Numerische Methoden I – FEM/REM

Dr.-Ing. Markus Kästner
ZEU 353
Tel.: 0351 463 32656
E-Mail: Markus.Kaestner@tu-dresden.de

Dresden, 30.10.2013

Zusammenhänge I

- Überschieben der DGL mit beliebiger Wichtungsfunktion w

$$0 = \int_0^l (EAu'' + q)\, w\, dx = \int_0^l EAu'' w\, dx + \int_0^l qw\, dx$$

$$0 = \left[EAu'w\right]_0^l - \int_0^l EAu'w'\, dx + \int_0^l qw\, dx$$

- Spezielle Wahl der Ansatzfunktion $w \rightarrow \delta u$, $\delta u(0) = 0$; $EAu'(l) = F$

$$\delta W = \int_0^l EAu'\delta u'\, dx - \int_0^l q\delta u\, dx - F\delta u(l) = 0$$

$$\delta W = \int_0^l \sigma\delta\varepsilon\, Adx - \int_0^l q\delta u\, dx - F\delta u(l) = 0$$

Zusammenhänge II

- Existenz eines Formänderungspotentials $\sigma = \frac{d\Pi_{\mathrm{i}}^*}{d\varepsilon}$
- Existenz eines Potentials der äußeren Lasten $F(u) = \frac{d\Pi_{\mathrm{a}}}{du}$

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \int_0^l \sigma \delta\varepsilon \, A dx - \int_0^l q \delta u \, dx - F \delta u(l) = 0 \\
&= \int_0^l \underbrace{\frac{d\Pi_i^*}{d\varepsilon} \delta\varepsilon}_{\delta\Pi_i^*} \, A dx - \int_0^l \underbrace{\frac{d\Pi_{\mathrm{a},q}^*}{du} \delta u}_{\delta\Pi_{\mathrm{a},q}^*} \, dx - \underbrace{\frac{d\Pi_{\mathrm{a},F}}{du(l)} \delta u(l)}_{\delta\Pi_{\mathrm{a},F}} = 0 \\
&= \int_0^l \delta\Pi_i^* \, A dx - \int_0^l \delta\Pi_{\mathrm{a},q}^* \, dx - \delta\Pi_{\mathrm{a},F} = 0 \\
\delta\Pi &\overset{dV=\text{konst.}}{=} \delta\Pi_i - \delta\Pi_a = 0
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung

Differentielle Formulierung

Gewichtete Form

$w = \delta u$
part. Int.

Prinzip der virtuellen Arbeit
$\delta W = 0$

$\Pi_\mathrm{i}, \Pi_\mathrm{a}$

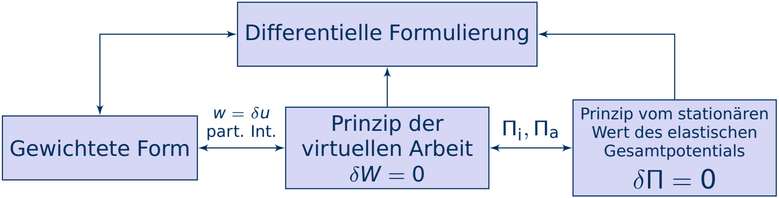
Prinzip vom stationären Wert des elastischen Gesamtpotentials
$\delta\Pi = 0$

$$\int_0^l \left(EAu'' + q\right) w \, dx = 0$$

$$\Pi = \int_0^l \tfrac{1}{2} EAu'^2 \, dx - \int_0^l qu \, dx - Fu(l)$$

$$\delta W = \int_0^l EAu' \delta u' \, dx - \int_0^l q\delta u \, dx - F\delta u(l) = 0$$

Zusammenfassung



$$\int_0^l (EAu'' + q)\, w \, dx = 0$$

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EA{u'}^2 \, dx - \int_0^l qu \, dx - Fu(l)$$

$$\delta W = \int_0^l EAu' \delta u' \, dx - \int_0^l q \delta u \, dx - F \delta u(l) = 0$$

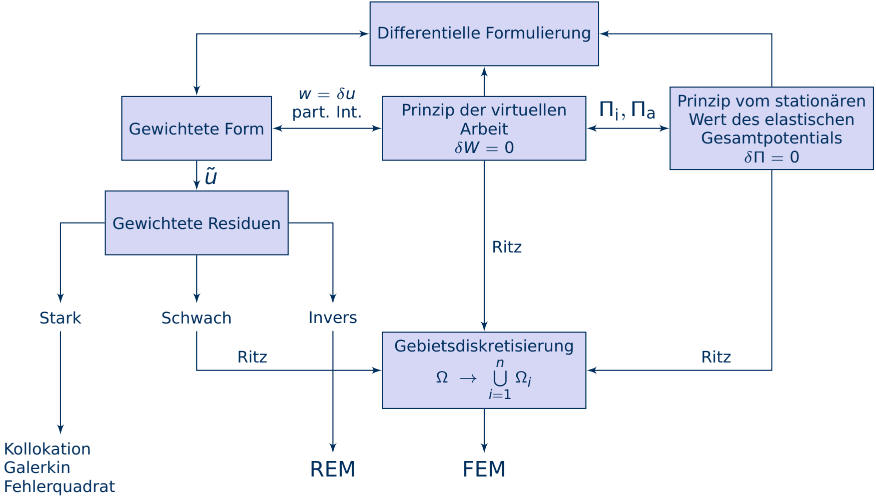
Näherungsweise Lösung

- drei äquivalente Formulierungen der Randwertaufgabe

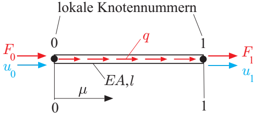
$\rightarrow$ Einsetzen eines Ansatzes $\tilde{u}$ für Verschiebung u

- geringere Differenzierbarkeitsforderungen bei P.v.s.W.d.e.G. und P.d.v.A. erweitern den Raum der möglichen Lösungen

Zusammenfassung



Stabelement – Herleitung des Elementgleichungssystems



1. Schwache Form (hier elastisches Gesamtpotential)

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a \overset{\text{Stabelement}}{=} \int_0^1 \frac{1}{2} EA u'^2(\mu) l d\mu - \int_0^1 q(\mu) u(\mu) l d\mu - F_0 u_0 - F_1 u_1 \rightarrow \text{Stat.}$$

2. Ansatz

$$u(\mu) = N_0 u_0 + N_1 u_1 = (1-\mu)\, u_0 + \mu u_1 \qquad u'(\mu) = \frac{du(\mu)}{dx} = \frac{du(\mu)}{d\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{l}(u_1 - u_0)$$

3. Einsetzen des Ansatzes und Integration

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\left(u_1^2 - 2u_0u_1 + u_0^2\right) - \int_0^1 q(\mu)\left[(1-\mu)\, u_0 + \mu u_1\right] l d\mu - F_0 u_0 - F_1 u_1$$

4. Gleichgewicht: notwendige Bedingung $\delta\Pi = 0 \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial u_0} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = 0$

Stabelement – Herleitung des Elementgleichungssystems

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\left(u_1^2 - 2u_0u_1 + u_0^2\right) - \int_0^1 q(\mu)\left[(1-\mu)\,u_0 + \mu u_1\right] l d\mu - F_0u_0 - F_1u_1$$

- notwendige Bedingung liefert Gleichungssystem

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_0} = \frac{EA}{l}(u_0 - u_1) - \int_0^1 q(\mu)(1-\mu)\, l d\mu - F_0 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{EA}{l}(u_1 - u_0) - \int_0^1 q(\mu)\mu l d\mu - F_1 = 0$$

- Gleichungssystem in Matrixform

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}}_{\overset{e}{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}} \underbrace{\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}}_{\overset{e}{\underline{\mathbf{u}}}} = \underbrace{\int_0^1 q(\mu)\begin{pmatrix} 1-\mu \\ \mu \end{pmatrix} l d\mu}_{\overset{e}{\underline{\mathbf{P}}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix}}_{\overset{e}{\underline{\mathbf{F}}}}$$

$\overset{e}{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}$ . . . Elementsteifigkeitsmatrix $\overset{e}{\underline{\mathbf{u}}}$ . . . Elementverformungsvektor

$\overset{e}{\underline{\mathbf{F}}}$ . . . Elementlastvektor $\overset{e}{\underline{\mathbf{P}}}$ . . . Vektor der äquivalenten Knotenlasten

Zusammenfassung 3. Vorlesung

- Ausgangspunkt für Näherungsverfahren: Gewichtete Residuen
  - Starke Form
  - Schwache Form
  - Inverse Form
- Grundzüge FEM
  - Ausgangspunkt: Schwache Form
  - Aufteilung des Berechnungsgebietes Ω in finite Elemente
  - Einfache Ansätze für finite Elemente
  - $\rightarrow$ Diskretisierung und Algebraisierung der RWA
- FEM für Fachwerke
  - Herleitung der Elementvektoren und -matrizen
  - Assemblierung des Gesamtgleichungssystems
  - Einbau von Randbedingungen
  - 2D-Fachwerke

Zusammenfassung 3. Vorlesung

- Ausgangspunkt für Näherungsverfahren: Gewichtete Residuen
  - Starke Form
  - Schwache Form
  - Inverse Form
- Grundzüge FEM
  - Ausgangspunkt: Schwache Form
  - Aufteilung des Berechnungsgebietes Ω in finite Elemente
  - Einfache Ansätze für finite Elemente

  $\rightarrow$ Diskretisierung und Algebraisierung der RWA
- FEM für Fachwerke
  - Herleitung der Elementvektoren und -matrizen
  - Assemblierung des Gesamtgleichungssystems
  - Einbau von Randbedingungen
  - 2D-Fachwerke