Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования **“Национальный исследовательский университет
“ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ”**

Гребенюк Александр Андреевич

РЕФЕРАТ

по курсу: “История и философия науки”

на тему: “История и философия прикладной математики”

Направление: 02.06.01 “Компьютерные и информационные науки”

Профиль: 05.13.11 “Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей”

Год обучения: 2017

Оглавление

1. Введение

Рождение математики было обусловлено желанием человека познать окружающий мир, обобщить, структурировать и формализовать свое представление о нем [1]. С течением времени математический аппарат стал получать всё большее развитие: на смену формулам площади простых геометрических фигур, выведенных Пифагором и Архимелом, пришло интегральное исчисление Ньютона и Лейбница [2], на смену частным случаям поиска корней многочленов второй и третьей степени Виетом [3] пришел функциональный анализ и линейная алгебра. Неразрешимость сложных проблем механики и физики XVII-XVIII веков [1] привела к созданию математического аппарата решения дифференциальных уравнений, наконец, рождение квантовой физики послужило толчком к упрощению интегрального исчисления и привело к распространению математического аппарата линейных алгебраических операторов.

Получив столь значительное распространение, математика стала развиваться самостоятельно, обобщать и строить абстракции уже на основе собственных теорий и конструкций, и во многом стала работать на опережение запросов к математическом аппарату из других областей научного исследования. Примером этому могут послужить иселования М. С. Ли в области матричного исчисления, нашедшие применение в современной компьютерной графике, или исследования Гамильтона в области теории комплексных чисел, широко используемых в современной физике и других областях.

Уже в конце XIX – начале XX века ученым стало понятно, что математика может быть разделена на две дисциплины - фундаментальную и прикладную [4], и в то время как первая продолжала заниматься развитием собственных математических теорий, вторая посвятила себя реализации этих теорий на практических задачах. Именно о истории и философии прикладой математики пойдет речь в данной работе.

2. История прикладной математики

Прикладная (или вычислительная) математика в наиболее близком к современному ее понимаю виде берет свое начало в XX веке сразу в нескольких точках земного шара. Причиной такого широкого распространения является развитие вычислительных мощностей – появление первых автоматических вычислителей, а также потребность в выполнении сложных расчётов(например баллистичесикх) во времена Второй Мировой войны [4]. Европейская школа вычислительных методов появляется чуть раньше, в Германии и Италии 1920 годов, основными фигурами в которых являются немецкие математики К. Рунге и М. Кутта [5] и итальянский математик М. Пиконе [6] – основатель первого института прикладной математики в Италии. С началом войны, многие ученые становятся вынужденными эмигрировать из Европы, и часть из них оседает в Америке, внося свой вклад в американскую школу этого направления, наиболее яркими представителями которой являются А. Эйнштейн, Д. ф. Нейман.

Среди интересов прикладных математиков тех времен наибольшей популярностью пользуются методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений(ОДУ) и уравнений в частных производных(УРЧП) и, часто как подзадача, поиск численного решения систем линейных алгебраических уравнений(СЛАУ). В довоенное и военное время становятся открытыми такие методы как метод конечных разностей [7], метод конечных элементов [8], метод случайных блужданий [9] и критерий устойчивости решения явных схем решения УРЧП Куранта-Фридрихса-Леви [10].

В связи с тем, что задача получения численного решения СЛАУ является довольно частой подзадачей в методах численного решения ДУ, разработки ученых умов XX века также велись и в этом направлении. Среди наиболее ярких представителей в послевоенные годы можно выделить фон Неймана, с работой направленной на вычисление приближения обратной матрицы [11], а так же А. Тьюринга и Дж. Уилкинсона, К. Ланцо и др. исследователей, стоящих у истоков алгоритмов итерационного решения СЛАУ.

2.1. Методы решения СЛАУ конца XIX – середины XX века

В центре проблемы решения СЛАУ стоит уравнение вида

$$Ax = b.$$

Если прямые методы решения СЛАУ восходят корнями ещё к древним индийцам [4], то задачей получения численного решения ученые занялись лишь в начале XIX века – К. Ф. Гаусс [12] и его ученик К. Л. Герлинг. Причиной подобного интереса послужила необходимость быстрого поиска решений матриц большого размера специального вида, часто возникающих в задачах численного решения различных ДУ и УРЧП.

Существует два подхода к решению СЛАУ: прямой и итерационный. Прямой представляет собой получение точного аналитического решения СЛАУ, что зачастую является неподъемной задачей для современных вычислителей, и создавало такую же проблему для ученых того времени. Помимо вычислительной сложности, классический прямой метод решения СЛАУ на тот момент не учитывал особенностей строения матрицы, в частности разреженность, и не позволял оптимизировать число операций, необходимых для получения численного решения. В условиях использования “человеческих” вычислителей [4] в довоенное время это возлагало дополнительные риски, связанные с высокой вероятностью получить неправильное решение, напрямую зависящее от числа выполняемых “вычислителями” операций.

Альтернативой прямым методам решения СЛАУ являются итерационные. В основе итерационных методов лежит идея получения начального приближения решения СЛАУ некоторым образом и его итерационное приближение к искомому. К достоинствам итерационных методов можно отнести то, что на определенных классах задач они могут обеспечить линейную, или близкую к линейной вычислительную сложность, в зависимости от чиста итераций, однако наибольшим недостатком является условная сходимость и зависимость от исходного вида матрицы.

Идею Гаусса о нахождении итерационного решения СЛАУ в 1845 г. продолжил К. Г. Якоби [13], а затем переоткрыл Ф. Зейдель [14] в 1874 г. В конце XIX века российский ученый Некрасов и итальянский ученый Пизетти усовершентсовали этот метод, доказав зависимость скорости сходимости от величины наибольшего собственного значения. Далее в 1910 г. эта идея получила развитие в методе Ричардсона [15].

Середина XX века принесла новый виток развития итерационных методов, заключающихся в предобуславливании матрицы исходной задачи и ее трансформации в задачу, вида:

$$Ax = b;$$

$$AP^{-1}y = b$$

$$Px = y$$

Трансформация задачи таким образом позволяла привести исходную матрицу у кнеобходимому виду, найти промежуточное решение y, а затем уже найти искомое решение для x. Одним из первых ученых, предложивших такую идею является Л. Цезари [16], исследовавший в своей работе задачу вида $\omega Ax = \omega b$, где $\omega A = B + C$. Идея использования предобуславливателей находит свое применение и в современных методах решения слау и широко освещена во множестве научных статей [17].

Альтернативный способ представления постановки задачи решения СЛАУ, послуживший опорой для ряда итерационных методов решения, в середине XX века представил российский математик А. Н. Крылов [18]. Его идея заключалась в представлении искомого решения СЛАУ, как линейной комбинации векторов специального линейного пространства, позже названного пространством Крылова, следующего вида:

$$K_n(A, x) = \text{span}\left\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x\right\}$$

Искомым решением в таком пространсве является:

$$\begin{aligned} &Ax^* = b \\ &x^* \approx x^{(k)} \in K(A, x^{(0)}), \end{aligned}$$

где $x^{(0)}$ – начальное приближение [19]. Эта идея нашла свое развитие в работах К. Ланцо [20], М. Гестенеса и Е. Штифеля и привела к появлению метода сопряженных градиентов [21], позволяющего представить поиск решения СЛАУ в виде поиска минимума функции:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^H\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^H\mathbf{x} + \gamma, \\ \text{grad}\,(\Psi(\mathbf{x})) &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \end{aligned}$$

на пространстве Крылова $K_n(\mathbf{A}, \mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_i = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i$, по методу градиентного спуска. Этот метод получил широкое развитие в дальнейшем, и его вариации являются актуальными для решения современных задач.

2.2. Современные методы решения СЛАУ

В основе современных методов решения СЛАУ лежат методы середины и конца XX века. В связи с бурным ростом вычислительных возможностей, использование прямых методов также оказывается возможным в настоящее время, а приоритетом при выборе метода решения СЛАУ является не только возможность получения быстрой сходимости, но и поддержка параллелизации вычислений на современных центральных или графических процессорах.

В продолжение исследований Крылова и Ланцо, современные прикладные математики продолжают заниматься улучшениями и обобщениями метода сопряженных градиентов(CG) на различные виды матриц. В период с 2000 г. до 2017 г. были разработаны такие модификации GC, как BiCG, BiCGStab [22], позволяющие находить решение для несимметричных систем уравнений.

Альтернативную задачу минимизации ставят авторы методов GMRes и MinGMes, как минимизацию $\mathbf{A}$-нормы:

$$||\mathbf{v}||_A = \sqrt{\mathbf{v}^H \mathbf{A} \mathbf{v}}$$

и представляют единственный безусловно сходящийся метод(GMRes) для симметричных, положительно-определенных матриц, в то же время имеющий невысокую скорость сходимости [22].

Наконец, авторы метода IDR(s), подходят к проблеме нахождения искомого решения СЛАУ через снижение размерности крыловского пространства на каждой итерации [23; 24].

Все это многообразие итерационных методов решения СЛАУ(за исключением GMRes) объединяет проблема условной сходимости и сильной зависимости от вида матрицы. В продолжение идей Л. Цезари и других ученых XX века, в новейшей истории методов вычислительной алгебры уделено много внимания предобуславливанию с использованием “геометрических” предобуславливателей, отбрасывающих некоторые части матрицы для получения грубого начального приближения итерационного метода, или неполных вариантов популярных разложений матриц: неполного LU-разложения или неполного разложения Холецкого [22]. Вопрос о применимости качественных разложений([25; 26]), учитывающих структуру данных, хранящихся в матрице, современными методами кластеризации остается открытым.

Также, в новейшей истории методов решения СЛАУ вновь стало уделяться внимание прямым методам, наиболее ярким из которых является метод HSS, использующий в своей основе иерархическое разложение матриц, и позволяющий соревноваться по вычислительной сложности с самыми быстрыми итерационными методами [27; 28].

3. Заключение

Стремление человека к познанию процессов, происходящих в окружающем мире, привело к развитию науки до современного уровня. С развитием технологий и увеличением числа наукоемких сфер жизнедеятельности общества в XIX - XX веках, появилось явление научной специализации, что в том числе коснулось и математики, и привело к ее разделению на фундаментальную и прикладную. На плечи ученых, нашедших себя в сфере прикладной математики, легла задача поиска способа применения элементов математической теории для реальных задач производства и повседневной жизни, в чем немалую роль сыграла раразившаяся на заре возникновения этой дисциплины Вторая Мировая война. В результате кропотливого труда мирового научного сообщетва к концу XX века сложился универсальный математический аппарат вычислительной математики, способный отыскать численные решения для множества видов дифференциальных, интегральных уравнений и прочих алгебраических уравнений. В свою очередь, это позволило инженерам и ученым перейти от натурных экспериментов к моделированию процессов, происходящих в стоящих перед ними задачах, и тем самым ускорить и упростить их работу. Прикладная математика возникла на гребне волны прогресса и через почти 100 лет сама возглавила его, сохраняя эту тенденцию по сей день.

Список литературы

1. *Корнилов В. С.* История развития вычислительной математики–компонента гуманитарного потенциала обучения численным методам // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. — 2010. — № 4.
2. *Википедия* Интеграл — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=84522032%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
3. *Википедия* Виет, Франсуа — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83449692%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
4. *Benzi M.* Key moments in the history of numerical analysis // SIAM Applied Linear Algebra Conference. — 2009.
5. *Википедия* Кутта, Мартин Вильгельм — Википедия, свободная энциклопедия. — 2014. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=66261833%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
6. *Wikipedia* Mauro Picone — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mauro_Picone&oldid=764595091%7D` ; [Online; accessed 30-March-2017].
7. *Richardson L. F.* The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1911. — Т. 210. — С. 307—357.
8. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — 1994. — С. 1—1.
9. *Википедия* Случайное блуждание — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83669669%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
10. *Courant R.*, *Friedrichs K.*, *Lewy H.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // Mathematische annalen. — 1928. — Т. 100, № 1. — С. 32—74.
11. Numerical inverting of matrices of high order / J. Von Neumann, H. H. Goldstine [и др.] // Bull. Amer. Math. Soc. — 1947. — Т. 53, № 11. — С. 1021—1099.

12. *Википедия* Гаусс, Карл Фридрих — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: %5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83115561%7D ; [Online; accessed 30-март-2017].

13. *Википедия* Якоби, Карл Густав Якоб — Википедия, свободная энциклопедия. — 2016. — URL: %5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=79981945%7D ; [Online; accessed 30-март-2017].

14. *Википедия* Зейдель, Филипп Людвиг фон — Википедия, свободная энциклопедия. — 2016. — URL: %5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=79566382%7D ; [Online; accessed 30-март-2017].

15. *Wikipedia* Modified Richardson iteration — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2016. — URL: %5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Modified_Richardson_iteration&oldid=749368285%7D ; [Online; accessed 30-March-2017].

16. *Cesari L.* Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. — 1937.

17. *Wikipedia* Preconditioner — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2017. — URL: %5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Preconditioner&oldid=765341528%7D ; [Online; accessed 30-March-2017].

18. *Википедия* Крылов, Алексей Николаевич — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: %5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=84457254%7D ; [Online; accessed 30-март-2017].

19. *Крылов А. Н.* О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1931. — № 4. — С. 491—539.

20. *Wikipedia* Cornelius Lanczos — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2017. — URL: %5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cornelius_Lanczos&oldid=772067917%7D ; [Online; accessed 30-March-2017].

21. *Википедия* Метод сопряжённых градиентов (для решения СЛАУ) — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: %5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=84381316%7D ; [Online; accessed 30-март-2017].

22. *Strang G.* 18.086 Mathematical Methods for Engineers II, Spring 2005. — 2005.

23. *Sonneveld P.*, *Gijzen M. B. van* IDR (s): A family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric systems of linear equations // SIAM Journal on Scientific Computing. — 2008. — Т. 31, № 2. — С. 1035—1062.

24. *Zemke J.-P. M.*, *Gijzen M. B. van*, *Sleijpen G. L.* Flexible and multi-shift induced dimension reduction algorithms for solving large sparse linear systems. — 2011.

25. *Yang D.*, *Ma Z.*, *Buja A.* A sparse SVD method for high-dimensional data // arXiv preprint arXiv:1112.2433. — 2011.

26. *Holmes M.*, *Gray A.*, *Isbell C.* Fast SVD for large-scale matrices // Workshop on Efficient Machine Learning at NIPS. Т. 58. — 2007. — С. 249—252.

27. *Chandrasekaran S.*, *Gu M.*, *Pals T.* A fast ULV decomposition solver for hierarchically semiseparable representations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2006. — Т. 28, № 3. — С. 603—622.

28. Fast algorithms for hierarchically semiseparable matrices / J. Xia [и др.] // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2010. — Т. 17, № 6. — С. 953—976.

29. *Golub G. H.*, *O'Leary D. P.* Some history of the conjugate gradient and Lanczos methods // Siam review. — 1989. — Т. 31, № 1. — С. 50—102.

30. *Leskovec J.*, *Rajaraman A.*, *Ullman J. D.* Mining of massive datasets. — Cambridge University Press, 2014.