Оглавление

1. Введение

Рождение математики было обусловлено желанием человека познать окружающий мир, обобщить, структурировать и формализовать свое представление о нем [1]. С течением времени математический аппарат стал получать всё большее развитие: на смену формулам площади простых геометрических фигур, выведенных Пифагором и Архимелом, пришло интегральное исчисление Ньютона и Лейбница [2], на смену частным случаям поиска корней многочленов второй и третьей степени Виетом [3] пришел функциональный анализ и линейная алгебра. Неразрешимость сложных проблем механики и физики XVII-XVIII веков [1] привела к созданию математического аппарата решения дифференциальных уравнений, наконец, рождение квантовой физики послужило толчком к упрощению интегрального исчисления и привело к распространению математического аппарата линейных алгебраических операторов.

Получив столь значительное распространение, математика стала развиваться самостоятельно, обобщать и строить абстракции уже на основе собственных теорий и конструкций, и во многом стала работать на опережение запросов к математическом аппарату из других областей научного исследования. Примером этому могут послужить исселования М. С. Ли в области матричного исчисления, нашедшие применение в современной компьютерной графике, или исследования Гамильтона в области теории комплексных чисел, широко используемых в современной физике и других областях. Уже в конце XIX – начале XX века ученым стало понятно, что математика может быть разделена на две дисциплины - фундаментальную и прикладную [4], и в то время как первая продолжала заниматься развитием собственных математических теорий, вторая посвятила себя реализации этих теорий на практических задачах. Именно о истории и философии прикладой математики пойдет речь в данной работе.

2. История прикладной математики

Прикладная (или вычислительная) математика в наиболее близком к современному ее понимаю виде берет свое начало в XX веке сразу в нескольких точках земного шара. Причиной такого широкого распространения является развитие вычислительных мощностей – появление первых автоматических вычислителей, а также потребность в выполнении сложных расчётов(например баллистичесикх) во времена Второй Мировой войны [4]. Европейская школа вычислительных методов появляется чуть раньше, в Германии и Италии 1920 годов, основными фигурами в которых являются немецкие математики К. Рунге и М. Кутта [5] и итальянский математик М. Пиконе [6] – основатель первого института прикладной математики в Италии. С началом войны, многие ученые становятся вынужденными эмигрировать из Европы, и часть их них оседает в Америке, внося свой вклад в американскую школу этого направления, наиболее яркими представителями которой являются А. Эйнштейн, Д. ф. Нейман.

Среди интересов прикладных математиков тех времен наибольшей популярностью пользуются методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений(ОДУ) и уравнений в частных производных(УРЧП) и, часто как подзадача, поиск численного решения систем линейных алгебраических уравнений(СЛАУ). В довоенное и военное время становятся открытыми такие методы как метод конечных разностей [7], метод конечных элементов [8], метод случайных блужданий [9] и критерий устойчивости решения явных схем решения УРЧП Куранта-Фридрихса-Леви [10].

В связи с тем, что задача получения численного решения СЛАУ является довольно частой подзадачей в методах численного решения ДУ, разработки ученых умов XX века также велись и в этом направлении. Среди наиболее ярких представителей в послевоенные годы можно выделить фон Неймана, с работой направленной на вычисление приближения обратной матрицы [11], а так же А. Тьюринга и Дж. Уилкинсона, К. Ланцо и др. исследователей, стоящих у истоков алгоритмов итерационного решения СЛАУ.

2.1. Методы решения СЛАУ конца XIX – середины XX века

В центре проблемы решения СЛАУ стоит уравнение вида

$$Ax = b$$

. И если прямые методы решения СЛАУ восходят корнями ещё к древним индийцам [4], то задачей получения численного решения ученые занялись лишь в начале XIX века – К. Ф. Гаусс [12] и его ученик К. Л. Герлинг. Причиной подобного интереса послужила необходимость быстрого поиска решений матриц большого размера специального вида, часто возникающих в задачах численного решения различных ДУ и УРЧП.

Существует два подхода к решению СЛАУ: прямой и итерационный. Прямой представляет собой получение точного аналитического решения СЛАУ, что зачастую является неподъемной задачей для современных вычислителей, и создавало такую же проблему для ученых того времени. Помимо вычислительной сложности, классический прямой метод решения СЛАУ на тот момент не учитывал особенностей строения матрицы, в частности разреженность, и не позволял оптимизировать число операций, необходимый для получения численного решения. В условиях использования “человеческих” вычислителей [4] в довоенное время это возлагало дополнительные риски, связанные с высокой вероятность получить неправильное решение, напрямую зависящее от числа выполняемых “вычислителями” операций.

Альтернативой прямым методам решения СЛАУ являются итерационные. В основе итерационных методов лежит идея получения начального приближения решения слау некоторым образом и его итерационное приближение к искомому. К достоинствам итерационных методов можно отнести то, что на определенных классах задач они могут обеспечить линейную, или близкую к линейной вычислительную сложность, в зависимости от чиста итераций, однако наибольшим недостатком является условная сходимость и зависимость от исходного вида матрицы.

Идею Гаусса о нахождении итерационного решения СЛАУ в 1845 г. продолжил К. Г. Якоби [13], а затем переоткрыл Ф. Зейдель [14] в 1974 г. В конце XIX века российский ученый Некрасов и итальянский ученый Пизетти усовершентсовали этот метод, доказав зависимость скорости сходимости от величины наибольшего собственного значения. Далее в 1910 г. эту идея получила развитие в методе Ричардсона [15].

Середина XX века принесла новый виток развития итерационных методов, заключающихся в предобуславливании матрицы исходной задачи и ее трансформации в задачу, вида:

$$Ax = b;$$

$$AP^{-1}y = b$$

$$Px = y$$

Трансформация задачи таким образом позволяла привести исходную матрицу у кнеобходимому виду, найти промежуточное решение y, а затем уже найти искомое решение для x. Одним и первых ученых, предложивших такую идею является Л. Цезари [16], исследовавший в своей работе задачу вида $\omega Ax = \omega b, \omega A = B + C$. Идея использования предобуславливателей находит сове применение и в современных методах решения слау и широко освещена во множестве начных статей [17].

Альтернативный способ представления постановки задачи решения СЛАУ, послуживший опорой для ряда итерационных методов решения СЛАУ, в середине XX века представил российский математик А. Н. Крылов [18]. Его идея заключалась в представлении искомого решения слау, как линейной комбинации векторов специального линейного пространства, позже названного пространством Крылова, следующего вида:

$$K_n(A, x) = \operatorname{span}\left\{x, Ax, A^2x, \dots, A^{n-1}x\right\}$$

Искомым решением в таком пространсве является:

$$\begin{aligned} &Ax^* = b \\ &x^* \approx x^{(k)} \in K(A, x_0), \end{aligned}$$

где x_0 – начальное приближение.

2.2. Современные методы решения СЛАУ

Идеи современных методов решения СЛАУ лежат в результатах исследования в этой области середины и конца XX века. В середине XX века российским математиком Крыловым классическая

3. Вывод

Список литературы

1. *Корнилов В. С.* История развития вычислительной математики–компонента гуманитарного потенциала обучения численным методам // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. — 2010. — № 4.
2. *Википедия* Интеграл — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=84522032%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
3. *Википедия* Виет, Франсуа — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83449692%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
4. *Benzi M.* Key moments in the history of numerical analysis // SIAM Applied Linear Algebra Conference. — 2009.
5. *Википедия* Кутта, Мартин Вильгельм — Википедия, свободная энциклопедия. — 2014. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=66261833%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
6. *Wikipedia* Mauro Picone — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Mauro_Picone&oldid=764595091%7D` ; [Online; accessed 30-March-2017].
7. *Richardson L. F.* The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. — 1911. — Т. 210. — С. 307—357.
8. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. — 1994. — С. 1—1.
9. *Википедия* Случайное блуждание — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83669669%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].
10. *Courant R.*, *Friedrichs K.*, *Lewy H.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik // Mathematische annalen. — 1928. — Т. 100, № 1. — С. 32—74.
11. Numerical inverting of matrices of high order / J. Von Neumann, H. H. Goldstine [и др.] // Bull. Amer. Math. Soc. — 1947. — Т. 53, № 11. — С. 1021—1099.

12. *Википедия* Гаусс, Карл Фридрих — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=83115561%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].

13. *Википедия* Якоби, Карл Густав Якоб — Википедия, свободная энциклопедия. — 2016. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=79981945%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].

14. *Википедия* Зейдель, Филипп Людвиг фон — Википедия, свободная энциклопедия. — 2016. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=79566382%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].

15. *Wikipedia* Modified Richardson iteration — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2016. — URL: `%5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Modified_Richardson_iteration&oldid=749368285%7D` ; [Online; accessed 30-March-2017].

16. *Cesari L.* Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive. — 1937.

17. *Wikipedia* Preconditioner — Wikipedia, The Free Encyclopedia. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttps://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Preconditioner&oldid=765341528%7D` ; [Online; accessed 30-March-2017].

18. *Википедия* Крылов, Алексей Николаевич — Википедия, свободная энциклопедия. — 2017. — URL: `%5Curl%7Bhttp://ru.wikipedia.org/?oldid=84457254%7D` ; [Online; accessed 30-март-2017].

19. *Golub G. H.*, *O'Leary D. P.* Some history of the conjugate gradient and Lanczos methods // Siam review. — 1989. — T. 31, № 1. — C. 50—102.