Tema 2 - Bazele Electrotehnicii

Grecu Andrei - George

email: andrei.g.grecu@gmail.com

315CA

Anul I

Facultatea de Automatică şi Calculatoare
Universitatea Politehnica din Bucureşti

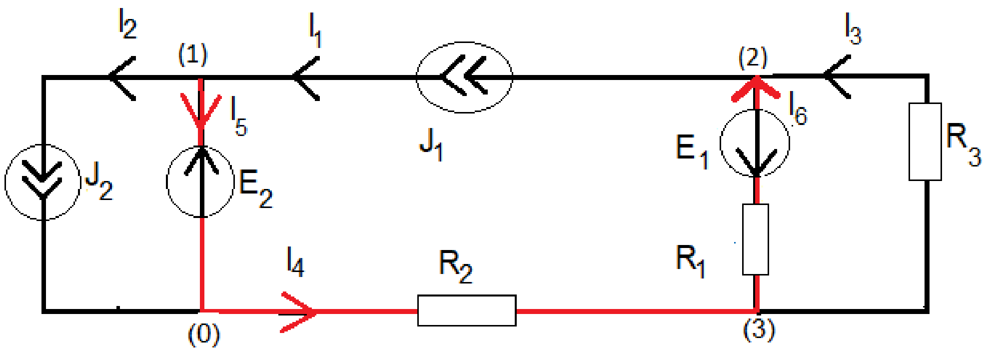
09.06.2019

Cuprins

1 Rezolvarea circuitelor de curent alternativ

1.1 Modificarea circuitului din Tema 1

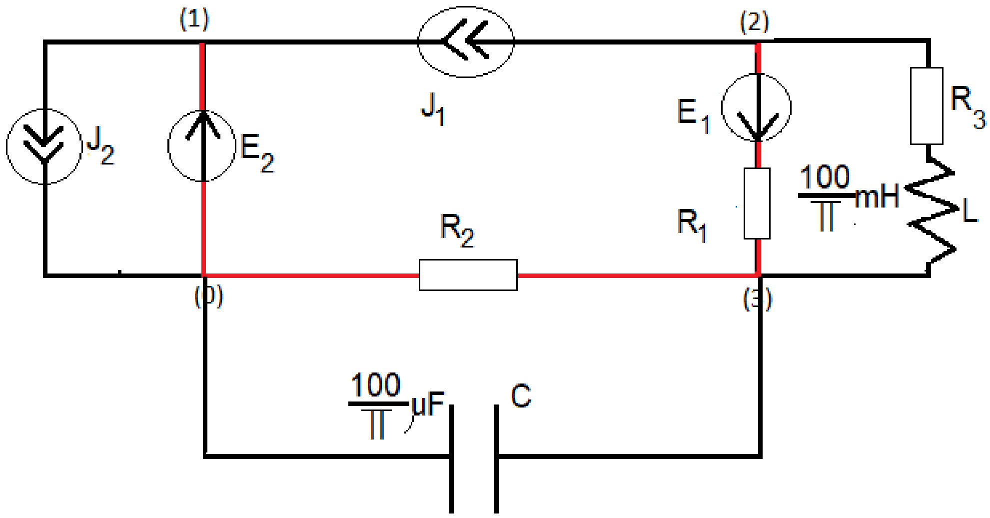
Fie circuitul rezolvat în cadrul temei precedente:



Circuitul modelat la Tema 1

În acest circuit se va plasa un condensator cu $C = R_2\frac{100}{\pi}\mu F = \frac{100}{\pi}\mu F$ în paralel cu rezistorul R_1 şi o bobina cu $L = R_3\frac{100}{\pi}mH = \frac{100}{\pi}mH$ în serie cu rezistorul R_3. Se va considera latura 03 ca fiind cea care conţine condensatorul. Va rezulta circuitul:

Circuitul căruia i s-au adăugat bobina şi condensatorul

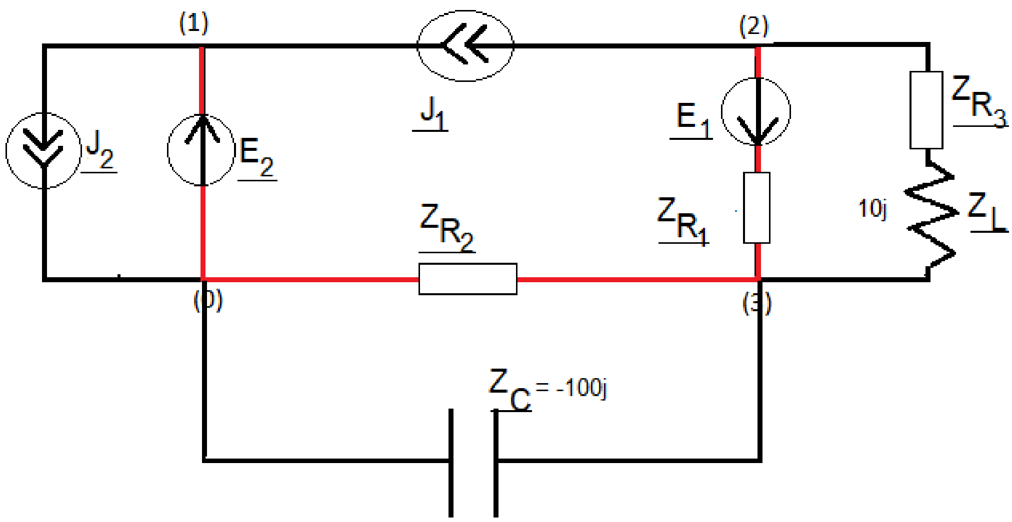


Noile valori ale t.e.m si c.e.m vor fi:

$$e_1(t) = \sqrt{2}\sin(100\pi t)$$
$$e_2(t) = \sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$$
$$i_1(t) = 5\sqrt{2}\sin(100\pi t)$$
$$i_2(t) = 3\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$$

1.2 Trecerea în complex

Se va trece circuitul de mai sus în complex:



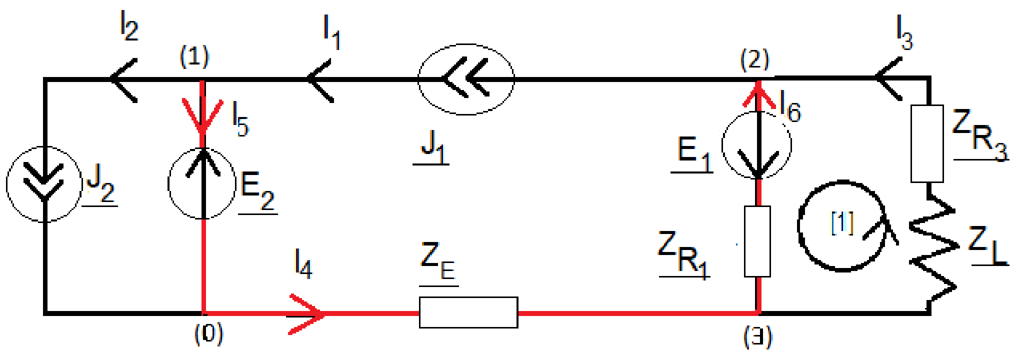
Circuitul trecut în complex

Valorile complexe ale elementelor de circuit vor fi:

$$\begin{gathered}
\underline{E_1} = 1 \\
\underline{E_2} = j \\
\underline{I_1} = 5 \\
\underline{I_2} = 3j \\
\underline{Z_{R_1}} = 1 \\
\underline{Z_{R_2}} = 1 \\
\underline{Z_{R_3}} = 1 \\
\underline{Z_L} = 10j \\
\underline{Z_C} = -100j
\end{gathered}$$

1.3 Rezolvarea circuitului

Pentru uşurarea calculelor se va echivala rezistentele în paralel, $\underline{Z_C}$ şi $\underline{Z_{R_2}}$, care va avea $\underline{Z_E} = -100 * j/(1 - 100 * j)$, şi se va folosi metoda curenţilor pe coarde pe noul circuit. Astfel, se consideră cunoscute impedanţele complexe $\underline{Z_{R_1}}, \underline{Z_{R_2}}, \underline{Z_{R_3}}, \underline{Z_L}, \underline{Z_C}$, tensiunile electromotoare $\underline{E_1}, \underline{E_2}$ şi curenţii prin sursele de curent: $\underline{I_1}, \underline{I_2}$. Teorema a doua a lui Kirchhoff se va aplica în urmatoarea bucle (ce va fi parcurse în sensurile în care sunt scrise muchiile):
$[1] = \{2, 3\}$



În bucla [3]: $(\underline{Z_L} + \underline{Z_{R_3}})\underline{I_3} - \underline{Z_{R_1}}\underline{I_6} = \underline{E_1}$

În continuare, se va scrie teorema I a lui Kirchhoff în nodurile (2):

În nodul (2): $\underline{I_6} = \underline{I_1} - \underline{I_3}$

Se va înlocui $\underline{I_6}$,în relaţia buclei [3].

Aşadar, $\underline{I_3} * (10 * j + 2) = 6$

Se formeaza sistemul:

```
function Elth_2_1()

  Z_l = 10i;
  Z_c = -100i;
  Z_e = (1 * Z_c)/(Z_c); % (Zr2 * Z_c)/(Zr2 + Z_c)

  A = [10i+2];

  b = [6];
  sol = A \ b;

  % sol(1) = I_3

  printf('I_3 = %f %fi\n\n', sol(1), sol(1)/1i);
```

Acest sistem se poate reprezenta sub forma matriceala astfel:

$$\left(10j + 1\right)\left(\underline{I_3}\right) = \left(6\right)$$

Sistemul se va rezolva în *Octave* şi are urmatoarea soluţie:

$$\left(\underline{I_3}\right) = \left(0,115385 - 0,576923j\right)$$

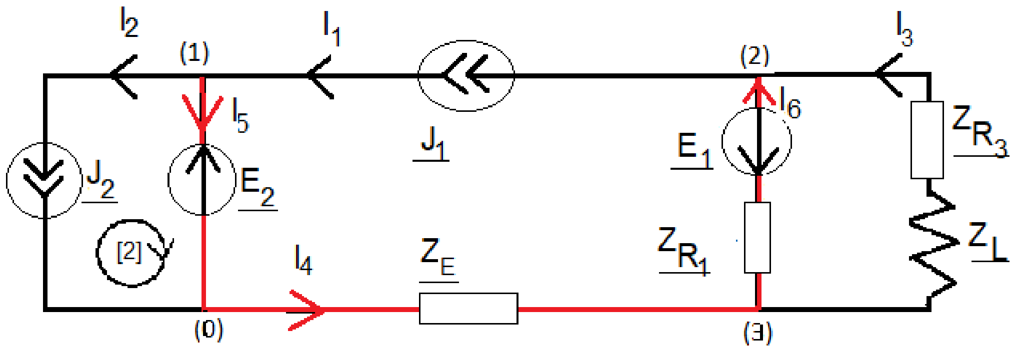
Acum, pentru a se determina şi ceilalţi curenţi se va aplica teorema I a lui Kirchhoff în nodurile $(1), (0)$ si (2):

În nodul (2), relaţia a fost deja scrisă ca fiind $\underline{I_6} = \underline{I_1} - \underline{I_3} \Rightarrow$
$\underline{I_6} = 5 - \underline{I_3} = 5 - 0,115385 + 0,576923j \Rightarrow$
$\underline{I_6} = 4,884615 + 0.576923j$

În nodul (1): $\underline{I_5} = \underline{I_1} - \underline{I_2} \Rightarrow \underline{I_5} = 5 - 3j$

În nodul (0): $\underline{I_4} = \underline{I_5} + \underline{I_2} = \underline{I_2} + \underline{I_1} - \underline{I_2} = \underline{I_1} \Rightarrow \underline{I_4} = 5$

Pentru a determina U_2 se va aplica teorema Kirchhoff II în bucla:
$[2] = \{1, 0\}$



In bucla [2]: $\underline{U_2} - \underline{E_2} = 0 \Leftrightarrow \underline{U_2} = \underline{E_2} \Leftrightarrow \underline{U_2} = j$

Acesta este codul cu ajutorul căruia au fost calculate şi celelalte necunoscute:

```
% se vor genera vectorul curentilor de pe laturile generatoare si
% vectorul tensiunilor la bornele surselor:
% I_gen = [I_1 I_2 I_5 I_6]
% I_cons = [I_3 I_4 I_6]
I_gen = zeros(4, 1);
I_cons = zeros(3, 1);

I_gen(1) = 5;
I_gen(2) = 3i;
I_gen(3) = I_gen(1) - I_gen(2); % i5 = i1 - i2
I_cons(2) = I_gen(1); % i4 = i1
I_cons(1) = sol(1); % i3 = solutie
I_gen(4) = I_gen(1) - I_cons(1); % i6 = i1 - i3
I_cons(3) = I_gen(4); % i6 = i1 - i3
U_5 = i; % u5 = E_2
U_2 = i; % u5 = E_2
U_4 = I_cons(2) * Z_e; % U4 = I4 * Z_e
U_6 = 1 + I_cons(3) * 1; % E_1 + i6 * Zr1
U_3 = U_6;
U_1 = U_6 + U_4 + U_5;

% se afiseaza rezultatele
printf('I_1 = %f + %fi\n', I_gen(1), I_gen(1)/1i);
printf('I_2 = %f + %fi\n', I_gen(2), I_gen(2)/1i);
printf('I_5 = %f %fi\n', I_gen(3), I_gen(3)/1i);
printf('I_6 = %f + %fi\n', I_gen(4), I_gen(4)/1i);
printf('I_3 = %f %fi\n', I_cons(1), I_cons(1)/1i);
printf('I_4 = %f + %fi\n', I_cons(2), I_cons(2)/1i);
printf('U_5 = %f + %fi\n', U_5, U_5/1i);
printf('U_2 = %f + %fi\n', U_2, U_2/1i);
printf('U_4 = %f + %fi\n', U_4, U_4/1i);
printf('U_6 = %f + %fi\n', U_6, U_6/1i);
printf('U_3 = %f + %fi\n', U_3, U_3/1i);
printf('U_1 = %f + %fi\n\n', U_1, U_1/1i);
```

1.4 Verificarea bilanţului de puteri în complex

Se vor calcula, pe rand, bilanţurile puterilor generată şi absorbită dupa formulele $S_{gen} = \sum(U_{gen} * I_{gen}) + \sum(E * I_{gen})$, respectiv $S_{cons} = \sum(|I_{cons}^2| * Z)$, unde:

$$S_c = \left|\underline{I_3}\right|^2 * \underline{Z_{R3}} + \left|\underline{I_4}\right|^2 * \underline{Z_E} + \left|\underline{I_6}\right|^2 * \underline{Z_{R1}}$$
$$S_g = \underline{I_5} * \underline{E_2} + \underline{I_6} * \underline{E_1} + \underline{I_2} * \underline{U_5} - \underline{I_1} * \underline{U_1}$$

Aplicănd forumulele de mai sus se obţine ca:

$$S_{gen} = S_{cons} = 49,538462 + 2.307692j$$

```
% se vor calcula puterile consumate si generate pentru circuit
S_gen = - I_gen(3)*U_5 - 1 * I_gen(4) - I_gen(2) * U_5 + I_gen(1) * U_1;
S_cons = abs(I_cons(1))^2*(1+10i) + abs(I_cons(2))^2*Z_e + abs(I_cons(3))^2*1;

printf('S_gen = %f + %fi\n', S_gen, S_gen/1i);
printf('S_cons = %f + %fi\n\n', S_cons, S_cons/1i);
```

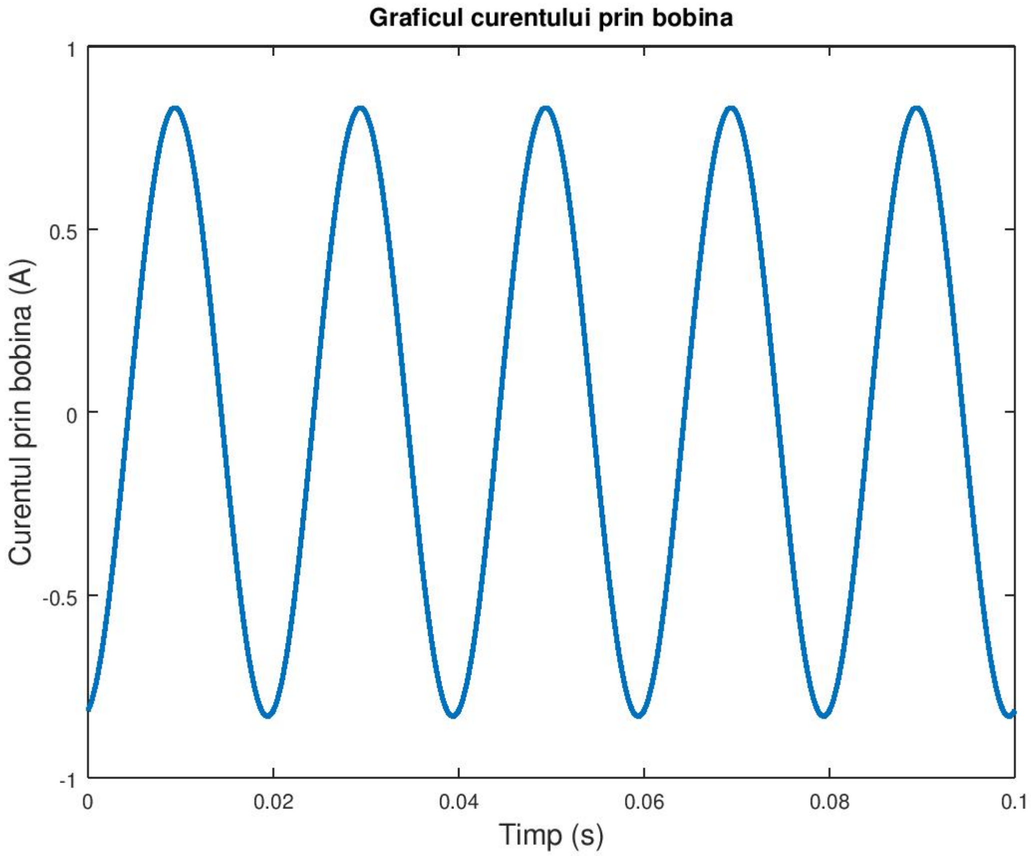
Bilanţul de puteri este corect, deci circuitul a fost rezolvat corect.

1.5 Trecerea curentului prin bobina înapoi în timp

Curentul prin bobina în complex este $\underline{I_L} = \underline{I_3} = 0,115385 - 0,576923j$. Deci $r = |\underline{I_L}| = \sqrt{0,115385^2 + 0,576923^2} = 0.588348$, iar defazajul $\varphi = \arctan\frac{-0,576923}{0,115385} = -1.373401$.

```
% i_L trecut in timp va fi:
r=abs(sol(1));
phi=angle(sol(1));
t = [0:0.0001:0.1];
for i = 1:length(t)
  i_L(i) = r * sqrt(2) * sin(100 * pi * t(i) + phi);
endfor

% se traseaza graficul lui i_L(t)
plot(t, i_L, 'LineWidth', 2);
xlabel('Timp (s)', 'FontSize', 14);
ylabel('Curentul prin bobina (A)', 'FontSize', 14);
title('Graficul curentului prin bobina', 'FontSize', 12);

printf('r = %f\n', r);
printf('phi = %f\n', phi);
```

Prin urmare, $i_L(t) = r\sqrt{2}\sin(100\pi t + \varphi) = 0.832236\sin(100\pi t - 1.373401)$.
În continuare se va trasa graficul acestui curent:



1.6 Rezultatele obtinute

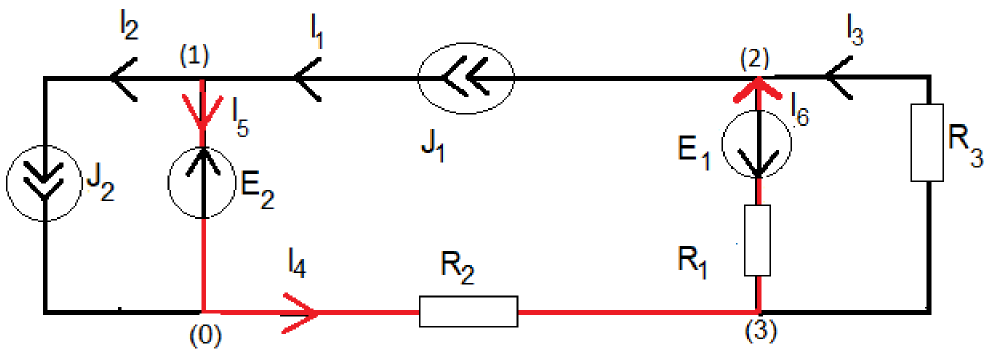
Rezultatele obţinute la rularea codurilor de mai sus sunt:

```
I_3 = 0.115385 -0.576923i

I_1 = 5.000000 + 0.000000i
I_2 = 0.000000 + 3.000000i
I_5 = 5.000000 -3.000000i
I_6 = 4.884615 + 0.576923i
I_3 = 0.115385 -0.576923i
I_4 = 5.000000 + 0.000000i
U_5 = 0.000000 + 1.000000i
U_2 = 0.000000 + 1.000000i
U_4 = 5.000000 + 0.000000i
U_6 = 5.884615 + 0.576923i
U_3 = 5.884615 + 0.576923i
U_1 = 10.884615 + 1.576923i

S_gen = 49.538462 + 2.307692i
S_cons = 49.538462 + 2.307692i

r = 0.588348
phi = -1.373401
```

2 Circuitul în regim tranzitoriu

2.1 Formularea problemei

Se va păstra cicuitul modelat la exerciţiul precedent. Pentru momentul de timp 0_- se va pasiviza circuitul, înlocuindu-se bobina cu un conductor ideal şi condensatorul cu un izolator perfect:



Aşadar, $u_C(0_-) = 2$, iar $i_L(0_-) = 3$. Rezolvarea acestui circuit este copy-paste din Tema 1.

În graful din Fig. 2.1 există 2 n_{sic} (Număr de surse ideale de curent) şi 1 n_{sit} (Număr de surse ideale de tensiune)

Metode

Metodă	Număr de ecuaţii
Kirchhoff clasic	2 * L = 4
Kirchhoff în curenţi	L - N +1 = 3
Kirchhoff în tensiuni	N - 1 = 4
Curenţi de coarde	L - N + 1 - n_{sic} = 1
Tensiuni în ramuri	N - 1 - n_{sit} = 2

Conform tabelului de mai sus, alegem metoda curenţilor de coarde ca fiind cea mai eficientă.
Acum, de la graful, care va avea doar elementele de circuit şi valorile corespunzătoare, trebuie să aflăm graful intensităţilor şi cel al tensiunilor.

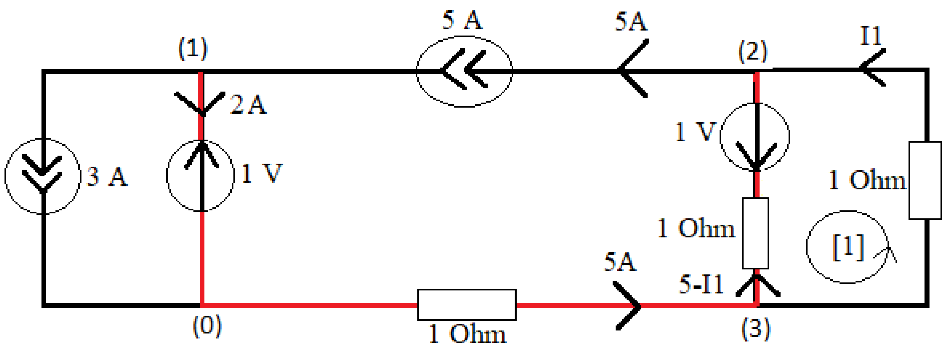


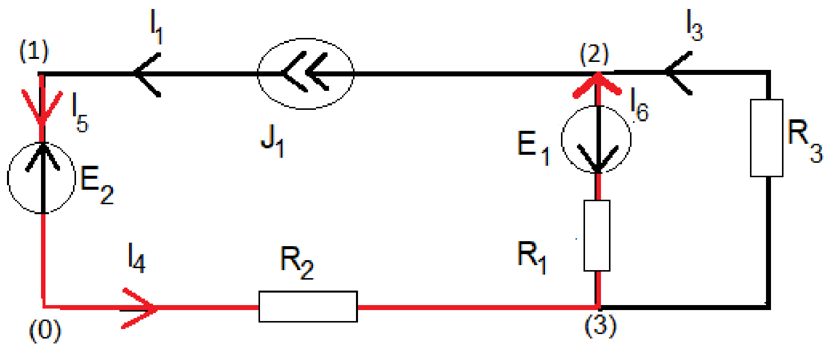
Figure 1: Circuitul

Se aplică metoda de calcul aleasă, grafului din Fig. 1, pe bucla B_1 şi se scrie ecuaţia corespunzătoare pentru a afla necunoscuta (I_1).

$$I_1 - 5 + I_1 - 1 = 0$$
$$2 * I_1 = 6$$
$$I_1 = 3$$

2.2 Rezolvarea circuitului pentru $t \to \infty$

Dacă la momentul $t = 0$ defectul constă în ruperea laturii $1 - 0$, circuitul rămas va arăta astfel, condensatorul devenind în acelaşi timp izolator perfect, iar bobina conductor perfect (pentru o mai bună analogie cu circuitul iniţial se va pastra numerotarea iniţiala a nodurilor rămase):

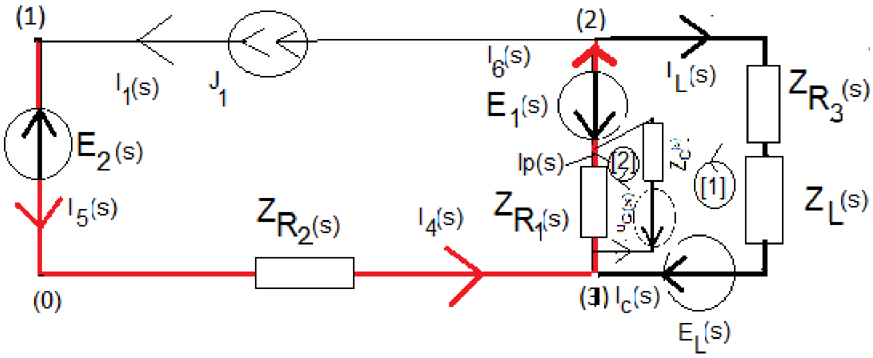


Astfel, se află valorile pentru $U_{\text{inf}} = 2$ şi calculand în cea mai din dreapta buclă a circuitului, $I_{L\,\text{inf}} = 3$.

2.3 Rezolvarea circuitului pentru $t > 0$

La momentul $t = 0$ defectul constă în ruperea laturii $1-0$, circuitul rămas va arată astfel (pentru o mai bună analogie cu circuitul iniţial se va pastra numerotarea iniţiala a nodurilor rămase).

Aplicând acestui circuit transformata Laplace, bobina se va transforma într-un rezistor cu o sursă reală de tensiune de rezistentă $Z_L(s) = sL = \frac{s}{10\pi}$ şi tensiune electromotoare $E_L = Li_L(0_-) = 3L = \frac{3s}{10\pi}$, iar condensatorul va deveni o sursă reală de tensiune de rezistentă internă $Z_{R_C}(s) = \frac{1}{sC} = \frac{10000\pi}{s}$ şi tensiune electromotoare $u_C(s) = \frac{u_C(0_-)}{s} = \frac{5}{s}$. Va rezulta următorul circuit, în care se vor alege buclele:
[1]: $\{2, 3\}$
[2]



Se va aplica teorema a doua a lui Kirchhoff:
În bucla [1]: $E_l(s) - E_1(s) = I_p(s) * Z_{R1} + I_L(s) * (Z_L + Z_3(s))$
În bucla [2]: $I_p(s) * Z_{R1} - I_L(s) * (Z_L + Z_3(s)) = E_c(s)$

Aplicând prima teorema a lui Kirchhoff:
În nodul (2): $I_L(s) - I_6(s) = 5/s$
Şi mai avem : $I_c(s) + I_p(s) = I_6(s)$

În consecinţa, va rezulta un sistem şi se va rezolva simbolic in *Octave*, în functie de s.

```
function Elth()
  pkg load symbolic;
  syms s
  A = sym(zeros(4,4));
  % x = [i_c, i_L, i_6, i_p]
  A(1,:) = [0, 1, -1, 0];
  A(2,:) = [1, 0, -1, 1];
  A(3,:) = [-10000*pi/s, 0, 0, 1];
  A(4,:) = [0, (s/10*pi + 1), 0, 1];
  b = [-5/s; 0; 2/s; -1/s + 3/(10*pi)];

  sol = simplify(A\b);
  % sol(2) = I_L(s)
  disp(sol);
```

Rulând acest cod, se obţine necunoscuta principală a sistemului anterior în funcţie de s:

```
 -7100*s + (s + 10000*pi)*(339*s - 3550) - 177500000*pi
-----------------------------------------------------------
355*s*(s*(pi*s + 10) + 10000*pi*(pi*s + 10) + 100000*pi)
```

2.4 Verificarea condiţiilor iniţiale şi finale şi trasarea graficului

Se observă că $i_L(s)$ este fractia anterioara. Aplicănd transformata Laplace inversă, nu am putut concluziona rezultatul. Insa, se vor verifica acum condiţiile iniţala şi finala:

$$\lim_{s\to 0} s i_L(s) = \lim_{t\to\infty} i_L(t) = 3$$
$$\lim_{s\to\infty} s i_L(s) = \lim_{t\to 0} i_L(t) = 3$$

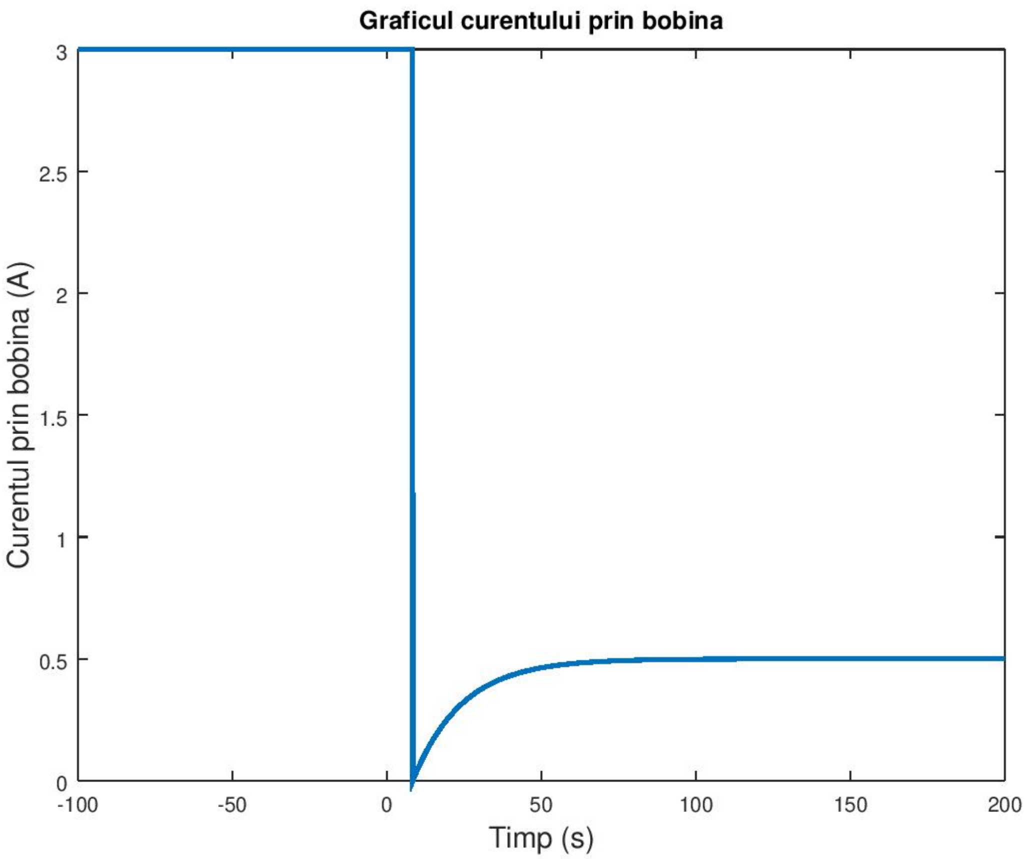
Codul folosit pentru obţinerea lui $i_L(t)$ este:

```
% se descompune formula curentului prin bobina in fractii simple
n = [0 339 -10^4*pi*339-3550 -10^4*3550*pi-177500000*pi];
d = [335*pi 3550+10^4*pi^2*335 10^5*pi*335*2 0];
[r, p, k] = residue(n, d)
y = sym (r(1)/(s-p(1)) + r(2)/(s-p(2)));

% se trece curentul prin bobina inapoi in timp
i_L = ilaplace(y);
disp("i_L(t) = ");
disp(i_L);
```

Se constată că se respectă condiţiile atăt iniţiale ale problemei, căt şi cele finale.

Din cauză că nu s-a putut calcula transformata, se va trasa graficul unui $i_L(t)$ calculat pentru o alta configuratie al aceluiaşi circuit, dar care nu s-a soluţionat cum trebuie (a avut condensatorul in paralel cu Z_2 si bobina in serie cu Z_3, latura taiata fiind latura cu SIC $1-0$, codul se afla în fisierul Elth.2.2.m), doar pentru a demonstra utilizarea funcţiei plotiL():

```
i_L(t) =
                -20*pi*t
  1   42299*e
  - - ---------------
  2         225
```



Codul folosit pentru realizarea acestui grafic este:

```
function plot_iL()
  x = [-0.5:0.01:1.5];
  for i = 1:length(x)
    % formula curentului prin bobina
    z =  1/2 - 42299/225 * exp(-20*pi*x(i));
    if z > 0
      y(i) = z;
    else
      y(i) = 3;
    endif
  endfor
  plot(x, y, 'LineWidth', 2);
  xlabel('Timp (s)', 'FontSize', 14);
  ylabel('Curentul prin bobina (A)', 'FontSize', 14);
  title('Graficul curentului prin bobina', 'FontSize', 12);
endfunction
```

3 Calculul şi reprezentarea unui cămp electric

3.1 Alegerea şi calcularea campului

Fie $f(r) = r^2$. În consecinţa,

$$\rho(r, \theta\phi) = \begin{cases} r \text{ daca } r^2 \in [0, a] \\ 0 \text{ daca } r > a \end{cases}$$

Pentru determinarea lui $D(r)$ se vor considera cele doua cazuri impuse de ρ: $r \leq a$ si $r > a$:
Cazul 1 ($r \leq a$):
$\psi_{\Sigma_1} = \oint_{\Sigma_1} \overline{D}\ \overline{\mathrm{d}A} = \lim_{\overline{D} \uparrow\uparrow \overline{\mathrm{d}A}} \oint_{\Sigma_1} D\ \mathrm{d}A = D \oint_{\Sigma_1} \mathrm{d}A = 4\pi r^2 D$ (din simetria lui D)
$q = \int_{D_{\Sigma_1}} \rho(r, \theta\phi) \mathrm{d}v = \int_{D_{\Sigma_1}} r^2 \mathrm{d}v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r t^4 \sin\phi\ \mathrm{d}at\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = -\frac{t^5}{5}\Big|_0^r \cdot \cos\phi\Big|_0^\pi \cdot$
2π
$= \frac{4\pi r^5}{5}$
Aplicând LFE $\Rightarrow \psi_{\Sigma_1} = q \Leftrightarrow 4\pi r^2 D = \frac{4\pi r^5}{5} \Leftrightarrow D = \frac{r^3}{5} \Rightarrow \overline{D}(\overline{r}) = D(r)\frac{\overline{r}}{r} =$
$\frac{r^2\overline{r}}{4}$

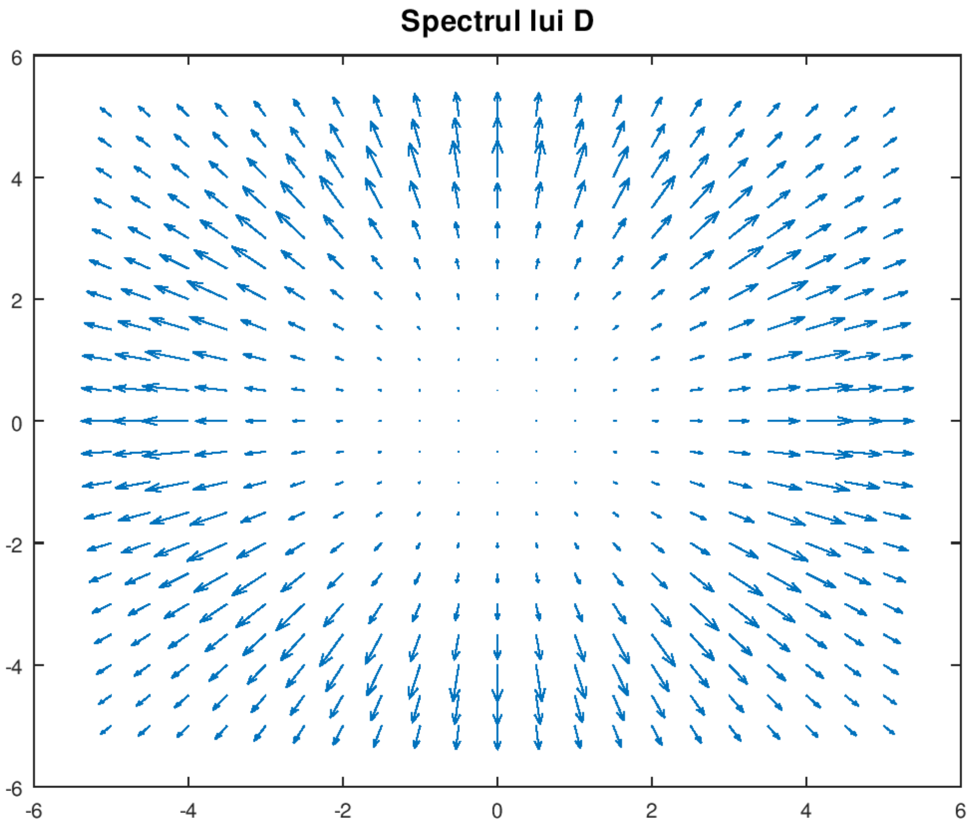
Procedând analog, pentru cazul 2 ($r > a$):
$\psi_\Sigma = \psi_{\Sigma_1}$, deoarece ρ depinde doar de r şi nu şi de θ sau ϕ, deci $\psi_\Sigma = 4\pi r^2 D$
$q = \int_{D_\Sigma} \rho(r, \theta\phi) \mathrm{d}v = \int_{D_\Sigma} r^2 \mathrm{d}v = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \sin\phi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = -\frac{r^5}{5}\Big|_0^a \cdot \cos\phi\Big|_0^\pi \cdot 2\pi$
$= \frac{4\pi a^5}{5}$
Din LFE $\Rightarrow \psi_\Sigma = q \Leftrightarrow 4\pi r^2 D = \frac{4\pi a^5}{5} \Leftrightarrow D = \frac{a^5}{5r^2} \Rightarrow \overline{D}(\overline{r}) = D(r)\frac{\overline{r}}{r} = \frac{a^5\overline{r}}{5r^3}$

Reunind cele 2 cazuri, s-a determinat $\overline{D}$:

$$\overline{D}(\overline{r}) = \begin{cases} \frac{r^2\overline{r}}{4} & \text{daca } r \in [0, a] \\ \frac{a^5\overline{r}}{5r^3} & \text{daca } r > a \end{cases}$$

3.2 Reprezentarea spectrului lui $\overline{D}$

:



Spectrul a fost generat cu codul:

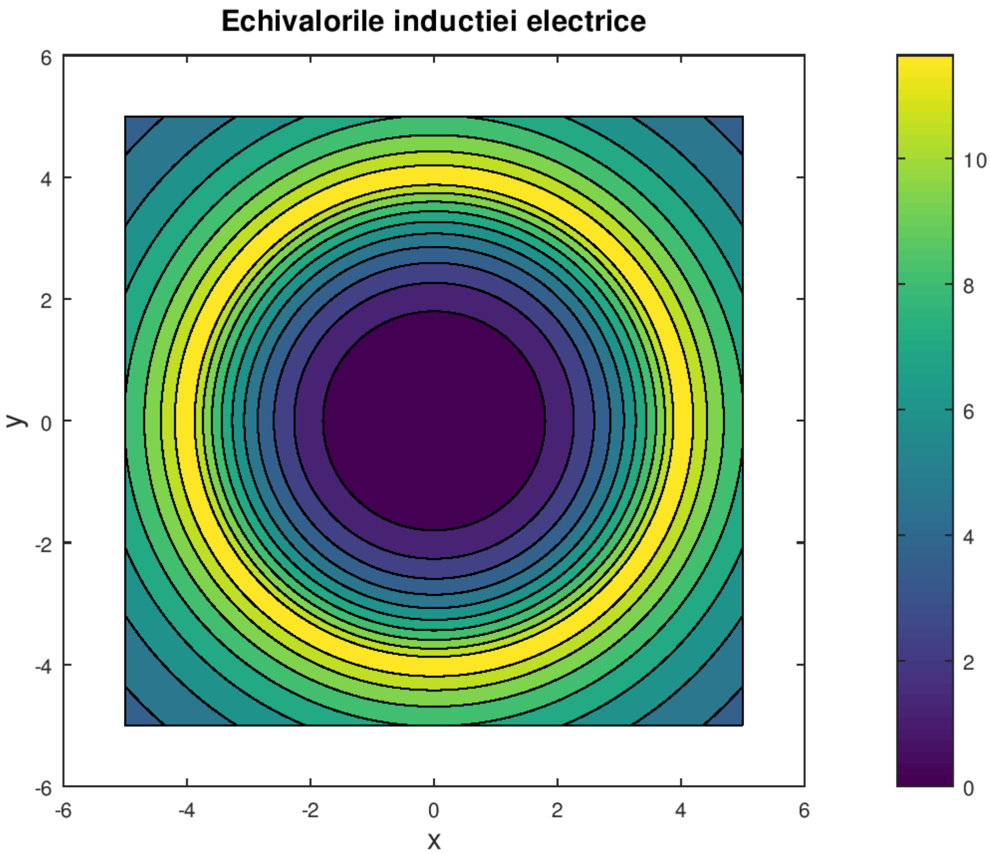
```
function Elth_3()
  a = 4;
  [x, y] = meshgrid(-5:0.5:5);
  [m n] = size(x);

  % se genereaza matricele pentru reprezentarea spectrului lui D
  for i = 1:m
    for j = 1:n
      r = sqrt(x(i, j)^2 + y(i, j)^2);
      Dx(i,j) = D(r, a) * x(i, j)/r;
      Dy(i,j) = D(r, a) * y(i, j)/r;
    endfor
  endfor

  % este reprezentat spectrul inductiei electrice
  figure;
  quiver(x, y, Dx, Dy);
  title ('Spectrul lui D', 'FontSize', 14);
```

Funcţia $D(r)$ este implementată astfel:

```
function [val] = D(r, a)
  if r > a
    val = a^5 / (5*r^2);
  else
    val = r^3 / 5;
  endif
endfunction
```

3.3 Reprezentarea echivalorilor lui $|\overline{D}|$

:



Aceasta reprezentare a rezultat in urma rulării coduli:

```
% se genereaza matricea pentru reprezentarea echivalorilor lui D
for i = 1:n
  for j = 1:n
    r = sqrt(vectx(i)^2 + vecty(j)^2);
    if r > a
      echival(i, j) = a^5 / (5*r^2);
    else
      echival(i, j) = r^3 / 5;
    endif
  endfor
endfor

% sunt reprezentate echivalorile inductiei electrice
figure;
gradient(echival);
contourf (vectx, vecty ,echival) ;
title ('Echivalorile inductiei electrice', 'FontSize', 14);
xlabel('x', 'FontSize', 14);
ylabel('y', 'FontSize', 14);
colorbar;
```

4 Bibliografie

1. Cursul 11 despre LFE

2. tex.stackexchange.com