是否由A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]交错形成

- 转移方程
  - f[i][j] = (f[i-1][j] AND X[i+j-1]==A[i-1]) OR (f[i][j-1] AND X[i+j-1]==B[j-1])

- 初始条件：空串由A的空串和B的空串交错形成→f[0][0] = True

- 边界情况：如果i=0，不考虑情况一；如果j=0，不考虑情况二

动态规划组成部分四：计算顺序

九章算法

- f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]

- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]

- …

- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]

- 答案是f[m][n]

- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)，可以用滚动数组优化空间至O(N)

LintCode 119 Edit Distance

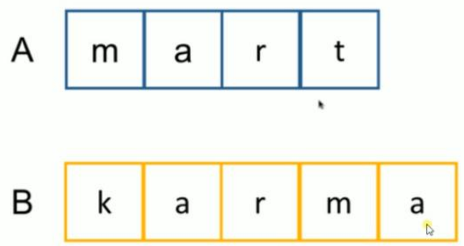
九章算法

- 题意：
- 给定两个字符串A，B
- 要求把A变成B，每次可以进行下面一种操作：
  - 增加一个字符
  - 去掉一个字符
  - 替换一个字符
- 最少需要多少次操作，即*最小编辑距离*

- 例子：
- 输入：A="mart", B="karma"
- 输出：3 (m换成k，t换成m，加上a)

题目分析

- 可以进行的操作很多，直接下手比较困难



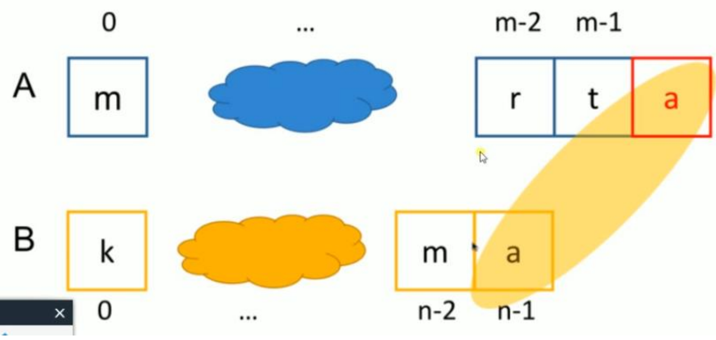
动态规划组成部分一：确定状态

- 设A长度是m, B长度是n
- **全部操作完成后A的长度也是n，并且A[n-1]=B[n-1]**
- 于是最优策略（以及所有合法策略）最终都是让A的最后一个字符变成B的最后一个字符

动态规划组成部分一：确定状态

情况一：A在最后插入B[n-1]

- 要将A[0..m-1]变成B[0..n-2]

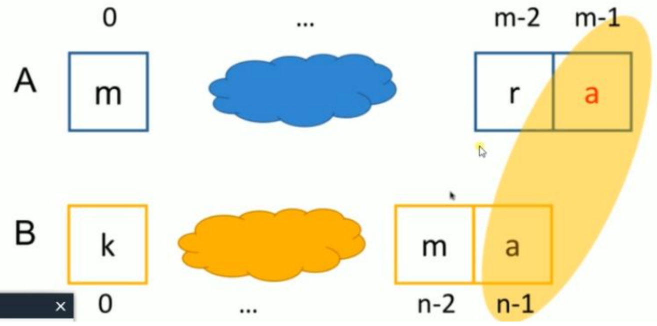


动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

情况二：A最后一个字符替换成B[n-1]

- 要将A[0..m-2]变成B[0..n-2]

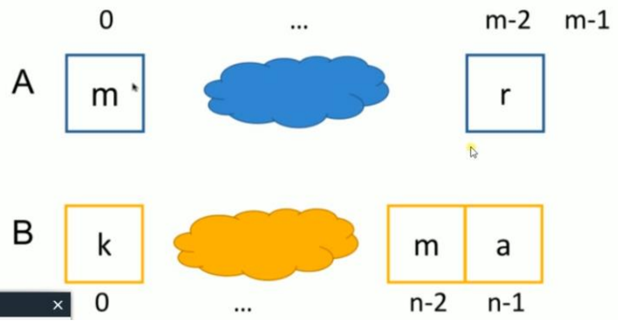


动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

情况三：A删掉最后一个字符

- 要将A[0..m-2]变成B[0..n-1]

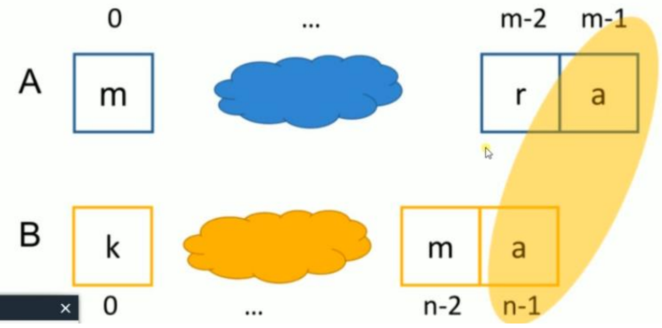


动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

情况四：A和B最后一个字符相等

- 要将A[0..m-2]变成B[0..n-2]



子问题

九章算法

- 要求A[0..m-1]和B[0..n-2]的最小编辑距离，A[0..m-2]和B[0..n-1]的最小编辑距离和A[0..m-2]和B[0..n-2]的最小编辑距离
- 原来是求A[0..m-1]和B[0..n-1]的最小编辑距离
- 子问题
- 状态：设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]的最小编辑距离

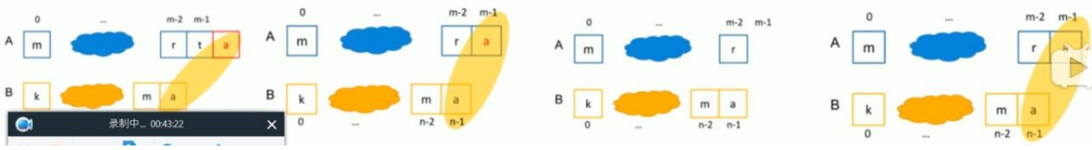
动态规划组成部分二：转移方程

九章算法

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]的最小编辑距离
- 要求f[m][n]

$$f[i][j] = \min\{f[i][j-1]+1,\ f[i-1][j-1]+1,\ f[i-1][j]+1,\ f[i-1][j-1] \mid A[i-1]=B[j-1]\}$$

情况一：A在最后插入B[j-1]	情况二：A最后一个字符替换成B[j-1]	情况三：A删掉最后一个字符	情况四：A和B最后一个字符相等



动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]的最小编辑距离

- 转移方程： f[i][j] = min{f[i][j-1]+1, f[i-1][j-1]+1, f[i-1][j]+1, f[i-1][j-1]|A[i-1]=B[j-1]}

- 初始条件：一个空串和一个长度为L的串的最小编辑距离是L
  - f[0][j] = j (j = 0, 1, 2, …, n)
  - f[i][0] = i (i = 0, 1, 2, …, m)

动态规划组成部分四：计算顺序

- f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]

- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]

- …

- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]

- 答案是f[m][n]

- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)

- 录制中... 00:43:54 优化空间至O(N)

可以用滚动数组优化空间至 O(N)

LintCode 118 Distinct Subsequences

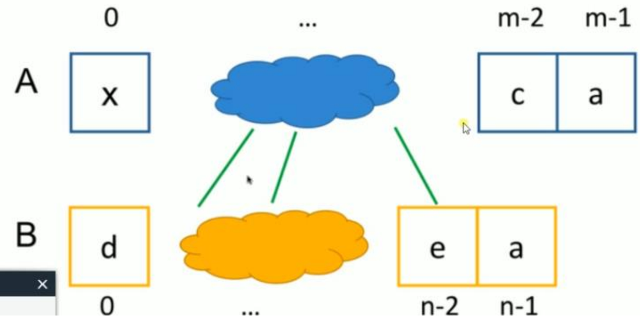
- 题意：
- 给定两个字符串A[0..m-1]，B[0..n-1]
- 问B在A中出现多少次（可以不连续）

- 例子
- 输入：A=“rabbbit”, B=“rabbit”
- 输出：3
  - rabbbit
  - rabbbit
  - rabbbit

题目分析

九章算法

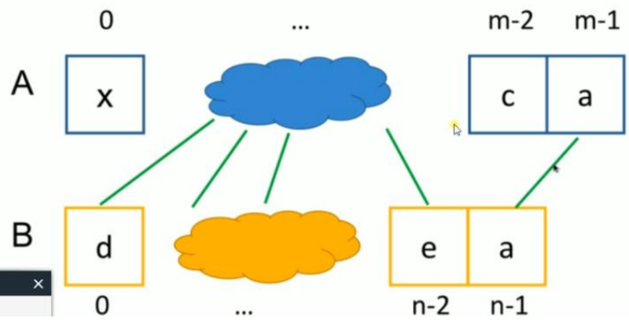
- 双序列型动态规划
- B在A中出现多少次（可以不连续）
- 如果至少出现一次，那么A和B的最长公共子串就是B，而且也不能更长
- 用最长公共子串的思路：对应对子



题目分析

九章算法

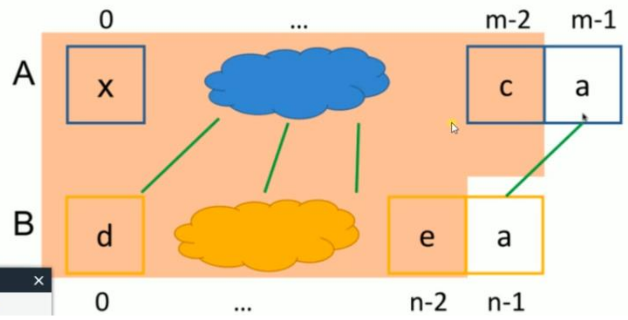
- 但不同的是，B的每一个字符都必须出现在一个对子里
- 所以这题的“最后一步”以B为出发点



动态规划组成部分一：确定状态

情况1：B[n-1] = A[m-1]，结成对子

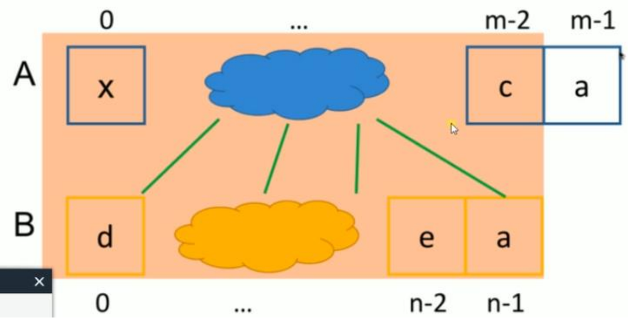
求B[0..n-2]在A[0..m-2]中出现多少次



动态规划组成部分一：确定状态

情况2：B[n-1]不和 A[m-1]结成对子

求B[0..n-1]在A[0..m-2]中出现多少次



子问题

- 要求B[0..n-1]在A[0..m-1]中出现多少次
- 需要知道B[0..n-1]在A[0..m-2]中出现多少次，以及B[0..n-2]在A[0..m-2]中出现多少次
- 子问题
- 状态：设f[i][j]为B前j个字符B[0..j-1]在A前i个字符A[0..i-1]中出现多少次

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为B前j个字符B[0..j-1]在A前i个字符A[0..i-1]中出现多少次
- 要求f[m][n]

f[i][j] = f[i-1][j-1]|A[i-1]=B[j-1] + f[i-1][j]

情况1：B[j-1] = A[i-1]，结成对子

情况2：B[j-1]不和 A[i-1]结成对子

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为B前j个字符B[0..j-1]在A前i个字符A[0..i-1]中出现多少次
- 转移方程：f[i][j] = f[i-1][j-1]|A[i-1]=B[j-1] + f[i-1][j]

f[i][0]=i f[i+1][i] A f[i][i] B

- 初始条件：
  - 如果B是空串，B在A中出现次数是1
  - f[i][0] = 1 (i = 0, 1, 2, …, m)
  - 如果A是空串而B不是空串，B在A中出现次数是0
  - f[0][j] = 0 (j = 1, 2, …, n)

动态规划组成部分四：计算顺序

- 初始化f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]
- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]
- …
- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]
- 答案是f[m][n]
- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)

LintCode 154 Regular Expression Matching

九章算法

- 题意：
- 给定两个字符串A，B
- B是一个正则表达式，里面可能含有‘.’和‘*’
  - ‘.’ 可以匹配任何单个字符
  - ‘*’ 可以匹配0个或多个前一个字符
- 问A和B是否匹配

- 例子：
  - isMatch("aa","a") → false
  - isMatch("aa","aa") → true
  - isMatch("aaa","aa") → false
  - isMatch("aa", "a*") → true
  - isMatch("aa", ".*") → true
  - isMatch("ab", ".*") → true
  - isMatch("aab", "c*a*b") → true

动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

- 双序列型动态规划

- 设A长度是m, B长度是n

- 现在我们考虑A和B如何匹配

- 最后一步：关注最后的字符

- 主要取决于正则表达式B中最后的字符B[n-1]是什么

动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

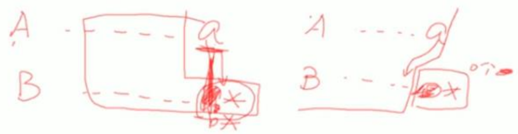
- 如果B[n-1]是一个正常字符（非.非*），则如果A[m-1]=B[n-1]，能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-2]是否匹配；否则不能匹配

- 如果B[n-1]是‘.’，则A[m-1]一定是和‘.’匹配，之后能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-2]是否匹配

- 如果B[n-1]是‘*’，它代表B[n-2]=c可以重复0次或多次，它们是一个整体c*，需要考虑A[m-1]是0个c，还是多个c中的最后一个
  - A[m-1]是0个c，能否匹配取决于A[0..m-1]和B[0..n-3]是否匹配
  - A[m-1]是多个c中的最后一个，能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-1]是否匹配
    - 这种情况必须A[m-1]=c或者c=‘.’

子问题

- 要求A前m个字符和B前n个字符能否匹配，需要知道A前m个字符和B前n-1个字符， A前m-1个字符和B前n个字符以及A前m个字符和B前n-2个字符能否匹配



- 子问题
- 状态：设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配

$$
f[i][j] = \begin{cases} f[i-1][j-1], & \text{如果} B[j-1]=\text{‘.’或者} A[i-1]=B[j-1] \\ f[i][j-2] \text{ OR } (f[i-1][j] \text{ AND } (B[j-2]=\text{‘.’ OR } B[j-2]=A[i-1])), & \text{如果} B[j-1]=\text{‘*’} \end{cases}
$$

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配
- 空串和空正则表达式匹配：f[0][0] = TRUE
- 空的正则表达式不能匹配长度>0的串
  - f[1][0] = … = f[m][0] = FALSE
- 注意：f[0][1..n]也用动态规划计算，但是因为没有A[-1]，所以只能用第二种情况中的f[i][j-2]

动态规划组成部分四：计算顺序

九章算法

- f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]
- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]
- …
- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]
- 答案是f[m][n]
- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)
- 优化空间至O(N)

LintCode 192 Wildcard Matching

九章算法

- 题意：
- 给定两个字符串A，B
- B是一个正则表达式，里面可能含有'?'和'*'
  - '?' 可以匹配任何单个字符
  - '*' 可以匹配0个或多个任意字符
- 问A和B是否匹配
- 例子：
  - isMatch("aa","a") → false
  - isMatch("aa","aa") → true
  - isMatch("aaa","aa") → false
  - isMatch("aa", "*") → true
  - isMatch("aa", "a*") → true
  - isMatch("ab", "?*") → true
  - ", "c*a*b") → false

动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

- 双序列型动态规划
- 和Regular Expression Matching很类似，因为'.'和'?'作用相同，但是这题中'*'可以匹配0个或多个任意字符
- 设A长度是m, B长度是n
- 现在我们考虑A和B如何匹配
- 关注最后的字符
- 主要取决于Wildcard中B[n-1]是什么

动态规划组成部分一：确定状态

- 如果B[n-1]是一个正常字符（非?非*），则如果A[m-1]=B[n-1]，能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-2]是否匹配；否则不能匹配
- 如果B[n-1]是'?'，则A[m-1]一定是和'?'匹配，之后能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-2]是否匹配
- 如果B[n-1]是'*'，它可以匹配0个或任意多个字符，需要考虑A[m-1]有没有被这个*匹配
  - A[m-1]不被'*'匹配，能否匹配取决于A[0..m-1]和B[0..n-2]是否匹配
  - A[m-1]被'*'匹配，能否匹配取决于A[0..m-2]和B[0..n-1]是否匹配

子问题

- 要求A前m个字符和B前n个字符能否匹配，需要知道A前m-1个字符和B前n-1个字符，A前m个字符和B前n-1个字符以及A前m-1个字符和B前n个字符能否匹配
- 子问题
- 状态：设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配

$$f[i][j] = \begin{cases} f[i-1][j-1], & \text{如果} B[j-1]=\text{'?'} \text{或者} A[i-1]=B[j-1] \\ \\ f[i-1][j] \text{ OR } f[i][j-1], & \text{如果} B[j-1]=\text{'*'} \end{cases}$$

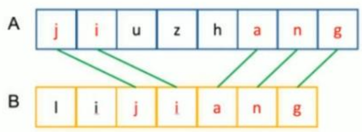
动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为A前i个字符A[0..i-1]和B前j个字符B[0..j-1]能否匹配
- 空串和空Wildcard匹配：f[0][0] = TRUE
- 空的Wildcard不能匹配长度>0的串
  - f[1][0] = … = f[m][0] = FALSE
- f[0][1..n]也用动态规划计算，但是因为没有A[-1]，所以只能用第二种情况中的f[i][j-1]

动态规划组成部分四：计算顺序

- f[0][0], f[0][1], …, f[0][n]
- f[1][0], f[1][1], …, f[1][n]
- …
- f[m][0], f[m][1], …, f[m][n]
- 答案是f[m][n]
- 时间复杂度（计算步数）O(MN)，空间复杂度（数组大小）O(MN)
- 优化空间至O(N)

双序列型动态规划总结



- 两个一维序列/字符串
- 突破口
  - 串A和串B的最后一个字符是否匹配
  - 是否需要串A/串B的最后一个字符
  - 缩减问题规模
- 数组下标表示序列A前i个，序列B前j个: f[i][j]
- 初始条件和边界情况
  - 空串如何处理
  - 计数型(情况1+情况2+…)以及最值型(min/max{情况1，情况2，…})
- 匹配的情况下勿忘+1(操作数多1次，匹配长度多1)

LintCode 668 Ones And Zeroes

九章算法

- 题意：
- 给定T个01串S_1, S_2, …, S_{T-1}
- 现有m个0，n个1
- 问最多能组成多少个给定01串
- 每个串最多组成一次

- 例子：
- 输入：["10", "0001", "111001", "1", "0"], m = 5, n = 3
- 输出：4 (“10”, “0001”, “1”, “0”)

动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

- 最后一步：最优策略组成了最多的01串，其中有没有最后一个字符串S_{T-1}

- 情况1：没有S_{T-1}
  - 需要知道前T-1个01串中，用m个0和n个1最多能组成多少个01串

- 情况2：有S_{T-1}
  - 设第T-1个01串中有a_{T-1}个0，b_{T-1}个1
  - 需要知道前T-1个01串中，用m-a_{T-1}个0和n-b_{T-1}个1最多能组成多少个01串

- 子问题
- 0和1的个数在变化，如何记录？
  - 直接放入状态
  - 状态：设f[i][j][k]为前i个01串最多能有多少个被j个0和k个1组成

动态规划组成部分二：转移方程

九章算法

- 设f[i][j][k]为前i个01串最多能有多少个被j个0和k个1组成

- 设S_i中有a_i个0，b_i个1

$$f[i][j][k] = \max\{f[i-1][j][k],\ f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}] + 1 \mid j>=a_{i-1} \text{ AND } k>=b_{i-1}\}$$

前i个01串最多能有多少个被j个0和k个1组成

前i-1个01串最多能有多少个被j个0和k个1组成

前i-1个01串最多能有多少个被j-a_{i-1}个0和k-b_{i-1}个1组成，再加上S_{i-1}

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

九章算法

- 设f[i][j][k]为前i个01串最多能有多少个被j个0和k个1组成
- 设S_i中有a_i个0， b_i个1
- $f[i][j][k] = \max\{f[i-1][j][k], f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}] + 1 \mid j>=a_{i-1} \text{ AND } k>=b_{i-1}\}$
- 初始条件：f[0][0~m][0~n] = 0
  - 无论有多少0和1，前0个01串中最多能组成0个
- 边界情况： $f[i-1][j-a_{i-1}][k-b_{i-1}]$ +1必须$j>=a_{i-1}$ AND $k>=b_{i-1}$

动态规划组成部分四：计算顺序

九章算法

- f[0][0][0], f[0][0][1], …, f[0][0][n], f[0][1][0], …, f[0][1][n], …, f[0][m][n]
- f[1][0][0], f[1][0][1], …, f[1][0][n], f[1][1][0], …, f[1][1][n], …, f[1][m][n]
- …
- f[T][0][0], f[T][0][1], …, f[T][0][n], f[T][1][0], …, f[T][1][n], …, f[T][m][n]
- 答案是f[T][m][n]
- 时间复杂度：O(Tmn)， 空间复杂度：O(Tmn)， 可以用滚动数组优化至O(mn)