Skript Numerische Methoden I

Finite-Elemente-Methoden und Randelemente-Methoden

Christian Kroh

16. November 2013, Dresden

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Randwertaufgaben (RWA)

1. Formulierung und näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben (RWA)

1.1. Randwertaufgabe (RWA)

- besteht aus
  - **Differentialgleichung (DGL)**
    $\underline{D}(\underline{u}(\underline{x})) + \underline{\rho}(\underline{x}) = \underline{0} \qquad \forall x \in \Omega$
  - **Randbedingungen (RB)**
    $\underline{D_1}(\underline{u}(\underline{x})) + \underline{r_1}(\underline{x}) = \underline{0} \qquad \forall x \in \Gamma_1$
  - **Differentialoperatoren**
    $\underline{D}(...), (\underline{D_1}(...), (\underline{D_2}(...), ...$ Differentialoperatoren
  - $\underline{x}$ ... Ortsvektor
  - $\underline{\rho}, \underline{r_i}$ ... rechte Seite
  - Γ_1 ... Rand mit <u>wesentlichen</u> Randbedingungen
  - Γ_2 ... Rand mit <u>natürlichen</u> Randbedingungen
    $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$
    (für jede Koordinatenwichtung)
- analytische Lösung nur für einfache Problemstellungen
- Annahme:
  - kinematische Annahmen (Bernoulli)
  - kinetische Annahmen

1.2. Formulierung der Randwertaufgabe

Beispiel Zugstab
(Graphik Zugstab einfügen)

1.2.1. Differentielle Formulierung

Auswertung von Bilanzgleichungen an einem infinitessimalen Volumenelement

- Gleichgewichtsbedingung:
  $\downarrow -F_L + F_L + dF_L + q\,dx = 0$

  $\frac{dF_L}{dx} = -q$

  $F_L' = -q$

- kinetische Annahme:
  $F_L = \sigma \cdot A$

- kinematische Annahme
  $\epsilon = \frac{du}{dx} = u'$

$\Rightarrow$ konstitutive Beziehung (Material)
  $\sigma = E \cdot \epsilon$

$\Rightarrow$ Einsetzen in die Grundgleichung
  $F_L = \sigma \cdot A = E \cdot \epsilon \cdot A \quad \Rightarrow \quad F_L' = (E \cdot A \cdot u')' = -q$

Annahme: konstanter Querschnitt

$E\,A\,u'' + q = 0 \qquad \forall x \in [0,l]$

Randbedingungen

- wesentliche RB: $u(x=0) = \tilde{u} = 0$
- natürliche RB: $F_L(x=l) = F = 0$
  $E\,A\,u'(x=l) = F = 0$

Zuordnung

$D = E\,A(...)''$
$D_1 = 1(...)$
$D_2 = E\,A(...)'$
$\Omega : x \in [0,l]$
$\Gamma_1 : x = 0$
$\Gamma_2 : x = l$

1.2.2. Variationsformulierung

Grundlage : Variationsrechnung Verformung eines elastischen Systems, sodass eleastisches Gesamtpotential extremal (Minimum)

Voraussetzungen:

- elastisches Materialverhalten
  $\Gamma = \frac{d\Pi_i}{d\epsilon}$
- Potential der äußeren Lasten
  $F = \frac{d\Pi_\epsilon}{du}$

Variationsformulierung für Mechanik Prinzip vom stationären Wert des elastischen Gesamtsystems

Vorgaben zur Herleitung der DGL und RB:

- Aufstellen des elastischen Gesamtpotentialfelds
- suchen des stationären Werts $\Pi \rightarrow$ min, max

Kontinuum funktional d.h. Funktion von Funktionen
  $\Pi = \Pi(u(x), u'(x), x) \rightarrow min, max$

notwendige Bedingung für stionären Wert (Extremwert)

$d\,\Pi = 0$ $\qquad$ $d\,\Pi$ ... erste Variation von Π

Bsp: Stabproblem - Aufstellen des Potentials

$\Pi = \Pi_i - \Pi_a$

$\Pi_i = \Pi_f$ ... Veränderungspotential

$\Pi_i = \int\limits_{\Omega} \Pi_i^* \, dV$

1.2.3. Prinzip der virtuellen Arbeit

- elektrisches Gesamtpotential: Einschränkung auf elastische Potentiallasten

$\Rightarrow$ Prinzip der virtuellen Arbeit ist allgemein anwendbar = Prinzip der virtuellen Verschiebung

  - virtuelle Arbeit $\boldsymbol{\partial W}$ wird an einem System verrichtet (durch eine geringfügige Störung ∂u des Verschiebungsfeldes u)
  - Eigenschaften von $\boldsymbol{\partial u}$ **= virtuelle Verschiebung**
    - beliebig
    - infinitessimal
    - kinematisch zulässig ($\partial u = 0$)
  - Gleichgewicht (GGW) entspricht der Forderung
    $\partial W = 0$
    $\partial W = \partial W_{innen} + \partial W_{außen} = 0$

Beispiel: Stab $\quad \partial W = \int G \partial \rho \, dV - \int\limits_0^l q \, du \, dx - F du(l)$

beliebiges Materialverhalten, keine Einschränkungen

$\Rightarrow$ GGW: $\partial W = 0$

$\Gamma = E\epsilon$, $\epsilon = u'$, $dV = Ad$

$$\boldsymbol{\partial W = \int\limits_0^l EAu'\partial u' \, dx - \int\limits_0^l q\partial u \, dx - F du(l) = 0}$$

$\Rightarrow$ partielle Integration, $\partial u(0) = 0$, sonst ∂u beliebig

liefert

- $EAu'' + q = 0$ $\qquad$ DGL
- $EAu'(l) - F = 0$ $\qquad$ natürliche Randbedingung

1.3. Näherungsweises Lösen einer RWA

Methode der gewichteten Residuen

- Ansatz für Feldvariable, z.B. Verschiebung
  $u(x) \sim \tilde{u}(x)$
  $\tilde{u}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_i(x)\, u_i$
  g_i ... Basisfunktion
  u_i ... Ansatzfreiwerte

- DGL und RB werden im Ansatz nicht mehr exakt ermittelt
  $\Rightarrow$ Residuen $\eta_i(x)$

  $D(\tilde{u}(x)) + \rho(x) = \eta(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Gamma$
  $D_1(\tilde{u}(x)) + r_1(x) = \eta_1(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Gamma_1$
  $D_L(\tilde{u}(x)) + r_L(x) = \eta_L(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \Gamma_L$

  - Multiplikation der Residuen der DGL $\eta(x)$

  $\Rightarrow$ Näherungslösung erfüllt Forderung $\int\limits_W \eta(x)\, w(x)\, dx = 0$

  - Ziel: GLS zur Berechnung der Freiwerte u_i
  - Verfahren definiert durch:
    * Form der gewichteten Residuen
    * Wahl der Wichtungsfunktion

1.3.1. Starke Form

$\boldsymbol{\int\limits_0^l \eta(x)\, w(x)\, dx = 0}$

Beispiel: Zugstab

- Voraussetzungen: Ansatz ...

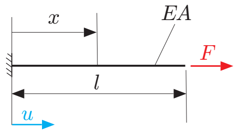
  - zweimal stetig (nicht trivial) differenzierbar
  - alle Randbedingungen ($\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$)

  $\Rightarrow$ starke Form

- GLS für Freiwerte u_i
  $\Rightarrow$ verschiedenste Lösungsverfahren, durch unterschiedliche Wahl der Wichtungsfunktion $u(x)$ (z.B. Kollokation, Methode der Momente, Galerkin Verfahren, Minimum des Fehlerquadratintegrals)
  Besipiel: DIRAC-Funktion (Kollokation)
  $W(x) = \partial(x - \xi_i) \qquad \partial = \begin{cases} \infty & x = \xi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
  $\int \eta(x)\, \partial(x - \xi)\, dx = \eta(\rho)$

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel

- Kontinuum $\rightarrow \Pi$ ist ein Funktional, notwendige Bed.: $\delta\Pi = 0$
- Bsp.: Zugstab belastet durch konstante Einzelkraft



- Reduktion auf diskretes System $\delta\Pi = 0 \rightarrow \frac{d\Pi}{du} = 0$

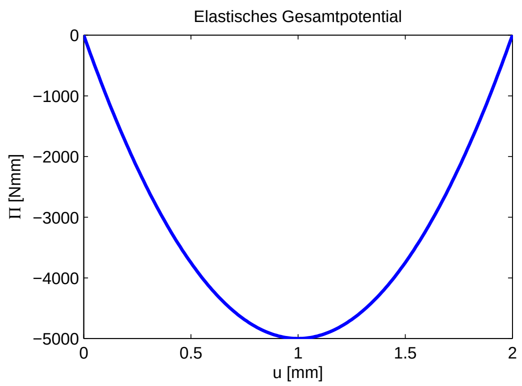
$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EAu'(x)^2 \, dx - Fu(l) \quad \text{mit} \quad u'(x) = \varepsilon = \frac{u(l)}{l} = \text{konst.}$$

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l^2} \, dx - Fu(l) = \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l} - Fu(l)$$

- notwendige Bedingung für stationären Wert (Minimum)

$$\frac{d\Pi}{du} = \frac{EA}{l} u(l) - F = 0 \quad \rightarrow u(l) = \frac{Fl}{EA}$$

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel



$\Pi = \frac{1}{2} EA \frac{u^2}{l} - Fu$

Näherungsverfahren auf Basis der starken Form – Übersicht

- Einarbeitung der RB in den Ansatz $\rightarrow \tilde{u} = g_0(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) u_i$
- Gewichtetes Residuum $\int_0^l \underbrace{(EA\tilde{u}''(x) + p(x))}_{\eta(x)} w_i(x) \, dx = 0 \rightarrow i = 1 \ldots n$ Gleichungen für u_i

Verfahren	Wichtungsfunktion	GLS (n Gleichungen) aus
Kollokation	Dirac-Impuls $w_i(x) = \delta\,(x - \xi_i)$	$\eta(\xi_i) = 0$ $\rightarrow EA''(\xi_i) + p(\xi_i) = 0$
Methode der Momente	n linear unabhängige Funktionen $w_i(x) = x^i, \; i = 0 \ldots n-1$	$\int_0^l \eta(x) w_i(x) \, dx = 0$
Galerkin-Verfahren	Basisfunktionen des Ansatzes $w_i(x) = g_i(x)$	$\int_0^l \eta(x) g_i(x) \, dx = 0$
Minimum des Fehlerquadratintegrals	$w_i(x) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial u_i}$	$\int_0^l \eta^2(x) \, dx \rightarrow \min$

ξ_i ... diskrete Kollokationspunkte

1.4. Übung 1

Numerische Methoden 1 – FEM/REM WS 2013/2014
Dr.-Ing. M. Kästner

Übung 1

Zugstab mit elastischer Bettung – Methode der gewichteten Residuen (starke Form)

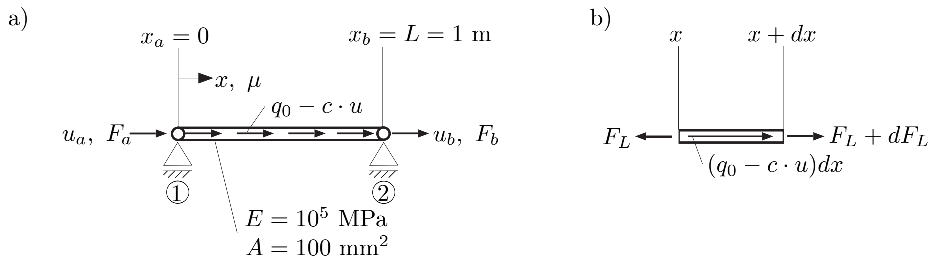


Abbildung 1: a) Zugstab mit elastischer Bettung, b) differentielles Stabelement

Der in Abb. 1 a) dargestellte Zugstab ist am Knoten 1 mit der Verschiebung $u_a = 0.1$ mm, am Knoten 2 mit der Kraft $F_b = 10^4$ N und der konstanten Streckenlast $q_0 = 100$ N/mm belastet. Unter Berücksichtigung der verschiebungsproportionalen elastischen Bettung $q_c = c \cdot u$ ist anhand eines differentiellen Stabelements die Differentialgleichung (DGL) der Randwertaufgabe (RWA) herzuleiten.
Mittels der „Methode der gewichteten Residuen“ ist mit dem polynomialen Verschiebungsansatz

$$u(\mu) = u_0 + u_1\mu + u_2\mu^2, \text{ mit } \mu = x/L$$

eine Näherungslösung zu ermitteln. Bestimmen Sie die Ansatzfreiwerte mittels:

1. Kollokationsmethode
2. Methode der Momente
3. Verfahren von Galerkin
4. Verfahren vom Minimum des Fehlerquadratintegrals

für die Fälle a) $c = 0$ N/mm^2 und b) $c = 100$ N/mm^2 und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Analytische Lösung:

$c = 0$:

$$u(x) = -\frac{q_0}{2EA}x^2 + C_0 x + C_1$$

mit

$$C_0 = \frac{F_b + q_0 L}{EA}$$
$$C_1 = u_a$$

$c \neq 0$:

$$u(x) = C_0 + C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x},\ \beta^2 = \frac{c}{EA}$$

mit

$$C_0 = \frac{q_0}{c}$$
$$C_1 = \frac{(u_a - \frac{q_0}{c})e^{-2\beta L} + \frac{F_b}{\beta e^{\beta L} EA}}{1 + e^{-2\beta L}}$$
$$C_2 = \frac{u_a - \frac{q_0}{c} - \frac{F_b}{\beta e^{\beta L} EA}}{1 + e^{-2\beta L}}$$

1.5. Übung 1 - Lösung

usw.

Teil II.

Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM)

Teil III.

Einführung in die Randelemente-Methode (REM)