LintCode 513 Perfect Squares

- 题意：
- 给定一个正整数n
- 问最少可以将n分成几个完全平方数(1,4,9,…)之和

- 例子：
- 输入：n=13
- 输出：2 （13=4+9）

动态规划组成部分一：确定状态

- 最后一步：关注最优策略中最后一个完全平方数j^2
- 最优策略中$n-j^2$也一定被划分成最少的完全平方数之和
- 需要知道$n-j^2$最少被分成几个完全平方数之和
- 原来是求n最少被分成几个完全平方数之和
- 子问题
- 状态：设f[i]表示i最少被分成几个完全平方数之和

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i]表示i最少被分成几个完全平方数之和

$$f[i] = \min_{1<=j*j<=i}\{f[i-j^2] + 1\}$$

i最少被分成几个完全平方数之和

最后一个完全平方数是j^2

$i-j^2$最少被分成几个完全平方数之和

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[i]表示i最少被分成几个完全平方数之和
- $f[i] = \min_{1<=j*j<=i}\{f[i-j^2] + 1\}$
- 初始条件：0被分成0个完全平方数之和
  - f[0] = 0

动态规划组成部分四：计算顺序

- 初始化f[0]
- 计算f[1], …, f[N]
- 答案是f[N]

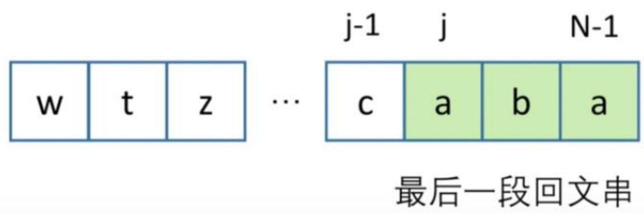
LintCode 108 Palindrome Partitioning II

- 题意：
- 给定一个字符串S[0..N-1]
- 要求将这个字符串划分成若干段，每一段都是一个回文串（正反看起来一样）
- 求最少划分几次

- 例子：
- 输入：
  – “aab”
- 输出：
  – 1 （划分1次→ “aa”, “b”）

动态规划组成部分一：确定状态

- 最后一步：关注最优策略中最后一段回文串，设为S[j..N-1]
- 需要知道S前j个字符[0..j-1]最少可以划分成几个回文串



子问题

九章算法

- 求S前N个字符S[0..N-1]最少划分为几个回文串
- 需要知道S前j个字符[0..j-1]最少可以划分成几个回文串
- 子问题
- 状态：设S前i个字符S[0..i-1]最少可以划分成f[i]个回文串

				j-1	j		N-1
w	t	z	…	c	a	b	a

最后一段回文串

动态规划组成部分二：转移方程

九章算法

- 设f[i]为S前i个字符S[0..i-1]最少可以划分成几个回文串

$$f[i] = \min_{j=0,\dots,i-1}\{f[j] + 1 \mid S[j..i-1]\text{是回文串}\}$$

S前i个字符最少可以划分成几个回文串

S前j个字符最少可以划分成几个回文串

最后一段回文串

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

九章算法

- 设f[i]为S前i个字符S[0..i-1]最少可以划分成几个回文串
- $f[i] = \min_{j=0,\dots,i-1}\{f[j] + 1 \mid S[j..i-1]\text{是回文串}\}$
- 初始条件：空串可以被分成0个回文串
  - f[0] = 0

动态规划组成部分四：计算顺序

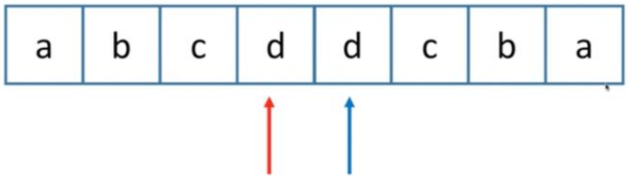
九章算法

- 计算f[0], f[1], …, f[N]

等等，怎么判断回文串？

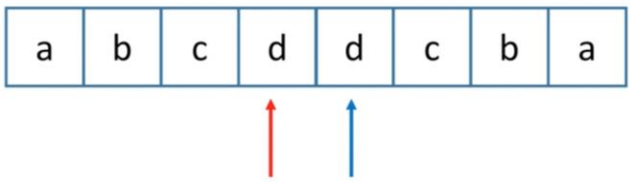
回文串判断

- 从左到右和从右到左各读一遍，完全一样
- 可以用两个指针从两头向中间移动，每一步两个指针指向的字符都必须相等



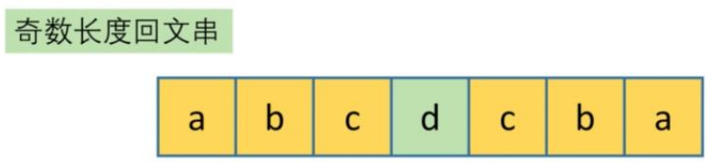
回文串判断

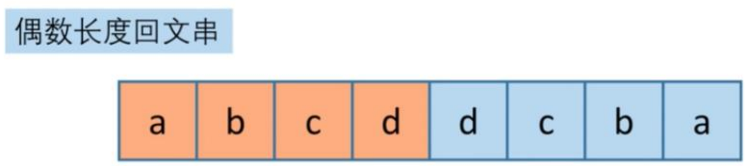
- 但是动态规划转移方程是$f[i] = \min_{j=0,\ldots,i-1}\{f[j] + 1 | S[j..i-1]是回文串\}$
- 每次都判断S[j..i-1]是不是回文串很慢



回文串种类

- 回文串分两种
  - 长度为奇数
  - 长度为偶数





生成回文串

- 假设我们现在不是寻找回文串，而是生成回文串
- 从中间开始，向两边扩展，每次左右两端加上同样的字符

S

奇数长度回文串

a	b	c	d	c	b	a

偶数长度回文串

a	b	c	d	d	c	b	a

在字符串中找到所有回文串

- 以字符串的每一个字符为中点，向两边扩展，找到所有回文串

S

p	a	b	c	d	c	b	a	t

S

p	a	b	c	c	b	a	t	w

记录回文串

- 从S每一个字符开始向两边扩展
  - 考虑奇数长度回文串和偶数长度回文串
- 用isPalin[i][j]表示S[i..j]是否是回文串
- 时间复杂度O(N^2)

S

p	a	b	c	d	c	b	a	t

S

p	a	b	c	c	b	a	t	w

回到原题

- S最少划分成多少个回文串
- $f[i] = \min_{j=0,\ldots,i-1}\{f[j] + 1 \mid S[j..i-1]\text{是回文串}\}$
- $f[i] = \min_{j=0,\ldots,i-1}\{f[j] + 1 \mid isPalin[j][i-1] = True\}$
- 答案是f[N]-1 (因为原题是求最少划分几次)
- 时间复杂度$O(N^2)$，空间复杂度$O(N^2)$

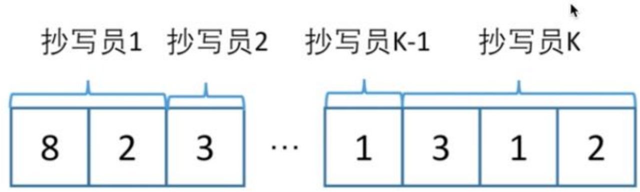
LintCode 437 Copy Books

- 题意：
- 有N本书需要被抄写，第i本书有A[i]页，i=0, 1, …, N-1
- 有K个抄写员，每个抄写员可以抄写连续的若干本书（例如：第3~5本书，或者第10本书）
- 每个抄写员的抄写速度都一样：一分钟一页
- 最少需要多少时间抄写完所有的书

- 例子：
- 输入：
  - A = [3, 2, 4], K=2
- 输出：
  - 5 （第一个抄写员抄写第1本和第2本书，第二个抄写员抄写第3本书）

题目分析

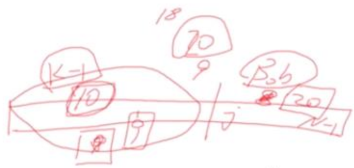
- 如果一个抄写员抄写第i本到第j本书，则需要时间A[i] + A[i+1] + … + A[j]
- 最后完成时间取决于耗时最长的那个抄写员
- 需要找到一种分段方式，分成**不超过K段**，使得所有段的数字之和的最大值最小



动态规划组成部分一：确定状态

- 最后一步：最优策略中最后一个抄写员Bob(设他是第K个)抄写的部分
  - **一段连续的书，包含最后一本**

- 如果Bob抄写第j本到第N-1本书



- 则Bob需要时间A[j] + … + A[N-1]

- 需要知道前面K-1个人最少需要多少时间抄完前j本书(第0~j-1本书)

子问题

- 求K个人最短需要多少时间抄完前N本书

- 需要知道K-1个人最少需要多少时间抄完前j本书

- 子问题

- 状态：设f[k][i]为k个抄写员最少需要多少时间抄完前i本书

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[k][i]为k个抄写员最少需要多少时间抄完前i本书

$$f[k][i] = \min_{j=0,\dots,i}\{\max\{f[k-1][j], A[j] + \dots + A[i-1]\}\}$$

k个抄写员最少需要多少时间抄完前i本书	k-1个抄写员最少需要多少时间抄完前j本书	第k个抄写员抄完第j至第i-1本书的时间

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[k][i]为k个抄写员最少需要多少时间抄完前i本书

- $f[k][i] = \min_{j=0,\dots,i}\{\max\{f[k-1][j], A[j] + \dots + A[i-1]\}\}$

- 初始条件：
  - 0个抄写员只能抄0本书
    - $f[0][0] = 0, f[0][1] = f[0][2] = \dots = f[0][N] = +\infty$
  - k个抄写员(k>0)需要0时间抄0本书
    - $f[k][0] = 0\ (k > 0)$

动态规划组成部分四：计算顺序

- 计算f[0][0], f[0][1], …, f[0][N]
- 计算f[1][0], f[1][1], …, f[1][N]
- …
- 计算f[K][0], f[K][1], …, f[K][N]
- 答案是f[K][N]
- 时间复杂度$O(N^2K)$, 空间复杂度O(NK)，优化后可以达到O(N)
- 如果K>N，可以赋值K←N

小结

- 划分性动态规划
- 要求将一个序列或字符串划分成若干满足要求的片段
- 解决方法：最后一步→**最后一段**
- 枚举最后一段的起点

- 如果题目不指定段数，用f[i]表示前i个元素分段后的可行性/最值，可行性，方式数： *Perfect Squares, Palindrome Partition II*
- 如果题目指定段数，用f[i][j]表示前i个元素分成j段后的可行性/最值，可行性，方式数：*Copy Books*

博弈型动态规划

- 博弈为两方游戏
- 一方先下，在一定规则下依次出招
- 如果满足一定条件，则一方胜
- 目标：取胜

博弈型动态规划

博弈

- 先手：先出招的一方
- 出招后，先手换人，新的先手面对一个新的局面

LintCode 394 Coins in a Line

- 题意：
- 有一排N个石子，Alice, Bob两人轮流取石子
- 每次一个人可以从最右边取走1个或2个石子
- 取走最后石子的人胜
- 问先手Alice是否必胜 (先手必胜: true,先手必败: false)

- 例子：
- 输入：N=5
- 输出：true （先手取走2个石子，剩下3个石子，无论后手怎么拿，先手都可以取走最后一个石子）

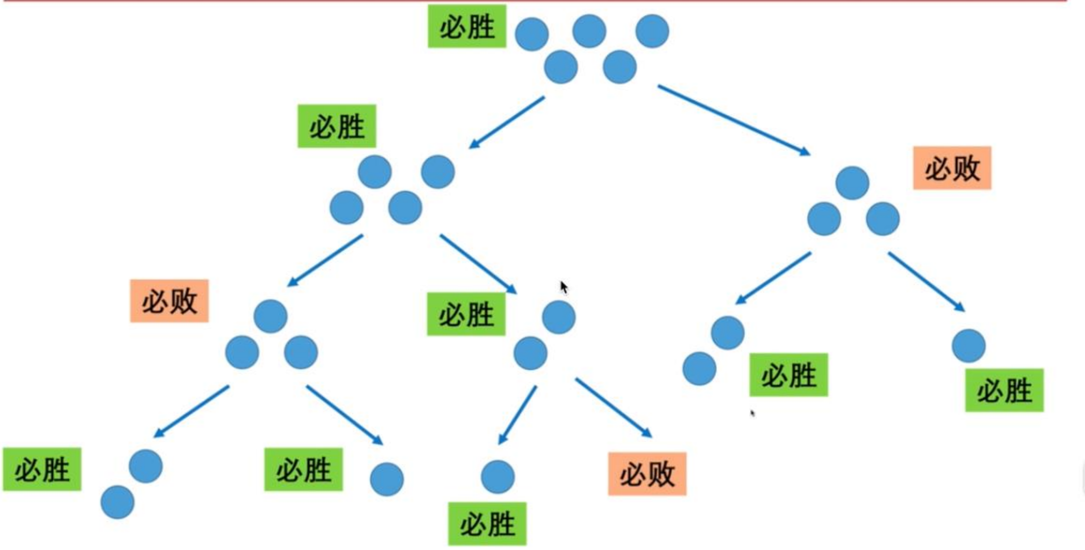
动态规划组成部分一：确定状态

- 假设后手Bob面对N-1个石子
- 其实这和一开始Bob是先手，有N-1个石子的情况是一样的
- 那么Bob也会选择让自己赢的一步：取走1个或2个石子
- 之后Alice面对新的局面，自己成为新的先手，选择让自己赢的一步

博弈动态规划：必胜 vs 必败

- 怎么选择让自己赢的一步
- 就是走了这一步之后，对手面对剩下的石子，他必输

博弈动态规划：必胜 vs 必败



博弈动态规划：必胜 vs 必败

知识点

如果取1个或2个石子后，能让剩下的局面先手必败，则当前先手必胜

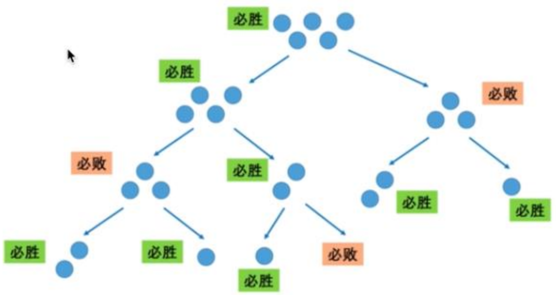
知识点

如果不管怎么走，剩下的局面都是先手必胜，则当前先手必败

宗旨

必胜：在当下的局面走出一步，让对手无路可逃

必败：自己无路可逃



子问题

- 要求面对N个石子，是否先手必胜
- 需要知道面对N-1个石子和N-2个石子，是否先手必胜
- 子问题
- 状态：设f[i]表示面对i个石子，是否先手必胜(f[i] = TRUE / FALSE)

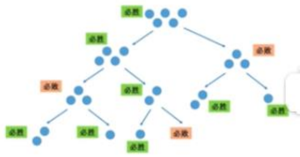
动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i]表示面对i个石子，是否先手必胜(f[i] = TRUE / FALSE)

$$
f[i] = \begin{cases}
\text{TRUE,} & f[i-1]==\text{FALSE AND } f[i-2]==\text{FALSE} \\
\text{TRUE,} & f[i-1]==\text{FALSE AND } f[i-2]==\text{TRUE} \\
\text{TRUE,} & f[i-1]==\text{TRUE AND } f[i-2]==\text{FALSE} \\
\text{FALSE,} & f[i-1]==\text{TRUE AND } f[i-2]==\text{TRUE}
\end{cases}
$$

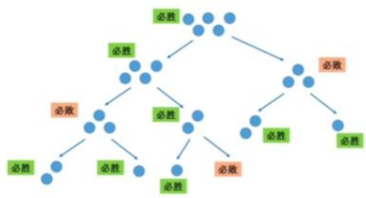
TRUE, f[i-1]==FALSE AND f[i-2]==FALSE	拿1或2个石子都必胜
TRUE, f[i-1]==FALSE AND f[i-2]==TRUE	拿1个石子必胜
TRUE, f[i-1]==TRUE AND f[i-2]==FALSE	拿2个石子必胜
FALSE, f[i-1]==TRUE AND f[i-2]==TRUE	必败

f[i] = f[i-1] == FALSE OR f[i-2] == FALSE



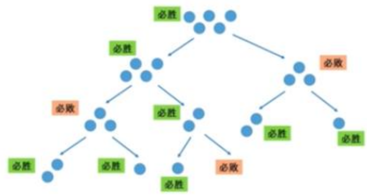
动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设f[N]表示面对N个石子，是否先手必胜(f[N] = TRUE / FALSE)
- f[i] = f[i-1] == FALSE OR f[i-2] == FALSE
- f[0] = FALSE --- 面对0个石子，先手必败
- f[1] = f[2] = TRUE --- 面对1个石子或2个石子，先手必胜



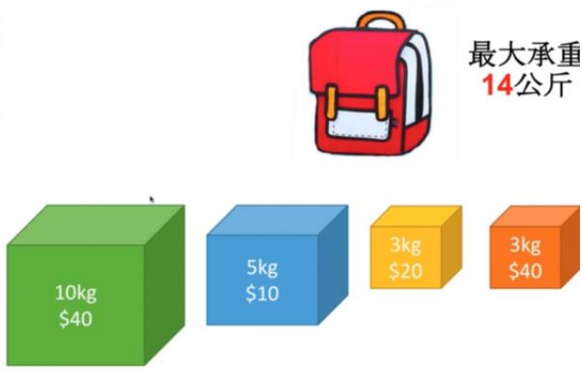
动态规划组成部分四：计算顺序

- f[0], f[1], f[2], …, f[N]
- 如果f[N] = TRUE则先手必胜，否则先手必败
- 时间复杂度O(N)
- 空间复杂度O(N)，可以滚动数组优化至O(1)



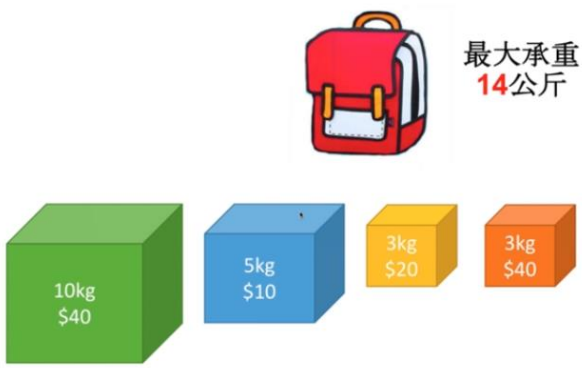
背包问题

- 你有一个背包，背包有最大承重
- 商店里有若干物品，都是免费拿
- 每个物品有重量和价值
- 目标：不撑爆背包的前提下
  - 装下最多重量物品
  - 装下最大总价值的物品
  - 有多少种方式正好带走满满一书包物品



直觉

- 逐个放物品，看是否还能放入
- 两个关键点
  - 还有几个物品
  - 还剩多少承重



LintCode 92: Backpack

- 题意:
- 给定N个物品，重量分别为正整数$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$
- 一个背包最大承重是正整数M
- 最多能带走多重的物品

- 例子：
- 输入：4个物品，重量为2, 3, 5, 7. 背包最大承重是11
- 输出：10 （三个物品：2, 3, 5）

背包动态规划：如何下手

- 给定N个物品，重量分别为正整数$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$
- 一个背包最大承重是M
- 物品的重量都是整数
- 每个装物品的方案的总重量都是0到M
- 如果对于每个总重量，我们能知道有没有方案能做到，就可以解决

动态规划组成部分一：确定状态

- 需要知道N个物品是否能拼出重量W (W =0, 1, …, M)
- 最后一步：最后一个物品（重量A_{N-1}）是否进入背包

情况一：如果前N-1个物品能拼出W，当然前N个物品也能拼出W

情况二：如果前N-1个物品能拼出$\mathbf{W- A_{N-1}}$，再加上最后的物品$\mathbf{A_{N-1}}$，拼出W

动态规划组成部分一：确定状态

- 例子：
- 4个物品，重量为2, 3, 5, 7
- 前3个物品可以拼出重量8（3+5），自然4个物品可以拼出重量8
- 前3个物品可以拼出重量2（2），加上最后一个物品，可以拼出重量9

情况一：如果前N-1个物品能拼出W，当然前N个物品也能拼出W

情况二：如果前N-1个物品能拼出**W- A_{N-1}**，再加上最后的物品**A_{N-1}**，拼出W

子问题

- 要求前N个物品能不能拼出重量0, 1, …, M
- 需要知道前N-1个物品能不能拼出重量0, 1, …, M
- 子问题
- 状态：设f[i][w] = 能否用**前i个物品**拼出重量w (TRUE / FALSE)
- 常见误区：**错误** 设f[i]表示前i个物品能拼出的最大重量（不超过Target）
  - 反例：A=[3 9 5 2], Target=10
  - 错误原因：最优策略中，前N-1个物品拼出的**不一定是**不超过Target的最大重量

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][w] = 能否用前i个物品拼出重量w (TRUE / FALSE)

$$f[i][w] = f[i-1][w] \text{ OR } f[i-1][w-A_{i-1}]$$

能否用前i个物品拼出重量w

能否用前i-1个物品拼出重量w

能否用前i-1个物品拼出重量w-A_{i-1}，再加上第i个物品

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- f[i][w] = f[i-1][w] OR f[i-1][w-A_{i-1}]

- 初始条件：
  - f[0][0] = TRUE: 0个物品可以拼出重量0
  - f[0][1..M] = FALSE: 0个物品不能拼出大于0的重量

- 边界情况：
  - f[i-1][w-A_{i-1}]只能在w≥A_{i-1}时使用

例子

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0个物品	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
前1个物品 (重量2)	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✗
前2个物品 (重量2,3)	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗
前3个物品 (重量2,3,5)	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✓	✗	✓	✗

动态规划组成部分四：计算顺序

- 初始化f[0][0], f[0][1], …, f[0][M]

- 计算前1个物品能拼出哪些重量：f[1][0], f[1][1], …, f[1][M]

- 计算前2个物品能拼出哪些重量： f[2][0], f[2][1], …, f[2][M]

- …

- 计算前N个物品能拼出哪些重量：f[N][0], f[N][2], …, f[N][M]

- 时间复杂度（计算步数）：O(MN)，空间复杂度（数组大小）：优化后可以达到O(M)

小结

- 要求不超过Target时能拼出的最大重量
- 记录前i个物品能拼出哪些重量
- 前i个物品能拼出的重量：
  - 前i-1个物品能拼出的重量
  - 前i-1个物品能拼出的重量+第i个物品重量A_{i-1}

LintCode 563: Backpack V

- 题意:
- 给定N个正整数：$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$
- 一个正整数Target
- 求有多少种组合加起来是Target
- 每个A_i只能用一次

- 例子：
- 输入：A=[1, 2, 3, 3, 7], Target=7
- 输出：2 (7=7, 1+3+3=7)

题目分析

- N个正整数：$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$ ➔N个物品的重量为$A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$
- 要求和是Target ➔正好装满一个载重为Target的背包
- 背包问题
- 和前一题Backpack不一样的是，我们需要求出有多少组合的和是Target，而不是能不能拼出Target
- 当然，如果能知道这N个物品有多少种方式拼出0，有多少种方式拼出1，…,有多少种方式拼出Target，也就得到了答案

动态规划组成部分一：确定状态

- 需要知道N个物品有多少种方式拼出重量W (W =0, 1, …, Target)
- 最后一步：第N个物品（重量A_{N-1}）是否进入背包

情况一：用前N-1个物品拼出W

情况二：用前N-1个物品能拼出**W- A_{N-1}**，再加上最后的物品**A_{N-1}**，拼出W

情况一的个数+情况二的个数 =用前N个物品拼出W的方式

子问题

- 要求前N个物品有多少种方式拼出重量0, 1, …, Target
- 需要知道前N-1个物品有多少种方式拼出重量0, 1, …, Target
- 子问题
- 状态：设f[i][w] = 用**前i个物品**有多少种方式拼出重量w

背包问题总承重一定要进状态。

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i][w] = 用前i个物品有多少种方式拼出重量w

$$f[i][w] = f[i-1][w] + f[i-1][w-A_{i-1}]$$

f[i][w]：用前i个物品有多少种方式拼出重量w

f[i-1][w]：用前i-1个物品有多少种方式拼出重量w

f[i-1][w-A_{i-1}]：用前i-1个物品有多少种方式拼出重量w-A_{i-1}，再加上第i个物品

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

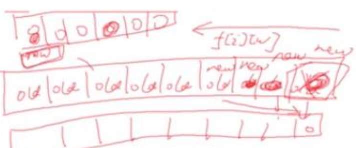
- $f[i][w] = f[i-1][w] + f[i-1][w-A_{i-1}]$
- 初始条件：
  - f[0][0] = 1: 0个物品可以有一种方式拼出重量0
  - f[0][1..M] = 0: 0个物品不能拼出大于0的重量
- 边界情况：
  - $f[i-1][w-A_{i-1}]$只能在$w \ge A_{i-1}$时使用

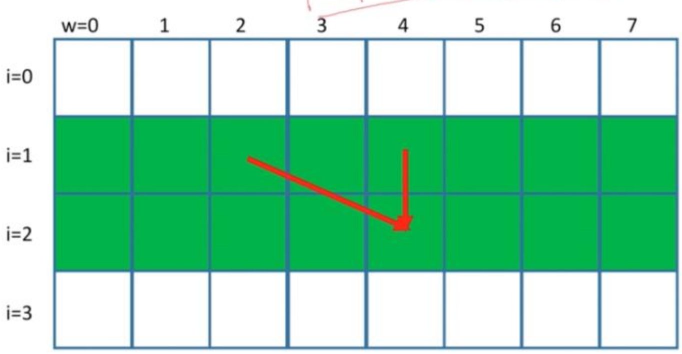
动态规划组成部分四：计算顺序

- 初始化f[0][0], f[0][1], …, f[0][Target]
- 计算前1个物品有多少种方式拼出重量：f[1][0], f[1][1], …, f[1][Target]
- …
- 计算前N个物品有多少种方式拼出重量：f[N][0], f[N][2], …, f[N][Target]
- 答案是f[N][Target]
- 时间复杂度（计算步数）：O(N*Target)，空间复杂度（数组大小）：优化后可以达到O(Target)

进一步空间优化

- $f[i][w] = f[i-1][w] + f[i-1][w-A_{i-1}]$
- 实际编程中可以进一步优化

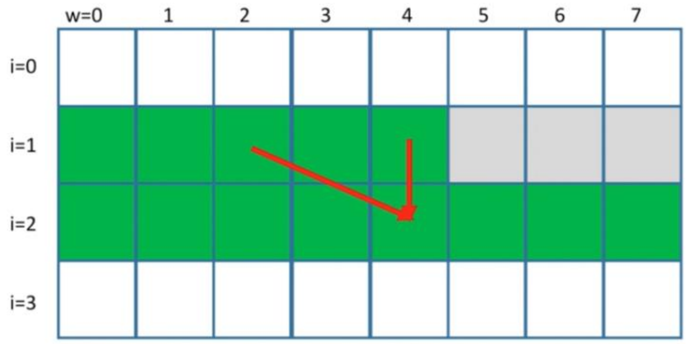




实际中，可以只开一个数组，从右往左计算。

动态规划组成部分四：计算顺序

- f[i][w] = f[i-1][w] + f[i-1][w-A_{i-1}]
- 可以只开一个数组
- 按照f[i][Target], …, f[i][0]的顺序更新



LintCode 564: Backpack VI

- 题意:
- 给定N个正整数：A_0, A_1, …, A_{N-1}
- 一个正整数Target
- 求有多少种组合加起来是Target
- 每个A_i可以用多次

- 例子：
- 输入：A = [1, 2, 4], Target = 4
- 输出：6（1+1+1+1=4, 2+2=4, 1+1+2=4, 1+2+1=4, 2+1+1=4, 4=4）

题目分析

- 和Backpack V唯一区别：组合中数字可以按不同的顺序，比如1+1+2与1+2+1算两种组合

- 不能先处理第一个物品，再处理第二个物品，…

- 似乎是更难的背包问题

- 其实更简单☺

动态规划组成部分一：确定状态

- 回到一维的思路
  - 第一讲硬币组合题
  - 用最少的硬币数凑成27元
- 关注最后一步：最后一个物品的重量是多少

关键点1 任何一个正确的组合中，所有物品总重量是Target

关键点2 如果最后一个物品重量是K，则前面的物品重量是Target-K

动态规划组成部分一：确定状态

- 如果最后一个物品重量是A_0, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_0
- 如果最后一个物品重量是A_1, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_1
- …
- 如果最后一个物品重量是A_{N-1}, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_{N-1}

关键点1 任何一个正确的组合中，所有物品总重量是Target

关键点2 如果最后一个物品重量是K，则前面的物品重量是Target-K

动态规划组成部分一：确定状态

- 如果最后一个物品重量是A_0, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_0
- 如果最后一个物品重量是A_1, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_1
- …
- 如果最后一个物品重量是A_{N-1}, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_{N-1}

关键点1 任何一个正确的组合中，所有物品总重量是Target

关键点2 如果最后一个物品重量是K，则前面的物品重量是Target-K

子问题

- 如果最后一个物品重量是A_0, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_0
- 如果最后一个物品重量是A_1, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_1
- …
- 如果最后一个物品重量是A_{N-1}, 则要求有多少种组合能拼成Target – A_N

- 原问题要求有多少种组合能拼成Target

- 子问题

- 设f[i] = 有多少种组合能拼出重量i

动态规划组成部分二：转移方程

- 设f[i] = 有多少种组合能拼出重量i

$$f[i] = f[i-A_0] + f[i-A_1] + \ldots + f[i-A_{N-1}]$$

多少种组合能拼出i

多少种组合能拼出i-A_0

多少种组合能拼出i-A_{N-1}

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- $f[i] = f[i-A_0] + f[i-A_1] + \ldots + f[i-A_{N-1}]$

- f[0] = **1**
  - 有1种组合能拼出重量0 （什么都不选）

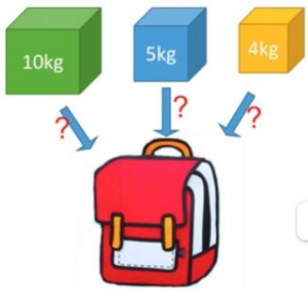
- 如果$i<A_j$, 则对应的$f[i-A_j]$不加入f[i]
  - $A_0=1$, $A_1=2$, $A_2=4$
  - $f[3] = f[3-A_0] + f[3-A_1]$

动态规划组成部分四：计算顺序

- 设f[i] = 有多少种组合能拼出重量i
- $f[i] = f[i-A_0] + f[i-A_1] + \ldots + f[i-A_{N-1}]$
- f[0] = **1**
- 计算f[1], f[2], …, f[Target]
- 结果为f[Target]

小结

- Backpack 可行性背包
  - 题目要求最多装多少重量
  - 记录前i个物品**能不能**拼出重量w
- Backpack V, Backpack VI, 计数型背包
  - 题目要求有多少种方式装出重量
  - Backpack V：记录前i个物品有**多少种方式**拼出重量W
  - Backpack VI：记录有**多少种方式**拼出重量W
- 关键点
  - **最后一步**
    - 最后一个背包内的物品是哪个



小结

- Backpack 可行性背包
  - 要求不超过Target时能拼出的最大重量
  - 记录前i个物品能不能拼出重量w
- Backpack V, Backpack VI, 计数型背包
  - 要求有多少种方式拼出重量Target
  - Backpack V：记录前i个物品有多少种方式拼出重量w
  - Backpack VI：记录有多少种方式拼出重量w
- 关键点
  - **最后一步**
    - 最后一个背包内的物品是哪个
    - 最后一个物品有没有进背包

总结

- 划分型动态规划
- 博弈型动态规划
- 背包型动态规划