без $W|_{z=z_0}=W_0$ тут нет никакой единственности [$\exists$ $D\subset\mathbb{C}$ - область.]

Сухнов Файл Ани

① Дифференц уравнение $W'(z)=F(z)W(z)$ с нач условием $W|_{z=z_0}=W_0$ (иначе говоря, задача Коши)

$$\begin{cases} W'(z)=F(z)W(z) \\ W(z=z_0)=W_0, \end{cases}$$

где $F(z)\in\mathcal{A}(D)$ имеет единств реш. в D, если D - односвязна. При этом решение $W(z)\in\mathcal{A}(D)$.

② ур-е Бесселя $z^2W''+zW'+(z^2-\nu^2)W=0$ имеет 2 особые точки:

$z=0$ - прав особая точка

$z=\infty$ - неправ особ точка

③ $(P_n^m, P_n^m)=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{(n+m)!}{(n-m)!}=\|P_n^m\|^2_{L_2}$

④ $(Y_n^m, Y_{n'}^{m'})=\delta_{nn'}\cdot\delta_{mm'}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$

⑤ Рассматривается дифф уравнение $w''(z)+p(z)w'(z)+q(z)w(z)=0$ в окр $z=\infty$. Тогда $\exists!$ решение $u(z)$, для которого форм ряд $w_1(z)=e^{\alpha z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k-\rho_1}$ является асимптотич разложением при $z\to\infty$. Существует однопарам. семейство решений, для которого формальный ряд $w_2(z)=e^{\alpha_2 z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_k z^{-k-\rho_2}$ явл асимптотич рядом при $z\to\infty$. Асимптотич разложение справедливо в угле раствора $\pi-2\varepsilon$. $(\varepsilon>0)$

⑥ $P_\nu(z)\sim\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\ln(z+1)\quad(z\to-1)$

⑦ $$\begin{cases} -\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}y=\lambda y \\ y(1)<+\infty \\ y(-1)<+\infty \end{cases}$$

С.Ф. задачи $\to P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{2n+1}\right)^{-1/2}}_{\|P_n\|\text{ деление на нее}}=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$

С.З. задачи: $\lambda_n=n(n+1)$.

⑧ $z^2W''(z)+zW'(z)+(z^2-\nu^2)W(z)=0$

$W(z)=z^\nu v(z)$

$\Rightarrow zv''+(2\nu+1)v'+zv=0$

$v(z)=\int\limits_\gamma e^{zt}f(t)dt \Rightarrow \begin{cases} f(t)=(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}} \\ e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu+1}{2}}\Big|_{\partial\gamma}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow v_i(z)=\int\limits_{\gamma_i}e^{zt}(t^2+1)^{\frac{2\nu-1}{2}}dt;\ i=1,2.$

(об этом говорит Владимиров, Сухнов говорит, что при $\nu\in\mathbb{R}$) $\to$ конспект 2013 г

⑨ Нет, не может, т.к. при $\nu>-1$ корни функции Бесселя вещественны. Или при $\nu>0$ $\to$ конспект 2020 г.

(док-во следует из того, что оператор, порождающий задачу Ш.-Л. - эрмитов); $\begin{matrix} L\Psi=\lambda\Psi \,|\cdot\bar\Psi \\ L\bar\Psi=\lambda\bar\Psi\,|\cdot\Psi \end{matrix}$ - (вычит и $\int\limits_0^\ell$) $\to(\lambda-\bar\lambda)\int\limits_0^\ell|\Psi|^2dx\Rightarrow\lambda=\bar\lambda$)

??? [Будем считать, что при $\nu>0$]

(27) $(z^2-1)w''+2zw'+\frac{w}{z^2}=0$ Ос. точки $z=0,\ z=\pm 1,\ z=\infty$

(10) При $\nu \notin \mathbb{Z}$ (по-моему, нет присоед. вектора)

$\lambda_j = e^{2\pi i \rho_j}$

$\rho_{12} = \pm\nu = \pm\frac{7}{2} \to \lambda_{12} = e^{2\pi i(\pm\frac{7}{2})} = e^{\pm 7 i\pi} = \overset{=-1}{\cos 7\pi} \pm \cancel{i\sin 7\pi}^{\to 0} \to M = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ либо 1, либо 0.

(11) $\wp''(u) = Q'(u)$

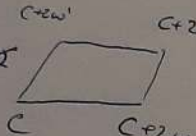
(12) Нет, не существует, т.к. сумма вычетов эллиптич. ф-ции $=0$ в ▱.
Что имеется в виду? Если там есть полюс, то res не м.б. равен нулю, иначе $f\equiv \mathrm{const}$. Но это противоречие.

(13) Пусть $f(z)$ имеет полюс в ∞. Тогда $\forall$ окрестности ∞ есть полюс (хотя бы один) $\Rightarrow \infty$ - не изолирована, а это невозможно (Ответ: нет).

(14) Не было (на лекциях)

(15) $\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{i\pi}{2}$ $\left(\mathrm{Im}\,\frac{\omega}{\omega'}>0\right)$

▶ Δ пар-м периодов: $u=0$ - его внутр. точка.



и $\int_C^{C+2\omega}+\int_{C+2\omega}^{C+2\omega+2\omega'}+\int_{C+2\omega+2\omega'}^{C+2\omega'}+\int_{C+2\omega'}^{C}\zeta(u)\,du = 2\pi i =$

$u=2\omega+v$, $u=2\omega'+v$

$= \int_C^{C+2\omega}\{\zeta(u)-\zeta(u+2\omega')\}du + \int_C^{C+2\omega'}(\zeta(u+2\omega)-\zeta(u))\,du = 4(\eta\omega'-\eta'\omega)$

$\Rightarrow \boxed{\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{i\pi}{2}}$

(16) 2 степ. реш. $\Rightarrow$ нет присоед. вектора.

$M=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0\\ 0 & e^{2\pi i\rho_2}\end{pmatrix}$

(17) Т.к. $\sum_{k=1}^{n}\rho_1^k+\rho_2^k+\rho_1^\infty+\rho_2^\infty=n-1 \to \boxed{7-1=6}$

(18) $N_0(z)=\frac{2}{\pi}\ln z\, J_0(z)$, где $J_0(z)$ - ф-ция Бесселя с $\nu=0$.

(19) $\nu=n\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ есть присоед. вектор:

$M=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\nu} & 1\\ 0 & e^{2\pi i\nu}\end{pmatrix}$

(20) При целых ν

~~(21)~~

21. $(z^2-1)w'' + 2zw' + \frac{w}{z^2} = 0$ Ос. точки $z=0$, $z=\pm 1$, $z=\infty$

$$w''(z) + \frac{2zw'}{(z^2-1)} + \frac{w}{z^2(z^2-1)} = 0 \qquad p(z) = \frac{2z}{z^2-1}$$

$$q(z) = \frac{1}{z^2(z^2-1)}$$

В окр $z=0$:

$p(z) = -2z - 2z^3 - \ldots$

$q(z) = -\frac{1}{z^2} - 1 - \ldots$

В окр $z=1$:

$p(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} - \ldots$

$q(z) = \frac{1}{2(z-1)} + \ldots$

В окр $z=-1$:

$p(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} - \ldots$

$q(z) = -\frac{1}{2(z+1)} - \frac{5}{4} - \ldots$

В окр $z=\infty$

$p(z) = \frac{2}{z} + \frac{2}{z^3} + \ldots$

$q(z) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots$

$\Rightarrow z = 0, \pm 1$ – рег ос. точки

$z = \infty$ – нерег ос. точки

22. $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n = f(\vec{\alpha}) \end{cases}$; Необх усл: $\int\limits_{S^2} f(\vec{\alpha})\,dS = 0$; $\boxed{f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n}$

$u = C + \sum\limits_{n=0}^{\infty} Y_n r^n = \boxed{C + \sum\limits_{n=1}^{\infty} Y_n \frac{r^n}{nR^{n-1}}}$ (вроде так...)

23. $\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta + r^2}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta) r^n$, где $P_n(\cos\theta)$ – полином Лежандра.

24. Ответ $\nu \in \mathbb{R}$... (однако в 2020 Сухан пишет при $\nu > 0$, Владимиров пишет при $\nu > -1$) – Ответ см в задаче № 9.

25.

26. $\wp(u+v) = -\wp(u) - \wp(v) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$

27. $p_0 = -1$

$q_0 = -3$. $\rho(\rho-1) - \rho - 3 = 0$

$\rho^2 - 2\rho \cancel{\ } - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$; $\rho_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \to \begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$

29. $J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}(2\nu + 1)\right)$, $z \to \infty$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{r=R} = Y_1 + 2Y_3 \end{cases} \Rightarrow u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} \hat{Y}_n(\alpha)$, где $\hat{Y}_n(\alpha)$ – коэфф разл прав части по сфер. функ.

$$\boxed{u = \frac{r}{R} Y_1 + 2\frac{r^3}{R^3} Y_3}$$

31. $N_\nu(x) = \frac{1}{\sin\pi\nu}\left[J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}\right]$.

(32) $w'' + p(z)w'(z) + q(z)w(z) = 0.$ (*)

Точка $z = z_0$ наз-ся прав особой точкой ур-я (*), если в окр $z = z_0$ $\exists$ решения вида:

$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+\rho_1}$ $c_0 \neq 0$

$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-z_0)^{n+\rho_2} + \underbrace{\log}_{\text{если есть 1 присоед вектор}}$ $d_0 \neq 0$

Если же $z_0 = \infty$, то $k \to -k$.

В терминах $p(z), q(z)$:

$z = z_0$ Прав ос. точка (=)

1) $p(z)$ имеет в $z = z_0$ полюс не выше 1 пор

2) $q(z)$ имеет в $z = z_0$ полюс не выше 2 пор

В случае $z_0 = \infty$ → полюс → нуль. выше → ниже.

(33) $z = \pm 1$, $z = \infty$ - прав особые точки.

(34) Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ - это набор функций гладких на сфере, являющихся с.ф. Оператора Лапласа - Бельтрами $\Delta_{\theta, \varphi}$. $Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$; $n = 0, \dots$ $m \in -n, -n+1, \dots, n$.

$P_n^m(\cos\theta)$ - полином Лежандра (присоединенный).

(35) $f = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \Rightarrow$

(36) $g(k) = \int_0^{\infty} f(x) J_0(kx) x\, dx$ - прямое

$f(x) = \int_0^{\infty} g(k) J_0(kx) k\, dk$ - обратное

(37) $M = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \nu} & 1 \\ 0 & e^{2\pi i \nu} \end{pmatrix}$ (см задачу 19)

(38) $((1-z^2)w')' + \nu(\nu+1)w - \frac{\mu^2}{1-z^2} w = 0$

(39) $H_0^1(z) = J_0(x) + \frac{i}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]$ <u>см. Владимирова</u>

(40) Возникает при разд перем в ур-и Гельмгольца.

С.знач. $\lambda_n = \left(\frac{\gamma_n^{m+\frac{1}{2}}}{\ell}\right)^2$, где $\gamma_n^{m+\frac{1}{2}}$ - нули ф-ций Бесселя

С.ф. $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} J_{m+\frac{1}{2}}(kx)$.

(41) $H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{i}{\pi} \Gamma(\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}$.

(42) См задачу 13 (Ответ: нет)

(43)

(44) -

(45) $H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{i \sin \pi\nu}\left[J_0(x) e^{\pi i \nu} - J_{-\nu}(x)\right]$.

(46) -

(47) ~~См задачу~~

$u = c +$

(48) — (не было вообще)

(49) см задачу 21. ($z = \infty$ - особая ???!!)

(50) $p(z) = 0$

$q(z) = \frac{1}{4z^2(z+1)^2} = \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{2z} + \dots$

$\Rightarrow \rho(\rho - 1) + \frac{1}{4} = 0 \to \rho^2 - \rho + \frac{1}{4} = 0 \to \left(\rho - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ → log есть, т.к. $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} = \rho$. $\lambda_j = e^{2\pi i \rho_j}$; $j = 1, 2$.

(51-52) См задачу (17). Ответ: 4.

(53) см 21

(54) см. 50

(55) см. 17. Ответ: 6

(56) - похожая если был

(57) выше...