动态规划初探

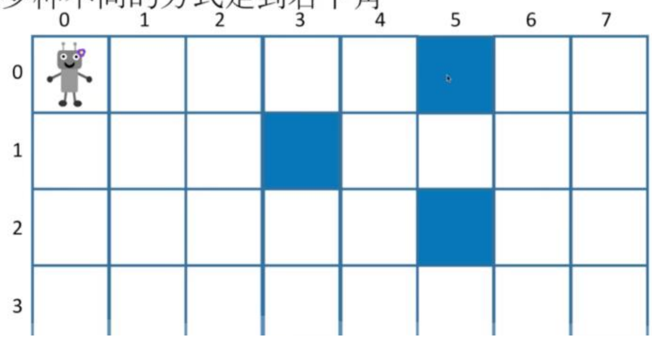
- 坐标型动态规划
- 序列型动态规划
- 划分性动态规划

坐标型动态规划

LintCode 115: Unique Paths II

Some updates could not be installed automatically. Install

- 题意:
- 给定m行n列的网格，有一个机器人从左上角(0,0)出发，每一步可以向下或者向右走一步
- 网格中有些地方有障碍，机器人不能通过障碍格
- 问有多少种不同的方式走到右下角



题目分析

- 这题和Unique Path非常类似，只是网格中可能有障碍
- 最后一步一定是从左边(i, j-1)或上边(i-1, j)过来
- 状态f[i][j]表示从左上角有多少种方式走到格子(i, j)
- **坐标型动态规划**：数组下标[i][j]即坐标(i, j)

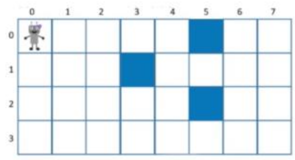
$$f[i][j] = f[i-1][j] + f[i][j-1]$$

机器人有多少种方式走到(i, j)	机器人有多少种方式走到(i-1, j)	机器人有多少种方式走到(i, j-1)

初始条件和边界情况

- f[i][j] = 机器人有多少种方式从左上角走到(i, j)
- 如果左上角(0, 0)格或者右下角(m-1, n-1)格有障碍，直接输出0
- 如果(i, j)格有障碍，f[i][j] = 0，表示机器人不能到达此格（0种方式）
- 初始条件：f[0][0] = 1

$$f[i][j] = \begin{cases} 0, & \text{如果}(i, j)\text{格有障碍} \\ 1, & i=0\text{且}j=0 \\ f[i-1][j], & \text{如果}j=1\text{，即第一列} \\ f[i][j-1], & \text{如果}i=1\text{，即第一行} \\ f[i-1][j] + f[i][j-1], & \text{其他} \end{cases}$$



阶段：
每一个格子都是一个阶段；

决策集：
每一个阶段可选择从上或从左到达；

```java
public int uniquePathsWithObstacles(int[][] A) {
    // write your code here
    int m = A.length;
    int n = A[0].length;
    if (A[0][0] == 1 || A[m - 1][n - 1] == 1) {
        return 0;
    }
    int[][] f = new int[m][n];
    f[0][0] = 1;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (A[i][j] == 1) {
                f[i][j] = 0;
                continue;
            } else {
                if (i - 1 >= 0) {
                    f[i][j] += f[i - 1][j];
                }

                if (j - 1 >= 0) {
                    f[i][j] += f[i][j - 1];
                }
            }
        }
    }
    return f[m - 1][n - 1];
}
```

序列型动态规划

LintCode 515 Paint House

- 题意：
- 有一排N栋房子，每栋房子要漆成3种颜色中的一种：红、蓝、绿
- 任何两栋相邻的房子不能漆成同样的颜色
- 第i栋房子染成红色、蓝色、绿色的花费分别是cost[i][0], cost[i][1], cost[i][2
- 问最少需要花多少钱油漆这些房子

- 例子：
- 输入：
  - N=3
  - Cost = [[14,2,11],[11,14,5],[14,3,10]]
- 输出：
  - 10 （第0栋房子蓝色，第1栋房子绿色，第2栋房子蓝色, 2+5+3=10）

动态规划组成部分一：确定状态

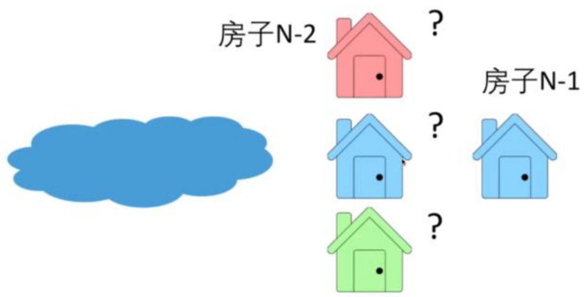
- 最优策略是花费最小的策略
- 最后一步：最优策略中房子N-1一定染成了红、蓝、绿中的一种
- 但是相邻两栋房子不能漆成一种颜色
- 所以如果最优策略中房子N-1是红色，房子N-2只能是蓝色或绿色
- 所以如果最优策略中房子N-1是蓝色，房子N-2只能是红色或绿色
- 所以如果最优策略中房子N-1是绿色，房子N-2只能是红色或蓝色

好复杂。。

Some updates could not be installed automatically. Install

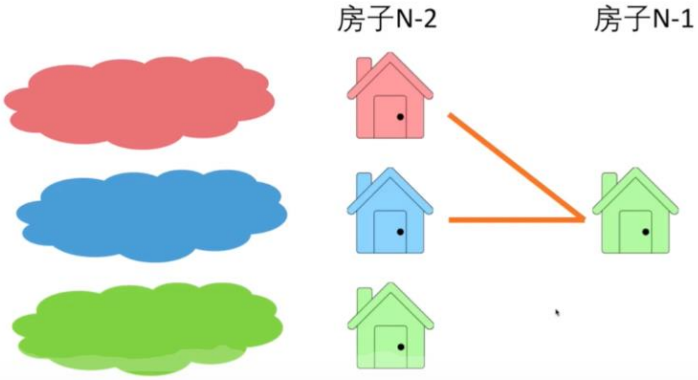
动态规划组成部分一：确定状态

- 如果直接套用以前的思路，记录油漆前N栋房子的最小花费
- 根据套路，也需要记录油漆前N-1栋房子的最小花费
- 但是，前N-1栋房子的最小花费的最优策略中，不知道房子N-2是什么颜色，所以有可能和房子N-1撞色



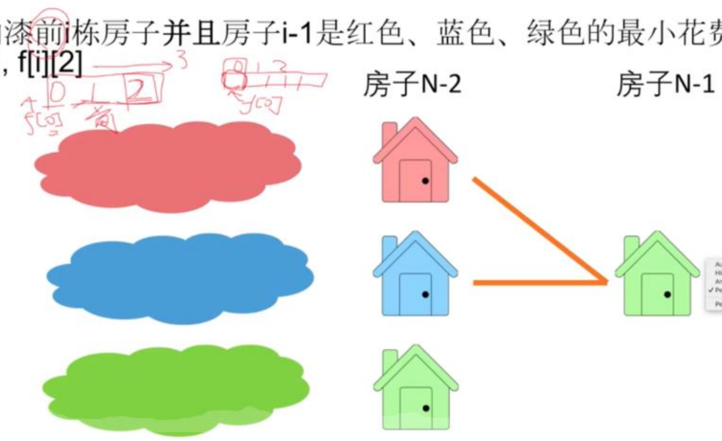
动态规划组成部分一：确定状态

- **不知道房子N-2是什么颜色，就把它记录下来！**
- 分别记录油漆前N-1栋房子**并且**房子N-2是红色、蓝色、绿色的最小花费



子问题

- 求油漆前N栋房子**并且**房子N-1是红色、蓝色、绿色的最小花费
- 需要知道油漆前N-1栋房子**并且**房子N-2是红色、蓝色、绿色的最小花费
- 子问题
- 状态：设油漆前i栋房子**并且**房子i-1是红色、蓝色、绿色的最小花费分别为f[i][0], f[i][1], f[i][2]



动态规划组成部分二：转移方程

- 设油漆前i栋房子并且房子i-1是红色、蓝色、绿色的最小花费分别为f[i][0], f[i][1], f[i][2]

$$f[i][0] = \min\{f[i-1][1] + cost[i-1][0],\ f[i-1][2] + cost[i-1][0]\}$$

$$f[i][1] = \min\{f[i-1][0] + cost[i-1][1],\ f[i-1][2] + cost[i-1][1]\}$$

$$f[i][2] = \min\{f[i-1][0] + cost[i-1][2],\ f[i-1][1] + cost[i-1][2]\}$$

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设油漆前i栋房子并且房子i-1是红色、蓝色、绿色的最小花费分别为f[i][0], f[i][1], f[i][2]
- 初始条件：f[0][0] = f[0][1] = f[0][2] = 0
  - 即不油漆任何房子的花费
- 无边界情况

动态规划组成部分四：计算顺序

- 设油漆前i栋房子并且房子i-1是红色、蓝色、绿色的最小花费分别为f[i][C f[i][1], f[i][2]
- 初始化f[0][0], f[0][1], f[0][2]
- 计算f[1][0], f[1][1], f[1][2]
- …
- 计算f[N][0], f[N][1], f[N][2]
- 答案是min{f[N][0], f[N][1], f[N][2]}. 时间复杂度O(N), 空间复杂度O(N)

```java
public int minCost(int[][] costs) {
    // write your code here
    int m=costs.length;
    if(m==0 || costs==null){
        return 0;
    }
    int[][] f= new int[m][3];
    f[0][0]=costs[0][0];
    f[0][1]=costs[0][1];
    f[0][2]=costs[0][2];

    for(int i=1;i<m;i++){
        f[i][0]=Math.min(f[i-1][1],f[i-1][2])+costs[i][0];
        f[i][1]=Math.min(f[i-1][0],f[i-1][2])+costs[i][1];
        f[i][2]=Math.min(f[i-1][1],f[i-1][0])+costs[i][2];
    }
    return Math.min(Math.min(f[m-1][0],f[m-1][1]),f[m-1][2]);

}
```


小结

- 序列型动态规划：...**前i个**...最小/方式数/可行性
- 在设计动态规划的过程中，发现需要知道油漆前N-1栋房子的最优策略中，房子N-2的颜色
- 如果只用f[N-1], 将无法区分
- 解决方法：记录下房子N-2的颜色
  - 在房子N-2是红/蓝/绿色的情况下，油漆前N-1栋房子的最小花费
- 问题迎刃而解
- **序列+状态**

划分型动态规划

Some updates could not be installed automatically.

LintCode 512 Decode Ways

- 题意：
- 有一段由A-Z组成的字母串信息被加密成数字串
- 加密方式为：A→1, B→2, ..., Z→26
- 给定加密后的数字串S[0...N-1]，问有多少种方式解密成字母串

- 例子：
- 输入：
  - 12
- 输出：
  - 2 (AB 或者 L)

动态规划组成部分一：确定状态

- 解密数字串即**划分**成若干段数字，每段数字对应一个字母
- 最后一步（最后一段）：对应一个字母
  - A, B, …, 或Z

1|2 A B |12 L

- 这个字母加密时变成1, 2, …, 或26

0	1	2		N-4	N-3	N-2	N-1
8	2	3	…	1	3	1	2

假设100种解密方式　　B

动态规划组成部分一：确定状态

- 解密成为字母串
- 最后一步：一定有最后一个字母
  - A, B, …, 或Z
- 这个字母加密时变成1, 2, …, 或26

0	1	2		N-4	N-3	N-2	N-1
8	2	3	…	1	3	1	2

假设　50种解密方式　　L

动态规划组成部分一：确定状态

- 解密成为字母串
- 最后一步：一定有最后一个字母
  - A, B, …, 或Z
- 这个字母加密时变成1, 2, …, 或26

0	1	2		N-4	N-3	N-2	N-1
8	2	3	…	1	3	1	2

一共100+50=150种解密方式

阶段：
每个数字作为结尾作为一个阶段，有 `n`个数字就有 `n`个阶段。

决策集：
决策一：当前阶段的作为结尾的数字划分出两位数字；
决策二：当前阶段的作为结尾的数字划分出一位数字；

状态表示：
`f[i]`表示数字串前`i`个数字解密成字符串的方式数。

转移方程：
`f[i]=f[i-1]|S[i-1]对应一个字母`+`f[i-2]|S[i-2]S[i-1]对应一个字母`

子问题

- 设数字串长度为N
- 要求数字串前N个字符的解密方式数
- 需要知道数字串前N-1和N-2个字符的解密方式数
- 子问题
- 状态：设数字串S前i个数字解密成字母串有f[i]种方式

动态规划组成部分二：转移方程

- 设数字串S前i个数字解密成字母串有f[i]种方式

f[i] = f[i-1] | **S[i-1]**对应一个字母 + f[i-2] | **S[i-2]S[i-1]**对应一个字母

数字串S前i个数字解密成字母串的方式数

数字串S前i-1个数字解密成字母串的方式数

数字串S前i-2个数字解密成字母串的方式数

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设数字串S前i个数字解密成字母串有f[i]种方式
- 初始条件：f[0] = 1，即空串有1种方式解密
  - 解密成空串
- 边界情况：如果i = 1, 只看最后一个数字

动态规划组成部分四：计算顺序

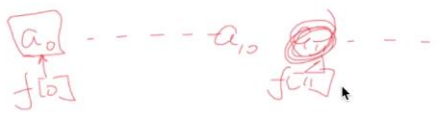
- f[0], f[1], …, f[N]
- 答案是f[N]
- 时间复杂度O(N), 空间复杂度O(N)

```java
public int numDecodings(String s) {
    // write your code here
    char[] ss = s.toCharArray();
    int n = ss.length;
    if(n==0){
        return 0;
    }
    int[] f = new int[n+1];
    f[0]=1;
    for(int i=1;i<=n;i++){ // 前i个字符，不将第i个字符计算在内
        int num1=ss[i-1]-'0';
        if(1<=num1 && num1<=9){
            f[i] +=f[i-1];
        }

        if(i>=2){
            int num2=(ss[i-2]-'0')*10 + (ss[i-1]-'0');
            if(10<=num2 && num2<=26){
                f[i] +=f[i-2];
            }
        }


    }
    return f[n];
}
```

坐标型动态规划

- 最简单的动态规划类型
- 给定一个序列或网格

- 需要找到序列中某个/些子序列或网格中的某条路径
  - 某种性质最大/最小
  - 计数
  - 存在性



- 动态规划方程f[i]中的下标i表示以a_i为结尾的满足条件的子序列的性质，f[i][j]中的下标i, j表示以格子(i, j)为结尾的满足条件的路径的性质
  - 最大值/最小值
  - 个数
  - 是否存在

- 坐标型动态规划的初始条件f[0]就是指以a_0为结尾的子序列的性质

坐标型动态规划

LintCode 397 最长连续单调子序列

- 题意：
- 给定a[0], …, a[n-1]
- 找到最长的连续子序列i, i+1, i+2, …, j，使得a[i]<a[i+1]<…<a[j]，或者a[i]>a[i+1]>…>a[j]，输出长度j-i+1
- 例子：
- 输入：[5, 1, 2, 3, 4]
- 输出：4（子序列1, 2, 3, 4)

简化

- 首先，对于a[i]>a[i+1]>…>a[j]，可以将整个a序列倒过来，就变成求最长连续上升子序列了
- 所以，只需要考虑找到最长的a[i]<a[i+1]<…<a[j]
- 可以从每个a[i]开始，一直向后延伸找到最长的连续上升序列
- 最差情况下，对于长度为N的序列，需要计算$O(N^2)$步:
  - 0,1,2,…,N-1

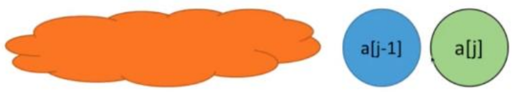
动态规划组成部分一：确定状态

- 最后一步：对于最优的策略，一定有最后一个元素a[j]

先考虑简单情况

- 第一种情况：最优策略中最长连续上升子序列就是{a[j]}，答案是1

- 第二种情况，子序列长度大于1，那么最优策略中a[j]前一个元素肯定是a[j-1]. 这种情况一定是a[j-1] < a[j]



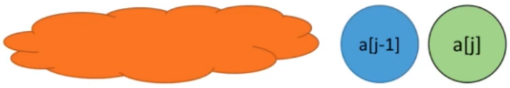
- 因为是最优策略，那么它选中的以a[j-1]结尾的连续上升子序列一定是最长的

阶段：
以每个数字作为结尾当前一个阶段，有N个数字就是N个阶段。

决策集：
每个作为结尾的数字与之前的数字比较一次都是一次决策。

子问题

- 要求以a[j-1]结尾的最长连续上升子序列
- 本来是求以a[j]结尾的最长连续上升子序列
- **化为子问题**
- 状态：设f[j] =**以a[j]结尾**的最长连续上升子序列的长度



动态规划组成部分二：转移方程

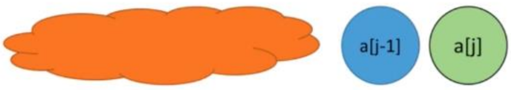
- f[j] =以a[j]结尾的最长连续上升子序列的长度

$$f[j] = \max\{ 1,\quad f[j-1]+1 \mid j>0 \text{ and } a[j-1] < a[j]\}$$

以a[j]结尾的最长连续上升子序列的长度

情况1：子序列就是a[j]本身

情况2：以a[j-1]结尾的最长连续上升子序列的长度，加上a[j]



动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

$$f[j] = \max\{ 1,\quad f[j-1]+1 \mid j>0 \text{ and } a[j-1] < a[j]\}$$

以a[j]结尾的最长连续上升子序列的长度

情况1：子序列就是a[j]本身

情况2：以a[j-1]结尾的最长连续上升子序列的长度，加上a[j]

- 情况2必须满足：
  - j>0, 即a[j]前面至少还有一个元素
  - a[j] > a[j-1], 满足单调性
- 初始条件：空

动态规划组成部分四：计算顺序

- f[j] =以a[j]结尾的最长连续上升子序列的长度
- 计算f[0], f[1], f[2], …, f[n-1]
- 和硬币组合题不一样的是，最终答案并不一定是f[n-1]
- 因为我们不知道最优策略中最后一个元素是哪个a[j]
- 所以答案是max{f[0], f[1], f[2], …, f[n-1]}
- 算法时间复杂度O(n)，空间复杂度O(n)

思考：如何做到空间复杂度O(1)

LintCode 110 Minimum Path Sum

- 题意:
- 给定m行n列的网格，每个格子(i, j)里都一个非负数A[i][j]
- 求一个从左上角(0, 0)到右下角的路径，每一步只能向下或者向右走一步
- 使得路径上的格子里的数字之和最小
- 输出最小数字和

	0	1	2	3	4
0	1	5	7	6	8
1	4	7	4	4	9
2	10	3	2	3	2

动态规划组成部分一：确定状态

- 最值型动态规划
- 和Unique Path一样，无论用何种方式到达右下角，总有最后一步：
  - 向右 或者 向下
- 右下角坐标设为(m-1, n-1)
- 那么前一步一定是在(m-2, n-1)或者(m-1, n-2)

	0	1	2	3	4
0	1	5	7	6	8
1	4	7	4	4	9
2	10	3	2	3	2

动态规划组成部分一：确定状态

- 最优策略的路径总和数字最小
  - 若倒数第二步在(m-2, n-1)，则前面一定是从(0,0)到达(m-2, n-1)总和最小的路径
  - 若倒数第二步在(m-1, n-2)，则前面一定是从(0,0)到达(m-1, n-2)总和最小的路径

	0	1	2	3	4
0	1	5	7	6	8
1	4	7	4	4	9
2	10	3	2	3	2

子问题

- 要求从左上角走到(m-1, n-2)的路径的最小数字总和以及走到(m-2, n-1)的路径的最小数字总和
- 原题要求有从左上角走到(m-1, n-1)的路径的最小数字总和
- 子问题
- 状态：
  - 设从(0, 0)**走到(i, j)**的路径最小数字总和**f[i][j]**

	0	1	2	3	4
0	1	5	7	6	8
1	4	7	4	4	9
2	10	3	2	3	2

动态规划组成部分二：转移方程

- 设从(0, 0)走到格子(i, j)的路径的最小数字总和是f[i][j]

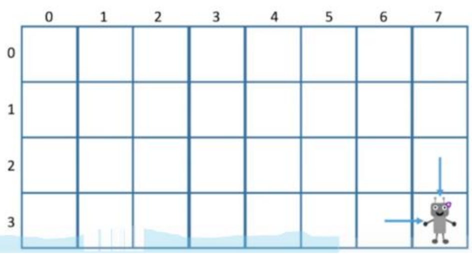
$$f[i][j] = \min\{f[i-1][j],\ f[i][j-1]\} + A[i][j]$$

从(0, 0)走到格子(i, j)的最小路径数字总和

从(0, 0)走到格子(i-1, j)的最小路径数字总和

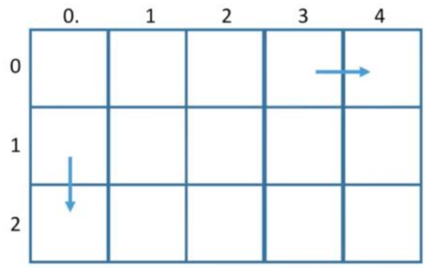
从(0, 0)走到格子(i, j-1)的最小路径数字总和

格子(i, j)的数字



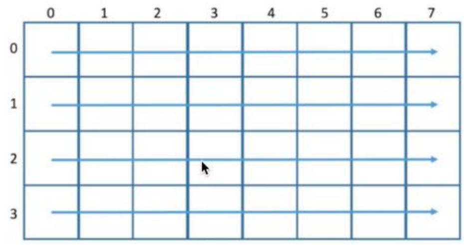
动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 初始条件：f[0][0] = A[0][0]
- 边界情况：i = 0 或 j = 0，则前一步只能有一个方向过来



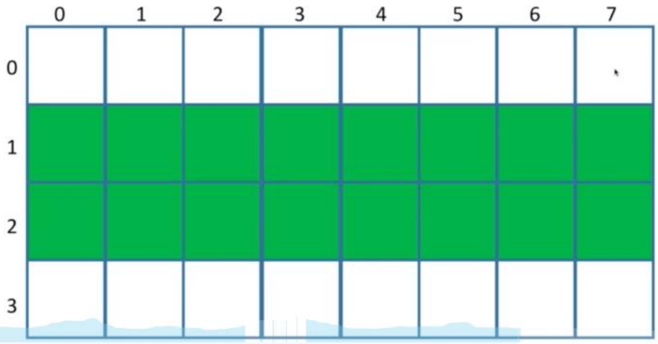
动态规划组成部分四：计算顺序

- f[0][0] = 1
- 计算第0行：f[0][0], f[0][1], …, f[0][n-1]
- 计算第1行：f[1][0], f[1][1], …, f[1][n-1]
- …
- 计算第m-1行：f[m-1][0], f[m-1][1], …, f[m-1][n-1]
- f[i][j] = f[i-1][j] + f[i][j-1]
- 时间复杂度（计算步数）：O(MN)，空间复杂度（数组大小）：O(MN)



空间优化

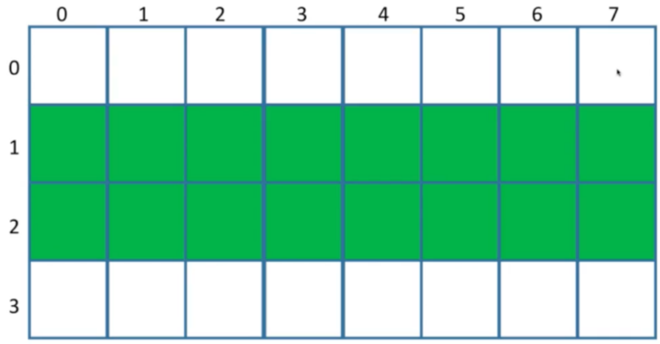
- f[i][j] = f[i-1][j] + f[i][j-1]
- 计算第i行时，只需要第i行和第i-1行的f



空间优化

- 所以，只需要保存两行的f值：f[i][0..n-1]和f[i-1][0..n-1]

- 用滚动数组实现



空间优化

- 开数组时，只开f[0][0..n-1]和f[1][0..n-1]

- 计算f[0][0],..,f[0][n-1], 计算f[1][0],..,f[1][n-1]

- 计算f[2][0..n-1]时，开f[2][0..n-1]，**删掉f[0][0..n-1]**，因为已经不需要**f[0][0..n-1]**的值了

- 计算f[3][0..n-1]时，开f[3][0..n-1]，**删掉f[1][0..n-1]**，因为已经不需要**f[1][0..n-1]**的值了

空间优化

- 实际操作时，可以不用每次开数组，而是用滚动法

- 计算f[0][0],..,f[0][n-1], 计算f[1][0],..,f[1][n-1]

- 计算f[2][0..n-1]时，把值写在f[0][0..n-1]的**数组**里

- 同理，f[3][0..n-1]写在f[1][0..n-1]的**数组**里

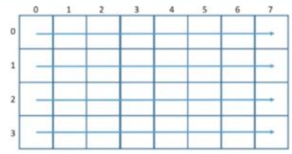
- 最后f[m-1][n-1]存储在f[0][n-1]（或者f[1][n-1]）里，直接输出

空间优化

九章算法

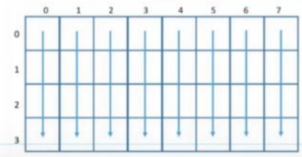
知识点

对于网格上的动态规划，如果f[i][j]只依赖于本行的f[i][x]与前一行的f[i-1][y]，那么就可以采用滚动数组的方法压缩空间。空间复杂度O(N)



知识点

如果网格行数少列数多（*大胖子*网格），那么就可以逐列计算，滚动数组的长度为行数，空间复杂度O(M)



常用滚动数组控制写法：

int old = 1, now = 0;

每一次循环都要交换：

old = new;

now = 1 – now;

LintCode 553 Bomb Enemy

九章算法

- 题意：
- 有一个M*N的网格，每个格子可能是空的，可能有一个敌人，可能有一堵墙
- 只能在某个空格子里放一个炸弹，炸弹会炸死所有同行同列的敌人，但是不能穿透墙
- 最多能炸死几个敌人

- 例子：
- 输入：如图
- 输出：3

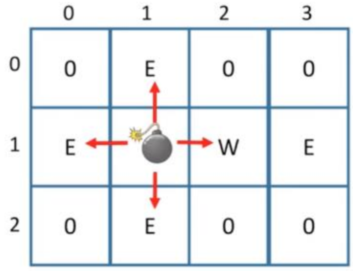
	0	1	2	3
0	0	E	0	0
1	E	0	W	E
2	0	E	0	0

题目分析

- 每个炸弹可以往四个方向传播爆炸力
- 我们可以分析一个方向，然后举一反三
- 即如果在一个空地放一个炸弹，最多向上能炸死多少敌人
- 可以直接枚举，即向上枚举到碰到墙为止

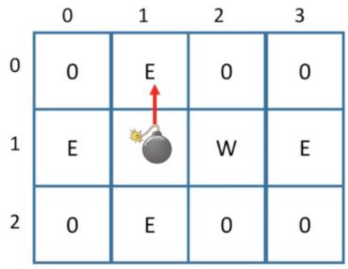
碰到墙就枚举停止

- 时间复杂度O(MN*M)
- 用动态规划思想加速



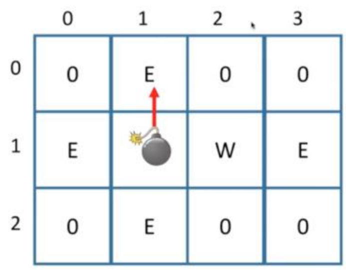
动态规划组成部分一：确定状态

- 我们假设有敌人或有墙的格子也能放炸弹
  - 有敌人的格子：格子里的敌人被炸死，并继续向上爆炸
  - 有墙的格子：炸弹不能炸死任何敌人
- 在(i, j)格放一个炸弹，它向上能炸死的敌人数是：
  - (i, j)格为空地：(i-1, j)格向上能炸死的敌人数
  - (i, j)格为敌人： (i-1, j)格向上能炸死的敌人数**+1**
  - (i, j)格为墙：0



子问题

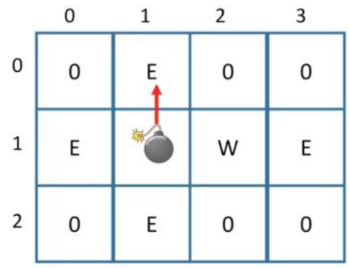
- 需要知道(i-1, j)格放一个炸弹向上能炸死的敌人数
- 原来要求 (i, j)格放一个炸弹向上能炸死的敌人数
- 子问题
- 状态：
  - Up[i][j]表示**(i, j)格放**一个炸弹向上能炸死的敌人数



动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

- 设Up[i][j]表示 (i, j)格放一个炸弹向上能炸死的敌人数

$$
Up[i][j] = \begin{cases} Up[i-1][j], & \text{如果}(i, j)\text{格是空地} \\ Up[i-1][j] + 1, & \text{如果}(i, j)\text{格是敌人} \\ 0, & \text{如果}(i, j)\text{格是墙} \end{cases}
$$

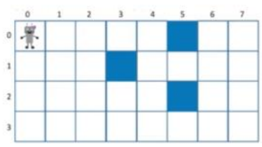


- 初始条件：第0行的Up值和格子内容相关
  - Up[0][j] = 0, 如果(0,j)格不是敌人
  - Up[0][j] = 1, 如果(0,j)格是敌人

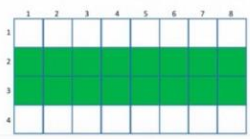
动态规划组成部分四：计算顺序

- 逐行计算
- Up[0][0], Up[0][1], …, Up[0][n-1]
- Up[1][0], Up[1][1], …, Up[1][n-1]
- …
- Up[m-1][0], Up[m-1][1], …, Up[m-1][n-1]
- 时间复杂度O(MN)，空间复杂度O(MN)

坐标型动态规划总结



- 给定输入为序列或者网格/矩阵
- 动态规划状态下标为序列下标i或者网格坐标(i, j)
  - f[i]: 以第i个元素结尾的某种性质
  - f[i][j]：到格子(i, j)的路径的性质
- 初始化设置f[0]的值/f[0][0..n-1]的值
- 二维空间优化：如果f[i][j]的值只依赖于当前行和前一行，则可以用滚动数组节省空间



LintCode 664 Counting Bits

- 题意：
- 给定N，要求输出0, 1, …, N的每个数的二进制表示里的1的个数

- 例子：
- 输入：5
- 输出：[0, 1, 1, 2, 1, 2]
- 0：0
- 1：1
- 2：10
- 3：11
- 4：100
- 5：101

题目分析

- 对于每个数0<=i<=N, 直接求i的二进制表示里有多少个1

- 二进制表示算法：
  - 第一步: i mod 2 是最低位的bit
  - 第二步: i ← floor(i/2)，如果i=0, 结束，否则回到第一步

- 时间复杂度：O(NlogN)
  - 2个数有1位二进制
  - 2个数有2位二进制
  - 4个数有3位二进制
  - 8个数有4位二进制
  - …
  - 大约N/2个数有$\log_2 N$位二进制

子问题

- 要求N的二进制表示中有多少1

- 在N的二进制去掉最后一位N mod 2，设新的数是Y=(X>>1) (右移一位)

- 要知道Y的二进制表示中有多少1

(5>>1) = 2

5>>1 == 2

5>>2 == 1

5>>3 = 0

N>>1

- 子问题

- 状态：设f[i]表示i的二进制表示中有多少个1

知识点：和位操作相关的动态规划一般用值作状态

动态规划组成部分二：转移方程

九章算法

- 设f[i]表示i的二进制表示中有多少个1

$$f[i] = f[i>>1] + (i \bmod 2)$$

i的二进制表示中有多少个1

i的二进制表示中去掉最后一位，剩下的1的个数

i的二进制表示中最后一位

动态规划组成部分三：初始条件和边界情况

九章算法

- 设f[i]表示i的二进制表示中有多少个1
- f[i] = f[i>>1] + (i mod 2)
- 初始条件：f[0] = 0

动态规划组成部分四：计算顺序

九章算法

- f[0], f[1], f[2], …, f[N]
- 时间复杂度O(N)
- 空间复杂度O(N)