Задача 1

Найти объём тела, ограниченного поверхностью

$$x^3+(y+z)^3=x\,, \quad x,y,z\geqslant 0\,,$$

и координатными плоскостями.

Задача 2

Найти площадь поверхности $x^2+y^2=2y$, если $x^2+z^2\leqslant y^2$.

Задача 3

Найти циркуляцию векторного поля $\vec{F}=x(\vec{i}+\vec{j})+z\vec{k}$ вдоль кривой

$$x^2+y^2+z^2=R^2\,, \quad x+y+z=0\,,$$

ориентированной стандартно положительно на нижней стороне плоскости.

Задача 4

Найти поток векторного поля $\vec{F}=y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через внешнюю поверхность параболоида $z=x^2+y^2\,,\ z\leqslant 2$.

Задача 5

Найти вид (без определения коэффициентов) общего решения уравнения

$$y^{(4)}+2y''+y=x(e^{-x}+2\sin x)\,.$$

Задача 6

Найти e^{At},

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$$

Дополнительная задача 1

Найти все решения уравнения $yy'^3+x=1$. Найти особые решения, если они есть.

Дополнительная задача 2

Решить задачу Коши

$$\operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z\,,$$

где

$$z = x^3 \qquad \text{при} \qquad y = x\,.$$

Задача 1 (7 баллов)

Делаем последовательно замены переменных
$(x,y,z) \mapsto (x,u,v) \mapsto (x,r,\varphi) \mapsto (s,\varphi,t) \mapsto (\varphi,\rho,\theta)$, где
$y=u^2\,, z=v^2\,, u=r\cos\varphi\,, v=r\sin\varphi\,, r=s^{1/3}\,, x=t^{2/3}\,, s=\rho\cos\theta\,, t=\rho\sin\theta$, с якобианом

$$4uv\cdot r\cdot \frac{2}{9}s^{-2/3}t^{-1/3}\cdot\rho\,.$$

Уравнение поверхности примет вид $\rho=\sqrt{\sin\theta}$. Искомый объем

$$V=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\theta\int\limits_0^{\sqrt{\sin\theta}}d\rho\,\frac{8}{9}\rho\cos\varphi\sin\varphi\cos^{1/3}\theta\sin^{-1/3}\theta=\frac{2}{9\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\Gamma\left(\tfrac{5}{6}\right).$$

Задача 2 (8 баллов)

Введём локальные координаты (z,φ) на цилиндре, где $x=2\cos\varphi\sin\varphi\,, y=2\sin^2\varphi$ с элементом площади $dS=\sqrt{EG-F^2}d\varphi dz=2d\varphi dz$. Область интегрирования примет вид $|z|\leqslant 2\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}$, где $\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{4}$. По симметрии, искомая площадь равна

$$S=8\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi-\cos^2\varphi}}dz=2\pi\sqrt{2}\,.$$

Задача 3 (8 баллов)

Обозначим через Γ часть плоскости $x+y+z=0$ с локальными координатами x,y, ограниченной заданной кривой $\partial\Gamma$ и ориентированной формой $dy\wedge dx$ (согласованной с выбором нижней стороны). Искомая циркуляция (с учетом формулы Стокса) равна

$$\int\limits_{\partial\Gamma}x\,(dx+dy)+z\,dz=\int\limits_{\Gamma}dx\wedge dy=-\int\limits_D dxdy\,,$$

где D --- область локальных координат, ограниченная эллипсом $x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2}$. Для вычисления площади эллипса сделаем замену переменных $x=u+v\,, y=u-v$ с якобианом (по модулю) равным 2. Уравнение эллипса примет вид $3u^2+v^2=\frac{R^2}{2}$, откуда находим полуоси эллипса $\frac{R}{\sqrt6}$ и $\frac{R}{\sqrt2}$ и площадь $\frac{\pi R^2}{2\sqrt3}$. Тогда искомая циркуляция равна $-\frac{\pi R^2}{\sqrt3}$.

Задача 4 (7балло)

Поверхность обозначим через Γ. Для тех, кто вычисляет поток явно через поверхностный интеграл важно, что локальными координатами на Γ могут считаться x, y с ориентацией $dy \wedge dx$. Мы же воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского. Замкнём поверхность, добавляя к ней диск $D:\ z = 2\,, x^2 + y^2 \leqslant 2$ с ориентацией $dx \wedge dy$ (соответствующей нормали по оси z). Область, ограниченную поверхностью $\Gamma \cup D$, обозначим через G. С учетом формулы Остроградского--Гаусса искомый поток равен

$$\int\limits_{\Gamma} y^2\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy = \iiint\limits_{G} (2y+1)\, dxdydz - \int\limits_{D} y^2\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy\,,$$

при этом в силу симметрии по y

$$\iiint\limits_{G} (2y+1)\, dxdydz = \iiint\limits_{G} dxdydz = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dr\, r \int\limits_{r^2}^{2} dz = 2\pi$$

и (в силу $z = 2$)

$$\int\limits_{D} y^2\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy = 2 \iint\limits_{D} dxdy = 4\pi\,.$$

Искомый поток равен $2\pi - 4\pi = -2\pi$.

Задача 5 (8 баллов)

Корни характеристического уравнения равны $\pm i$ кратности 2. Общее решение однородного уравнения

$$Y = (C_1 x + C_2)\cos x + (C_3 x + C_4)\sin x\,.$$

Правую часть разбиваем на сумму $f_1 = xe^{-x}$ и $f_2 = x \sin x$. В первом случае резонанса нет и соответствующее частное решение имеет вид

$$y_1 = (Ax + B)e^{-x}\,.$$

Во втором случае имеем резонанс и

$$y_2 = x^2[(Cx + D)\cos x + (Ex + F)\sin x]\,.$$

Коэффициенты C_i --- произвольны, коэффициенты $A \ldots F$ --- неопределённые. Ответ: $y = y_1 + y_2 + Y$.

Задача 6 (7 баллов)

Собственные числа матрицы A равны $\lambda_{12} = 1 \pm 2i$. Ищем e^{At} в виде $\alpha I + \beta A$, где $e^{\lambda_{12} t} = \alpha + \beta \lambda_{12}$. Находим $\alpha = e^t(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t)\,,\ \beta = \frac{1}{2} e^t \sin 2t$. Искомая матричная экспонента равна

$$e^t\begin{pmatrix}\cos 2t+\sin 2t & -\sin 2t\\ 2\sin 2t & \cos 2t-\sin 2t\end{pmatrix}.$$

Дополнительная задача 1 (5 баллов)

Вводим параметр $y' = z$. Тогда $F(x,y,z) = yz^3 + x - 1 = 0$ и

$$z^3\,dy + 3yz^2\,dz + dx = 0\,,\quad dy - z\,dx = 0\,.$$

Исключая y, приходим к уравнению

$$\frac{4}{3}\frac{dx}{x-1} = \frac{dz^4}{z^4(1+z^4)}\,,$$

решение которого

$$(x-1)^{4/3} = C\frac{z^4}{1+z^4}$$

вместе с соотношением $y = \frac{1-x}{z^3}$ даёт параметрическое описание общего решения рассматриваемого дифференциального уравнения. Исключая параметр z, придём к соотношению

$$(x-1)^{4/3} + y^{4/3} = C\,.$$

Поскольку

$$\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + z^4 \neq 0\,,$$

особых решений нет.

Дополнительная задача 2 (5 баллов)

Уравнение на характеристики имеет вид

$$\frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}\,,$$

откуда получаем два первых интеграла

$$y = C_1\sin x\,,\quad z = C_2 y\,.$$

На начальном многообразии

$$C_2 = x^2\,,\quad C_1 = \frac{x}{\sin x}\,,$$

что даёт соотношение между константами

$$C_1 \sin \sqrt{C_2} = \sqrt{C_2}\,,$$

и ведёт к решению

$$\sin \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{z}{y^3}}\,\sin x\,.$$