Metody Numeryczne

Project 3. Aproksymacja profilu wysokościowego

Pavel Harelik 196766, grupa 2

Wstęp

Celem projektu jest wdrożenie dwóch metod aproksymacji danych, a następnie ich porównanie dla różnych zestawów danych i różnych parametrów. Pierwsza metoda wykorzystuje interpolację Lagrange'a, a druga - sklejanie trzeciego stopnia.
Dane do aproksymacji pochodzą z enauczania. Do wizualizacji danych używana jest biblioteka matplotlib.

Metoda Lagrange'a

Podstawową ideą jest skonstruowanie tak zwanych wielomianów bazowych L_i(x), z których każdy jest równy 1 w odpowiadającym mu punkcie początkowym x_i oraz 0 w pozostałych. Te wielomiany bazowe są skonstruowane w następujący sposób:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{0\leq j\leq n \\ j\neq i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Wielomian interpolacyjny *P*(*x*) jest następnie konstruowany jako liniowa kombinacja wielomianów bazowych ważonych wartościami funkcji w odpowiednich punktach y_i

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

Zatem wielomian P(x) przechodzi przez wszystkie dane punkty (x_i, y_i) i jest unikalnym wielomianem minimalnego stopnia interpolującym te punkty.

Metoda sklejania trzeciego stopnia

Podstawową ideą jest podzielenie interwału interpolacji na kilka podprzedziałów i skonstruowanie oddzielnego wielomianu sześciennego dla każdego podprzedziału. Wielomiany te kolidują ze sobą, aby zapewnić gładkość i ciągłość krzywej.
Dla każdego podprzedziału [x_i, x_{i+1}] konstruowany jest wielomian sześcienny S_i (x) o następującej postaci:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3$$

Współczynniki są określane na podstawie układu równań, który uwzględnia następujące warunki:

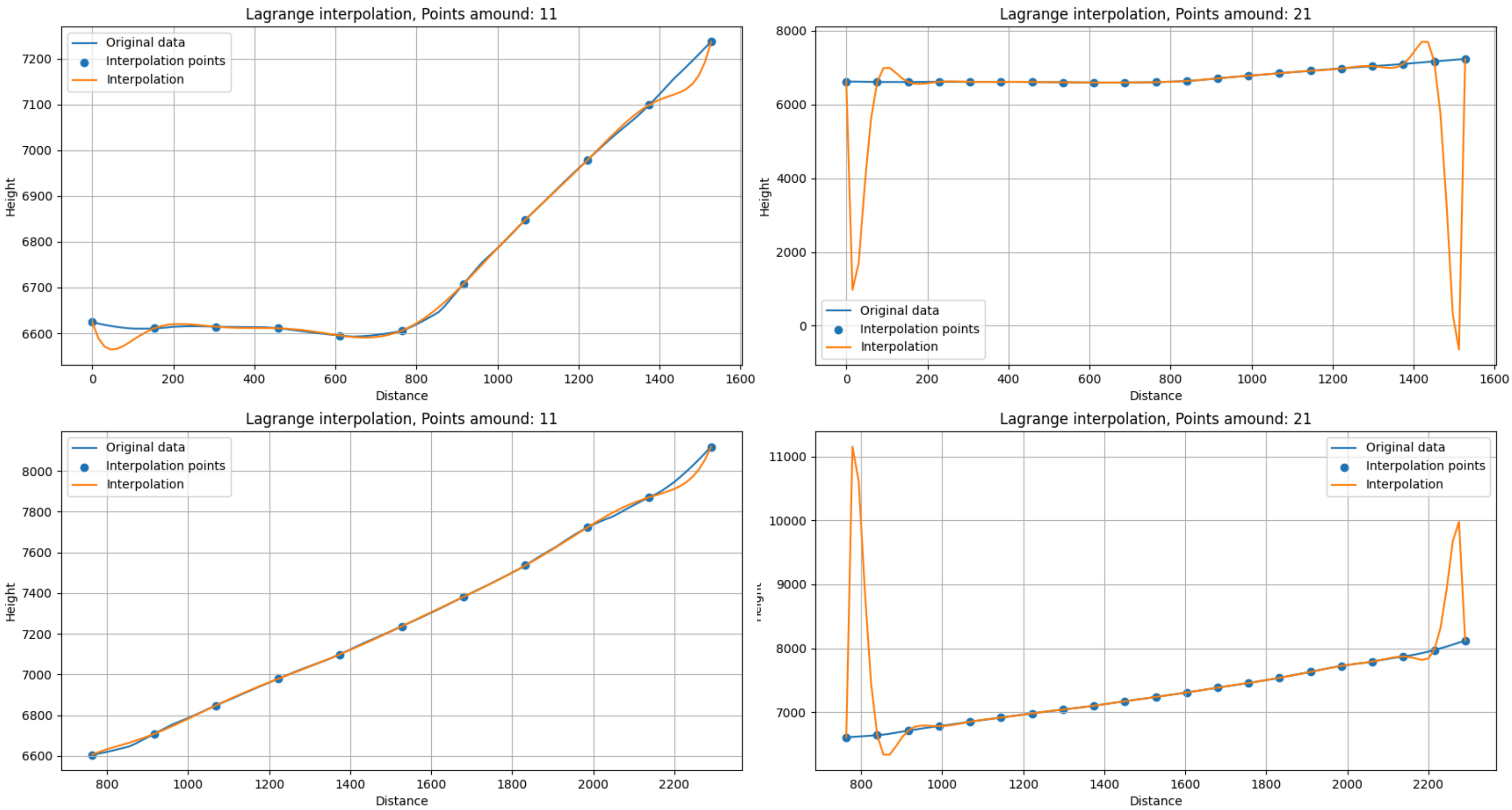
1. Wielomiany przechodzą przez wszystkie dane punkty: $S_i(x_i) = y_i$ i $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
2. Ciągłość pierwszych pochodnych w punktach wspólnych: $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
3. Ciągłość drugich pochodnych w punktach wspólnych: $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$
4. Warunki brzegowe (np. naturalne splajny, w których drugie pochodne na końcach wynoszą zero).

W ten sposób interpolacja sześciennym splajnem zapewnia gładką i płynną krzywą, która przechodzi przez wszystkie dane punkty i ma dobre właściwości do praktycznych zastosowań, takich jak modelowanie numeryczne i grafika komputerowa.

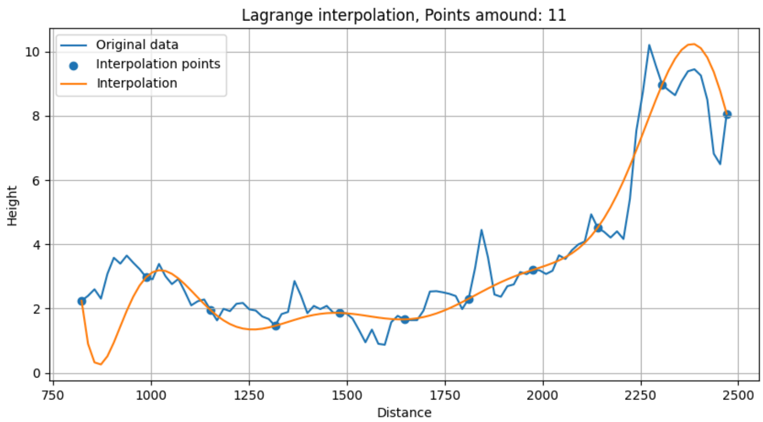
Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej

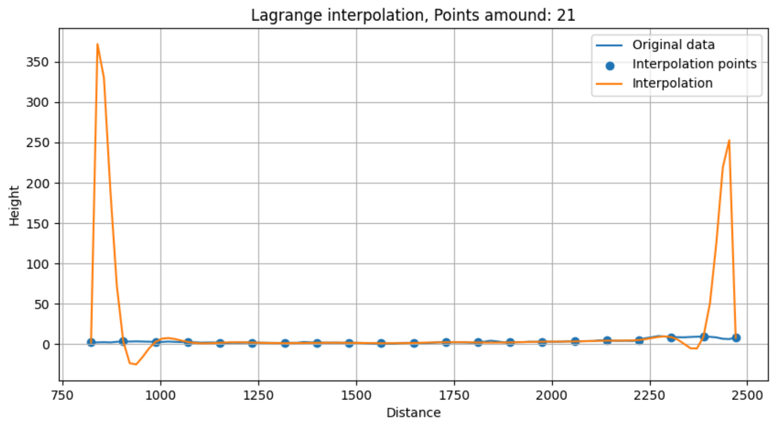
Przeanalizujmy uzyskane wyniki. Zastosujmy funkcję interpolacji dla pierwszego śladu z różną liczbą punktów interpolacji i na różnych odcinkach. Uzyskano następujące wyniki:

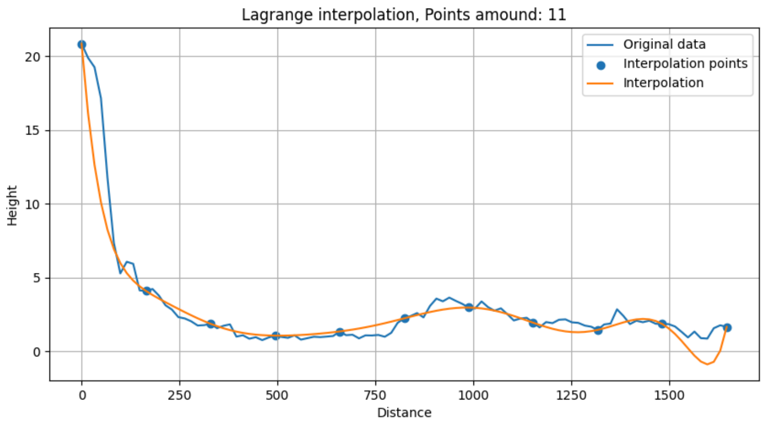
Można zauważyć, że funkcja interpolacji dość dobrze znajduje wartości pośrednie.

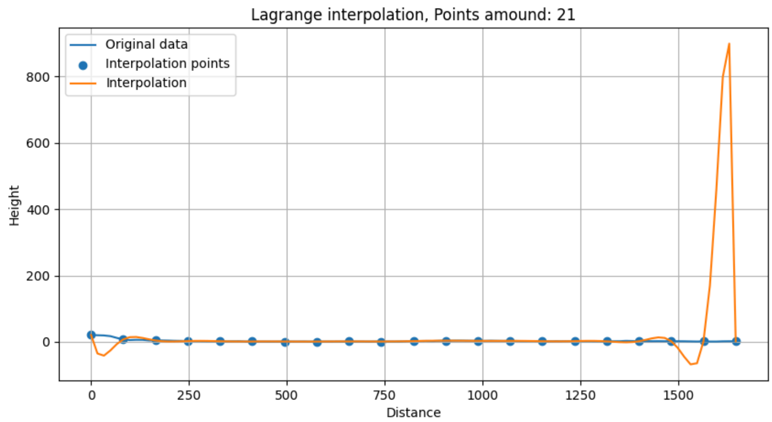


Jednak na brzegach zakresu wartości występują odchylenia od wartości oryginalnych - oscylacje. Ponadto, gdy liczba punktów do interpolacji wzrasta, oscylacje rosną. Zastanówmy się, jakie będą wyniki dla innego śladu.





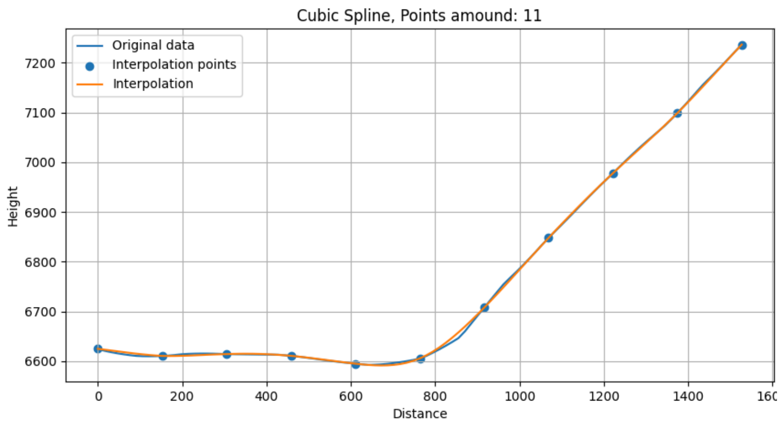


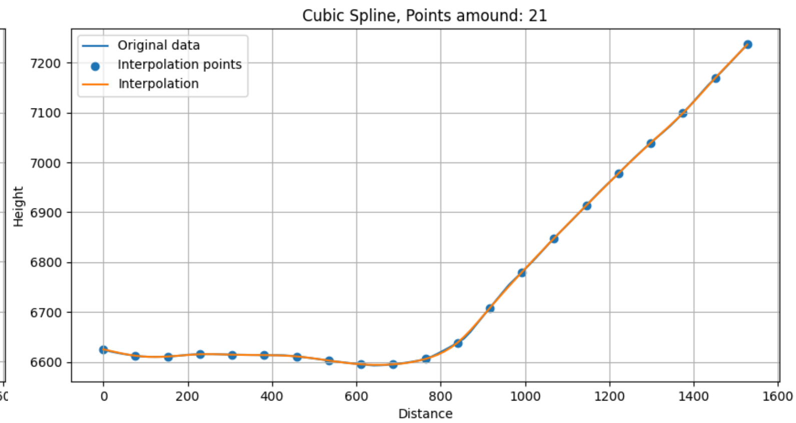


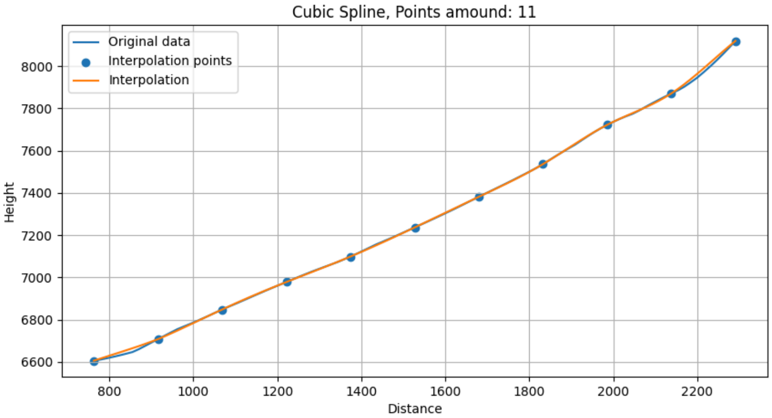
Chociaż ślad ma inny wzór zmiany wysokości, nasze obserwacje z pierwszego śladu są powtarzane. Z tego możemy wywnioskować, że chociaż metoda ta znajduje dość dokładne wartości interpolacji, lepiej jest używać jej na małych zestawach danych.

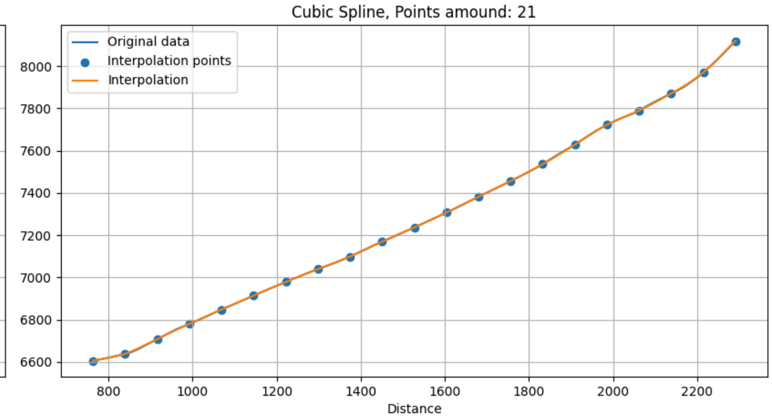
Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi

Teraz użyjemy funkcji interpolacji funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia, aby znaleźć interpolację. Zastosujmy ją dla tych samych wykresów.

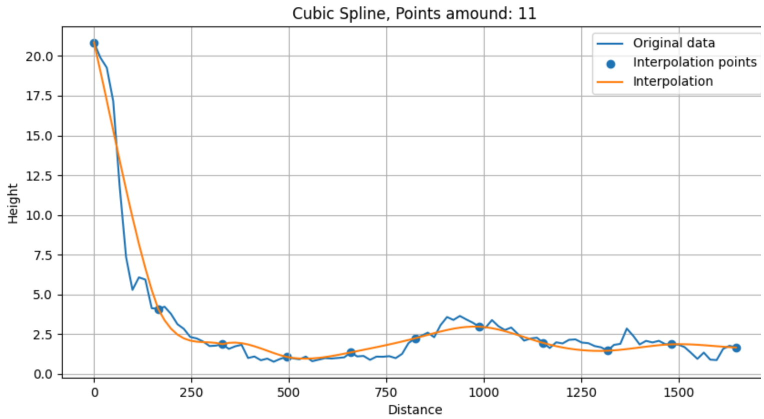


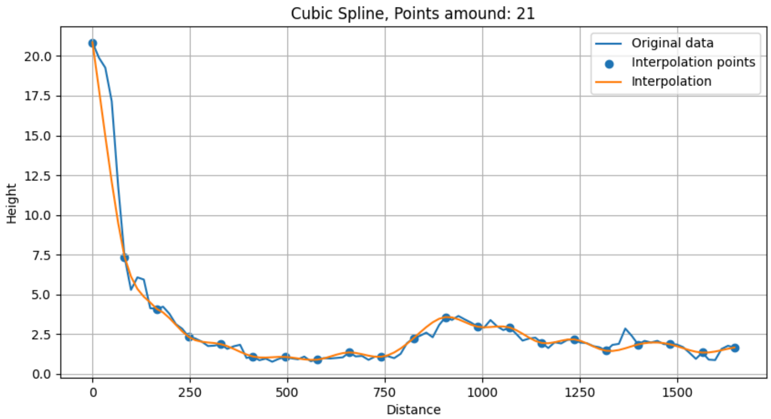


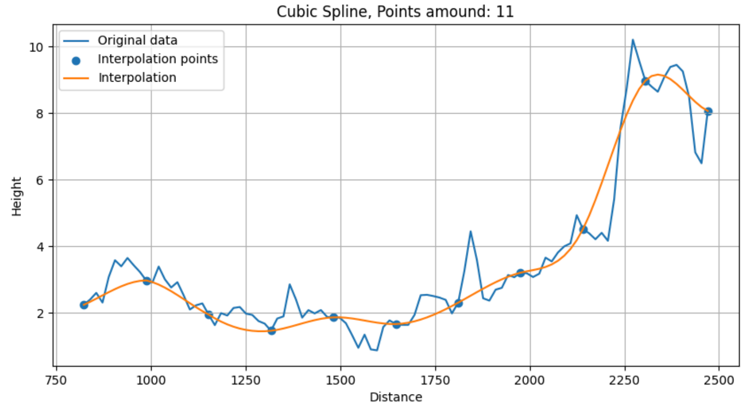


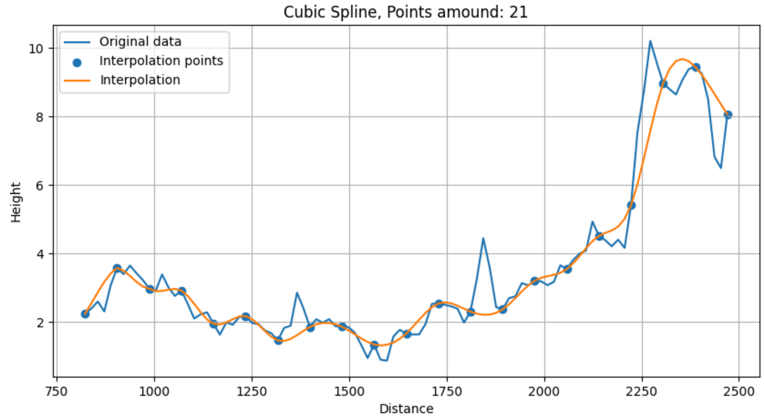


Teraz widać, że wartości interpolacji uzyskane za pomocą funkcji klejenia są jeszcze dokładniejsze i nie mają oscylacji. A wraz ze wzrostem liczby punktów wartości stają się jeszcze dokładniejsze. Wypróbujmy to dla innego śladu.





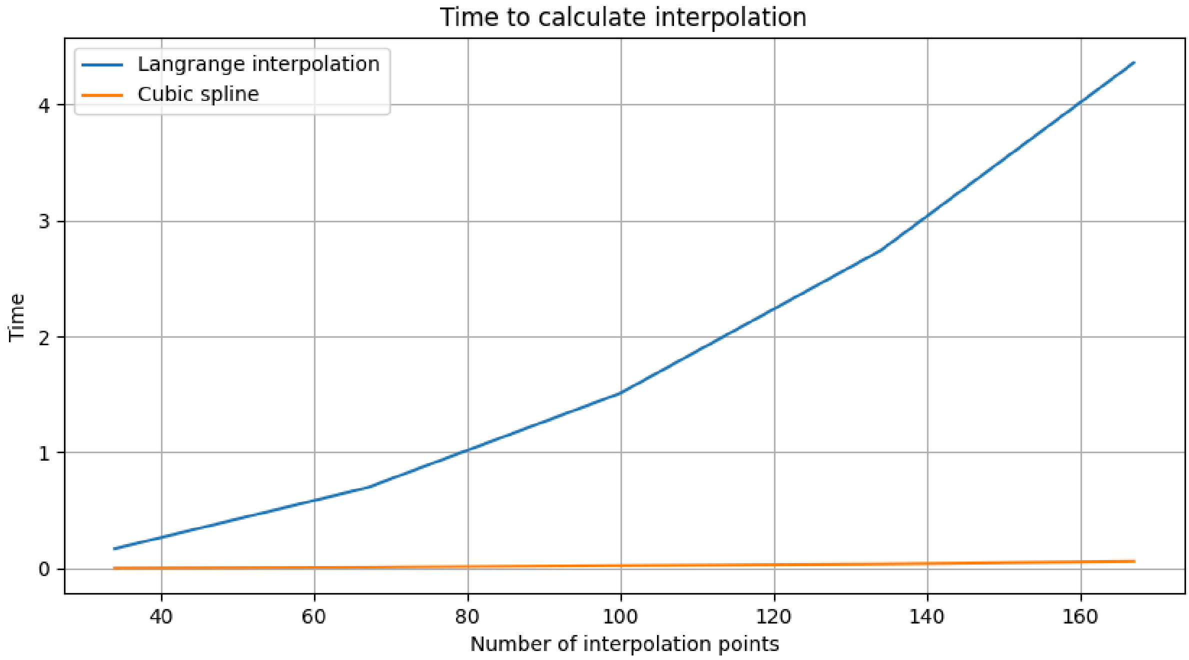




Potwierdzamy wnioski wyciągnięte dla pierwszego śladu. Weryfikujemy, że główną zaletą tej metody jest to, że gdy zwiększamy liczbę punktów do interpolacji, uzyskujemy dokładniejsze wartości końcowe i nie ma żadnych skutków ubocznych.

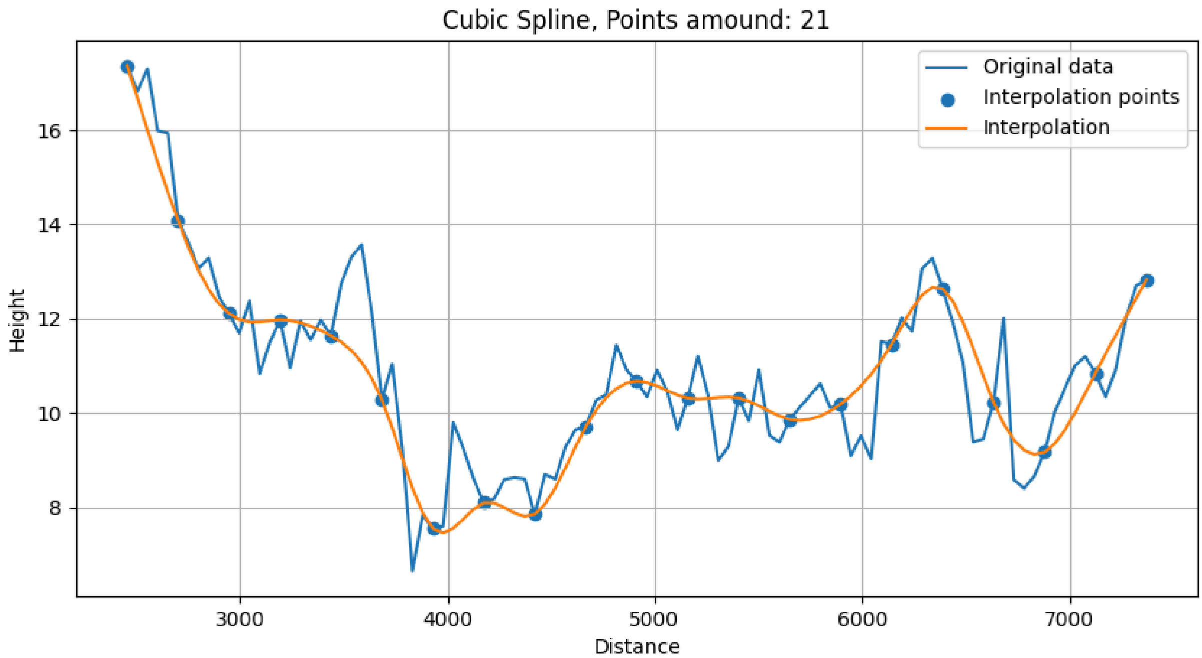
Analiza dodatkowa

Przeanalizujmy metody interpolacji nie tylko z punktu widzenia dokładności wartości, ale także z punktu widzenia szybkości wyszukiwania.

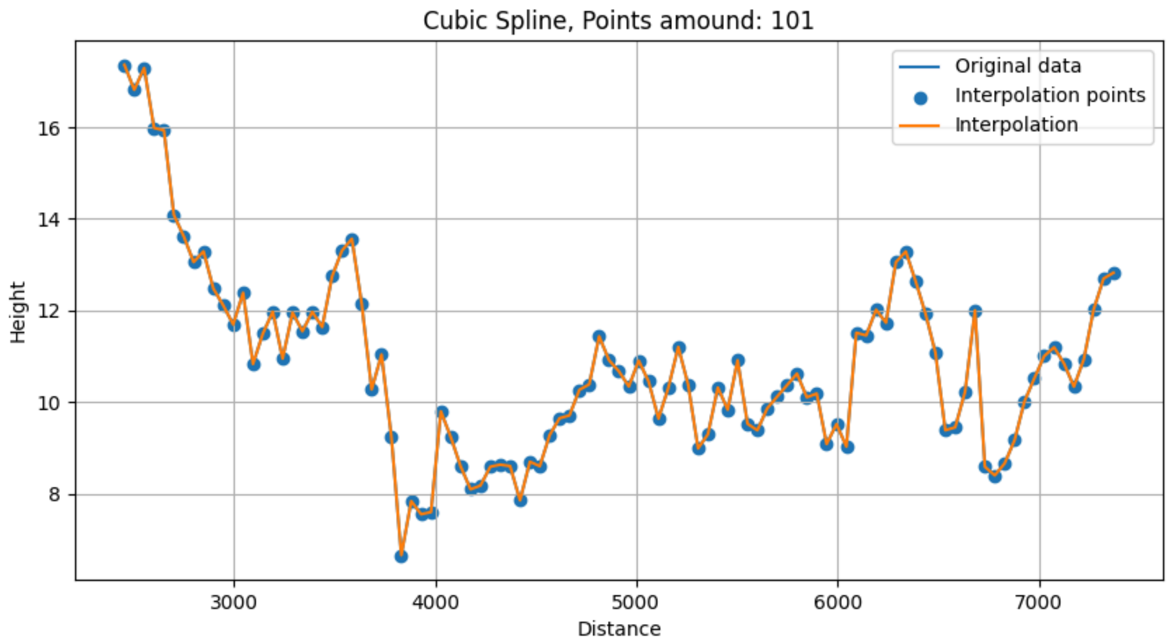


Z powyższego wykresu widać, że metoda Lagrange'a wymaga dłuższego czasu obliczeń, a także ma szybsze tempo wzrostu. Chociaż w przypadku niewielkiej ilości danych metoda ta będzie szybsza. Jednak największą zaletą metody Lagrange'a jest jej względna łatwość implementacji.

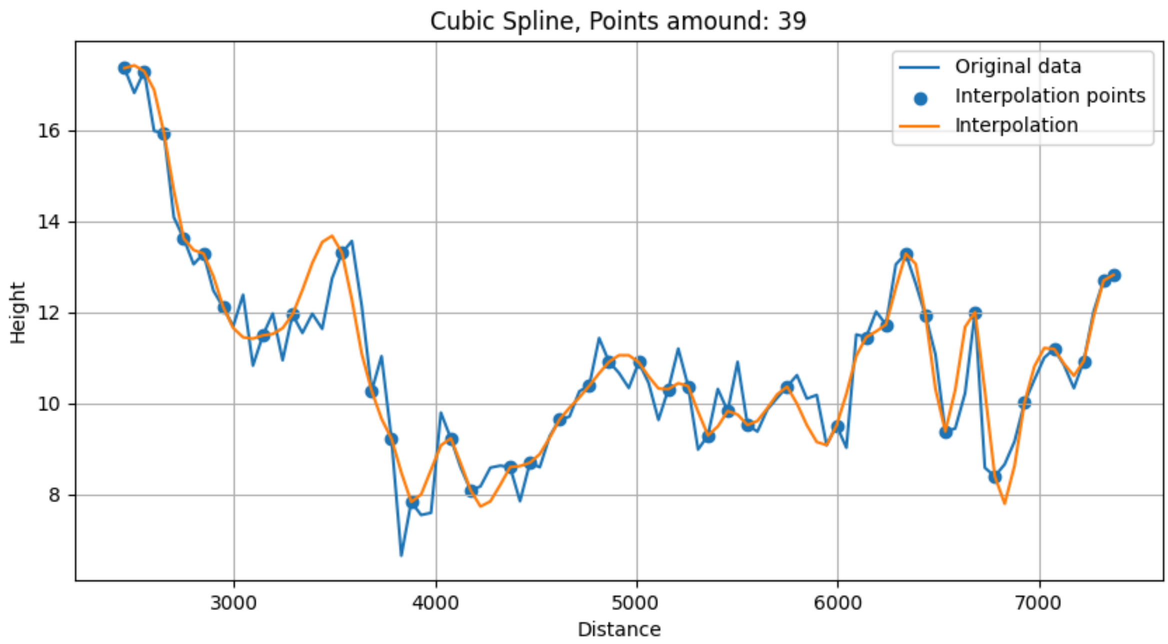
Przy bardziej szczegółowym rozważaniu metody funkcji sklejanych można również zauważyć taką wadę, że przy gwałtownej zmianie wartości interpolacja jest raczej mocno błędna:



Spróbujmy rozwiązać ten problem, dodając do algorytmu wszystkie dostępne dane.



Teraz jednak wyniki są zbliżone do linii prostej. Aby rozwiązać ten problem, wybierzemy punkty do interpolacji w momencie, gdy jej wartość będzie odbiegać o 5% od poprzedniej. Otrzymamy następujący wynik.



Pewne niedokładności pozostały, ale strategia ta poprawiła wyniki w porównaniu do pierwotnej strategii.

Wnioski

Interpolacja Lagrange'a sprawdza się dobrze w przypadku małych zestawów danych. Cechuje ją łatwa implementacja i krótki czas obliczeń dla niewielkich danych. Niestety, na brzegach zakresu wartości występują oscylacje, które nasilają się wraz ze wzrostem liczby punktów interpolacyjnych.

Sklejanie trzeciego stopnia zapewnia dokładniejsze wyniki interpolacji bez oscylacji. Dokładność rośnie wraz ze wzrostem liczby punktów danych, jednak metoda jest bardziej złożona do zaimplementowania.

Ogólnie rzecz biorąc, sklejanie trzeciego stopnia jest bardziej uniwersalną i dokładną metodą.Ale wybór metody powinien zależeć od potrzeb i posiadanych danych.