Badanie efektywności algorytmów grafowych w zależności od rozmiaru instancji oraz sposobu reprezentacji grafu w pamięci komputera.

1. Plan pomiarów

a. Generowanie grafów

Aby uniknąć generowania zbyt wielu grafów, wszystkie algorytmy zostały wykonane na tych samych grafach, nieskierowanych i na płaszczyźnie(wymagane do heurystyki A*)

Wszystkie grafy zostały wylosowane w następujący sposób:

i. Wylosowanie każdemu wierzchołka dwóch współrzędnych w przedziale [0, 8191]
ii. Dodanie krawędzi 0-1, 1-2, 1-3, … … n-0 w celu zagwarantowania spójności grafu
iii. Utworzenie zbioru wszystkich możliwych krawędzi(z wyłączeniem już dodanych)
iv. Wyliczenie na podstawie zadanej gęstości docelowej ilości krawędzi
v. Losowe wybieranie ze zbioru wyliczonej ilości krawędzi i dodawanie ich do grafu z wagą odpowiadającą odległości między odpowiadającymi wierzchołkami

b. Metoda pomiaru czasu i platforma testowa

Do pomiaru czasu użyto funkcji QueryPerformanceCounter.
Program kompilowana w trybie realease(optymalizacja o2) w Visual Studio 2015.
Testy przeprowadzano na laptopie z procesorem Intel Core i7-4720HQ, 6MB cache, taktowanie ograniczone do 2,6 GHz

Wszystkie pomiary wykonano według schematu:

i. Dla każdego rozmiaru grafu
    1. Dla każdej gęstości grafu
        a. 100 razy
            i. Wygenerować graf dla obu reprezentacji
            ii. Zmierzyć czas wykonania każdego z algorytmów
        b. Uśrednić czasy

2. A*, wyszukiwanie ścieżki

a. Heurystyka

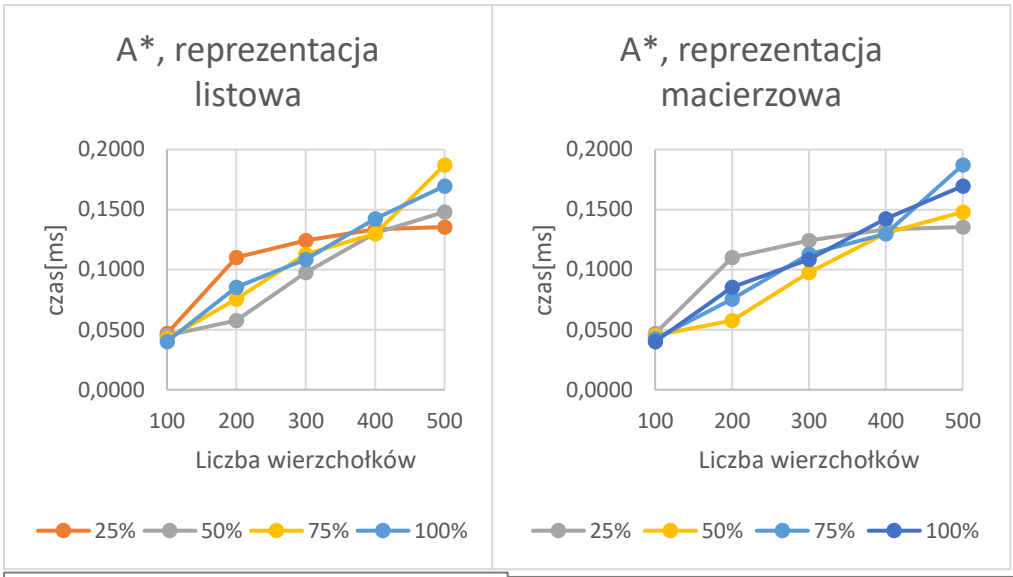
A* jest algorytmem wymagającym heurystyki do optymalnego działania(w przeciwnym razie staje się wolnym Dijkstrą i w sumie) więc moja implementacja A* przyjmuje za heurystykę dystans między wierzchołkami(punkt 1a: generowanie grafów).

b. Złożoność obliczeniowa

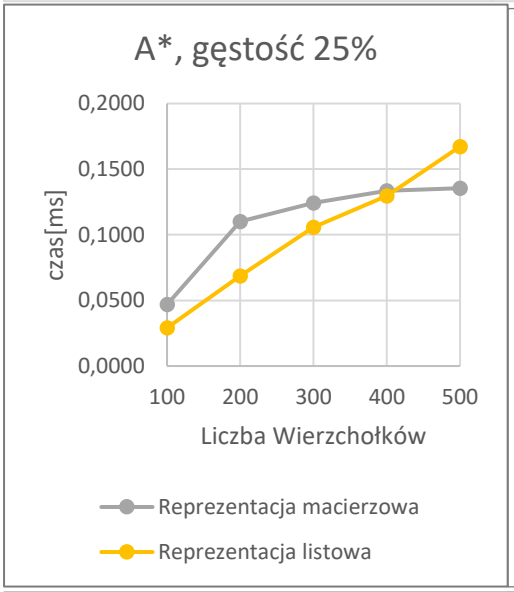
Ponieważ A* nie rozpatruje wszystkich wierzchołków jeśli nie musi(w instancjach testowych graf jest spójny więc droga zawsze istnieje, a heurystyka jest poprawna) złożoność obliczeniowa jest O(n) gdzie to ilość zbadanych wierzchołków. Ilość badanych wierzchołków powinna rosnąć wraz z rozmiarem grafu co widać na wykresach poniżej

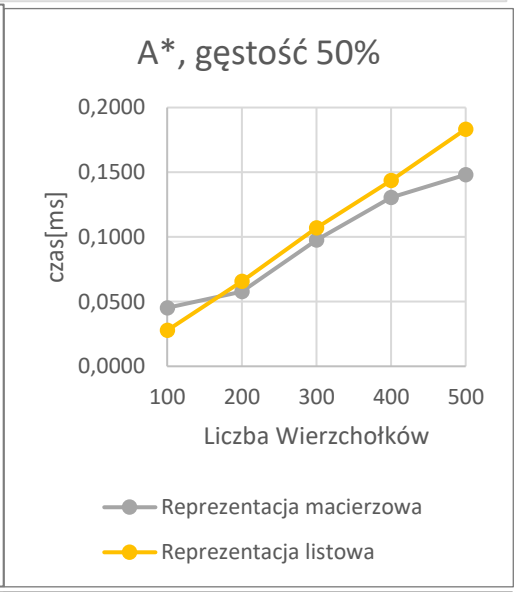
c. Wyniki pomiarów

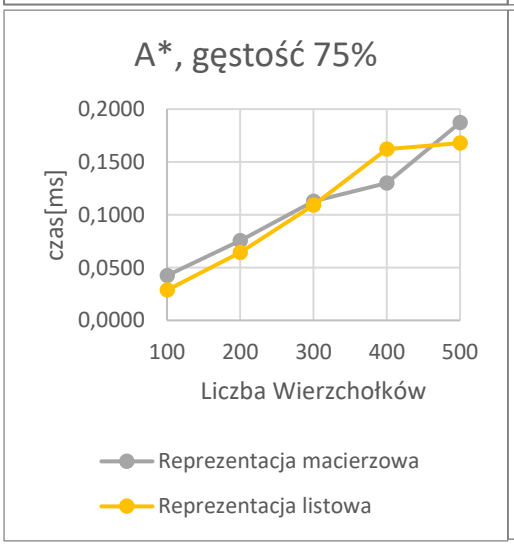
Liczba wierzchołków	Gęstość(%)				
	A* List	25	50	75	100
	100	0,0291	0,0277	0,0287	0,0313
	200	0,0687	0,0656	0,0643	0,0774
	300	0,1057	0,1069	0,1090	0,1091
	400	0,1297	0,1437	0,1621	0,1485
	500	0,1672	0,1833	0,1678	0,1775
	Gęstość(%)				
	A* Matrix	25	50	75	100
	100	0,0469	0,0452	0,0424	0,0401
	200	0,1102	0,0576	0,0754	0,0854
	300	0,1243	0,0975	0,1127	0,1085
	400	0,1336	0,1304	0,1299	0,1425
	500	0,1355	0,1481	0,1872	0,1696

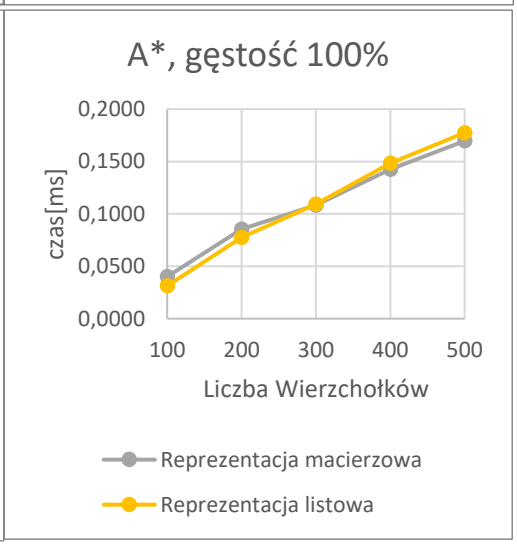

A*, reprezentacja listowa
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba wierzchołków
25%
50%
75%
100%

A*, reprezentacja macierzowa
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba wierzchołków
25%
50%
75%
100%


A*, gęstość 25%
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


A*, gęstość 50%
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


A*, gęstość 75%
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


A*, gęstość 100%
czas[ms]
0,2000
0,1500
0,1000
0,0500
0,0000
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa

3. Boruvka, szukanie MST

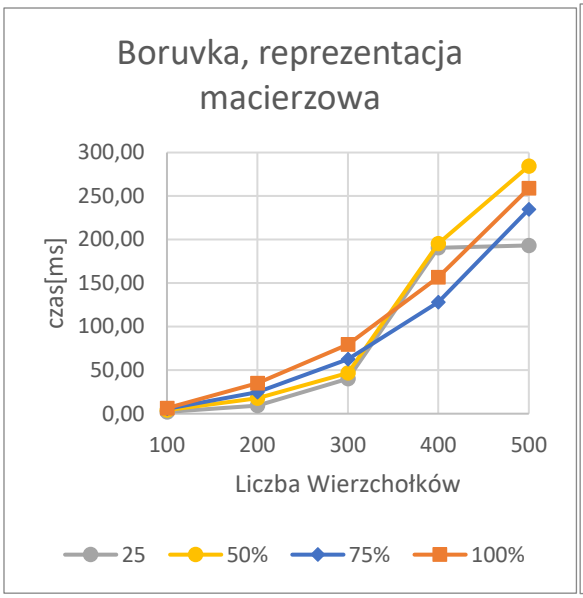
a. Złożoność obliczeniowa

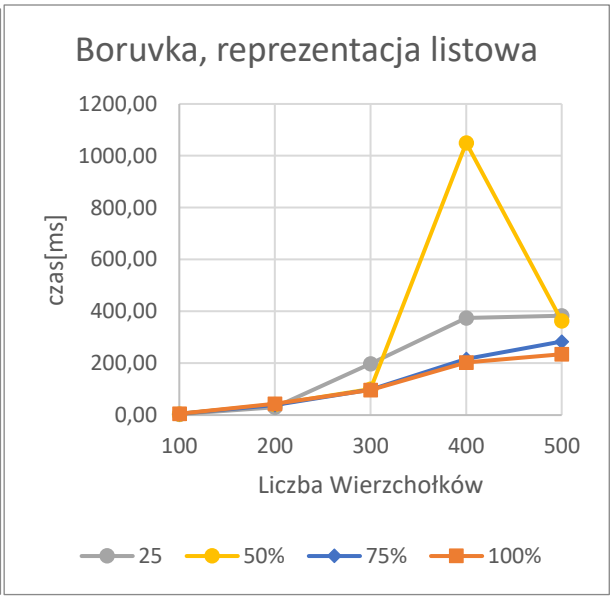
Algorytm Boruvki powinien działać ze złożonością czasową O(E log V), co ładnie widać dla grafów o mniejszych gęstości ale trudniej znaleźć dopasowanie dla większych. Prawdopodobnie jest to spowodowane sposobem implementacji łączenia podgrafów, zrealizowaną przez łączenie drzew(struktury danych), wymagające realokacji pamięci.

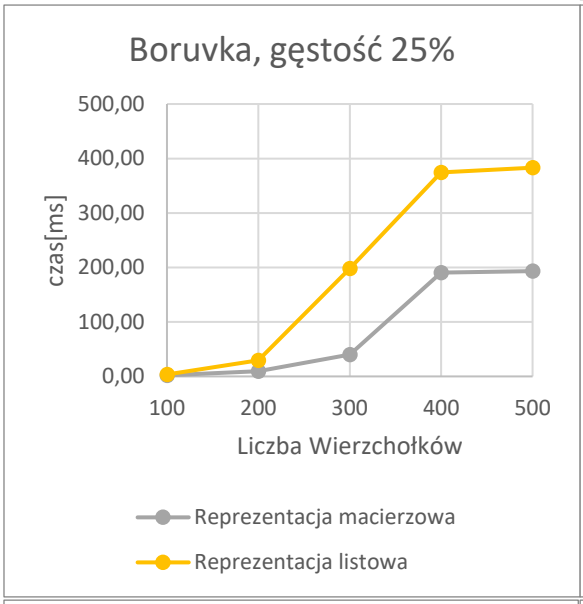
W przypadku formy listowej i grafu o 400 wierzchołkach, gęstości 50%, albo wylosowało się parę dziwnych grafów, albo windows uznał mój projekt może poczekać aż się zainstalują jakieś aktualizacje. Zignorowałbym tą próbkę.

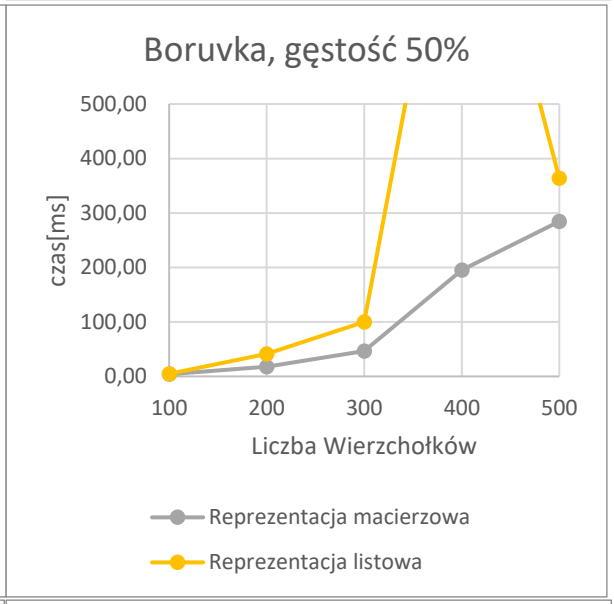
b. Wyniki pomiarów

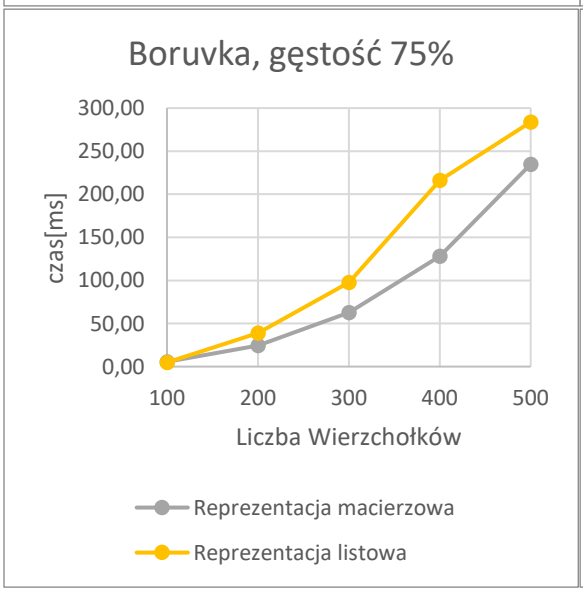
Liczba wierzchołków	Gęstość[%]				
	Boruvka List	25	50	75	100
	100	3,58	4,74	4,82	5,18
	200	29,65	41,34	38,80	43,65
	300	197,92	100,23	97,46	96,83
	400	374,23	1049,79	216,27	202,43
	500	383,15	363,63	283,82	234,72
	Gęstość[%]				
	Boruvka Matrix	25	50	75	100
	100	2,03	4,07	5,58	6,38
	200	9,32	17,60	24,54	35,08
	300	40,28	46,86	62,72	79,63
	400	190,66	195,47	127,90	156,83
	500	193,28	284,48	234,78	258,82

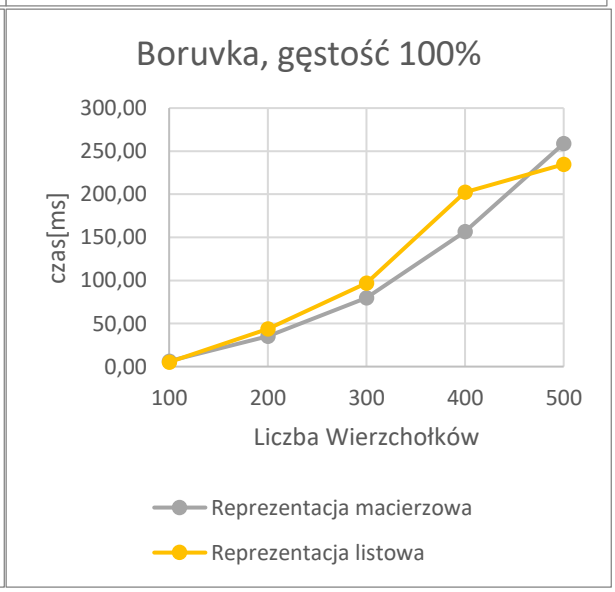

Boruvka, reprezentacja macierzowa
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
25
50%
75%
100%


Boruvka, reprezentacja listowa
1200,00
1000,00
800,00
600,00
400,00
200,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
25
50%
75%
100%


Boruvka, gęstość 25%
500,00
400,00
300,00
200,00
100,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Boruvka, gęstość 50%
500,00
400,00
300,00
200,00
100,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Boruvka, gęstość 75%
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Boruvka, gęstość 100%
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa

4. Ford-Fulkerson, szukanie maksymalnego przepływu

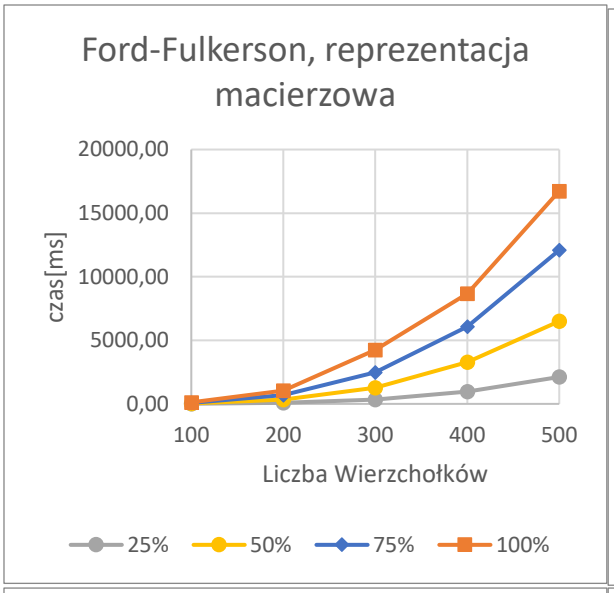
a. Złożoność obliczeniowa

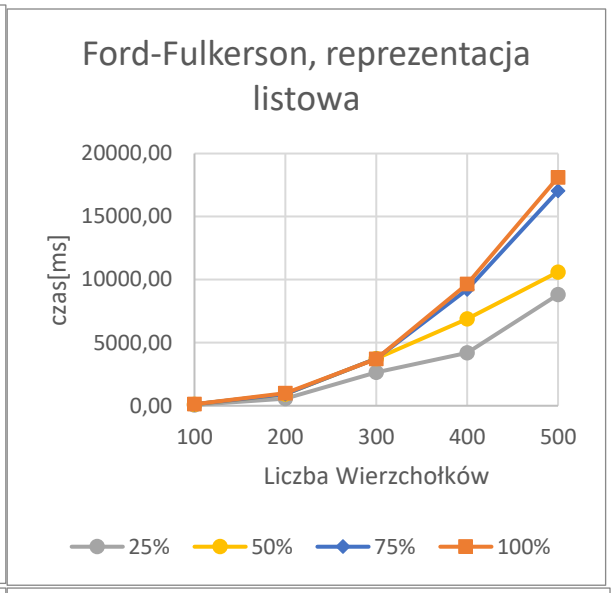
Wikipedia podaje złożoność czasową metody Forda-Fulkersona jako O(Ef), gdzie f to wartość maksymalnego przepływu, co na pewno jest prawdą przy grafach nieważonych, ale wydaje mi się być mało precyzyjne, więc spróbuję sam:
Używam algorytmu przeszukiwania wszerz(BFS) do znajdywania ścieżek w grafie rezydualnym, co ma złożoność O(V + E) co dla gęstych grafów daje $O(V^2)$ co pięknie widać na wykresie dla grafów pełnych. BFS wykona się maksymalnie E razy więc szacuję całość na $O(E*(V+E)) = O(E^2*V)$. Kwadratowy przyrost czasu wykonania widać na większości grafów, więc chyba się zgadza.

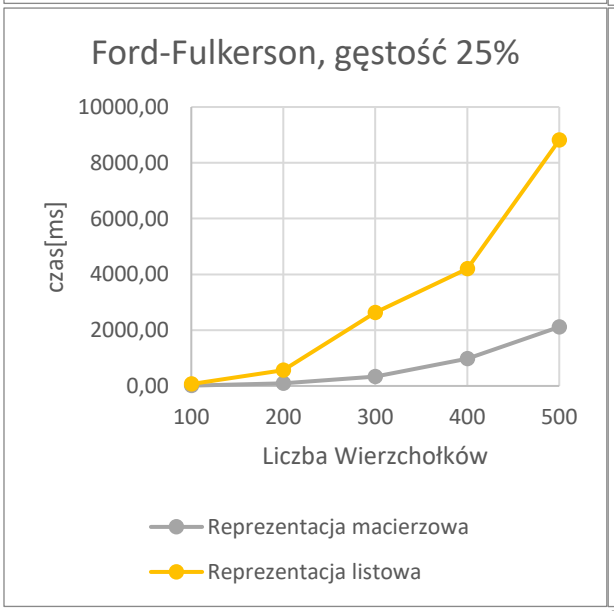
Utworzenie grafu rezydualnego wymaga skopiowania grafu żeby nie niszczyć instancji testowej, co prawdopodobnie ma złożoność czasową $O(V^2)$ dla reprezentacji macierzowej i O(E) dla listowej ale instrukcje kopiowania są tak proste że można je pominąć.

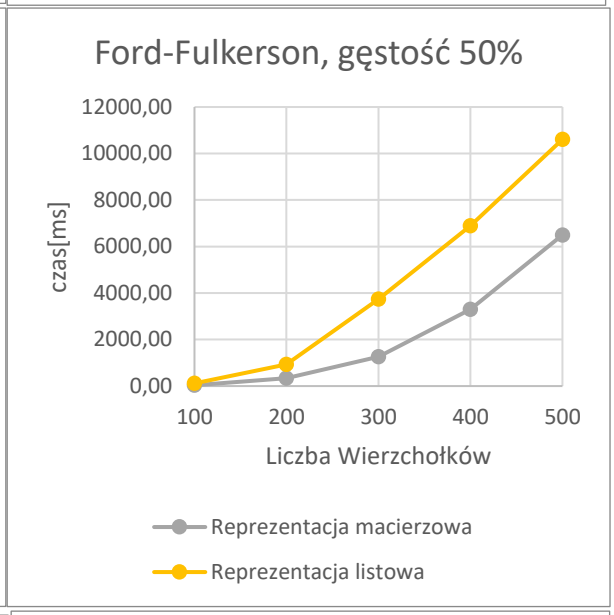
b. Wyniki pomiarów

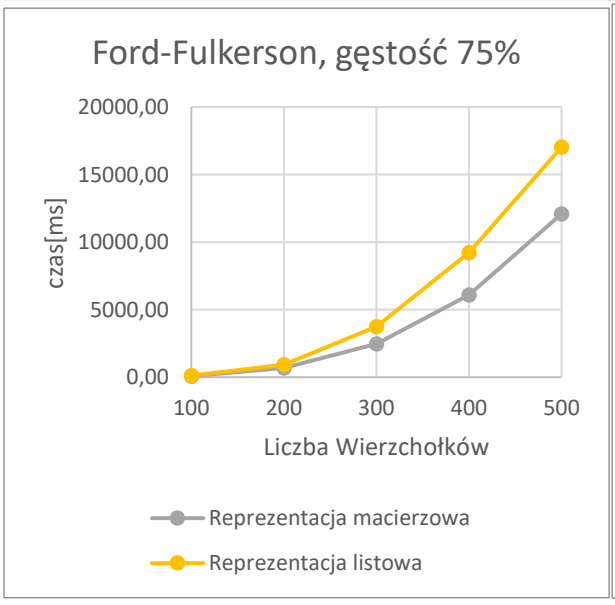
Liczba wierzchołków	Gęstość[%]				
	FF List	25	50	75	100
	100	67,88	117,38	119,53	121,72
	200	569,30	930,68	928,55	988,11
	300	2634,33	3739,09	3743,66	3714,19
	400	4198,57	6886,71	9230,01	9645,44
	500	8811,69	10605,00	17033,71	18114,96
	Gęstość[%]				
	FF Matrix	25	50	75	100
	100	11,14	35,57	80,33	122,55
	200	95,53	341,67	685,03	1052,70
	300	333,53	1263,37	2476,55	4244,06
	400	974,59	3291,90	6080,16	8666,88
	500	2114,18	6497,04	12089,07	16735,24

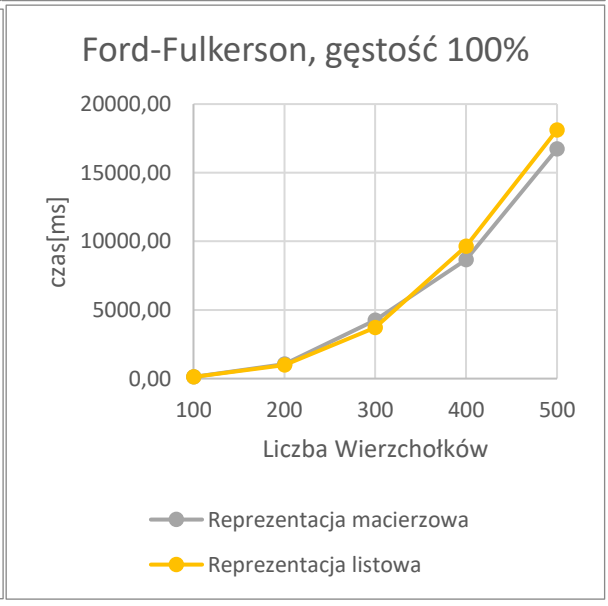

Ford-Fulkerson, reprezentacja macierzowa
20000,00
15000,00
10000,00
5000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
25%
50%
75%
100%


Ford-Fulkerson, reprezentacja listowa
20000,00
15000,00
10000,00
5000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
25%
50%
75%
100%


Ford-Fulkerson, gęstość 25%
10000,00
8000,00
6000,00
4000,00
2000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Ford-Fulkerson, gęstość 50%
12000,00
10000,00
8000,00
6000,00
4000,00
2000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Ford-Fulkerson, gęstość 75%
20000,00
15000,00
10000,00
5000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa


Ford-Fulkerson, gęstość 100%
20000,00
15000,00
10000,00
5000,00
0,00
czas[ms]
100
200
300
400
500
Liczba Wierzchołków
Reprezentacja macierzowa
Reprezentacja listowa

5. Konkluzje

Reprezentacja macierzowa jest szybsza, chociaż dla grafów rzadkich i drzew będzie zajmować więcej pamięci niż reprezentacja listowa grafu.

A* jest wspaniały i rozumiem dlaczego jest powszechnie wykorzystywana przy tworzeniu gier komputerowych.

Moja implementacja Boruvki jest okropna(zbiory rozłączne), ale algorytm ma duży potencjał ponieważ pozwala na wykorzystanie wielu wątków.

6. Literatura

http://eduinf.waw.pl/inf/alg/001_search/index.php

https://www.wikipedia.org/

Procedural Content Generation for C++ Game Development, Dale Green, ISBN 978-1-78588-671-3, rozdział 8