TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Maschinenwesen – IFKM, Professur für Nichtlineare Festkörpermechanik

Numerische Methoden I – FEM/REM

Dr.-Ing. Markus Kästner
ZEU 353
Tel.: 0351 463 32656
E-Mail: Markus.Kaestner@tu-dresden.de

Dresden, 23.10.2013

Tensornotation

- Tensoren 1. Stufe = Vektor, Bsp.: Ortsvektor, Verschiebungsvektor

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i = x_k \mathbf{e}_k \qquad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i$$

- Tensoren 2. Stufe, Bsp.: Spannungstensor, Vezerrungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

- Beispiel: Skalarprodukt von zwei Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tensoren = physikalische Größen $\rightarrow$ feste Transformationsbeziehungen bei Wechsel des Bezugssystems

Tensornotation

- Tensoren 1. Stufe = Vektor, Bsp.: Ortsvektor, Verschiebungsvektor

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}_i = x_k \mathbf{e}_k \qquad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \mathbf{e}_i = u_i \mathbf{e}_i$$

- Tensoren 2. Stufe, Bsp.: Spannungstensor, Vezerrungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

- Beispiel: Skalarprodukt von zwei Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Tensoren = physikalische Größen $\rightarrow$ feste Transformationsbeziehungen bei Wechsel des Bezugssystems

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$ $\rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_{\mathrm{L}} = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}\left(\varepsilon_{mn}\right), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$ $\qquad \rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_{\mathrm{L}} = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}\left(\varepsilon_{mn}\right), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_\mathrm{L} = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$ $\quad \rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}\left(\varepsilon_{mn}\right), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\begin{aligned} \sigma_{kl,k} + \rho f_l &= \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \\ \sigma_{kl} &= \sigma_{lk} \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_\mathrm{L} = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$

$$\rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}\left(\varepsilon_{mn}\right), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_{\mathrm{L}} = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$

$$\rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}\left(\varepsilon_{mn}\right), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, 1D-Spezialfall

Impuls- und Drehimpulsbilanz mit $(\ )_{,k} = \frac{\partial(\ )}{\partial x_k}$

$$\sigma_{kl,k} + \rho f_l = \rho a_l, \quad \text{Statik}: \ \sigma_{kl,k} + \rho f_l = 0 \qquad \frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$$

kinetische Annahmen:

- einachsiger Spannungszustand $\sigma_{11} = \sigma_{xx} = \sigma; \ \sigma_{ij} = 0$ sonst
- einachsige Belastung $f_1 = f_x = f = g$
- homogene Spannungsverteilung im Querschnitt $\sigma =$ konst.

$\rightarrow$ Längskraft $F_L = \int \sigma \, dA = \sigma A$ und Linienlast $q = \int \rho g \, dA = \rho g A$

$$\rightarrow \frac{dF_L}{dx} + q = 0$$

Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen (Kinematik)

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \qquad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon = \frac{du}{dx}$$

kinematische Annahmen:

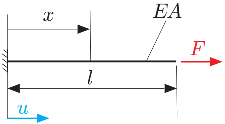
- Verschiebung in Richtung der Stabachse $u_1 = u_x = u$
- ebene Querschnitte

Konstitutive Beziehungen (Materialverhalten)

$$\sigma_{kl} = \sigma_{kl}(\varepsilon_{mn}), \quad \text{lineare Elastizität}: \ \sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn} \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel

- Kontinuum $\rightarrow \Pi$ ist ein Funktional, notwendige Bed.: $\delta\Pi = 0$
- Bsp.: Zugstab belastet durch konstante Einzelkraft



- Reduktion auf diskretes System $\delta\Pi = 0 \rightarrow \frac{d\Pi}{du} = 0$

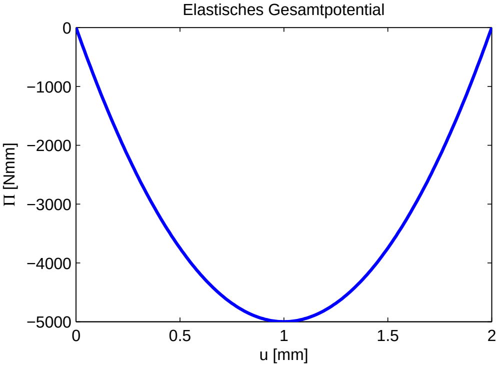
$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EAu'(x)^2 \, dx - Fu(l) \quad \text{mit} \quad u'(x) = \varepsilon = \frac{u(l)}{l} = \text{konst.}$$

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l^2} \, dx - Fu(l) = \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l} - Fu(l)$$

- notwendige Bedingung für stationären Wert (Minimum)

$$\frac{d\Pi}{du} = \frac{EA}{l} u(l) - F = 0 \quad \rightarrow u(l) = \frac{Fl}{EA}$$

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel



$$\Pi = \frac{1}{2} EA \frac{u^2}{l} - Fu$$

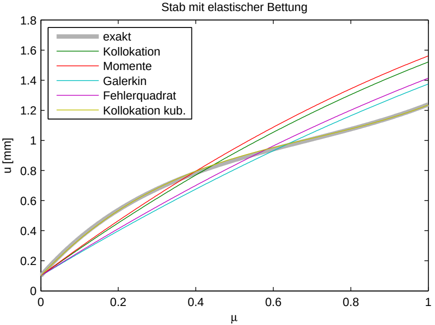
Näherungsverfahren auf Basis der starken Form – Übersicht

- Einarbeitung der RB in den Ansatz $\rightarrow \tilde{u} = g_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x) u_i$
- Gewichtetes Residuum $\int\limits_0^l \underbrace{(EA\tilde{u}''(x) + p(x))}_{\eta(x)} w_i(x)\, dx = 0 \rightarrow i = 1 \ldots n$ Gleichungen für u_i

Verfahren	Wichtungsfunktion	GLS (n Gleichungen) aus
Kollokation	Dirac-Impuls $w_i(x) = \delta\,(x - \xi_i)$	$\eta(\xi_i) = 0$ $\rightarrow EAu''(\xi_i) + p(\xi_i) = 0$
Methode der Momente	n linear unabhängige Funktionen $w_i(x) = x^i,\ i = 0 \ldots n-1$	$\int\limits_0^l \eta(x) w_i(x)\, dx = 0$
Galerkin-Verfahren	Basisfunktionen des Ansatzes $w_i(x) = g_i(x)$	$\int\limits_0^l \eta(x) g_i(x)\, dx = 0$
Minimum des Fehlerquadratintegrals	$w_i(x) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial u_i}$	$\int\limits_0^l \eta^2(x)\, dx \;\rightarrow\;$ min

ξ_i . . . diskrete Kollokationspunkte

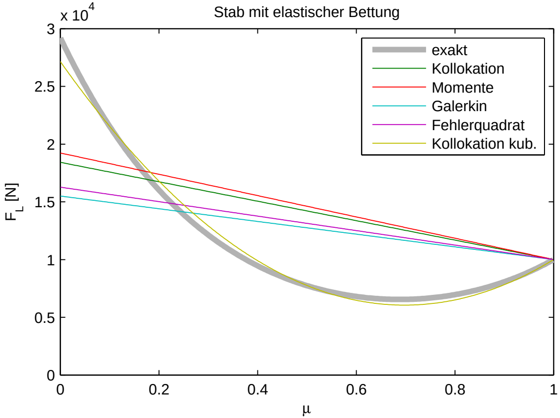
Näherungsverfahren auf Basis der starken Form – Beispiel Zugstab mit elastischer Bettung



$$u_{1\ \mathrm{Koll},\xi=0.5} = 1.8421\ \mathrm{mm}$$
$$u_{1\ \mathrm{Mom},w=1} = 1.9231\ \mathrm{mm}$$
$$u_{1\ \mathrm{Galerkin}} = 1.5500\ \mathrm{mm}$$
$$u_{1\ \mathrm{FQ}} = 1.6270\ \mathrm{mm}$$

Lösung mit kubischem Ansatz s. Skript S. 7ff

Näherungsverfahren auf Basis der starken Form – Beispiel Zugstab mit elastischer Bettung



Zusammenfassung 2. Vorlesung

- Näherungsweise Lösung von RWA
- Ansatz für Feldgröße, z.B. Verschiebung
- Differentialgleichung und RB i. A. nicht mehr an jedem Punkt exakt erfüllbar

$\rightarrow$ Residuen $\eta_i(x)$

- Ausgangspunkt für Näherungsverfahren: Methode der Gewichteten Residuen
  - Starke Form
  - Schwache Form
  - Inverse Form
- Ziel: GLS zur Berechnung der Ansatzfreiwerte
- Näherungsverfahren definiert durch:
  - Form der gewichteten Residuen (stark/schwach/invers)

  $\rightarrow$ Anforderungen an Ansatzfunktion
  - Wahl der Wichtungsfunktion