模式识别导论第一次作业

翁晨阳

1. 请描述最小错误率贝叶斯决策的计算步骤（包含已知条件以及求解任务）；给出一种两类情形下的最小错误率贝叶斯决策规则。

已知条件： 类别，$\omega_i, i = 1, \dots, c$；特征矢量，$X = [x_1, \dots, x_d] \in R^d$；概率密度函数，$p(X|\omega_i)$；先验概率，$P(\omega_i), \sum_{i=1}^{c} P(\omega_i) = 1$。

求解任务： 如果观察到一个样本x，应该将其分到哪一类才最合理

计算步骤：

计算后验概率

$$P(\omega_i|X) = \frac{p(X|\omega_i)P(\omega_i)}{p(X)} = \frac{p(X|\omega_i)P(\omega_i)}{\sum_{j=1}^{c} p(X|\omega_j)P(\omega_j)}$$

决策规则:$i = \underset{j=1,2,\dots,c}{argmax}\, p(\omega_j|X), X \in \omega_i$

两类情况下的贝叶斯决策规则：

一张RGB的遥感影像，要通过像素将水域和陆地进行区分$\omega_1 = 水域$，$\omega_2 = 陆地$，特征矢量 $X = [r, g, b]$已知概率密度函数$p(X|\omega_i)$，先验概率$P(\omega_i)$。

计算$p_i = p(X|\omega_i)P(\omega_i), i = 1, 2$

决策规则：$i = \underset{j=1,2}{argmax}\, p(\omega_j|X), X \in \omega_i$

2. 请描述最小风险贝叶斯决策的计算步骤（包含已知条件以及求解任务）；给出一种两类情形下的最小风险贝叶斯决策规则。

已知条件： 类别，$\omega_i, i = 1, \dots, c$；特征矢量，$X = [x_1, \dots, x_d] \in R^d$；先验概率，$P(\omega_i), \sum_{i=1}^{c} P(\omega_i) = 1$；概率密度函数，$p(X|\omega_i)$；决策空间包含a个决策$\alpha_i, i = 1, 2, \dots, a$；损失函数$\lambda(\alpha_i|\omega_i)$，简记为$\lambda_{ij}$。

求解任务： 如果观测到一个样本x，应该将其分到哪一类风险最小

计算步骤：

1. 计算后验概率：$P(\omega_j|X), j = 1, 2, \dots, c$
2. 利用决策计算风险：

$$R(\alpha_i|X) = E[\lambda(\alpha_i|\omega_j)] = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i|\omega_j)P(\omega_j|X), i = 1, 2, \dots, a$$

3. 在各种决策中选择风险最小的决策：$a = \underset{j=1,2,\dots,a}{argmin}\, R(\alpha_j|X)$

两类情况下的最小风险贝叶斯决策：

1. 计算后验概率：$P(\omega_i|X), i=1,2$
2. 利用决策计算风险：

$$R(\alpha_i|X) = E[\lambda(\alpha_i|\omega_j)] = \sum_{j=1}^{c} \lambda(\alpha_i|\omega_j) P(\omega_j|X), i=1,2$$

3. 在各种决策中选择风险最小的决策：$a = \underset{j=1,2}{argmin} R(\alpha_j|X)$

3. 对于c类问题，假定各类条件概率密度函数均为多元正态分布。最小错误率贝叶斯决策的框架下，请写出其判别函数；请分别指出在什么情况下可以获得最小距离分类器，在什么情况下可以得到线性判别函数。

判别函数：

$$\begin{aligned} g_i &= \ln(p(X|\omega_i)) + \ln(P(\omega_i)) \\ &= -\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T \Sigma_i^{-1}(x-\mu_i) - \frac{d}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(|\Sigma_i|) + \ln(P(\omega_i)), (i=1,2,\ldots,c) \end{aligned}$$

最小距离分类器：

条件：$\Sigma_i = \sigma^2 I, i=1,2,\ldots,c$，先验概率相等：$P(\omega_i) = P(\omega_j)$

在此情况下判别函数可简化为：$g_i(X) = -\frac{1}{2\sigma^2}\|X-\mu_i\|_2^2$

此时决策规则只需要计算X到各类均值向量的欧氏距离平方：$\underset{i=1,2,\ldots,c}{argmin}|X-\mu_i\|_2^2$

线性判别函数：

条件：$\Sigma_i = \sigma^2 I, i=1,2,\ldots,c$，先验概率不相等：$P(\omega_i) \neq P(\omega_j)$

此时判别函数为：

$$\begin{aligned} g_i(X) &= \frac{1}{\sigma^2}\mu_i^T X - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T\mu_i + \ln(P(\omega_i)) \\ &= \mathbf{w}_i^T X + \mathbf{w}_{i0} \end{aligned}$$

$$\text{其中}\begin{cases} \mathbf{w}_i = \frac{1}{\sigma^2}\mu_i \\ \mathbf{w}_{i0} = \ln(P(\omega_i)) - \frac{1}{2\sigma^2}\mu_i^T\mu_i \end{cases}$$

判别函数$g_i(X)$是X的线性函数

4. 针对概率密度函数参数估计问题，请描述最大似然估计的计算步骤（包含已知条件以及求解任务）。

已知条件：

1. 前提条件
    1. 独立同分布假设
    2. $p(X|\omega_i)$具有确定的函数形式，只是其中的参数θ未知
    3. 各类样本只包含本类的分布信息
2. 给定条件：样本集$D = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$

求解任务：

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{argmax}\, H(\theta)$$

$$H(\theta) = \ln\left(l(\theta)\right) = \ln \prod_{i=1}^{b} p(X_i|\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(p(X_i|\theta)\right)$$

计算步骤：

$$\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\text{对于多维情况}\theta = [\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m]^T\text{，梯度向量为零}$$

$$\bigtriangledown_\theta (H(\theta)) = \sum_{k=1}^{N} \bigtriangledown_\theta \ln p(X_k|\theta) = 0$$

5. 针对样本的类条件概率密度函数估计问题，请描述贝叶斯估计的计算步骤（包含已知条件以及求解任务）。

已知条件： 样本集$D = \{X_1, X2, \ldots, X_n\}$

求解任务：

使后验概率$p(\theta|D)$最大，即

$$\underset{\theta}{argmax}\, p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)}$$

计算步骤：

1. 根据全概率公式

$$p(D) = \int_\theta p(D|\theta)p(\theta)d\theta$$

2. 假定数据是独立采样获取

$$p(D|\theta) = p(X_1, X_2, \ldots, X_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta)$$

3. 可得贝叶斯参数估计中的后验概率密度函数

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{\int_\theta p(D|\theta)p(\theta)d\theta} = \frac{\prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta)p(\theta)}{\int_\theta \prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta)p(\theta)} = \alpha \prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta)p(\theta)$$

4. 得到关于θ的平均估计量

$$\hat{\theta} = \int_\theta \theta\, p(\theta|D)d\theta$$

6. 请指出最大似然估计和贝叶斯估计的不同之处。

最大似然估计：

在极大似然估计中假设θ是确定的，由此推断出$p(\theta)$是常数，$p(D)$是固定的，将问题简化为给定参数θ能够获得样本集D的最大可能性。

贝叶斯估计：

将待估计的参数视为一个随机变量，其中的首要任务是根据观测数据（样本集D）对参数的分布进行估计（使用贝叶斯决策的方法）。