TD processus stochastiques corrections

DO Quoc Khanh

February 21, 2013

1 Exercice 1

Deux machines automatiques, indépendantes. Fiabilité p pour une journée. Lorsqu'elle tomme en panne elle est réparée pendant la nuit et se retrouve donc en état de marche le lendemain. Mais une seule machine peut être réparée à la fois.

X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. Graphe des transitions:

$X_n \in \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned} p_{00} &= p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 \\ p_{01} &= (1-p)^2 \\ p_{10} &= p \\ p_{11} &= 1-p \end{aligned}$$

2. Matrice de transition:

$$\begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Explications: pour calculer $p_{00} = p(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)$, si au début du jour n, aucune machine est en panne, pour que ce soit le même pour le lendemain, il y a deux possibilités:

-Soit il y a aucune machine tombant en panne au cours de la journée n, donc cela avec la probabilité p^2.

-Soit il y a exactement une machine tombant en panne au cours de la journée n, et donc avec la probabilité: $p(1-p)$ (pour la machine 2 tombant en panne) + $(1-p)p$ (pour la machine 1 tombant en panne) = $2p(1-p)$.

Donc $p_{00} = p^2 + 2p(1-p) = 2p - p^2 = p(2-p)$.

3. Supposons que les deux machines sont au départ en état de marche donc $X_0 = 0$. Les probabilités au départ sont donc $\pi(0) = (1, 0)$, on a:

$$\begin{aligned} &\pi(1) = \pi(0).P = (p(2-p), (1-p)^2) \\ &\pi(2) = \pi(1).P = \pi(0).P^2 = (p(1+2p-3p^2+p^3), (1-p)^2(1+p-p^2)) \end{aligned}$$

Distribution limite: Supposons que $0 < p < 1$, d'après le théorème 2, il existe une distribution limite. On calcule cette distribution π^*.

Cette distribution satisfont les équation de balance (poly page 12). On peut utiliser le graphe de transition en interprétant les probabilités π_k^* comme des masses associées aux états $k \in S$, et les produits $\pi_k^* p_{kj}$ comme des flux de masse entre les états k et j. Probabilités stationnaire si et seulement si le flux d'entrée est égal au flux de sortie, donc:

$$\pi_0^*.(1-p)^2 = \pi_1^*.p$$

Parce que $\pi_0^* + \pi_1^* = 1$, on a:

$$\frac{\pi_0^*}{p} = \frac{\pi_1^*}{(1-p)^2} = \frac{1}{p+(1-p)^2}$$
$$\Rightarrow \pi^* = \left(\frac{p}{p+(1-p)^2}, \frac{(1-p)^2}{p+(1-p)^2}\right)$$

2 Exercice 2:

Deux éléments indépendants comme à l'exercice 1, sauf que les éléments ne peut pas être réparés. Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la n-ième journée.

1. Le graphe des transitions:
$X_n \in \{0,1,2\}$ donc 2 états en total.
$p_{00} = p^2$, $p_{01} = 2p(1-p)$, $p_{02} = (1-p)^2$.
$p_{10} = 0$, $p_{11} = p$, $p_{12} = 1-p$.
$p_{20} = 0$, $p_{21} = 0$ et $p_{22} = 1$.
La matrice des transitions:
$$\begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La distribution stationnaire:
Si $p = 1$, alors les machines ne tombent jamais, c'est-à-dire que la chaine reste l'état initial. Tous les flux sont zéros, donc tous les état de probabilités sont stationnaires, mais attention il n'y a pas de distribution limite car la chaine est constante.
Si $p < 1$, la seule distribution stationnaire est $(0,0,1)$. C'est aussi la distribution limite.

3. La chaine est absorbante?
Il y a un état absorbant, mais la chaine est-elle absorbante? Oui si $p < 1$, parce qu'on peut passer de n'importe quel état à cet état absorbant.

4. Prenons $p = 0{,}9$. Soit n_i temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de l'état i, $i = 0,1,2$. Évidemment $n_2 = 0$. D'après le théorème 7 (page 16), les n_i satisfont les équations suivantes:

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 + p_{00}n_0 + p_{01}n_1 \\ &= 1 + p^2 n_0 + 2p(1-p)n_1 \\ n_1 &= 1 + p_{10}n_0 + p_{11}n_1 \\ &= 1 + pn_1 \\ \Rightarrow n_1 &= \frac{1}{1-p} \end{aligned}$$

et on obtient $(1-p^2)n_0 = 1 + 2p \Rightarrow n_0 = \dfrac{1+2p}{1-p^2}$.
Avec $p = 0{,}9$, on a $n_0 = 14{,}74$

3 Exercice 3:

On ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain.

1. Le graphe des transitions:
$X_n \in \{0, 1, 2\}$.
$p_{00} = p^2$, $p_{01} = 2p(1-p)$, $p_{02} = (1-p)^2$.
$p_{10} = p$, $p_{11} = 1-p$, $p_{12} = 0$.
$p_{20} = 0$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = 0$.

2. La matrice des transitions:
$$\begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. La distribution stationnaire:
$(1-p^2)\pi_0 = p\pi_1$.
$p\pi_1 = 2p(1-p)\pi_0 + \pi_2$.
$\pi_2 = (1-p)^2\pi_0$.
On a $\pi_0 = \dfrac{1}{(1-p)^2}\pi_2$ et $\pi_1 = \dfrac{1+p}{p(1-p)}\pi_2$. Or $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$, on a:
$\pi = \dfrac{1}{p^3 - 3p^2 + 2p + 1}\left(p, 1-p^2, p(1-p)^2\right)$.

Est-elle une distribution limite? Avec $p = 0$, $(0, 1, 0)$ est une distribution limite. Avec $p = 1$, $(1, 0, 0)$ est une distribution limite. Si $0 < p < 1$, les signes des éléments de P est:
$$\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & 0 \\ 0 & + & 0 \end{pmatrix}$$
et donc de P^2:
$$\begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix}$$
et donc P^3 contient les éléments strictement positifs. Après le théorème 2, la chaine Markov possède une distribution limite. En plus, cette distribution limite doit satisfaire les équations stationnaires, donc c'est exactement π qu'on a trouvée ci-dessus.

4 Exercice 4:

$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$. $0 \le a \le 1$, $0 \le b \le 1$, $0 < a + b < 2$.

1. $P^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^2}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$. Démonstration par récurrence.

2. $\pi(n) = \pi(0).P^n$.

3. Parce que $0 < a + b < 2$.
La distribution limite est: $\dfrac{1}{a+b}.\pi(0).\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{a+b}(b, a)$.

4. π est aussi une distribution stationnaire. Est-elle unique?
La chaine Markov admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente $\Leftrightarrow$ les deux états sont se communiquent $\Leftrightarrow$ $a > 0$ et $b > 0$.

5. Les comportements déterministes.

5 Exercice 5:

P^4 satisfait le théorème 2, donc convergente.

La distribution limite est aussi stationnaire. On obtient:
$\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$.