

Короткие вопросы к коллоквиуму по математической физике в теоретическом потоке на 4 курсе

(Предполагается, что даются краткие, но полные ответы на вопросы без подробных вычислений, но с детальными описаниями обозначений и формул.)

1. Как классифицируются линейные уравнения второго порядка в частных производных?
2. Сформулируйте необходимое и достаточное условие гиперболичности уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными.
3. Как ставится задача Коши для линейного уравнения в частных производных второго порядка для 2-х независимых переменных? В каком случае данные задачи независимы?
4. Выпишите формулы Грина для оператора Гельмгольца.
5. Выпишите формулы Грина для волнового оператора.
6. Выпишите закон сохранения для волнового уравнения в дифференциальной форме. Какова его физическая интерпретация?
7. Как определить скорость движущейся поверхности. Вычислите скорость плоской волны -- решения волнового уравнения.
8. Что такое приходящая и уходящая сферическая волна как решение волнового уравнения?
9. В каком случае данные в задаче Коши для уравнения 2 порядка в частных производных связаны между собой?
10. Определите характеристическую поверхность дифф. уравнения второго порядка в частных производных.
11. Определите слабо разрывные решения дифф. уравнения второго порядка в частных производных.
12. Что такое кинематическое и динамическое условие на слабом разрыве решения дифф. уравнения второго порядка в частных производных?
13. Как выглядят характеристики волнового уравнения и почему?
14. Какому уравнению удовлетворяет характеристика для уравнений Максвелла?
15. Каким уравнениям удовлетворяют характеристики для уравнений теории упругости?
16. Выпишите условия излучения Зоммерфельда и их интегральный вариант.
17. Определите диаграмму рассеяния во внешней задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца.
18. Что такое банахово пространство?
19. Что такое гильбертово пространство и его сепарабельность?
20. Определите линейный ограниченный оператор. Как связана ограниченность и непрерывность оператора?
21. Что такое корректность задачи? Сформулируйте необходимое и достаточное условие корректности.
22. Определите сопряженный к ограниченному оператору и понятие самосопряженности. Когда самосопряжен интегральный оператор Фредгольма в L_2 ?
23. Что такое матрица ограниченного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве?
24. Какие множества называют компактными в сепарабельном гильбертовом пространстве? Сформулируйте необходимое и достаточное условие компактности множества.
25. Компактные операторы и критерий компактности оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Вопросы для подробного изложения к коллоквиуму по математической физике в теоретическом потоке на 4 курсе

(Предполагается, что даются подробные и полные ответы на вопросы с подробными вычислениями, доказательствами и с детальными описаниями обозначений и выводом формул в объеме лекционного материала.)

1. Классификация линейных уравнений второго порядка в частных производных. Примеры.
2. Гиперболические уравнения второго порядка с двумя переменными и приведение к каноническому виду.
3. Задача Коши для гиперболического уравнения второго порядка с двумя переменными и сведение к интегральным уравнениям. Формулы Грина. Примеры формул Грина.
4. Задача Коши для уравнения с двумя независимыми переменными. Сведение к интегральному уравнению.
5. Волновое уравнение и смешанная задача для него. Дифференциальная форма закона сохранения энергии и теорема единственности для смешанной задачи. Уравнения электродинамики и теории упругости.
6. Скорость движущейся поверхности, плоские волны, скорость движения, частота и дисперсионное уравнение. Лемма об интеграле от функции по сжимающейся области. Задача Коши для волнового уравнения и теорема единственности. Скорость распространения возмущения в задаче Коши с локализованными начальными данными.
7. Характеристики. Характеристические поверхности для уравнений второго порядка, для систем первого и второго порядка. Эллиптичность систем по Петровскому. Примеры.
8. Слабо разрывные решения для линейных уравнений в частных производных второго порядка, кинематические и динамические условия на разрыве. Слабые разрывы решений возможны только на характеристиках.
9. Слабо разрывные решения уравнений Максвелла и уравнений теории упругости. Простейшие свойства решений и физическая интерпретация.
10. Уравнение Гельмгольца и внешние задачи для него. Волновое уравнение и уравнение Гельмгольца как стационарный вариант. Сферические гармонические волны, фундаментальное решение, условия излучения Зоммерфельда и интегральный вид условий Зоммерфельда. Интегральные представления для решений внутренних и внешних задач на основе формулы Грина. Асимптотическая формула для решения и диаграмма рассеяния, физическая интерпретация.
11. Доказательство единственности классического решения внешней задачи для уравнения Гельмгольца.
12. Банаховы и гильбертовы пространства, полнота, подпространства, сепарабельность, примеры. Линейные операторы, ограниченность и норма оператора, связь ограниченности и непрерывности (с доказательством).
13. Обратный оператор. Корректность задачи по Адамару. Пример Адамара некорректной задачи. Необходимое и достаточное условие корректности задачи.
14. Сопряженный ограниченный оператор. Самосопряженность. Теорема Рисса о представлении ограниченного функционала в сепарабельном гильбертовом пространстве. Матричное представление ограниченного оператора. Матрица оператора при заданном базисе целиком определяет оператор (доказательство). Пример интегрального оператора Фредгольма в L_2 .
15. Компактные множества. Теорема о компактности множества в сепарабельном гильбертовом пространстве (без доказательства). Слабая сходимости и слабая компактность. Компактные (вполне непрерывные) операторы, эквивалентные определения. Вполне непрерывный оператор ограничен, и пример того, что обратное неверно.
16. Конечномерные операторы и компактность. Произведение компактного и ограниченного операторов. Критерий компактности в сепарабельном гильбертовом пространстве (с доказательством).
17. Представление конечномерного оператора в гильбертовом пространстве. Уравнения Рисса-Шаудера с характеристическим параметром. Примеры интегральных уравнений первого и второго рода.
18. Сжимающий оператор. Теорема о решении уравнения со сжимающим оператором и ряд Неймана. Резольвента и ее свойства.