② $W'' + \frac{1}{z} W' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) W = 0$

0 - пр. особая точка , ∞ - непр особая точка

③ $\left(P_n^m, P_n^m\right) = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

④ $\left(Y_{nm}, Y_{n'm'}\right) = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \cdot 2\pi$

⑤ Теорема о неправильной особой точке

⑥ $\underbrace{\frac{\sin \pi\nu}{\pi} \ln(z+1)}_{\text{главный член}} + O(1)$

⑦ $-\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}y = \lambda y \qquad y(1) < \infty \quad y(-1) < \infty$

$\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}y + \lambda y = 0$ ур-ние Лежандра

$\lambda = \nu(\nu+1)$ - собств. ~~...~~ число

т.к. $y(-1) < \infty$
$\Rightarrow \nu = n \in \mathbb{Z}$

$\lambda = n(n+1)$

с. ф. являются нормированные полиномы Лежандра P_n

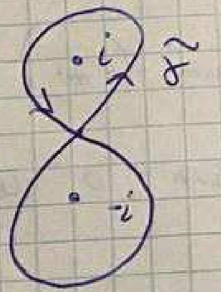
$P_n = \frac{1}{2^n} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$ - ф-ла Родрига для пол. Лежандр.

Собств. ф-цией будет $\frac{P_n}{\sqrt{(P_n, P_n)}}$ $\quad (P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}$

$$\overline{P}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{n!}\,\frac{1}{2^n}\,\frac{d^n}{dz^n}\,(z^2-1)^n$$

(8) Интегральное представление для ф-ции Бесселя

$$W_{1,2} = z^\nu \int\limits_{\tilde{\gamma}} e^{zt}\,(t^2+1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt$$



(9) Нет не может

при $\nu > 0$ нули ур-ния Бесселя находятся на вещ. оси

(10) $\nu = \frac{7}{2}$ при полуцелых ν решение имеет С.В.

$\Rightarrow$ жорданова форма имеет вид:

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i \rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \rho_2} \end{pmatrix}$$ для ур-ния Бесселя $\rho_{1,2} = \pm\nu$

$$\begin{pmatrix} e^{7\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-7\pi i} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(11)

(12) Нет. У эллиптической ф-ции сумма вычетов в паралл. периодов должна быть равна нулю.

Если есть один полюс => сумма вычетов не может быть равна нулю.

Если вычет $=0$ => ф-ция $const$ (не эллиптическая)

(13) Нет, не может.

$f(z)$ - мероморфная

$\exists\ f(z)$ имеет полюс в точке бесконечность, тогда $\forall$ окрестности есть полюс (хотя бы один)

=> точка ∞ не изолиров., а это невозможно

(15) ~~[illegible]~~

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) > 0$$

$$\boxed{\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}}$$

(16) $w'' + p(z)w' + q(z)W = 0$

два решения в виде рядов $z^{\rho_{1,2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty} C_k^{1,2} z^k$

→ решения в виде рядов => собств. вектора => матрица монодромии имеет диагон. вид

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} \end{pmatrix}$$

(17) $w'' + p(z)w' + q(z)W = 0$ 7 пр. особых точек бесконечность - не особая точка

Сумма всех показателей: $\sum\limits_{i=1}^{n}(\rho_i^1 + \rho_i^2) + \rho_\infty^1 + \rho_\infty^2 = n-1$

=> Ответ 6.

(18) Старший член Неймана $N_0(z)$ $z \to 0$

$N_0(z) = \frac{2}{\pi}\ln z\ J_0(z)$, где $J_0(z)$ - ф-ция Бессель с $\nu = 0$.

(19) $\nu = n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ есть присоед. вектор

$\rho_{1,2} = \pm\nu$

Матрица Монодромии имеет вид $\begin{pmatrix} e^{2\pi i n} & 1 \\ 0 & e^{-2\pi i n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(20) При каких зн. ν $J_\nu(z)$ явл. целой ф-цией

при $\nu \in \mathbb{Z}$ $\nu > 0$

$J_\nu(z) = z^\nu \varphi(z)$ $\varphi(z)$ – Р.Т. $\varphi(z) \in A(\mathbb{C})$

(21) Какие особые точки имеет ур-ние

$(z^2-1)W'' + 2zW' + \frac{1}{z^2}W = 0$

особые точки $\pm 1, 0$.

$W'' + \frac{2z}{z^2-1}W' + \frac{1}{z^2(z^2-1)}W = 0$

$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$ $p(z) = \frac{2z}{z^2-1} = p_0$

$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$

$\nexists z = 0$:

$p(z): \frac{2z}{z^2-1} = -2z + \dots$ $q(z): \frac{1}{z^4-z^2} = -\frac{1}{z^2} + \dots$

$z \to 0$

$\Rightarrow$ По Th Фукса Точка 0 является пр. особой точкой

$\nexists z = 1$:

$p(z): \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)} = \frac{2s+2}{s(s+2)} = \frac{2}{s+2} + \frac{2}{s(s+2)}$

$s = z-1$ $s \to 0$ $s \to 0$

$z \to 1$ $z = s+1$ $= \frac{1}{s} + \dots$

$q(z): \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(s+1)^2 s(s+2)} = \text{const}\,\frac{1}{s} + \dots$

$s \to 0$

Пр. особая т. по Th Фукса

* $z=-1$

$$p(z) = \frac{2z}{z^2-1} = \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{2(s-1)}{(s-2)s} = \frac{2s-2}{(s-2)(s)} =$$

$z \to -1$, $s = z+1$, $z = s-1$, $s \to 0$

$$= \frac{2}{s-2} - \frac{2}{(s-2)s} = \text{const} + \frac{1}{s} + \dots$$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)s} = \frac{\text{const}}{s} + \dots$$

$s \to 0$

$\Rightarrow z=-1$ пр. особая точка

(см №49)

$z = \infty$

* $z=\infty$

$$p(z) = \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{2\frac{1}{s}}{\left(\frac{1}{s}-1\right)\left(\frac{1}{s}+1\right)} = \frac{2\frac{1}{s}\cdot s^2}{(1-s)(1+s)} = \frac{2s}{(1-s)(1+s)} =$$

$s = \frac{1}{z}$, $z = \frac{1}{s}$, $s \to 0$, $\left(\frac{1-s}{s}\right)\left(\frac{1+s}{s}\right)$, $s \to 0$, $= 2s$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2}-1\right)} = \frac{s^4}{1-s^2} = s^4$$

$z = \frac{1}{s}$, $\frac{1}{s^2}\,\frac{1-s^2}{s^2}$, $s \to 0$

(22) Написать решение внутр. задачи Неймана в шаре $U(R)$

$$\Delta U = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n$$

$$U = C + \sum_{n=0}^{\infty} Y_n r^n = C + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{r^n}{n R^{n-1}}$$

(23) $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta + r^2}}$

(24) Фотка в метод.

(25)

(26) $\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}$

(27) $W'' - \frac{1}{z}W' - 3\frac{1}{z^2}W = 0$

$\rho(\rho-1) - \rho - 3 = 0$

$\rho^2 - 2\rho - 3 = 0 \quad D = 4 + 12 = 16 \qquad \rho_1 = \frac{2+4}{2} = 3$

$\rho_2 = -1$

$\rho_1 = 3 \to$ собств. вектор

$z^{-1}\sum C_k z^k$

$\rho_2 = -1$ — собств. (проверим)

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{6\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(28) Связь ф-ций Вейерштрасса

$\sigma(u+2\omega)$ и $\sigma(u)$, где 2ω — период

$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$

(29)

$\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{4}(2\nu+1)\right)$

(30) Решение внутр. задачи Дирихле в шаре

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=R} = Y_1 + 2Y_3 \end{cases}$$

Ищем решение в виде $u = \sum_{l=0}^{\infty} r^l \tilde{Y}_l$

Нужно уд. краевому условию

$\sum_{l=0}^{\infty} R^l Y_l = Y_1 + 2Y_3$

$\tilde{Y}_1 = \frac{Y_1}{R} \qquad \tilde{Y}_3 = \frac{2Y_3}{R^3} \qquad u = \frac{Y_1}{R}r + \frac{2Y_3}{R^3}r^3$

(31) $N_\nu = \dfrac{\cos\pi\nu\, J_\nu - J_{-\nu}}{\sin\pi\nu}$

(32) ?

(33) ± 1; ∞ – правильные

$((1-z^2)w')' + \nu(\nu+1)w = 0$

(34) $Y_n^m = e^{im\varphi} P_n^{|m|}$ – решение ур-ние для оператора Бертрана $\Delta_{\varphi,\theta}$

$(f,g) = \int f\bar{g}\, d\Omega$

$(Y_{nm}, Y_{n'm'}) = 2\pi \delta_{nn'} \delta_{mm'} \dfrac{2}{2n+1} \dfrac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}$

(35) $\exists\ f = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$

$Y_k(s) = \dfrac{2k+1}{4\pi} \int_{S^2} f(s') P_k(s', s)\, dS_y$

(36) прямое: $F_\nu(k) = \int_0^\infty f(r) J_\nu(kr)\, r\, dr$

обратное: $f(r) = \int_0^\infty F_\nu(k) J_\nu(kr)\, k\, dk$

(37) №19 (решали)

(38) Обобщ. ур-ние Лежандра

$((1-z^2)w')' + \nu(\nu+1)w - \dfrac{\mu^2}{1-z^2} w = 0$

(39)

$H_0^1(z) = -\dfrac{2i}{\pi} \ln\dfrac{1}{x} + \dots$

$z \to 0$

(40) С.ф. и с.ч. для задачи Ш-Л

$$-y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{m(m+1)}{x^2}y = \lambda y \qquad y(0) < \infty;\ y(l) = 0$$

С.з. : $\lambda_n = \left(\frac{r_n^{m+\frac{1}{2}}}{l}\right)^2$, где $r_n^{m+\frac{1}{2}}$ - нули ф-ции Бесселя

(41) $H_\nu^{(2)}(z) = \frac{-i}{\pi} \Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$

(42) Нет, Эллиптическая ф-ция явл. мероморфной => => у мером. ф-ций нет сущ. особых точек

(43) Чему равна суммарная кратность нулей

$\wp''(u) + \wp'''(u)$

$\wp'(u)$ - корень кратности 3 -> сумма кр. = 3

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \left(-2Q(u) + \frac{2}{u^3}\right)du$$

$$Q(u) = \sum_{m,m' \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(u - 2m\omega - 2m'\omega')^3}$$

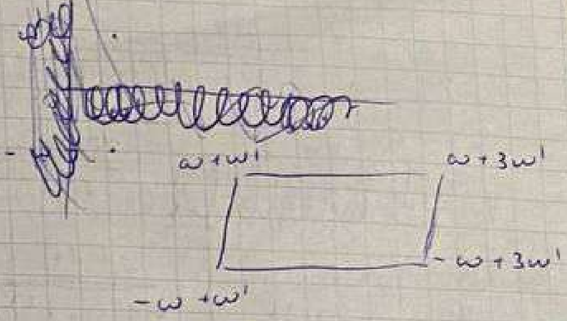
$\wp'(u) = -2Q(u)$ $\qquad$ $\wp''(u)$ - имеет корень 4 кратности

$\wp'''(u)$ - имеет корень 5 кратности

=> $\wp''(u) + \wp'''(u)$ имеет суммарную кратность нулей = 5.

(44) Найти сумму нулей $\wp(u)$ в пар. периодов с вершинами $-\omega+\omega'$, $\omega+\omega'$, $\omega+3\omega'$, $-\omega+3\omega'$

Периоды: 2ω, $2\omega'$



(45) $H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)}\left(J_\nu(z)\,e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(z)\right)$

(46) $\wp(\omega+\omega') + \wp(\omega) + \wp(\omega') = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(\omega)-\wp'(\omega')}{\wp(\omega)-\wp(\omega')}\right)^2$

ω и ω' $\to$ нули ф-ции $\wp'$ $\Rightarrow \wp'(\omega)=0 \quad \wp'(\omega')=0$

$\wp(\omega+\omega') = -(\wp(\omega)+\wp(\omega'))$

$\Rightarrow \wp(\omega+\omega') \neq \wp(\omega)$ ч.т.д.

(47) $\begin{cases} \Delta U = 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = Y_3 + 2Y_4 \end{cases}$ $\quad U = \sum\limits_{l=0}^{\infty} r^l \hat{Y}_l$

$\sum\limits_{l=1}^{\infty} l R^{l-1} \hat{Y}_l = Y_3 + 2Y_4$

$3R^2 \hat{Y}_3 = Y_3 \qquad \hat{Y}_3 = \frac{Y_3}{3R^2}$

$4R^3 \hat{Y}_4 = 2Y_4 \qquad \hat{Y}_4 = \frac{2Y_4}{4R^3} = \frac{Y_4}{2R^3}$

$U = r^3 \frac{Y_3}{3R^2} + r^4 \frac{Y_4}{2R^3} + C$

(48) $\varsigma(w)$ через эллиптический синус Якоби

$$w = \int_0^{2\varsigma} \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$$

$$W = \int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \qquad X(\omega) = \mathrm{sn}(\omega|k^2)$$

делаем замену $z = t^2$, $dz = 2t\,dt$

$$\int_0^{\sqrt{2\varsigma}} \frac{2t\,dt}{2\sqrt{t^2(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\sqrt{2\varsigma}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$\sqrt{2\varsigma} = \mathrm{sn}(\omega|k^2) \qquad \varsigma = \frac{\mathrm{sn}^2(\omega|k^2)}{2}$$

(49) $(z^2-1)W'' + 2z^2W' + \frac{1}{z^2}W = 0$

$$W'' + \frac{2z^2}{z^2-1}W' + \frac{1}{z^2(z^2-1)}W = 0$$

Особые точки $z = \pm 1,\ 0$

Определим являются эти точки правильными или неправ.

$z=0$:

$$p(z) = \frac{2z^2}{z^2-1} \underset{z\to 0}{=} -2z^2 + \dots \qquad q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} \underset{z\to 0}{=} -\frac{1}{z^2} + \dots$$

правильная особая точка по Th Фукса

$z=1$:

$$p(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)} \underset{z\to 1}{} = \frac{2(s+1)^2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} + \dots$$

$s = z-1$, $z = s+1$, $s \to 0$

правильная особая точка

$z=-1$:

$$p(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)} \underset{z\to -1}{} = \frac{2(s-1)^2}{(s-2)s} = -\frac{1}{s} + \dots$$

$s = z+1$, $z = s-1$, $s \to 0$

пр. особая

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(s-1)^2(s-2)s} \underset{s\to 0}{=} \frac{1}{s} + \dots$$

$z = 1$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z+1)} = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)s} = \frac{1}{s} + \dots$$

$s \to 0$

пр. особая т.

$z = \infty$

$$p(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)} \overset{z=\frac{1}{s}}{=} \frac{2\frac{1}{s^2}}{\left(\frac{1}{s^2}-1\right)} = \frac{2\frac{1}{s^2}}{\frac{1-s^2}{s^2}} = \frac{2}{1-s^2} =$$

$$= \frac{2}{(1-s)(1+s)} \xrightarrow[s \to 0]{} \text{const}$$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{s^2}-1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{s^2}\left(\frac{1-s^2}{s^2}\right)} =$$

$$= \frac{s^4}{1-s^2} = \frac{s^4}{(1-s)(1+s)} \quad \cancel{\text{const}}$$

∞ не является особой точкой

$z = \infty$

$$p(z) = \frac{2z^2}{(z-1)(z+1)} = \frac{2z^2}{(z^2-1)} = \frac{2z^2}{z^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} =$$

$z \to \infty$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k \geq 0} z^k$$

$$= 2\sum_{k \geq 0} z^{-2k} = 2 + \frac{2}{z^2} + \dots$$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)} = \frac{1}{z^4\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} =$$

$$= \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{k \geq 0} z^{-2k} = \frac{1}{z^4}\left(1 + \frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$\Rightarrow \infty$ неправильная особая точка

(50) $zW'' + \frac{1}{4z(z+1)^2}W = 0$ $\quad z=0$

Найти матрицу Монодромии

$$W'' + \frac{1}{4z^2(z+1)^2}W = 0$$

$$\rho(\rho-1) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\rho^2 - \rho + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2} \qquad \rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \text{есть присоед.}$$

Матрица: $\begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{1}{2}} & 1 \\ 0 & e^{2\pi i \frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\pi i} & 1 \\ 0 & e^{\pi i} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(57) $zW'' - \frac{1}{4z(z-1)^3} = 0$

$$W'' - \frac{1}{4z^2(z-1)^3} = 0$$

$$\rho^2 - \rho + \frac{1}{4} = 0$$

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}$$

Асимптотики Функций Ханкеля в нуле:

$$H_0^{(1)} = \frac{2i}{\pi}\ln(z) + O(1)$$

$$H_0^{(2)} = -\frac{2i}{\pi}\ln(z) + O(1)$$

(64)