TD processus stochastiques corrections

Do Quoc Khanh

February 28, 2013

1 Exercice 1

Deux machines automatiques, indépendantes. Fiabilité p pour une journée. Lorsqu'elle tomme en panne elle est réparée pendant la nuit et se retrouve donc en état de marche le lendemain. Mais une seule machine peut être réparée à la fois.

X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. Graphe des transitions:

$X_n \in \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned}
p_{00} &= p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 \\
p_{01} &= (1-p)^2 \\
p_{10} &= p \\
p_{11} &= 1-p
\end{aligned}$$

2. Matrice de transition:

$$\begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Explications: pour calculer $p_{00} = p(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)$, si au début du jour n, aucune machine est en panne, pour que ce soit le même pour le lendemain, il y a deux possibilités:

-Soit il y a aucune machine tombant en panne au cours de la journée n, donc cela avec la probabilité p^2.

-Soit il y a exactement une machine tombant en panne au cours de la journée n, et donc avec la probabilité: $p(1-p)$ (pour la machine 2 tombant en panne) + $(1-p)p$ (pour la machine 1 tombant en panne) = $2p(1-p)$.

Donc $p_{00} = p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 = p(2-p)$.

3. Supposons que les deux machines sont au départ en état de marche donc $X_0 = 0$. Les probabilités au départ sont donc $\pi(0) = (1, 0)$, on a:

$$\begin{aligned}
&\pi(1) = \pi(0).P = (p(2-p), (1-p)^2) \\
&\pi(2) = \pi(1).P = \pi(0).P^2 = (p(1 + 2p - 3p^2 + p^3), (1-p)^2(1 + p - p^2))
\end{aligned}$$

Distribution limite: Supposons que $0 < p < 1$, d'après le théorème 2, il existe une distribution limite. On calcule cette distribution π^*.

Cette distribution satisfont les équation de balance (poly page 12). On peut utiliser le graphe de transition en interprétant les probabilités π_k^* comme des masses associées aux états $k \in S$, et les produits $\pi_k^* p_{kj}$ comme des flux de masse entre les états k et j. Probabilités stationnaire si et seulement si le flux d'entrée est égal au flux de sortie, donc:

$$\pi_0^*.(1-p)^2 = \pi_1^*.p$$

Parce que $\pi_0^* + \pi_1^* = 1$, on a:

$$\frac{\pi_0^*}{p} = \frac{\pi_1^*}{(1-p)^2} = \frac{1}{p+(1-p)^2}$$
$$\Rightarrow \pi^* = \left(\frac{p}{p+(1-p)^2}, \frac{(1-p)^2}{p+(1-p)^2}\right)$$

2 Exercice 2:

Deux éléments indépendants comme à l'exercice 1, sauf que les éléments ne peut pas être réparés. Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. Le graphe des transitions:
$X_n \in \{0,1,2\}$ donc 2 états en total.
$p_{00} = p^2$, $p_{01} = 2p(1-p)$, $p_{02} = (1-p)^2$.
$p_{10} = 0$, $p_{11} = p$, $p_{12} = 1-p$.
$p_{20} = 0$, $p_{21} = 0$ et $p_{22} = 1$.
La matrice des transitions:

$$\begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La distribution stationnaire:
Si $p = 1$, alors les machines ne tombent jamais, c'est-à-dire que la chaine reste l'état initial. Tous les flux sont zéros, donc tous les état de probabilités sont stationnaires, mais attention il n'y a pas de distribution limite car la chaine est constante.
Si $p < 1$, la seule distribution stationnaire est $(0, 0, 1)$. C'est aussi la distribution limite.

3. La chaine est absorbante?
Il y a un état absorbant, mais la chaine est-elle absorbante? Oui si $p < 1$, parce qu'on peut passer de n'importe quel état à cet état absorbant.

4. Prenons $p = 0{,}9$. Soit n_i temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de l'état i, $i = 0, 1, 2$. Évidemment $n_2 = 0$. D'après le théorème 7 (page 16), les n_i satisfont les équations suivantes:

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 + p_{00}n_0 + p_{01}n_1 \\ &= 1 + p^2 n_0 + 2p(1-p)n_1 \\ n_1 &= 1 + p_{10}n_0 + p_{11}n_1 \\ &= 1 + pn_1 \\ \Rightarrow n_1 &= \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

et on obtient $(1-p^2)n_0 = 1 + 2p \Rightarrow n_0 = \dfrac{1+2p}{1-p^2}$.
Avec $p = 0{,}9$, on a $n_0 = 14{,}74$

3 Exercice 3:

On ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain.

1. Le graphe des transitions:
$X_n \in \{0,1,2\}$.
$p_{00} = p^2$, $p_{01} = 2p(1-p)$, $p_{02} = (1-p)^2$.

$p_{10} = p$, $p_{11} = 1 - p$, $p_{12} = 0$.
$p_{20} = 0$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = 0$.
2. La matrice des transitions:
$$\begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
3. La distribution stationnaire:
$(1 - p^2)\pi_0 = p\pi_1$.
$p\pi_1 = 2p(1-p)\pi_0 + \pi_2$.
$\pi_2 = (1-p)^2\pi_0$.
On a $\pi_0 = \dfrac{1}{(1-p)^2}\pi_2$ et $\pi_1 = \dfrac{1+p}{p(1-p)}\pi_2$. Or $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on a:
$\pi = \dfrac{1}{p^3 - 3p^2 + 2p + 1}(p, 1 - p^2, p(1-p)^2)$.

Est-elle une distribution limite? Avec $p = 0$, $(0, 1, 0)$ est une distribution limite. Avec $p = 1$, $(1, 0, 0)$ est une distribution limite. Si $0 < p < 1$, les signes des éléments de P est:
$$\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & 0 \end{pmatrix}$$
et donc de P^2:
$$\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$
et donc P^3 contient les éléments strictement positifs. Après le théorème 2, la chaine Markov possède une distribution limite. En plus, cette distribution limite doit satisfaire les équations stationnaires, donc c'est exactement π qu'on a trouvée ci-dessus.

4 Exercice 4:

$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 < a + b < 2$.

1. $P^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^2}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$. Démonstration par récurrence.
2. $\pi(n) = \pi(0).P^n$.
3. Parce que $0 < a + b < 2$.
La distribution limite est: $\dfrac{1}{a+b}.\pi(0).\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a+b}(b, a)$.
4. π est aussi une distribution stationnaire. Est-elle unique?
La chaine Markov admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente $\Leftrightarrow$ les deux états sont se communiquent $\Leftrightarrow$ $a > 0$ et $b > 0$.
5. Les comportements déterministes.

5 Exercice 5:

P^4 satisfait le théorème 2, donc convergente.
La distribution limite est aussi stationnaire. On obtient:
$\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{1}{7}\right)$.

6 Exercice 6:

1. Déterminer les classes transitoires et récurrentes? D'abord il faut dessiner le graphe des transitions.

Il y a 4 états. Les états 3 et 4 se communiquent. Les états 3 et 1 ne se communiquent pas. Les états 1 et 2 ne se communiquent pas. Il y a donc 3 classes: $\{3, 4\}$, $\{1\}$, et $\{2\}$. Une classe est dite *transitoire* s'il est possible d'en sortir. Sinon, elle est dite *récurrente*. Les classes $\{3, 4\}$ et $\{2\}$ sont récurrentes, alors que $\{1\}$ est transitoire.

2. Existe-il une distribution stationnaire? Oui parce que pour une chaine de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire. Une distribution limite? Non. Parce que d'après le théorème 6, si la chaine possédait une distribution limite π, alors π serait l'unique distribution de la chaine. La chaine possédait une distribution stationnaire unique, d'après le théorème 5, la chaine comprendrait une unique classe récurrente, mais il y a ici 2 classes récurrentes, donc c'est faux.

7 Exercice 7:

8 Exercice 8:

Ce processus peut être décrit par une chaine Markov de 5 états: les 3 états de fabrication, la sortie en bon état (l'état 4), et la mise à l'écart (l'état 5). Chaque article passe les 3 états de fabrication, s'il est défectueux, il est jeté; s'il est en bon état, il passe à la prochaine étape ou quitte la machine en bon état s'il est déjà à la dernière étape de fabrication. S'il est partiellement défectueux, il reste à l'étape en courant encore une fois.

On a: $p_{12} = p_{23} = p_{34} = r$.

$p_{11} = p_{22} = p_{33} = q$.

$p_{15} = p_{25} = p_{35} = p$.

La durée moyenne jusqu'à ce qu'un article quitte la machine $\rightarrow$ temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de l'état 1, donc n_1. D'après le théorème 7, $n_i, i =$ 1,2,3 satisfont les équations suivantes:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + qn_1 + rn_2 \\ n_2 &= 1 + qn_2 + rn_3 \\ n_3 &= 1 + qn_3 \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on a:

$$\begin{aligned} n_3 &= \frac{1}{1-q} \\ n_2 &= \frac{1-q+r}{(1-q)^2} \\ n_1 &= \frac{(1-q)^2 + r(1-q+r)}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

On calcule $n_1 = 3.7$.

La probabilité qu'en quittant la machine, l'article soit en bon état? C'est b_{14}: la probabilité de l'absorption à l'état 4 si on part de l'état 1. D'après le théorème 8, les b_{14}, b_{24} et b_{34} satisfont les équations suivantes:

$$\begin{aligned} b_{14} &= 0 + qb_{14} + rb_{24} \\ b_{24} &= 0 + qb_{24} + rb_{34} \\ b_{34} &= r + qb_{34} \end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on obtient alors:

$$\begin{aligned} b_{34} &= \frac{r}{1-q} \\ b_{24} &= \frac{r^2}{(1-q)^2} \\ b_{14} &= \frac{r^3}{(1-q)^3} \end{aligned}$$

On calcule $b_{14} = 0.63$.

9 Exercice 9:

La matrice des transitions:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le temps moyen pour atteindre l'état 4 pour la première fois, en rend cet état absorbant, et puis calculer le temps moyen jusqu'à l'absorption. En rendant l'état 4 absorbant, on obtient une nouvelle matrice des transitions:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 7, on obtient les équations suivantes pour n_1, n_2 et n_3:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + \frac{1}{3}n_2 + \frac{1}{3}n_3 \\ n_2 &= 1 + \frac{1}{3}n_1 + \frac{1}{3}n_3 \\ n_3 &= 1 + \frac{1}{3}n_1 + \frac{1}{3}n_2 \end{aligned}$$

Et on obtient $n_1 = n_2 = n_3 = 3$. Attention qu'il n'y a aucune différence entre les différents points de départ.

Maintenant on transforme l'état 2 en état absorbant. Pour calculer la probabilité d'atteindre 4, on transforme aussi 4 en état absorbant. Donc il y a deux états absorbants. On calcule les probabilités b_{14} et b_{34} de l'absorption en état 4. D'après le théorème 8, on a les équations suivantes:

$$b_{14} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}b_{34}$$
$$b_{34} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}b_{14}$$

On obtient $b_{14} = b_{34} = \frac{1}{2}$. Donc $p = \frac{1}{2}$.

10 Exercice 10:

X_n le nombre de voitures se trouvant dans la station immédiatement après l'instant n.

1. (X_n) forme bien une chaine de Markov, parce que:
$X_{n+1} = Y_{n+1}$, si $X_n = 0{,}1$.
$X_{n+1} = \min(Y_{n+1} + 1, 2)$ si $X_n = 2$.
Attention: à tout moment, il y a au plus 3 voitures dans la station.
2.3. Matrice des transitions:

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

4. Considérons le régime stationnaire. Les équations de balance:

$$0{,}6\pi_0 = 0{,}4\pi_1$$
$$0{,}6\pi_1 = 0{,}4\pi_0 + 0{,}4\pi_2$$
$$0{,}4\pi_2 = 0{,}2\pi_1 + 0{,}2\pi_0$$

On obtient $\pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0$, $\pi_2 = \frac{5}{4}\pi_0$. Et enfin $\pi_0 = \frac{4}{15}$, $\pi_1 = \frac{6}{15}$ et $\pi_2 = \frac{1}{3}$.
La station est inoccupée pendant en moyenne 27% du temps.

5. Le moment où les deux places sont occupées pour la première fois, c'est la première fois que $Y_n = 2$. Parce que si $Y_n = 0$ ou 1, il ne peut pas y avoir 2 voitures dans les positions d'attente.

Le première fois que $Y_n = 2$ est aussi la première fois que $X_n = 2$ (voir les formules). Donc on doit chercher la durée moyenne jusqu'à ce que $X_n = 2$ pour la première fois. On rend l'état 2 absorbant, et calculer le temps moyen jusqu'à l'absorption. D'après le théorème 7, on a:

$$n_0 = 1 + 0{,}4n_0 + 0{,}4n_1$$
$$n_1 = 1 + 0{,}4n_0 + 0{,}4n_1$$

On obtient $n_0 = n_1 = 5$.

Pour quoi le temps ne dépend pas de l'état initial? C'est parce que c'est le premier moment où $Y_n = 2$, cette variable aléatoire ne dépend pas de l'état de X_n. On peut le calculer directement. (Y_n) est aussi une chaine de Markov avec la matrice des transitions:

$$\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

En appliquant les mêmes démarches pour (Y_n), on obtient le même résultat.

11 Exercice 11:

La densité: $f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ pour $t \geq 0$.

L'espérance: $\dfrac{1}{\lambda}$.

1. La probabilité d'avoir plus de 3 pannes en 2 heures?

Soient T_1, T_2, T_3 les durées de vie des 3 machines tombées en panne. Il faut qu'on calcule $p(T_1 + T_2 + T_3 \leq 2h)$. Attention que ces 3 variables sont indépendantes. Leur somme S_3 suit la loi Gamma de paramètre λ et 3 dont la densité est: $g_{\lambda,n}(t) = \dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}\exp(-\lambda t)}{(n-1)!}$ pour $t \geq 0$. ($n = 3$ dans notre cas).

La fonction de répartition de la loi Gamma est:

$$F(t; n, \lambda) = \frac{\gamma(n, \lambda t)}{(n-1)!}$$

où $\gamma(s, x) = \int\limits_0^x t^{s-1} e^{-t} dt$ est la fonction Gamma incomplète. La probabilité à calculer est:

$$\begin{aligned} p(T_1 + T_2 + T_3 \leq 2h) = F(2h; 3, \lambda) &= \frac{\gamma(3, 2h\lambda)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2h\lambda} u^2 \exp(-u) du \\ &= (1 + 2h\lambda + 2h^2\lambda^2)\exp(-2h\lambda) \end{aligned}$$

Mais $\lambda = h^{-1}$ donc $p(T_1 + T_2 + T_3 \leq 2h) = 5\exp(-2) \approx 0{,}68$.

2. On calcule $p(T_1 = t | T_1 + T_2 \geq 3h)$. Cette quantité est égale:

$$\begin{aligned} &\frac{p(T_1 = t, T_2 \geq 3h - t)}{p(T_1 + T_2 \geq 3h)} \\ =& \frac{p(T_1 = t).p(T_2 \geq 3h - t)}{p(T_1 + T_2 \geq 3h)} \\ =& \frac{\lambda \exp(-3h\lambda)}{p(T_1 + T_2 \geq 3h)} \end{aligned}$$

ne dépendant pas à t, donc c'est une distribution uniforme.

3. C'est $(\sum\limits_{k=1}^{9} T_k \geq 12h) = 1 - F(12h; 9, \lambda)$.