## 本节大纲

- 背包动态规划
- 区间型动态规划

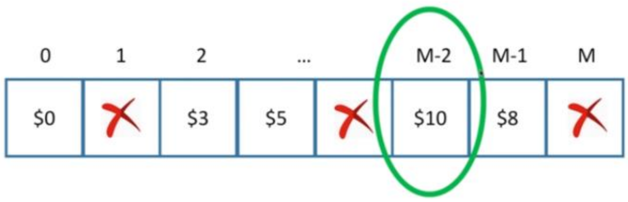
## LintCode 125: Backpack II

- 题意:
- 给定N个物品，重量分别为正整数$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$，价值分别为正整数$V_0, V_1, \ldots, V_{N-1}$
- 一个背包最大承重是正整数M
- 最多能带走多大价值的物品

- 例子：
- 输入：4个物品，重量为2, 3, 5, 7，价值为1, 5, 2, 4. 背包最大承重是11
- 输出：9 （物品一+物品三，重量3+7=10，价值5+4=9）

## 背包动态规划：如何下手

- 给定N个物品，重量分别为$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$，价值分别为$V_0, V_1, \ldots, V_{N-1}$
- 一个背包最大承重是M
- 每个装物品的方案的总重量都是0到M
- 如果对于每个总重量，我们能知道对应的最大价值是多少，就能知道答案



## 动态规划组成部分一：确定状态



- 和前一题类似，需要知道N个物品
  - 是否能拼出重量W (W =0, 1, …, M)
  - 对于每个重量W，最大总价值是多少

- 最后一步：最后一个物品（重量$A_{N-1}$, 价值$V_{N-1}$）是否进入背包

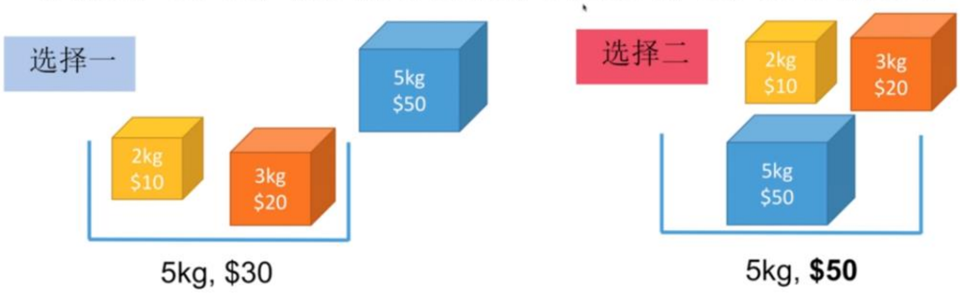
选择一：如果前N-1个物品能拼出W，最大总价值是V，前N个物品也能拼出W并且总价值是V

选择二：如果前N-1个物品能拼出**W- $A_{N-1}$**，最大总价值是V，则再加上最后一个物品(重量$A_{N-1}$, 价值$V_{N-1}$)，能拼出W，总价值是V+$V_{N-1}$


## 动态规划组成部分一：确定状态

九章算法

- 例子：
- 3个物品，重量为2, 3, 5, 价值为10, 20, 50
- 前2个物品可以拼出重量5 (2+3)，最大价值是30 (10+20)，前3个物品也可以拼出重量5，价值**30**
- 前2个物品可以拼出重量0，价值0，加上最后一个物品，可以拼出重量5，价值**50**，50>30，所以所有物品拼出重量5时，最大总价值是50




## 子问题

九章算法

- 要求前N个物品能不能拼出重量0, 1, …, M，以及拼出重量W能获得的最大价值

- 需要知道前N-1个物品能不能拼出重量0, 1, …, M，以及拼出重量W能获得的最大价值

- 子问题

- 状态：设f[i][w] = 用**前i个物品**拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

## 动态规划组成部分三：转移方程

- 设f[i][w] = 用前i个物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

$$f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i-1][w-A_{i-1}] + V_{i-1} \mid w \geq A_{i-1} \text{ 且 } f[i-1][w-A_{i-1}] \neq -1\}$$

| 用前i个物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i-1个物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i-1个物品拼出重量$w-A_{i-1}$时最大总价值，加上第i个物品 |
| --- | --- | --- |

## 动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][w] = 用前i个物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)
- $f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i-1][w-A_{i-1}] + V_{i-1} \mid w \geq A_{i-1} \text{ 且 } f[i-1][w-A_{i-1}] \neq -1\}$
- 初始条件：
  - f[0][0] = 0: 0个物品可以拼出重量0，最大总价值是0
  - f[0][1..M] = -1: 0个物品不能拼出大于0的重量
- 边界情况：
  - $f[i-1][w-A_{i-1}]$只能在**$w \geq A_{i-1}$，并且$f[i-1][w-A_{i-1}] \neq -1$**时使用

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 初始化f[0][0], f[0][1], …, f[0][M]
- 计算前1个物品拼出各种重量的最大价值：f[1][0], f[1][1], …, f[1][M]
- …
- 计算前N个物品拼出各种重量的最大价值：f[N][0], f[N][2], …, f[N][M]
- 答案：$\max_{0<=j<=M}\{f[N][j] \mid f[N][j] \neq -1\}$
- 时间复杂度（计算步数）：O(MN)，空间复杂度（数组大小）：优化后可以达到O(M)

## LintCode 440: Backpack III

- 题意:
- 给定N种物品，重量分别为正整数$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$，价值分别为正整数$V_0, V_1, \ldots, V_{N-1}$
- **每种物品都有无穷多个**
- 一个背包最大承重是正整数M
- 最多能带走多大价值的物品

- 例子：
- 输入：4个物品，重量为2, 3, 5, 7，价值为1, 5, 2, 4. 背包最大承重是10
- 输出：15 （3个物品一，重量3*3=9，价值5*3=15）

## 背包动态规划：如何下手

- 和上一题唯一的不同是：每种物品都有**无穷多个**

- 一个背包最大承重是M

- Backpack II的转移方程

- 设f[i][w] = 用前i个物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

$$f[i][w] = \max\{f[i-1][w], f[i-1][w-A_{i-1}] + V_{i-1}\}$$

用前i个物品拼出重量w时最大总价值

用前i-1个物品拼出重量w时最大总价值

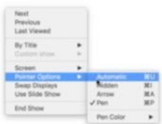
用前i-1个物品拼出重量$w-A_{i-1}$时最大总价值，加上第i个物品

## 动态规划组成部分二：转移方程

- 因为$A_i$有无穷多个，所以可以用0个$A_i$，1个$A_i$，2个$A_i$，…

- Backpack III的转移方程

$O(n^2 m)$




- 设f[i][w] = 用前i种物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

$$f[i][w] = \max_{k>=0}\{f[i-1][w-kA_{i-1}] + kV_{i-1}\}$$

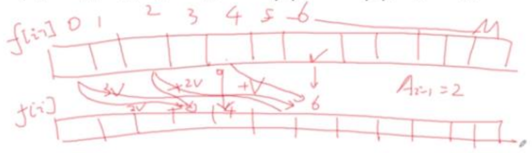
用前i种物品拼出重量w时最大总价值

用前i-1种物品拼出重量$w-kA_{i-1}$时最大总价值，加上k个第i种物品

## Backpack III优化

- 设f[i][w] = 用前i种物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

$$f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i-1][w-A_{i-1}] + V_{i-1},\ f[i-1][w-2A_{i-1}] + 2V_{i-1}, \ldots\}$$




$f[i][4] = \max(A, B+V, C+2V)$

$f[i][6] = \max(D, A+V, \underbrace{B+2V, C+3V}_{\max = f[i][4]+V})$

## Backpack III优化

- 设f[i][w] = 用前i种物品拼出重量w时最大总价值 (-1表示不能拼出w)

$$f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i-1][w-A_{i-1}] + V_{i-1},\ f[i-1][w-2A_{i-1}] + 2V_{i-1}, \ldots\}$$

| | | |
|---|---|---|
| 用前i种物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i-1种物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i-1种物品拼出重量$w-A_{i-1}$时最大总价值，加上第i个物品 |

★ $$f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i][w-A_{i-1}] + V_{i-1}\}$$

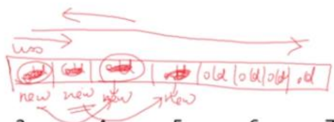
| | | |
|---|---|---|
| 用前i种物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i-1种物品拼出重量w时最大总价值 | 用前i种物品拼出重量$w-A_{i-1}$时最大总价值，加上第i个物品 |

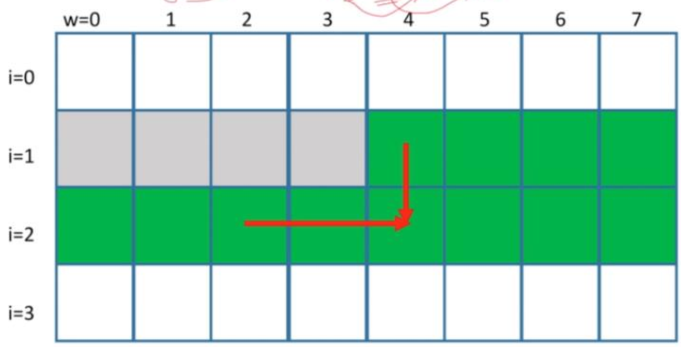
## 动态规划组成部分四：计算顺序

- $f[i][w] = \max\{f[i-1][w],\ f[i][w-A_{i-1}] + V_{i-1}\}$

老 新 f[i-1]

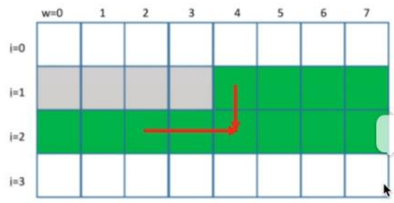
- 实际编程中可以进一步优化



## 小结

- Backpack **可行性**背包
  - 题面：要求不超过Target时能拼出的最大重量
  - 记录f[i][w]=前i个物品能不能拼出重量w
- Backpack V, Backpack VI, **计数型**背包
  - 题面：要求有多少种方式拼出重量Target
  - 记录f[i][w]=前i个物品有多少种方式拼出重量w
- Backpack II, Backpack III, **最值型**背包
  - 题面：要求能拼出的最大价值
  - 记录f[i][w]=前i个/种物品拼出重量w能得到的最大价值
- 关键点
  - **最后一步**
    - 最后一个背包内的物品是哪个
    - 最后一个物品有没有进背包
  - 数组大小和最大承重Target有关
- 空间优化


## 区间型动态规划

- 给定一个序列/字符串，进行一些操作
- 最后一步会将序列/字符串去头/去尾
- 剩下的会是一个区间[i, j]
- 状态自然定义为f[i][j]，表示面对子序列[i, …, j]时的最优性质

# 区间型动态规划


## 区间型动态规划

- 给定一个序列/字符串，进行一些操作
- 最后一步会将序列/字符串去头/去尾
- 剩下的会是一个区间[i, j]
- 状态自然定义为f[i][j]，表示面对子序列[i, …, j]时的最优性质

## LintCode 667 Longest Palindromic Subsequence

- 题意：
- 给定一个字符串S，长度是N
- 找到它最长的回文子序列的长度

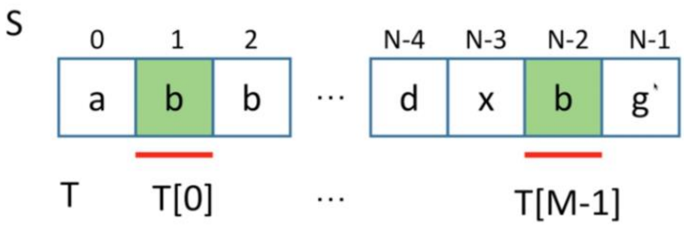
- 例子：
- 输入：
  - “bbbab”
- 输出：
  - 4 (“bbbb”)

## 动态规划组成部分一：确定状态

- 最优策略产生最长的回文子串T，长度是M

- 情况1：回文串长度是1，即一个字母

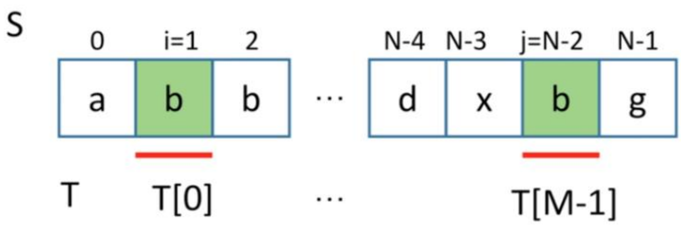
- 情况2：回文串长度大于1，那么必定有T[0]=T[M-1]




## 动态规划组成部分一：确定状态

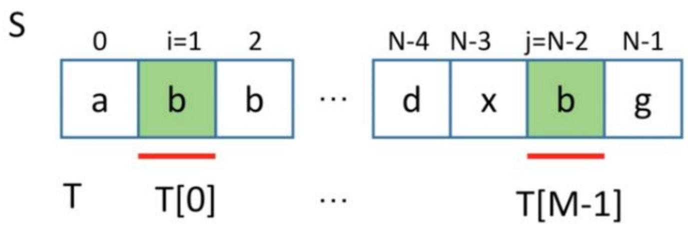
- 设T[0]是S[i], T[M-1]是S[j]

- T剩下的部分T[1..M-2]仍然是一个回文串，而且是S[i+1..j-1]的**最长回文子串**



## 子问题

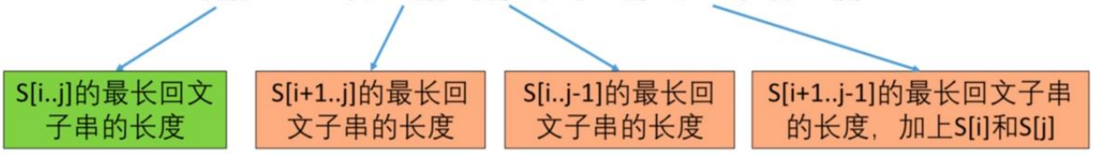
- 要求S[i..j]的最长回文子串
- 如果S[i]=S[j]，需要知道S[i+1..j-1]的最长回文子串
- 否则答案是S[i+1..j]的最长回文子串或S[i..j-1]的最长回文子串
- 子问题
- 状态：设f[i][j]为S[i..j]的最长回文子串的长度




## 动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为S[i..j]的最长回文子串的长度

f[i][j] = max{f[i+1][j], f[i][j-1], f[i+1][j-1] + 2|S[i]=S[j]}



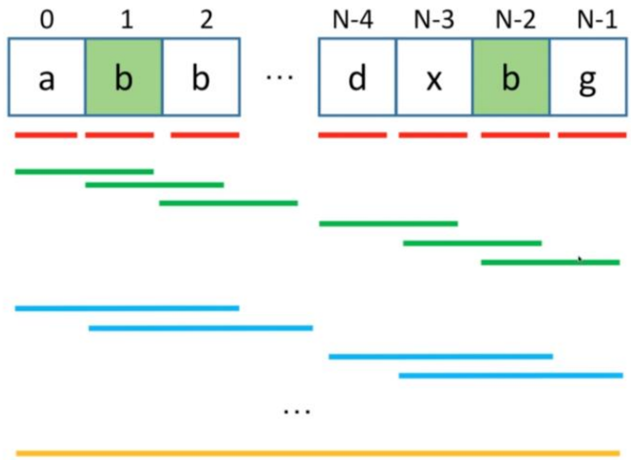

## 动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为S[i..j]的最长回文子串的长度
- f[i][j] = max{f[i+1][j], f[i][j-1], f[i+1][j-1] + 2|S[i]=S[j]}
- 初始条件
  - f[0][0] = f[1][1] = … = f[N-1][N-1] = 1
    - 一个字母也是一个长度为1的回文串
  - 如果S[i] == S[i+1], f[i][i+1] = 2
  - 如果S[i] != S[i+1], f[i][i+1] = 1

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 设f[i][j]为S[i..j]的最长回文子串的长度
- f[i][j] = max{f[i+1][j], f[i][j-1], f[i+1][j-1] + 2|S[i]=S[j]}
- 不能按照i的顺序去算
- 区间动态规划：**按照长度j-i从小到大的顺序去算**

## 动态规划组成部分四：计算顺序



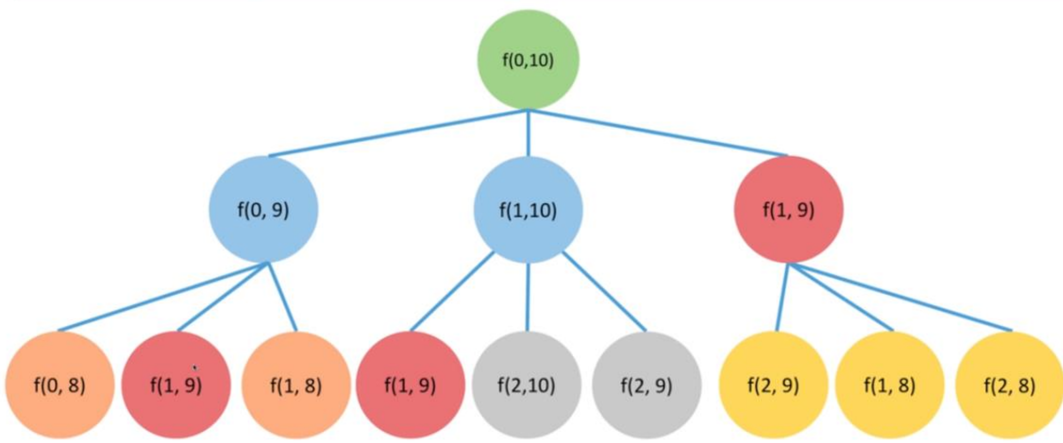

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 长度1：f[0][0], f[1][1], f[2][2], …, f[N-1][N-1]
- 长度2： f[0][1], …, f[N-2][N-1]
- …
- 长度N： f[0][N-1]
- 答案是f[0][N-1]
- 时间复杂度O($N^2$)，空间复杂度O($N^2$)


## 记忆化搜索方法

- 动态规划编程的另一个选择
- f[i][j] = max{f[i+1][j], f[i][j-1], f[i+1][j-1] + 2|S[i]=S[j]}
- 计算f(0, N-1)
- 递归计算f(1, N-1), f(0, N-2), f(1, N-2)
- **记忆化:** 计算f(i, j)结束后，将结果保存在数组f[i][j]里，下次如果需要再次计算f(i, j)，直接返回f[i][j]

## 记忆化搜索方法



## 与递推方法比较

九章算法

- 递推方法自下而上：f[0], f[1], …, f[N]
- 记忆化方法自上而下：f(N), f(N-1), …
- 记忆化搜索编写一般比较简单
- 递推方法在某些条件下可以做空间优化，记忆化搜索则必须存储所有f值

## LintCode 396 Coins In A Line III

九章算法

- 题意：
- 给定一个序列a[0], a[1], …, a[N-1]
- 两个玩家Alice和Bob轮流取数
- 每个人每次只能取第一个数或最后一个数
- 双方都用最优策略，使得自己的数字和尽量比对手大
- 问先手是否必胜
  - 如果数字和一样，也算先手胜

- 例子：
- 输入：[1, 5, 233, 7]
- 输出：True （先手取走1，无论后手取哪个，先手都能取走233）

## 博弈

九章算法

- 这题是一道博弈题，目标是让自己拿到的数字之和不比对手小
- 设己方数字和是A，对手数字和是B，即目标是A>=B
- 等价于A-B>=0
- 也就是说，如果Alice和Bob都存着**自己的数字和与对手的数字和之差**，分别记为$S_A$=A-B， $S_B$=B-A
- 则Alice的目标是最大化$S_A$，Bob的目标是最大化$S_B$

## 动态规划组成部分一：确定状态

- 如果Alice第一步取走a[0]，Bob面对a[1..N-1]
- Bob的最大数字差是$S_Y$
- Alice的数字差是a[0]-$S_Y$
- 如果Alice第一步取走a[N-1]，Bob面对a[0..N-2]
- Bob的最大数字差是$S'_Y$
- Alice的数字差是a[N-1]-$S'_Y$
- Alice选择较大的数字差

## 博弈子问题

- 当Bob面对a[1..N-1]，**他这时是先手**
- 他的目标同样是最大化先手（自己）和后手（Alice）的数字差
- 但是此时的数字少了一个：a[1..N-1]

$S_x = -S_Y + m$

X $\boxed{m \; x}$ Y $\boxed{y}$

$S_Y = y - x$

$m + x - y = -S_Y + m$

- 子问题
- 状态：设f[i][j]为一方先手在面对a[i..j]这些数字时，能得到的最大的与对手的数字差

## 动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为一方在面对a[i..j]这些数字时，能得到的最大的与对手的数字差

f[i][j] = max{a[i] - f[i+1][j], a[j] - f[i][j+1]}

| 为一方在面对a[i..j]时，能得到的最大的与对手的数字差 | 选择a[i]，对手采取最优策略时自己能得到的最大的与对手的数字差 | 选择a[j]，对手采取最优策略时自己能得到的最大的与对手的数字差 |
|---|---|---|

## 动态规划组成部分三：初始条件与边界情况

- 设f[i][j]为一方在面对a[i..j]这些数字时，能得到的最大的与对手的数字差
- f[i][j] = max{a[i]-f[i+1][j], a[j]-f[i][j+1]}
- 只有一个数字a[i]时，己方得a[i]分，对手0分，数字差为a[i]
  - f[i][i] = a[i] (i=0, 1, …, N-1)

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 长度1：f[0][0], f[1][1], f[2][2], …, f[N-1][N-1]
- 长度2： f[0][1], …, f[N-2][N-1]
- …
- 长度N： f[0][N-1]
- 如果f[0][N-1]>=0，先手Alice必赢，否则必输
- 时间复杂度$O(N^2)$，空间复杂度$O(N^2)$

## LintCode 430 Scramble String

- 题意：
- 给定一个字符串S，按照树结构每次二分成左右两个部分，直至单个字符
- 在树上某些节点交换左右儿子，可以形成新的字符串
- 判断一个字符串T是否由S经过这样的变换而成

- 例子：
- 输入：S=“great” T=“rgtae”
- 输出：True

```
    great
   /    \
  gr    eat
 / \    /  \
g   r  e   at
           / \
          a   t
```

```
    rgtae
   /    \
  rg    tae
 / \    /  \
r   g  ta   e
       / \
      t   a
```

## 动态规划组成部分一：确定状态

- 显然，T如果长度和S不一样，那么肯定不能由S变换而来
- 如果T是S变换而来的，并且我们知道S最上层二分被分成$S=S_1S_2$，那么一定有：
  - T也有两部分$T=T_1T_2$，$T_1$是$S_1$变换而来的，$T_2$是$S_2$变换而来的
  - T也有两部分$T=T_1T_2$，$T_1$是$S_2$变换而来的，$T_2$是$S_1$变换而来的

情况一


情况二


## 子问题

- 要求T是否由S变换而来
- 需要知道$T_1$是否由$S_1$变换而来的，$T_2$是否由$S_2$变换而来
- 需要知道$T_1$是否由$S_2$变换而来的，$T_2$是否由$S_1$变换而来
- $S_1$, $S_2$, $T_1$, $T_2$长度更短
- 子问题
- 状态：f[i][j][k][h]表示T[k..h]是否由S[i..j]变换而来

## 动态规划组成部分一：确定状态

- 这里所有串都是S和T的子串，且长度一样
- 所以每个串都可以用(起始位置，长度)表示
- 例如：
  - $S_1$长度是5，在S中位置7开始
  - $T_1$长度是5，在T中位置0开始
  - 可以用f[7][0][5]=True/False表示$S_1$能否通过变换成为$T_1$
- 状态：设f[i][j][k]表示$S_1$能否通过变换成为$T_1$
  - $S_1$为S从字符i开始的长度为k的子串
  - $T_1$为T从字符j开始的长度为k的子串

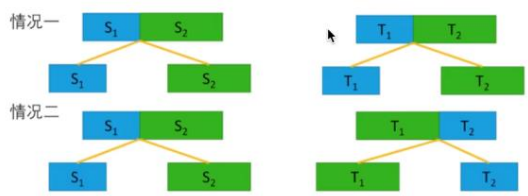
## 动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j][k]表示$S_1$能否通过变换成为$T_1$
  - $S_1$为S从字符i开始的长度为k的子串
  - $T_1$为T从字符j开始的长度为k的子串

$$f[i][j][k] = OR_{1<=w<=k-1}\{f[i][j][w] \text{ AND } f[i+w][j+w][k-w]\}$$

$$\text{OR}$$

$$OR_{1<=w<=k-1}\{f[i][j+k-w][w] \text{ AND } f[i+w][j][k-w]\}$$




## 动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j][k]表示$S_1$能否通过变换成为$T_1$
  - $S_1$为S从字符i开始的长度为k的子串
  - $T_1$为T从字符j开始的长度为k的子串
- 如果S[i]=T[j]，f[i][j][1]=True，否则f[i][j][1]=False

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 设f[i][j][k]表示$S_1$能否通过变换成为$T_1$
  - $S_1$为S从字符i开始的长度为k的子串
  - $T_1$为T从字符j开始的长度为k的子串

- 按照k从小到大的顺序进行计算
  - f[i][j][1]，0<=i<N, 0<=j<N
  - f[i][j][2]，0<=i<N-1, 0<=j<N-1
  - …
  - f[0][0][N]

- 答案是f[0][0][N]

- 时间复杂度$O(N^4)$，空间复杂度$O(N^3)$

## LintCode 168 Burst Balloons

- 题意：
- 给定N个气球，每个气球上都标有一个数字：$a_1, a_2, \ldots, a_N$
- 要求扎破所有气球，扎破第i个气球可以获得a[left]*a[i]*a[right]枚金币
  - left和right是与i相邻的下标
  - 扎破气球i以后，left和right就变成相邻的气球
- 求最多获得的金币数（设a[0]=a[N+1]=1）

- 例子：
- 输入：[3, 1, 5, 8]
- 输出：167
  - [3,1,5,8] → [3,5,8] → [3,8] → [8] → []
  - 金币3*1*5 + 3*5*8 + 1*3*8 + 1*8*1 = 167

## 动态规划组成部分一：确定状态

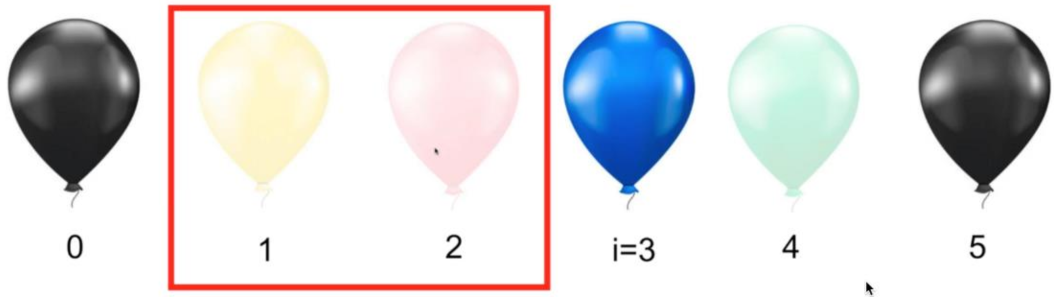
- 所有N个气球都被扎破

- 最后一步：一定有最后一个被扎破的气球，编号是i

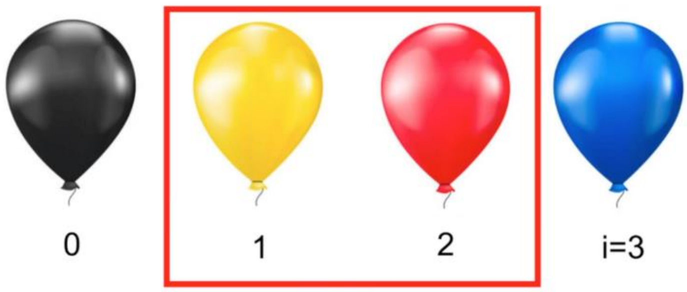
- 扎破i时，左边是气球0，右边是气球N+1，获得金币$1*a_i*1=a_i$

- 此时气球1~i-1以及i+1~N都已经被扎破，并且已经获得对应金币

## 动态规划组成部分一：确定状态

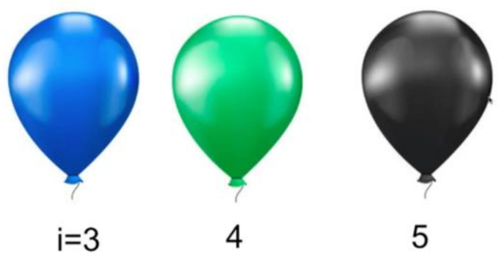



## 动态规划组成部分一：确定状态




扎破1~i-1号气球最多获得的金币数

## 动态规划组成部分一：确定状态




扎破i+1~N号气球最多获得的金币数

## 子问题

- 要求扎破1~N号气球，最多获得的金币数
- 需要知道扎破1~i-1号气球，最多获得的金币数和扎破i+1~N号气球，最多获得的金币数

- 子问题
- 状态：设f[i][j]为扎破i+1~j-1号气球，最多获得的金币数

## 动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][j]为扎破i+1~j-1号气球，最多获得的金币数
  - i和j不能扎破

$$f[i][j] = \max_{i<k<j}\{f[i][k] + f[k][j] + a[i] * a[k] * a[j]\}$$

| f[i][j] | f[i][k] | f[k][j] | a[i] * a[k] * a[j] |
|---|---|---|---|
| 扎破i+1~j-1号气球最多获得的金币数 | 扎破i+1~k-1号气球最多获得的金币数 | 扎破k+1~j-1号气球最多获得的金币数 | 最后扎破k号气球获得的金币数 |


## 动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i][j]为扎破i+1~j-1号气球，最多获得的金币数
  - i和j不能扎破
- $f[i][j] = \max_{i<k<j}\{f[i][k] + f[k][j] + a[i] * a[k] * a[j]\}$
- 初始条件：f[0][1] = f[1][2] = … = f[N][N+1] = 0
  - 当没有气球要扎破时，最多获得0枚金币

## 动态规划组成部分四：计算顺序

- 设f[i][j]为扎破i+1~j-1号气球，最多获得的金币数
  - i和j不能扎破

- $f[i][j] = \max_{i<k<j}\{f[i][k] + f[k][j] + a[i] * a[k] * a[j]\}$

- 区间动态规划：**按照长度j-i从小到大的顺序去算**
  - f[0][1], f[1][2], f[2][3], …, f[N][N+1]
  - f[0][2], f[1][3], f[2][4], …, f[N-1][N+1]
  - …
  - f[0][N+1]

- 时间复杂度$O(N^3)$，空间复杂度$O(N^2)$

## 总结

- 背包型动态规划
  - 物品重量，价值
  - 状态用物品个数和当前重量
  - 单个物品，无限多物品

- 区间型动态规划
  - 状态用区间左右端点：f[i][j]
  - 记忆化搜索