

Тесты

1. Сформулировать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения $\vec{w}' = F(z)\vec{w}$
2. Какие особые точки имеет уравнение Бесселя и каков их характер (правильные, неправильные)
3. Чему равна норм присоединенного полинома Лежандра P_n^m в $L_2(-1,1)$?
4. Написать соотношение ортогональности и нормировки для сферических функций
5. Сформулировать теорему о неправильной особой точке
6. Написать старший член асимптотики функции Лежандра $P_\nu(z)$ при $z \rightarrow -1$
7. Написать собственные числа и нормированные собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$-\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}y = \lambda y \quad y(1) < \infty \quad y(-1) < \infty$$

8. Написать интегральное представление для функции Бесселя $J_\nu(z)$
9. Пусть $\nu > 0$. Может ли функция Бесселя $J_\nu(z)$ обратиться в ноль в точке $z = 2i$ и почему?
10. Написать нормальную жорданову форму (в базисе, состоящем из собственных и присоединённых векторов) для матрицы монодромии для уравнения Бесселя, в случае параметра $\nu = 7/2$ в окрестности точки $z = 0$
11. Может ли эллиптическая функция $\rho''(u)(\rho(u) - \text{функция Вейерштрасса с периодами } 2\omega \text{ и } 2\omega')$ иметь ноль в точке $u = \omega + \omega'$ и почему?
12. Существует ли эллиптическая функция, у которой в параллелограмме периодов есть единственный полюс первого порядка, и почему?
13. Может ли эллиптическая функция иметь в бесконечности полюс и почему?
14. Представить эллиптический интеграл в виде суммы алгебраической части и интегралов первого, второго и третьего рода

$$I = \int z \sqrt{4z^3 - g_2z - g_3} dz$$

15. Пусть $\zeta(u)$ – функция Вейерштрасса с "квази" периодами 2ω и $2\omega'$

$$\zeta(u + 2\omega) - \zeta(u) = 2\eta, \quad \zeta(u + 2\omega') - \zeta(u) = 2\eta'$$

Напишите связь между $\eta, \eta', \omega, \omega'$

16. Пусть $z = 0$ – изолированная особая точка коэффициентов линейного дифференциального уравнения $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$. И известны два решения этого уравнения в виде рядов $z^{\rho_{1,2}} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^{1,2} z^k$. Написать матрицу монодромии в базисе из этих решений
17. Допустим, что уравнение $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ имеет только 7 правильных особых точек, причём в бесконечности особой точки нет. Какова сумма показателей во всех этих особых точках (не включая бесконечную)?
18. Написать старший член асимптотики функции Неймана $N_0(z)$ при $z \rightarrow 0$
19. Написать нормальную жорданову форму для матрицы монодромии для уравнения Бесселя, в случае целого параметра $\nu = n$ в окрестности точки $z = 0$
20. При каких значениях параметра ν функция $J_\nu(z)$ является целой функцией?
21. Какие особые точки (конечные и бесконечные) имеет уравнение

$$(z^2 - 1)w'' + 2zw' + wz^{-2} = 0$$

и каков их характер (правильные, не правильные)? Является ли точка $z = \infty$ особой?

22. Написать решение внутренней задачи Неймана в шаре $U(R)$:

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=R} = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n$$

23. Написать производящую функцию для полиномов Лежандра $P_n(z)$

24. Доказать, что все нули функции $J_\nu(z)$, $\nu \in \mathbb{R}$ являются вещественными

25. Чему равна суммарная кратность нулей функции $\rho''(u)$ (где $\rho(u)$ – функция Вейерштрасса) в параллелограмме периодов

26. Написать формулу сложения для ζ функций Вейерштрасса

27. Написать матрицу монодромии (в базисе из собственных векторов) в окрестности точки $z = 0$ для уравнения

$$W'' - \frac{1}{z}W' - 3\frac{1}{z^2}W = 0$$

28. Написать связь функций Вейерштрасса $\sigma(u + 2\omega)$ и $\sigma(u)$, где ω – период

29. Написать асимптотику функций Бесселя $J_\nu(z)$ при $z \rightarrow +\infty$

30. Написать решение внутренней задачи Дирихле в шаре

$$\Delta u = 0, \quad u|_{r=R} = Y_1 + 2Y_3$$

31. Написать связь функции Неймана $N_\nu(z)$ с функциями $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ при $\nu \notin \mathbb{Z}$

32. Определите правильные особые точки уравнения $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$

33. Какие особые точки имеет уравнение Лежандра и каков их вид (правильные/неправильные)?

34. Дайте определение сферических функций

35. Пусть $f = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n$ – гладкая на сфере функция (здесь Y_n – сферические функции). С помощью какой формулы можно найти Y_n , если известно f ?

36. Написать прямое и обратное преобразования Фурье-Бесселя

37. Написать нормальную жорданову форму (в базисе, состоящем из собственных и присоединённых векторов) для матрицы монодромии для уравнения Бесселя, в случае параметра $\nu = l$ в окрестности точки $z = 0$

38. Написать обобщённое уравнение Лежандра

39. Написать старший член асимптотики Ханкеля $H_0^1(z)$ при $z \rightarrow 0$

40. Написать собственные функции и собственные числа для задачи Штурма-Лиувилля

$$-y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{m(m+1)}{x^2}y = \lambda y, \quad y(0) < \infty, \quad y(l) < \infty,$$

где m – положительное число

41. Написать асимптотику функции Ханкеля $H_\nu^2(z)$ при $z \rightarrow 0$, $\nu > 0$

42. Может ли эллиптическая функция иметь в бесконечности существенно особую точку и почему?

43. Чему равна суммарная кратность нулей функции $\rho''(u) + \rho'''(u)$ (где $\rho(u)$ – функция Вейерштрасса) в параллелограмме периодов $(2\omega, 2\omega')$? И почему?

44. Найти сумму всех нулей эллиптической функции Вейерштрасса $\rho(u)$ в параллелограмме периодов с вершинами $-\omega + \omega', \omega + \omega', \omega + 3\omega', -\omega + 3\omega'$

45. Написать связь функции Ханкеля $H_\nu^2(z)$ с функциями $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ при $\nu \notin \mathbb{Z}$

46. Пусть $\rho(u)$ – функция Вейерштрасса с периодами $2\omega, 2\omega'$. Доказать, что $\rho(\omega') \neq \rho(\omega + \omega')$

47. Написать решение внутренней задачи Неймана в шаре

$$\Delta u = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{r=R} = Y_3 + 2Y_4$$

48. Выразить решение соотношения $\xi(w)$ через эллиптический синус Якоби

$$w = \int_0^{2\xi} \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}$$

49. Какие особые точки (конечные и бесконечные) имеет уравнение

$$(z^2 - 1)w'' + 2z^2w' + wz^{-2} = 0$$

и каков их характер (правильные, не правильные)? Является ли точка $z = \infty$ особой?

50. Написать жорданову форму матрицы монодромии для уравнения

$$zw'' + \frac{1}{4z(z+1)^2}w = 0$$

в окрестности точки $z = 0$

51. Допустим, что уравнение $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ имеет только 5 конечных особых точек, все правильные, в бесконечности особой точки нет. Какова сумма показателей во всех этих особых точках (не включая бесконечную)?

52. Допустим, что уравнение $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ имеет только 5 конечных особых точек, все правильные, а в бесконечности тоже правильная особая точка. Какова сумма показателей во всех этих особых точках (включая бесконечную)?

53. Какие особые точки (конечные и бесконечные) имеет уравнение

$$(z^2 - 1)w'' - 2zw' + wz^{-2} = 0$$

и каков их характер (правильные, не правильные)? Является ли точка $z = \infty$ особой?

54. Написать жорданову форму матрицы монодромии для уравнения

$$zw'' + \frac{1}{4z(z-1)^2}w = 0$$

в окрестности точки $z = 0$

55. Допустим, что уравнение $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$ имеет только 7 конечных особых точек, все правильные, а в бесконечности тоже правильная особая точка. Какова сумма показателей во всех этих особых точках (включая бесконечную)?

56. Какие особые точки (конечные и бесконечные) имеет уравнение

$$(z^2 - 1)w'' + 2zw' + wz^{-3} = 0$$

и каков их характер (правильные, не правильные)? Является ли точка $z = \infty$ особой?

57. Написать жорданову форму матрицы монодромии для уравнения

$$zw'' - \frac{1}{4z(z-1)^3}w = 0$$

в окрестности точки $z = 0$