Конспект лекций Федотова А.А.

Интегрирование по множествам в $\mathbb{R}^n$

Санкт-Петербург

осень 2015

Об обозначениях

В брошюре используются следующие обозначения:

- **def.** – определение (от англ. *definition*)
- **th.** – теорема (от англ. *theorem*)
- **st.** – утверждение (от англ. *statement*)
- **ex.** – упражнение (от англ. *exercise*)
- **proof.** – доказательство (англ.)
- **cor.** – следствие (от англ. *corollary*)
- **nb.** – замечание (от лат. *nota bene*)

Сделано в среде LaTeX Иевлевым П.Н. и Филоничем В.А. Редакция Тамбовцева И.М. Записавшие конспект выражают особую благодарность за участие в поиске ошибок Севостьянову Д.Г.

С вопросами и предложениями, а также за актуальной версией брошюры обращаться по адресу ievlev.pn@gmail.com.

Эта версия брошюры – от 26 мая 2016 г. Если на Вашем календаре другое число, пожалуйста, возьмите более свежую версию.

Интеграл Римана

1. Определение интеграла Римана

def. **Брус** в $\mathbb{R}^n$ – множество $B \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\ k = 1...n\}$.

def. **Размер бруса** B – число $S(B) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |b_k - a_k|$.

def. **Объем бруса** B – число $v(B) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$.

def. **Разбиение** Π **бруса** B – конечный набор брусов $\Pi = \{B_k\}_{k=1}^{l}$ такой, что $B = \bigcup\limits_{i=1}^{l} B_i$ и $\forall\, l \neq k:\ B_k \cap B_l = \partial B_k \cap \partial B_l$.

def. **Ранг разбиения** Π : $\rho(\Pi) \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{\pi \in \Pi} S(\pi)$.

ex. Пусть Π – разбиение бруса B. Доказать, что $v(B) = \sum\limits_{\pi \in \Pi} v(\pi)$.

def. $\Xi \overset{\textbf{def}}{=} \{\xi\}_{i=1}^{l}$ – **набор точек, подчинённый разбиению** $\Pi = \{\pi_i\}_{i=1}^{l}$, если $\xi_i \in \pi_i \ \ \forall\, i = 1, ..., l$. $\Xi \leftrightarrow \Pi$.

def. **Интегральная сумма Римана** Пусть $f : B \to \mathbb{R}$, Π – разбиение B, и $\Xi \leftrightarrow \Pi$. Интегральной суммой Римана для f по Π и Ξ называют

$$S(f, \Pi, \Xi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{l} f(\xi_i) v(\pi_i).$$

def. **Интеграл Римана** Пусть $\{\Pi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность разбиений B: $\rho(\Pi_k) \to 0 \ \ k \to \infty,\ \Xi_k \leftrightarrow \Pi_k$. Пусть существует и не зависит от конкретного выбора Π_k и Ξ_k предел $\lim\limits_{k \to \infty} S(f, \Pi_k, \Xi_k)$. Тогда этот предел называют интегралом (Римана) от f по B, а f – интегрируемой по B. Пишут $f \in I(B)$.

$$\int\limits_{B} \mathrm{d}x\, f \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} S(f, \Pi_k, \Xi_k).$$

2. Элементарные свойства интеграла

- $f, g \in I(B),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in I(B)$, и

$$\int\limits_B \mathrm{d}x\ (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\limits_B \mathrm{d}x\ f + \beta \int\limits_B \mathrm{d}x\ g$$

- $f, g \in I(B), \forall\, x \in B:\ f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \leqslant \int\limits_B \mathrm{d}x\ g$
- $f \in I(B) \Rightarrow f$ ограничена на B.

2.1 Нижний и верхний интегралы Дарбу.

def. **Суммы Дарбу** Пусть Π – разбиение B. Тогда

$$\overline{\sigma}(f, \Pi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\pi \in \Pi} \sup_{x \in \pi} f(x) v(\pi) \text{ – верхняя сумма Дарбу;}$$

$$\underline{\sigma}(f, \Pi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\pi \in \Pi} \inf_{x \in \pi} f(x) v(\pi) \text{ – нижняя сумма Дарбу;}$$

Сравнение $\underline{\sigma}$ и $\overline{\sigma}$.

st. Пусть Π – разбиение B, $\Xi \leftrightarrow \Pi$, тогда $\underline{\sigma}(f, \Pi) \leqslant S(f, \Pi, \Xi) \leqslant \overline{\sigma}(f, \Pi)$.

proof. Очевидно. □

def. Π_1 **мельче** Π_2, если любой брус Π_2 разбивается на брусы из Π_1.

Пишут $\Pi_1 \prec \Pi_2$.

st. $\Pi_1 \prec \Pi_2 \Rightarrow \underline{\sigma}(f, \Pi_1) \geqslant \underline{\sigma}(f, \Pi_2)$, $\overline{\sigma}(f, \Pi_1) \leqslant \overline{\sigma}(f, \Pi_2)$.

proof. Доказано на первом курсе. □

def. **Произведение разбиений** $\Pi_1 \times \Pi_2$ – разбиение из всех брусов, которые получаются пересечением брусов Π_1 с брусами Π_2.

st. $\forall\, \Pi_1, \Pi_2,\ f : B \to \mathbb{R}:\quad \underline{\sigma}(f, \Pi_1) \leqslant \overline{\sigma}(f, \Pi_2)$.

proof. $\underline{\sigma}(f, \Pi_1) \leqslant \underline{\sigma}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \overline{\sigma}(f, \Pi_1 \times \Pi_2) \leqslant \overline{\sigma}(f, \Pi_2)$.

cor. $\underline{\sigma}(f, \Pi)$ $\overline{\sigma}(f, \Pi)$ ограничены сверху и снизу соответственно.

def. Нижний и верхний интегралы Дарбу

$$\overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \inf \overline{\sigma}(f,\Pi), \quad \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \sup \underline{\sigma}(f,\Pi).$$

cor. $\underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f \leqslant \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f.$

3. Свойства сумм Дарбу

th. О непрерывности сумм Дарбу

Пусть $f : B \to \mathbb{R}$, $\{\Pi_k \mid \rho(\Pi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность разбиений, тогда

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\sigma}(f,\Pi_k) = \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f \qquad \lim_{k\to\infty} \underline{\sigma}(f,\Pi_k) = \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f.$$

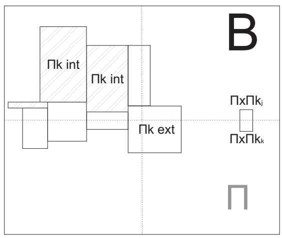
proof. Докажем теорему только для $\underline{\sigma}$, для $\overline{\sigma}$ всё аналогично.

Из определения $\underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f$ следует, что существует Π – разбиение B такое, что

$$0 \leqslant \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f - \underline{\sigma}(f,\Pi) \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\Pi \times \Pi_k \prec \Pi$, то $\forall\, k:\ 0 \leqslant \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f - \underline{\sigma}(f,\Pi\times\Pi_k) \leqslant \varepsilon.$

Проверим, что $\underline{\sigma}(f,\Pi\times\Pi_k)$ и $\underline{\sigma}(f,\Pi_k)$ при больших k отличаются мало. Разделим брусы Π_k на две группы:



1. Π_k^{int} – из брусов, находящихся внутри Π.
2. Π_k^{ext} – остальные брусы.

Тогда $\underline{\sigma}(f,\Pi\times\Pi_k) - \underline{\sigma}(f,\Pi_k) = \sum\limits_{\substack{\pi\in\Pi\times\Pi_k \\ \pi\notin\Pi_k^{int}}} \inf\limits_{\pi} f\cdot v(\pi) - \sum\limits_{\pi\in\Pi_k^{ext}} \inf\limits_{\pi} f \cdot v(\pi)$, так как вклады из Π_k^{int} сократились.

Покажем, что обе суммы стремятся к нулю при $k \to \infty$. Оценим вторую сумму (первая оценивается аналогично):

$$\left|\sum_{\pi\in\Pi_k^{ext}} \inf_{\pi} f \cdot v(\pi)\right| \leqslant \sum_{\pi\in\Pi_k^{ext}} \left|\inf_{\pi} f\right| \cdot v(\pi) \leqslant$$

$$\leqslant m \cdot \left(\substack{\text{общая площадь}\\ \text{граней брусов } \Pi} + o(1)\right) \cdot \rho(\Pi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ где } m = \left|\sup_B f\right|.$$

□

4. Критерий существования интеграла Римана

th. Критерий существования интеграла Римана

$$\exists \int_B \mathrm{d}x\, f \Leftrightarrow \underline{\int_B}\mathrm{d}x\, f = \overline{\int_B}\mathrm{d}x\, f.$$

proof. $\Leftarrow)$ $\underline{\int_B}\mathrm{d}x\, f = \overline{\int_B}\mathrm{d}x\, f, \quad \{\Pi_k \mid \rho(\Pi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\}_{k=1}^{\infty}, \quad \Xi_k \leftrightarrow \Pi_k.$

$$\underline{\sigma}(f,\Pi) \leqslant S(f,\Pi_k,\Xi_k) \leqslant \overline{\sigma}(f,\Pi), \quad \underline{\sigma} \to \underline{\int}, \quad \overline{\sigma} \to \overline{\int} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k\to\infty} S(f,\Pi_k,\Xi_k) = \underline{\int_B}\mathrm{d}x\, f = \overline{\int_B}\mathrm{d}x\, f \text{ и не зависит от выбора } \Pi_k \text{ и } \Xi_k$$

$$\Rightarrow \exists \int_B \mathrm{d}x\, f = \underline{\int_B}\mathrm{d}x\, f = \overline{\int_B}\mathrm{d}x\, f.$$

$\Rightarrow)$ $\exists \int_B \mathrm{d}x\, f, \quad \{\Pi_k \mid \rho(\Pi_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\}_{k=1}^{\infty},\ \Xi_k \leftrightarrow \Pi_k.$

Выберем Ξ_k^{up} и Ξ_k^{down} из условий:

$$\left|\overline{\sigma}(f,\Pi_k) - S(f,\Pi_k,\Xi_k^{up})\right| \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \left|\underline{\sigma}(f,\Pi_k) - S(f,\Pi_k,\Xi_k^{down})\right| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Тогда

$$0 \leqslant \overline{\sigma} - \underline{\sigma} = \Big(\overline{\sigma}(f,\Pi_k) - S(f,\Pi_k,\Xi_k^{up})\Big) + \Big(S(f,\Pi_k,\Xi_k^{up}) -$$

$$-S(f,\Pi_k,\Xi_k^{down})\Big) + \Big(S(f,\Pi_k,\Xi_k^{down}) - \underline{\sigma}(f,\Pi_k)\Big) \to \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f - \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f.$$

$$\exists \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \Rightarrow S(f,\Pi_k,\Xi_k^{up}) - S(f,\Pi_k,\Xi_k^{down}) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f - \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f = 0. \quad \square$$

5. Интеграл по произвольному множеству

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ ограничена. Будем считать, что f задана на всём $\mathbb{R}^n$, иначе как-то доопределим её.

def. **Характеристическая функция множества D**

$$\chi_D(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D; \end{cases}$$

def. **Интеграл по множеству**

$$\int\limits_D \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{B \supset D} \mathrm{d}x\ f \cdot \chi_D.$$

ex. Проверить, что определение $\int\limits_D \mathrm{d}x\ f$ не зависит от выбора B. [1]

th. **Об аддитивности интеграла Римана**

$D \subset \mathbb{R}^n,\ D = D_1 \cup D_2,\ D_1 \cap D_2 = \varnothing$ [2], $f \in I(D_1),\ f \in I(D_2) \Rightarrow$

$$f \in I(D) \qquad \int\limits_D \mathrm{d}x\ f = \int\limits_{D_1} \mathrm{d}x\ f + \int\limits_{D_2} \mathrm{d}x\ f.$$

proof. Пусть B – брус, $D \subset B$,

$$\int\limits_{D_1} \mathrm{d}x\ f + \int\limits_{D_2} \mathrm{d}x\ f = \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \cdot \chi_{D_1} + \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \cdot \chi_{D_2} = \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \cdot (\chi_{D_1} + \chi_{D_2}) =$$

[1]Проверить, что $\int\limits_B \mathrm{d}x\ f = \int\limits_{\tilde{B}} \mathrm{d}x\ f$, при $D \subset \tilde{B} \subset B$, потом построить разбиение $\overline{\Pi}$ бруса $\tilde{B}$ и достроить его до разбиения бруса B, а затем сравнить $\underline{\sigma}(f\cdot\chi,\ \tilde{\Pi}) - \underline{\sigma}(f\cdot\chi,\ \Pi)$

[2]Это условие можно ослабить.

$$= \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \cdot \chi_D = \int\limits_D \mathrm{d}x\ f.$$

$\square$

th. **Фубини**

Пусть $C \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $C = A \times B$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$, $f : C \to \mathbb{R}$, $f \in I(C)$, тогда

$$\int\limits_C \mathrm{d}z\ f = \int\limits_A \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f = \int\limits_A \mathrm{d}x \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f.$$

nb. Часто пишут $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

nb. x и y равноправны.

proof. Построим $\Pi_C = \{\pi = \pi_A \times \pi_B \mid \pi_A \in \Pi_A,\ \pi_B \in \Pi_B\}$. Тогда

$$\underline{\sigma}(f, \Pi_C) = \sum_{\substack{\pi_A \in \Pi_A \\ \pi_B \in \Pi_B}} \inf_{\substack{x \in \pi_A \\ y \in \pi_B}} f(x, y) \cdot v(\pi_A \times \pi_B) = \sum_{\pi_A \in \Pi_A} v(\pi_A) \sum_{\pi_B \in \Pi_B} v(\pi_B) \inf_{\substack{x \in \pi_A \\ y \in \pi_B}} f(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\pi_A \in \Pi_A} v(\pi_A) \inf_{x \in \pi_A} \sum_{\pi_B \in \Pi_B} \inf_{y \in \pi_B} f(x, y) \cdot v(\pi_B) = \sum_{\pi_A \in \Pi_A} v(\pi_A) \inf_{x \in \pi_A} \underline{\sigma}(f(x, y), \Pi_B) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\pi \in \Pi_A} v(\pi_A) \inf_{x \in \pi_A} \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f \leqslant \underline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f.$$

И, следовательно[3], $\displaystyle\int\limits_C \mathrm{d}z\ f \leqslant \underline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f.$

Аналогично, $\displaystyle\int\limits_C \mathrm{d}z\ f \geqslant \overline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ \phi \Rightarrow \int\limits_C \mathrm{d}z\ f \leqslant \underline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f \leqslant \overline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f \leqslant$

$$\leqslant \overline{\int\limits_A} \mathrm{d}x \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f \leqslant \int\limits_C \mathrm{d}z\ f \Rightarrow \exists \int\limits_A \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f \text{ и } \int\limits_C \mathrm{d}z\ f = \int\limits_A \mathrm{d}x \underline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\ f.$$

$\square$

---

[3]Так как $f \in I(C)$, $\underline{\sigma}(f, C) \to \displaystyle\int\limits_C \mathrm{d}z\ f$.

cor. **Слабая теорема Фубини**

$$\forall\, x \in A:\; f(x,y) \in I(B) \Rightarrow \int\limits_C \mathrm{d}z\; f = \int\limits_A \mathrm{d}x \int\limits_B \mathrm{d}y\; f$$

proof. $\forall\, x \in A:\; f(x,y) \in I(B) \Rightarrow \exists \int\limits_B \mathrm{d}y\; f \Rightarrow \int\limits_{\underline{B}} \mathrm{d}y\; f = \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}y\; f = \int\limits_B \mathrm{d}y\; f$ $\square$

Интегрируемые функции

1. Множества меры нуль

def. **Множество** $M \subset \mathbb{R}^n$ – **множество меры нуль**, если его можно поместить в счетный набор брусов сколь угодно малого суммарного объема. Пишут $\operatorname{mes} M = 0$.

st. Счетное объединение множеств меры нуль имеет нулевую меру.

proof. $\{M_l \mid \operatorname{mes} M_l = 0\}_{l=1}^{\infty} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N} \quad \exists \{B_{kl}\}_{k=1}^{\infty}:$

$$M_l \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kl} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} v(B_{kl}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{l=1}^{\infty} M_l \subset \bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} B_{kl} \qquad \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v(B_{kl}) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^l} = \varepsilon \Rightarrow \operatorname{mes} \bigcup_{l} M_l = 0$$

$\square$

st. $A \subset B$, $\operatorname{mes} B = 0 \Rightarrow \operatorname{mes} A = 0$.

proof. Следует из определения. $\square$

st. Пересечение любого числа множеств меры нуль имеет нулевую меру.

proof. Следует из предыдущего утверждения. $\square$

Примеры множеств меры нуль

1. Точка

2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

   proof. Пронумеруем $\mathbb{Q}: q_1, q_2, \ldots$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и поместим q_l в отрезок с центром в q_l и длиной $\frac{\varepsilon}{2^l}$. Суммарная длина меньше ε. $\square$

3. Отрезок гладкой кривой в $\mathbb{R}^n$ с $n > 1$ имеет нулевую меру.

   proof. Этот отрезок – образ $[0,1]$ при непрерывном дифференцируемом отображении.
   Пусть $\left|x - \dfrac{k}{m}\right| \leqslant \dfrac{1}{m}$. Тогда $\left\|f(x) - f\left(\dfrac{k}{m}\right)\right\| \leqslant \underbrace{\max_{\xi \in [0,1]} \|f'(\xi)\|}_{M} \cdot \left|x - \dfrac{k}{m}\right| \leqslant \dfrac{M}{m}$

   То есть образы всех таких точек "x" находятся в шаре радиуса $\frac{M}{m}$ с центром в $f\left(\frac{k}{m}\right)$, а значит и в кубе с тем же центром и стороной $2\frac{M}{m}$, следовательно, весь отрезок гладкой кривой содержится в $m+1$ кубе.
   Их суммарный объём $v = \left(\frac{2M}{m}\right)^n (m+1) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$. $\square$

4. Прямая линия в $\mathbb{R}^n$ с $n \geqslant 2$ имеет меру нуль.

5. Образ m-мерного бруса при гладком отображении из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ при $m < n$ имеет меру нуль.

6. Сфера в $\mathbb{R}^3$ имеет нулевую меру.

def. **Множество M – компактно**, если из любой последовательности его элементов можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

th. $M \subset \mathbb{R}^n$ – компактно $\Leftrightarrow$ замкнуто и ограничено.

proof. Смотри [3] 17.S (стр. 100) $\square$

th. **Бореля**. Из любого открытого покрытия компакта можно выбрать конечное подпокрытие.

proof. Смотри [5] утверждение 2 на стр. 21 [4] $\square$

ex. Компакт нулевой меры можно покрыть конечным набором брусов, сколь угодно малого суммарного объема.[5]

[4]Подробнее вопрос разбирается в [3] 16.5 (стр. 96)

[5]Использовать теорему Бореля.

st. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ содержится в компакте меры нуль, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ограничена, тогда $\exists \int\limits_M \mathrm{d}x\ f = 0$.

proof. По предыдущему утверждению существует конечный набор брусов Π_ε с суммарным объемом меньше ε, объединение которых содержит M вместе с некоторой окрестностью. По определению $\int\limits_M \mathrm{d}x\ f = \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \cdot \chi_M$, где B – достаточно большой брус.

Можно сказать, что B содержит все брусики, а так как Π_ε – конечный набор, а пересечение двух брусов – брус, то можно считать, что брусы π_ε пересекаются лишь по границе. Тогда можно достроить Π_ε до разбиения Π бруса B. Рассмотрим произвольную сумму Дарбу. $|\sigma(f \cdot \chi_M, \Pi)| \leqslant \sum\limits_{\pi \in \Pi_\varepsilon} Cv(\pi) \leqslant C\varepsilon$.[6]

Так как ε произвольно мало, $\underline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f\chi_M - \overline{\int\limits_B} \mathrm{d}x\ f\chi_M = 0 \Rightarrow \int\limits_B \mathrm{d}x\ f\chi_M = 0$. □

th. Об аддитивности Пусть $D \subset \mathbb{R}^n, D = A \cup B,\ A \cap B \subset K,\ \text{mes}\ K = 0,\ f : D \to \mathbb{R}$ – ограничена. Тогда

$$\exists \int\limits_A \mathrm{d}x\ f, \int\limits_B \mathrm{d}x\ f \Rightarrow \int\limits_D \mathrm{d}x\ f = \int\limits_A \mathrm{d}x\ f + \int\limits_B \mathrm{d}x\ f$$

proof. Ясно, что $\int\limits_A \mathrm{d}x\ f = \int\limits_{A/B\cap A} \mathrm{d}x\ f + \int\limits_{B\cap A} \mathrm{d}x\ f$, где $\int\limits_{B\cap A} \mathrm{d}x\ f$ существует и равен нулю по утверждению выше. По "старой" теореме об аддитивности:

$$\int\limits_D \mathrm{d}x\ f = \int\limits_{A/B\cap A} \mathrm{d}x\ f + \int\limits_B \mathrm{d}x\ f = \int\limits_A \mathrm{d}x\ f + \int\limits_B \mathrm{d}x\ f$$

□

[6] f – ограничена $\Rightarrow \exists C > 0 : |f| \leqslant C$

2. Колебания функции в точке

def. Колебание функции f в предельной точке x – число[7]

$$o(f,x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\delta\to 0}\left(\sup_{\|x-y\|\leqslant\delta} f(y) - \inf_{\|x-y\|\leqslant\delta} f(y)\right)$$

st. $f \in C(U) \Leftrightarrow \forall\, x \in U:\ o(f,x) = 0$

proof. Очевидно. □

st. $\forall\, x \in B\ \exists\varepsilon > 0:\ o(f,x) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \exists\Pi:\ \overline{\sigma}(f,\Pi) - \underline{\sigma}(f,\Pi) \leqslant \varepsilon v(B)$

proof. Возьмём все открытые окрестности $\pi(x)$ точек x бруса B, удовлетворяющие условию

$$\sup_{y\in\pi(x)} f(y) - \inf_{y\in\pi(x)} f(y) \leqslant \varepsilon$$

Вместе они образуют открытое покрытие бруса, из которого (брус компактен) можно выбрать конечное подпокрытие. Его можно заменить замкнутым покрытием, дополнительно разбив некоторые брусы, если надо, так, чтобы брусы этого покрытия пересекались только по границам. Тогда

$$\overline{\sigma}(f,\Pi) - \underline{\sigma}(f,\Pi) \leqslant \sum_{\pi\in\Pi}\Big(\sup_{x\in\pi} f(x) - \inf_{x\in\pi} f(x)\Big)v(\pi) \leqslant \varepsilon v(B)$$

□

3. Интегрируемость функций

def. $J(f,B,C) \overset{\text{def}}{=} \{x \in B \mid o(f,x) \geqslant C\}$.

def. $J(f,B) \overset{\text{def}}{=} \{x \in B \mid o(f,x) > 0\})$.

th. Критерий Лебега $f \in I(B) \Leftrightarrow \operatorname{mes} J(f,B) = 0$.

proof. $\Rightarrow$) Очевидно, $J(f,B) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J(f,B,1/n)$.

$$f \in I(B) \Rightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}\ \exists\Pi:\ \overline{\sigma}(f,\Pi) - \underline{\sigma}(f,\Pi) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

[7]Корректность определения следует из того, что sup невозрастает, а inf неубывает.

Пусть $\tilde{\Pi} = \{\pi \in \Pi \mid \pi \cap J(f, B, 1/n) \neq \varnothing\}$, $\tilde{J}(f, B, 1/n)$ – это $J(f, B, 1/n)$ без границ брусов π из Π.

Ясно, что $\tilde{J}(f, B, 1/n) \subset \bigcup\limits_{\pi \in \tilde{\Pi}} \pi$ и $\forall \pi \in \tilde{\Pi}:\ \sup\limits_{x\in\pi} f - \inf\limits_{x\in\pi} f \geqslant 1/n$.

Таким образом

$$\sum_{\pi\in\tilde{\Pi}} v(\pi) \leqslant n \sum_{\pi\in\tilde{\Pi}} (\sup_{x\in\pi} f - \inf_{x\in\pi} f) v(\pi) \leqslant n \sum_{\pi\in\Pi} (\sup_{x\in\pi} f - \inf_{x\in\pi} f) v(\pi) =$$

$$= n(\overline{\sigma}(f, \Pi) - \underline{\sigma}(f, \Pi)) \leqslant n\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) $\operatorname{mes} J = 0$, $\forall \varepsilon\ J(f, B, \varepsilon)$ – компакт[8]. Выберем его конечное покрытие A суммарного объёма меньше ε.

Очевидно, $J(f, B, \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} \alpha$, $\forall \alpha \in A:\ \alpha \subset B$. Можно так же считать, что $\forall \alpha, \beta \in A:\ \alpha \cap \beta = \partial\alpha \cap \partial\beta$.

Пусть $\tilde{\Pi}$ – разбиение B на брусы двух типов: брусы, принадлежащие A (Π_A) и брусы, принадлежащие $B \setminus J(f, B, \varepsilon)$ (Π_B). Разобьём дополнительно $\pi \in \Pi_B$ так, чтобы[9]

$$\overline{\sigma}(f, \Pi(\pi)) - \underline{\sigma}(f, \Pi(\pi)) < \varepsilon v(\pi).$$

Очевидно, $\Pi = \Pi_A \bigcup\limits_{\pi\in\Pi_B} \Pi(\pi)$. Тогда

$$\overline{\sigma}(f, \Pi) - \underline{\sigma}(f, \Pi) = \underbrace{\sum_{\pi\in\Pi_A} (\sup_{\pi} f - \inf_{\pi} f) v(\pi)}_{\leqslant 2C\varepsilon} + \underbrace{\sum_{\pi\in\Pi_B} \sum_{\alpha\in\Pi(\pi)} (\sup_{\alpha} f - \inf_{\alpha} f) v(\alpha)}_{\varepsilon v(B)} \leqslant$$

$$\leqslant (2C + v(B))\varepsilon$$

$\square$

[8] Очевидно, $J(f, B, \varepsilon)$ ограничено. Пусть $\{x_n \mid x_n \in J(f, B, \varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\forall n, r:\ \sup\limits_{B_r(x)} f(x) - \inf\limits_{B_r(x)} f(x) \geqslant o(f, x_n) \geqslant \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{r\to 0}\left(\sup\limits_{B_r(x)} f(x) - \inf\limits_{B_r(x)} f(x)\right) = o(f, x) \geqslant \varepsilon \Rightarrow x \in J(f, B, \varepsilon)$.

[9] Смотри последнее утверждение предыдущего раздела.

Замена переменных

<u>def.</u> Объём $v(A)$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ $\quad v(A) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_A \mathrm{d}x.$

<u>nb.</u> $\quad v(A) = \int\limits_{B \supset A} \mathrm{d}x \; \chi_A.$

<u>nb.</u> Объём множества существует $\Leftrightarrow$ mes $\partial A = 0$. [10]

<u>def.</u> Параллелепипед, натянутый на вектора $\{f_i\}_{i=1}^n$

$\pi(f_1, \ldots, f_n) \overset{\text{def}}{=} \{x = \sum\limits_k t_k f_k \mid \forall\, k : t_k \in [0,1]\}.$

<u>st.</u> Образ параллелепипеда при линейном отображении – параллелепипед.

<u>proof.</u> Очевидно. $\square$

<u>def.</u> $A\pi(f_1, \ldots, f_n) \overset{\text{def}}{=} \{x = \sum\limits_k t_k A f_k \mid \forall\, k : t_k \in [0,1]\}.$

<u>th.</u> $v\,(\pi(f_1, f_2, ..., f_n)) = |\det(f_1, f_2, ..., f_n)|.$

Чтобы доказать эту теорему нам понадобится

<u>th.</u> Биркгофа Любая невырожденная матрица M может быть представлена в виде произведения матриц трёх типов:

[10]Так как $J(\chi_A, B) = \partial A$

$$A_k(a) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad C_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & \dots & 1 & & \\ & & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \dots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \dots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Эти матрицы называются элементарными

proof. По теореме Гаусса за счёт элементарных преобразований трёх типов:

1. Умножения строк на константы
2. Перестановка строк
3. Сложение строк

Любую невырожденную матрицу можно сделать единичной. Легко видеть, что:

- $A_k(a) \cdot M$ получается из M умножением её k-той строки на a.
- $B_{kl} \cdot M$ получается из M перестановкаой k-той и l-той строки местами.
- $C_{kl} \cdot M$ получаем из M добавлением к k-той строке l-тую.

Таким образом существует конечное произведение P элементарных матриц: $P \cdot M = I$.

Для завершения достаточно заметить, что обратные к элементарным матрицам легко выражаются через элементарные:

- $A_k\left(\frac{1}{a}\right) \cdot A_k(a) = I; a \neq 0 \Rightarrow A_k^{-1}(a) = A_k\left(\frac{1}{a}\right)$
- $B_{kl}^2 = I \Rightarrow B_{kl}^{-1} = B_{kl}$
- $C_{kl}^{-1} = A_l(-1) \cdot C_{kl} \cdot A_l(-1)$

Сначала доказали, что существуют элементарные матрицы $E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_l$: $E_1 \cdot E_2 ... \cdot E_l \cdot \mathrm{M} = I, \Rightarrow M = E_l^{-1} \cdot E_{l-1}^{-1} \cdot ... \cdot E_1^{-1}$. $\square$

<u>**st.**</u> Пусть E – элементарная матрица, α - параллелепипед $\Rightarrow E \cdot \alpha$ – тоже параллелепипед и $v(E\alpha) = |\det E| \cdot v(\alpha)$.

<u>**proof.**</u> Первая часть утверждения доказана в начале параграфа.

Пусть $E = A_k(a),\ a \neq 0$. $A_k(a)$ – линейное отображение, растягивающее все множество вдоль k-той оси. Пусть B – брус, $\alpha \subset B,\ \Pi$ – разбиение.

$S(f, \Pi) = \sum\limits_{\substack{\pi \in \Pi, \\ \pi \cap \alpha \neq \varnothing}} v(\pi)$ – одна из сумм Римана, построенных для χ_α по разбиению Π. $\left(\text{Сумма для } \int\limits_B \mathrm{d}x\ \chi_\alpha = \int\limits_\alpha \mathrm{d}x\right)$ в качестве точек Ξ для брусов $\pi : \alpha \cap \pi \neq \varnothing$ выберем точки принадлежащие $\alpha \cap \pi$. Тогда

$$v(\alpha) = \lim_{\rho(\Pi) \to 0} \sum_{\substack{\pi \in \Pi, \\ \pi \cap \alpha \neq \varnothing}} v(\pi)$$

Пусть $E = A_k(a)$. Очевидно, что $v(E\alpha) = \lim\limits_{\rho(\Pi) \to 0} \sum\limits_{\substack{E\pi \in E\Pi, \\ E\pi \cap E\alpha \neq \varnothing}} v(E\pi)$. Для $E\alpha$ заменим EB на B, $E\Pi$ на Π, тогда

$$v(E\alpha) = \lim_{\rho(\Pi)\to 0} \sum_{\substack{\pi\in\Pi,\\ \pi\cap\alpha\neq\varnothing}} |a|\, v(\pi) = |\det A_k| \cdot v(\pi)$$

Пусть $E = B_{kl}$. Аналогично получаем

$$v(B_{kl}\alpha) = \lim_{\rho(\Pi)\to 0} \sum_{\substack{B_{kl}\pi\in B_{kl}\Pi,\\ B_{kl}\pi\cap B_{kl}\alpha\neq\varnothing}} v(B_{kl}\pi) = v(\alpha) = |\det B_{kl}| \cdot v(\alpha),$$

а B_{kl} – это матрица отражения точек относительно плоскости $k = l \Rightarrow B_{kl}$ можно стереть в последней формуле, $\det B_{kl} = 1$.

Пусть наконец $E = C_{kl}$, B – брус, содержащий и α и $E\alpha$.

$$v(E\alpha) = \int\limits_{E\alpha} \mathrm{d}x \ = \int\limits_{B} \mathrm{d}x\ \chi_{E\alpha}(x) = \int\limits_{B} \mathrm{d}x\ \chi_{\alpha}(E^{-1}x) =$$

$$= \int\limits_{B} \mathrm{d}x\ \chi_{\alpha}(x_1, x_2, ...x_{k-1}, x_k - x_l, x_{k+1}..., x_n).$$

По теореме Фубини:

$$\int \mathrm{d}x_l \underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_{l-1}\mathrm{d}x_{l+1}...\mathrm{d}x_n \cdot \chi_\alpha(x_1, ..., x_k - x_l, ..., x_n) =$$ [11]

$$= \int \mathrm{d}x_l \underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \mathrm{d}x_1...\mathrm{d}x_{l-1}\mathrm{d}x_{l+1}...\mathrm{d}x_n \cdot \chi_\alpha(x_1, ..., x_k, ..., x_n) =$$

$$= \int\limits_{B} \mathrm{d}x\ \chi_\alpha = \int\limits_{\alpha} \mathrm{d}x = v(\alpha) = \underbrace{|\det C_{kl}|}_{=1} v(\alpha).$$

Итак, $v(\pi(f_1, \ldots, f_n)) = v((f_1\ \ldots\ f_n) \cdot \pi(e_1, \ldots, e_n)) =$

$$= v(E_l \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot \pi(e_1, \ldots, e_n)) = |\det E_l \cdot \ldots \cdot \det E_1 \cdot|\, v(\pi(e_1, \ldots, e_n)) =$$

$$= |\det(E_l \cdot \ldots \cdot E_1)| \cdot 1 = |\det(f_1\ \ldots\ f_n)|\,.$$

□

[11]"Убирание" $-x_l$ по сути является параллельным переносом.

1. Преобразование объёма малого куба при диффеоморфизме

def. $C_l(x_0)$ – куб с центром в x_0 и стороной l.

th. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ – области, f – 2-диффеоморфизм, $K \subset U$ – компакт. Тогда $\exists C(K,f),\ \delta(K,f) \in \mathbb{R}:\ \forall C_l(x_0):\ l < \delta(K,f)$

$$v(f(C_l(x_0))) = \left|\det f'(x_0)\right| \cdot l^n \cdot (1 + l \cdot g), \text{ где } |g| \leqslant C(K,f)$$

def. **Норма Гильберта-Шмидта** – матричная норма, определяемая формулой:

$$\|M\|_{HS} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{k,l} |M_{kl}|^2\right)^{1/2}$$

nb. Под $\|\cdot\|$ здесь и далее понимается стандартная норма $\mathbb{R}^n$.

Свойства нормы Гильберта-Шмидта

1. Она действительно является нормой.

   nb. Аксиомы нормы смотри в любом учебнике линейной алгебры.

2. **st.** $\|M \cdot N\|_{HS} \leqslant \|M\|_{HS} \cdot \|N\|_{HS}$

   proof. $$\|M \cdot N\|_{HS}^2 = \sum_{k,l} |(MN)_{kl}|^2 = \sum_{k,l} \left|\sum_m M_{km} N_{ml}\right|^2 \leqslant [12]$$

   $$\leqslant \sum_{k,l} \left(\sum_m |M_{km}|^2\right) \cdot \left(\sum_m |N_{ml}|^2\right) = \|M\|_{HS}^2 \cdot \|N\|_{HS}^2$$

   □

3. **st.** $\|Mx\| \leqslant \|M\|_{HS} \cdot \|x\|$

   proof. $$\|Mx\|^2 = \sum_k (Mx)_k^2 = \sum_k \left|\sum_m M_{km} x_m\right|^2 \leqslant [13]$$

[12]Это неравенство Коши-Буняковского-Шварца (или неравенство Гёльдера)

$$\leqslant \sum_k \Big(\sum_m |M_{km}|^2 \Big) \cdot \Big(\sum_m |x_m|^2 \Big) = \|M\|_{HS}^2 \cdot \|x\|^2$$

□

st. $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $[x,y] \subset D,\ f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big\| f(x) - f(y) \Big\| \leqslant \max_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\|_{HS} \cdot \|x-y\|$$

proof. $\varphi(t) = f(tx + (1-t)y) :\ \varphi'(t) = f'(tx + (1-t)y) \cdot (x-y)$

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ \varphi'(t) \Rightarrow f(x) - f(y) = \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ f'(tx + (1-t)y) \cdot (x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big\| f(x) - f(y) \Big\| \leqslant \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ \|f'(tx - (1-t)y) \cdot (x-y)\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \mathrm{d}t\ \|f'(tx - (1-t)y)\|_{HS} \cdot \|x-y\| \leqslant \max_{\xi \in [x,y]} \|f'(\xi)\|_{HS} \cdot \|x-y\|$$

□

st. $D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $[x,y] \subset D,\ f \in C^2(D, \mathbb{R}^n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big\| f(x) - f(y) - f'(y) \cdot (x-y) \Big\| \leqslant \frac{1}{2} M_2 \|x-y\|^2,$$

где $M_2 = \sup\limits_{\xi \in [x,y]} \sqrt{\sum\limits_{k,l,m} \Big| \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_l\, \partial x_m} \Big|^2}$

proof. $\varphi_i'(t) = \sum\limits_k \dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big|_{tx+(1-t)y} \cdot (x_k - y_k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_i''(t) = \sum_{k,l} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l}\Big|_{tx+(1-t)y} \cdot (x_k - y_k) \cdot (x_l - y_l).$$

Тогда $\|\varphi''\|^2 = \sum\limits_i |\varphi_i''(t)|^2 = \sum\limits_i \Big| \sum\limits_{k,l} \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\, \partial x_l}\Big|_{tx+(1-t)y} \cdot (x_k - y_k) \cdot (x_l - y_l) \Big|^2 =$

$$= \sum_i (A_i(x-y), (x-y))^2 \leqslant \sum_i \Big| \|A_i(x-y)\| \cdot \|x-y\| \Big|^2 \leqslant \sum_i \|A_i\|_{HS}^2 \cdot \|x-y\|^4 \leqslant$$

[13] И это тоже неравенство Гёльдера

$$\leqslant M_2^2 \cdot \|x-y\|^4$$

$$\Big\| f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) \Big\| \leqslant \int\limits_0^1 \mathrm{d}t \int\limits_0^t \mathrm{d}s\, M_2 \|x-y\|^2 \leqslant \frac{1}{2} M_2 \|x-y\|^2$$

$\square$

Перейдём наконец к доказательству самой теоремы о преобразовании объёма малого куба при диффеоморфизме.

proof. $\delta(K,f) = \dfrac{d}{2\sqrt{n}}$, где $\dfrac{d}{2} = \operatorname{dist}(\tilde{K}, \partial U)$, где $\tilde{K}$ – замыкание $d/2$ окрестности K. Пусть $C_l(x_0):\ l \leqslant \delta(K,f)$ и $x_0 \in K$. Тогда

$$\forall\, x \in C_l(x_0):\ f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + f_2(x,x_0)\ (*),$$

$$\|f_2\| = \|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\| \leqslant \frac{1}{2} M_2 \|x-x_0\|^2 \leqslant \frac{1}{8} M_2 n l^2,$$

так как $\|x-x_0\|$ не больше половины диагонали куба, то есть $\frac{1}{2} l \sqrt{n}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \varphi(x),\ \text{где}\ \varphi(x) = x - x_0 + \Big(f'(x_0)\Big)^{-1} \cdot f_2(x,x_0).$$

Изучим образ $C_l(x_0)$ под действием φ.

st. φ – диффеоморфизм К и $\varphi(K)$ и $\exists M_1:\ \Big\|\Big(f'(x_0)\Big)^{-1}\Big\|_{HS} \leqslant M_1\ \forall\, x \in K$

proof. Диффеоморфность следует из того, что $f'(x_0)$ – невырожденная матрица, и умножение на неё "не портит" диффеоморфности $f_2(x,x_0)$ (тем более её не портит линейный сдвиг).

$$f' \in C^1 \quad \det f'(x) \neq 0 \Rightarrow \exists \Big(f'(x_0)\Big)^{-1} \quad \Big(f'(x_0)\Big)^{-1} \in C^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Big\|\Big(f'(x_0)\Big)^{-1}\Big\|_{HS} \in C \Rightarrow \exists M_1 = \max_{x \in K} \Big\|\Big(f'(x)\Big)^{-1}\Big\|_{HS}$$

$\square$

st. φ – гомеоморфизм $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(\mathrm{Int} M) = \mathrm{Int}\varphi(M),\ \varphi(\mathrm{Ext} M) = \mathrm{Ext}\varphi(M),\ \varphi(\partial M) = \partial\varphi(M).$$

proof. Смотри [3] 11.I (стр. 67) $\square$

Далее $\left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\cdot f_2(x,x_0)\right\| \leqslant \dfrac{M_1M_2}{8}nl^2 = \Delta(l)$.
Новая $\partial\varphi(C_l(x_0))$ отстоит от $\partial C_l(x_0)$ не более чем на Δ, а значит

$$C_{l-2\Delta}(0) \subset \varphi(C_l(x_0)) \subset C_{k+2\Delta}(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x_0)\cdot C_{l-2\Delta}(0) \subset f'(x_0)\cdot\varphi(C_l(x_0)) \subset f'(x_0)\cdot C_{l+2\Delta}(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x_0)+f'(x_0)\cdot C_{l-2\Delta}(0) \subset f(C_l(x_0)) \subset f(x_0)+f'(x_0)\cdot C_l(0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left|\det f'(x_0)\right|\cdot(l-2\Delta)^n = v(f'(x_0)\cdot C_{l-2\Delta}(0) \leqslant v(f(C_l(x_0))) \leqslant$$
$$\leqslant v(f'(x_0)\cdot C_{l+2\Delta}) = \left|\det f'(x_0)\right|\cdot(l+2\Delta)^n$$

Заметим, что $(l+2\Delta)^n = l^n\cdot(1+g_1l)$, где $g_1 = \dfrac{1}{l}\sum\limits_{k=1}\binom{n}{k}\left(\dfrac{2\Delta}{l}\right)^k = (*)$.

Если $\delta < \dfrac{1}{2}\dfrac{8}{M_1M_2n}$, то[14] $\dfrac{2\Delta}{l} = \dfrac{2M_1M_2nl^2}{8l} < 2\dfrac{M_1M_2n}{8}\dfrac{1}{2}\dfrac{8}{M_1M_2n} = 1$.

Иначе положим $\delta = \dfrac{1}{2}\dfrac{8}{M_1M_2n}$. Следовательно,

$$(*) \leqslant \frac{M_1M_2n}{4}\sum_{k=2}\binom{n}{k} = G = \text{const}.$$

Аналогично для g_2.

$\square$

2. Формула замены переменных в интеграле Римана

th. Пусть $U, V \subset \mathbb{R}^n$ – области, $f \in C^2(U,V)$[15], $g : V \to \mathbb{R}$, mes $J(g,V) = 0$, $K \subset U$ – компакт, mes $\partial K = 0$. Тогда

$$\int\limits_{f(K)} \mathrm{d}y\; g(y) = \int\limits_K \mathrm{d}x\; g(f(x))\cdot\left|\det f'(x)\right|$$

proof. Пусть K – куб со стороной L. Разобъём L на N кусков. К при этом разбивается на N^n кубов со сторонами L/N – разбиение Π.

[14] Так как $l \leqslant \delta(K,f)$.

[15] На самом деле теорема верна для $f \in C^1(\mathrm{Int}K, f(\mathrm{Int}K))$, но доказательство сложнее.

$$\int\limits_{f(K)} \mathrm{d}y\ g(y) = \sum_{\kappa\in\Pi} \int\limits_{f(\kappa)} \mathrm{d}y\ g(y) \leqslant \sum_{\kappa\in\Pi} \sup_{\kappa} g \int\limits_{f(\kappa)} \mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{\kappa\in\Pi} \sup_{\kappa} g \left|\det f'(x_\kappa)\right| \cdot \left(1 + g\frac{L}{N}\right) \cdot v(\kappa) = \sum_{\kappa\in\Pi} \sup_{\kappa} g \cdot \left|\det f'(x_\kappa)\right| \cdot v(\kappa) + O(1/N) =$$

$$= \sum_{\kappa\in\Pi} \sup_{\kappa} g \cdot \left(\left|\det f'(x)\right| + o(1)\right) \cdot v(\kappa) + O(1/N) =$$

$$= \sum_{\kappa\in\Pi} \sup_{\kappa} g \cdot \left|\det f'(x)\right| \cdot v(\kappa) + o(1)^{[16]} \leqslant \overline{\sigma}(g \cdot |\det f'(x)|, \Pi) + o(1)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{f(K)} \mathrm{d}y\ g(y) \leqslant \overline{\sigma}(g \cdot |\det f'(x)|, \Pi) + o(1) \to \overline{\int\limits_{K}} \mathrm{d}x\ g(f(x)) \cdot \left|\det f'(x)\right|,$$

но $g \cdot |\det f'(x)|$ интегрируема, следовательно,

$$\int\limits_{f(K)} \mathrm{d}y\ g(y) \leqslant \int\limits_{K} \mathrm{d}x\ g(f(x)) \cdot \left|\det f'(x)\right|.$$

Обратное неравенство доказывается аналогично.

□

3. Несобственные интегралы

<u>def.</u> Интеграл по неограниченной области.

$D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f : D \to \mathbb{R}$ ограничена, D не ограничена

$$\int\limits_{D} \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \lim_{r\to\infty} \int\limits_{D\cap B_r(0)} \mathrm{d}x\ f.$$

<u>st.</u> $\forall\, x \in D : \ |f(x)| < \dfrac{C}{\|x\|^{n+\alpha}}, \ \alpha > 0,$

$$\forall\, r > 0 \ \mathrm{mes}\ J(f, D \cap B_r(0)) = 0 \Rightarrow \exists \int\limits_{D} \mathrm{d}x\ f.$$

<u>proof.</u> $n = 1$ – очевидно. $n > 1 :$

[16] $o(1)$ равномерно мало на κ.

$$\left| \int\limits_{D\cap B_r(0)} \mathrm{d}x\ f \quad - \int\limits_{D\cap B_{r'}(0)} \mathrm{d}x\ f \right| \leqslant \int\limits_{\{x\in D\ |\ r\leqslant\|x\|\leqslant r'\}} \mathrm{d}x\ |f| \leqslant C \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{\|x\|^{n+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C \int \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\ \frac{r^{n-1}}{r^{n+\alpha}} = CS \int\limits_r^{r'} \mathrm{d}r\ \frac{1}{r^{1+\alpha}} \to 0,\ S \text{ – площадь } S^{n-1}$$

□

def. **Интеграл от неограниченной функции.**

$D \subset \mathbb{R}^n$ – область, $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ ограничена

$$\int\limits_D \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \lim_{r\to 0} \int\limits_{D\setminus B_r(x_0)} \mathrm{d}x\ f$$

st. $\forall\, x \in D:\ |f(x)| < \dfrac{C}{\|x\|^{n-\alpha}},\ \alpha > 0,$

$$\forall\, r > 0 \text{ mes } J(f, D \cap B_r(x_0)) = 0 \Rightarrow \exists \int\limits_D \mathrm{d}x\ f.$$

proof. Аналогично предыдущему. □

def. **Интеграл от неограниченной функции по неограниченной области.**

$$\int\limits_D \mathrm{d}x\ f \overset{\text{def}}{=} \lim \lim_{\substack{R\to\infty \\ r_1,\dots,r_m\to 0}} \int\limits_{(D\cap B_R(0))\setminus(\cup_i B_{r_i}(x_i))} \mathrm{d}x\ f$$

Список литературы

[1] Г.Е. Шилов, Б.А. Гуревич *Интеграл, мера, производная*, Москва, Наука, 1967

[2] М. Спивак *Математический анализ на многообразиях*, СПб, Лань, 2005

[3] О.Я. Виро, О.А. Иванов, Н.Ю. Нецветаев, В.М. Харламов *Элементарная топология*, Москва, МЦНМО, 2010

[4] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин *Элементы теории функций и функционального анализа*, Москва, Наука, 1976

[5] В.А. Зорич *Математический Анализ. Том II*, Москва, МЦНМО, 2002

[6] Г.М. Фихтенгольц *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том III*, Москва, Наука, 1970

[7] Л. Шварц *Анализ*, Москва, Мир, 1972