

Skript Numerische Methoden I

Finite-Elemente-Methoden und Randelemente-Methoden

Christian Kroh

16. November 2013, Dresden

Inhaltsverzeichnis

I. Randwertaufgaben (RWA)	3
1. Formulierung und näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben (RWA)	4
1.1. Randwertaufgabe (RWA)	4
1.2. Formulierung der Randwertaufgabe	4
1.2.1. Differentielle Formulierung	4
1.2.2. Variationsformulierung	5
1.2.3. Prinzip der virtuellen Arbeit	6
1.3. Näherungswises Lösen einer RWA	6
1.3.1. Starke Form	7
1.4. Übung 1	9
1.5. Übung 1 - Lösung	10
II. Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM)	11
III. Einführung in die Randelemente-Methode (REM)	12

Teil I.

Randwertaufgaben (RWA)

1. Formulierung und näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben (RWA)

1.1. Randwertaufgabe (RWA)

- besteht aus
 - **Differentialgleichung (DGL)**
 $\underline{D}(u(\underline{x})) + \underline{\rho}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall x \in \Omega$
 - **Randbedingungen (RB)**
 $\underline{D}_1(u(\underline{x})) + \underline{r}_1(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall x \in \Gamma_1$
 - **Differentialoperatoren**
 $\underline{D}(\dots), (\underline{D}_1(\dots), (\underline{D}_2(\dots), \dots$ Differentialoperatoren
 - \underline{x} ... Ortsvektor
 - $\underline{\rho}, \underline{r}_i$... rechte Seite
 - Γ_1 ... Rand mit wesentlichen Randbedingungen
 - Γ_2 ... Rand mit natürlichen Randbedingungen
 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma; \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$
(für jede Koordinatenrichtung)
- analytische Lösung nur für einfache Problemstellungen
- Annahme:
 - kinematische Annahmen (Bernoulli)
 - kinetische Annahmen

1.2. Formulierung der Randwertaufgabe

Beispiel Zugstab
(Graphik Zugstab einfügen)

1.2.1. Differentielle Formulierung

Auswertung von Bilanzgleichungen an einem infinitesimalen Volumenelement

- Gleichgewichtsbedingung:
 $\Downarrow -F_L + F_L + dF_L + q dx = 0$

$$\frac{dF_L}{dx} = -q$$

$$F'_L = -q$$

- kinetische Annahme:

$$F_L = \sigma \cdot A$$

- kinematische Annahme

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = u'$$

⇒ konstitutive Beziehung (Material)

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

⇒ Einsetzen in die Grundgleichung

$$F_L = \sigma \cdot A = E \cdot \epsilon \cdot A \Rightarrow F'_L = (E \cdot A \cdot u')' = -q$$

Annahme: konstanter Querschnitt $E A u'' + q = 0 \quad \forall x \in [0, l]$

- RB:

– wesentliche RB: $u(x=0) = \tilde{u} = 0$

– natürliche RB: $F_L(x=l) = F = 0$
 $E A u'(x=l) = F = 0$

- Zuordnung

$$D = E A(\dots)''$$

$$D_1 = 1(\dots)$$

$$D_2 = E A(\dots)'$$

$$\Omega : x \in [0, l]$$

$$\Gamma_1 : x = 0$$

$$\Gamma_2 : x = l$$

1.2.2. Variationsformulierung

Grundlage : Variationsrechnung Verformung eines elastischen Systems, sodass elastisches Gesamtpotential extremal (Minimum)

Voraussetzungen:

- elastisches Materialverhalten

$$\Gamma = \frac{d\Pi_i}{d\epsilon}$$

- Potential der äußeren Lasten

$$F = \frac{d\Pi_\epsilon}{du}$$

Variationsformulierung für Mechanik Prinzip vom stationären Wert des elastischen Gesamtsystems

Vorgaben zur Herleitung der DGL und RB:

- Aufstellen des elastischen Gesamtpotentialfelds
- suchen des stationären Werts $\Pi \rightarrow \min, \max$

Kontinuum funktional d.h. Funktion von Funktionen

$$\Pi = \Pi(u(x), u'(x), x) \rightarrow \min, \max$$

notwendige Bedingung für stationären Wert (Extremwert)

$$d\Pi = 0 \quad d\Pi \dots \text{erste Variation von } \Pi$$

Bsp: Stabproblem - Aufstellen des Potentials

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_a$$

$$\Pi_i = \Pi_f \dots \text{Veränderungspotential}$$

$$\Pi_i = \int_{\Omega} \Pi_i^* dV$$

1.2.3. Prinzip der virtuellen Arbeit

- elektrisches Gesamtpotential: Einschränkung auf elastische Potentiallasten

⇒ Prinzip der virtuellen Arbeit ist allgemein anwendbar = Prinzip der virtuellen Verschiebung

- virtuelle Arbeit ∂W wird an einem System verrichtet (durch eine geringfügige Störung ∂u des Verschiebungsfeldes u)
- Eigenschaften von $\partial u = \text{virtuelle Verschiebung}$
 - * beliebig
 - * infinitesimal
 - * kinematisch zulässig ($\partial u = 0$)
- Gleichgewicht (GGW) entspricht der Forderung
$$\partial W = 0$$
$$\partial W = \partial W_{\text{innen}} + \partial W_{\text{außen}} = 0$$

Beispiel: Stab $\partial W = \int G \partial \rho dV - \int_0^l q du dx - F du(l)$

beliebiges Materialverhalten, keine Einschränkungen

⇒ GGW: $\partial W = 0$

$\Gamma = E\epsilon$, $\epsilon = u'$, $dV = Ad$

$$\partial W = \int_0^l EA u' \partial u' dx - \int_0^l q \partial u dx - F du(l) = 0$$

⇒ partielle Integration, $\partial u(0) = 0$, sonst ∂u beliebig liefert

- $EA u'' + q = 0$ DGL
- $EA u'(l) - F = 0$ natürliche Randbedingung

1.3. Näherungsweise Lösen einer RWA

Methode der gewichteten Residuen

- Ansatz für Feldvariable, z.B. Verschiebung
$$u(x) \sim \tilde{u}(x)$$
$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i$$
$$g_i \dots \text{Basisfunktion}$$
$$u_i \dots \text{Ansatzfreiwerte}$$
- DGL und RB werden im Ansatz nicht mehr exakt ermittelt
⇒ Residuen $\eta_i(x)$

$$\begin{aligned} D(\tilde{u}(x)) + \rho(x) &= \eta(x) \neq 0 & \forall x \in \Gamma \\ D_1(\tilde{u}(x)) + r_1(x) &= \eta_1(x) \neq 0 & \forall x \in \Gamma_1 \\ D_L(\tilde{u}(x)) + r_L(x) &= \eta_L(x) \neq 0 & \forall x \in \Gamma_L \end{aligned}$$

– Multiplikation der Residuen der DGL $\eta(x)$

\Rightarrow Näherungslösung erfüllt Forderung $\int_W \eta(x) w(x) dx = 0$

– Ziel: GLS zur Berechnung der Freiwerte u_i

– Verfahren definiert durch:

- * Form der gewichteten Residuen
- * Wahl der Wichtungsfunktion

1.3.1. Starke Form

$$\int_0^l \eta(x) w(x) dx = 0$$

Beispiel: Zugstab

- Voraussetzungen: Ansatz ...

– zweimal stetig (nicht trivial) differenzierbar

– alle Randbedingungen ($\eta_1 = 0, \eta_2 = 0$)

\Rightarrow starke Form

- GLS für Freiwerte u_i

\Rightarrow verschiedenste Lösungsverfahren, durch unterschiedliche Wahl der Wichtungsfunktion $u(x)$ (z.B. Kollokation, Methode der Momente, Galerkin Verfahren, Minimum des Fehlerquadratintegrals)

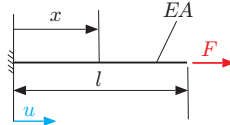
Besipiel: DIRAC-Funktion (Kollokation)

$$W(x) = \partial(x - \xi_i) \quad \partial = \begin{cases} \infty & x = \xi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int \eta(x) \partial(x - \xi) dx = \eta(\rho)$$

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel

- Kontinuum $\rightarrow \Pi$ ist ein Funktional, notwendige Bed.: $\delta\Pi = 0$
- Bsp.: Zugstab belastet durch konstante Einzelkraft



- Reduktion auf diskretes System $\delta\Pi = 0 \rightarrow \frac{d\Pi}{du} = 0$

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EA u'(x)^2 dx - Fu(l) \quad \text{mit} \quad u'(x) = \varepsilon = \frac{u(l)}{l} = \text{konst.}$$

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l^2} dx - Fu(l) = \frac{1}{2} EA \frac{u^2(l)}{l} - Fu(l)$$

- notwendige Bedingung für stationären Wert (Minimum)

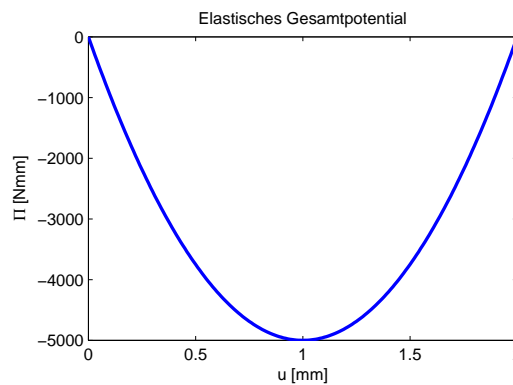
$$\frac{d\Pi}{du} = \frac{EA}{l} u(l) - F = 0 \rightarrow u(l) = \frac{Fl}{EA}$$

Dresden, 23.10.2013

Numerische Methoden I – FEM/REM

Folie 3 von 8

Minimum des elastischen Gesamtpotentials – Beispiel



$$\Pi = \frac{1}{2} EA \frac{u^2}{l} - Fu$$

Dresden, 23.10.2013

Numerische Methoden I – FEM/REM

Folie 4 von 8

Näherungsverfahren auf Basis der starken Form – Übersicht

- Einarbeitung der RB in den Ansatz $\rightarrow \tilde{u} = g_0(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x) u_i$
- Gewichtetes Residuum $\int_0^l \underbrace{(EA \tilde{u}''(x) + p(x))}_{\eta(x)} w_i(x) dx = 0 \rightarrow i = 1 \dots n$ Gleichungen für u_i

Verfahren	Wichtungsfunktion	GLS (n Gleichungen) aus
Kollokation	Dirac-Impuls $w_i(x) = \delta(x - \xi_i)$	$\eta(\xi_i) = 0$ $\rightarrow EA u''(\xi_i) + p(\xi_i) = 0$
Methode der Momente	n linear unabhängige Funktionen $w_i(x) = x^i, i = 0 \dots n-1$	$\int_0^l \eta(x) w_i(x) dx = 0$
Galerkin-Verfahren	Basisfunktionen des Ansatzes $w_i(x) = g_i(x)$	$\int_0^l \eta(x) g_i(x) dx = 0$
Minimum des Fehlerquadratintegrals	$w_i(x) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial u_i}$	$\int_0^l \eta^2(x) dx \rightarrow \min$

$\xi_i \dots$ diskrete Kollokationspunkte

Dresden, 23.10.2013

Numerische Methoden I – FEM/REM

Folie 5 von 8

1.4. Übung 1

Numerische Methoden 1 – FEM/REM
Dr.-Ing. M. Kästner

WS 2013/2014

Übung 1

Zugstab mit elastischer Bettung – Methode der gewichteten Residuen (starke Form)

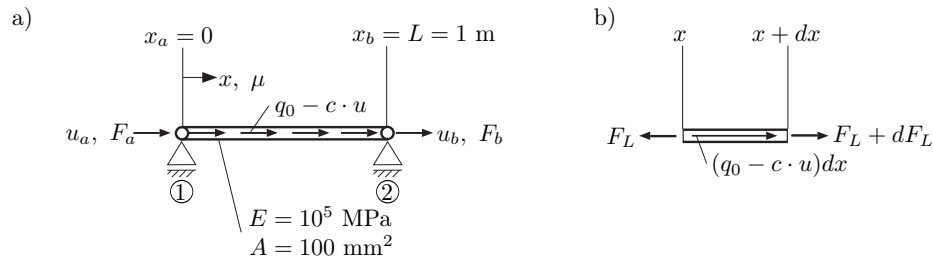


Abbildung 1: a) Zugstab mit elastischer Bettung, b) differentielles Stabelement

Der in Abb. 1 a) dargestellte Zugstab ist am Knoten 1 mit der Verschiebung $u_a = 0.1 \text{ mm}$, am Knoten 2 mit der Kraft $F_b = 10^4 \text{ N}$ und der konstanten Streckenlast $q_0 = 100 \text{ N/mm}$ belastet. Unter Berücksichtigung der verschiebungsproportionalen elastischen Bettung $q_c = c \cdot u$ ist anhand eines differentiellen Stabelements die Differentialgleichung (DGL) der Randwertaufgabe (RWA) herzuleiten.

Mittels der „Methode der gewichteten Residuen“ ist mit dem polynomialen Verschiebungsansatz

$$u(\mu) = u_0 + u_1\mu + u_2\mu^2, \text{ mit } \mu = x/L$$

eine Näherungslösung zu ermitteln. Bestimmen Sie die Ansatzfreiwerte mittels:

1. Kollokationsmethode
2. Methode der Momente
3. Verfahren von Galerkin
4. Verfahren vom Minimum des Fehlerquadratintegrals

für die Fälle a) $c = 0 \text{ N/mm}^2$ und b) $c = 100 \text{ N/mm}^2$ und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

Analytische Lösung:

$c = 0$:

$$u(x) = -\frac{q_0}{2EA}x^2 + C_0x + C_1$$

mit

$$C_0 = \frac{F_b + q_0L}{EA}$$

$$C_1 = u_a$$

$c \neq 0$:

$$u(x) = C_0 + C_1e^{\beta x} + C_2e^{-\beta x}, \quad \beta^2 = \frac{c}{EA}$$

mit

$$C_0 = \frac{q_0}{c}$$

$$C_1 = \frac{(u_a - \frac{q_0}{c})e^{-2\beta L} + \frac{F_b}{\beta e^{\beta L}EA}}{1 + e^{-2\beta L}}$$

$$C_2 = \frac{u_a - \frac{q_0}{c} - \frac{F_b}{\beta e^{\beta L}EA}}{1 + e^{-2\beta L}}$$

1.5. Übung 1 - Lösung

usw.

Teil II.

Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM)

Teil III.

Einführung in die Randelemente-Methode (REM)