Ангеом (Билеты 1 – 12)

Ирина Ткаченко :)

22 января 2020 г.

Содержание

1 Понятие вектора и основные определения с ним связанные. Линейные операции над векторами. Базис и координаты вектора, арифметические действия с векторами в координатной форме (теорема и следствие). Критерий коллинеарности векторов. Понятие линейной независимости векторов. Декартова система координат. Задача о делении отрезка в заданном отношении. Декартова прямоугольная система координат. Длина вектора, орт вектора, направляющие косинусы, проекция вектора на направление. 4

1.1 Вектора . . . 4

1.1.1 Определения . . . 4

1.1.2 Линейные операции и их свойства . . . 4

1.1.3 Линейные комбинации, линейная зависимость . . . 5

1.1.4 Базисы . . . 5

1.2 Декартова прямоугольная система координат . . . 6

1.2.1 Определение . . . 6

1.2.2 Вектора в прямоугольной ДСК . . . 6

1.2.3 Критерий коллинеарности . . . 6

1.2.4 Деление отрезка в заданном соотношении . . . 7

2 Полярная система координат на плоскости и её связь с декартовой. Преобразования декартовой системы координат на плоскости и в пространстве (поворот, параллельный перенос) 8

2.1 Полярная система координат . . . 8

2.1.1 Определение . . . 8

2.1.2 Связь полярных координат с декартовыми координатами . . . 8

2.2 Преобразования прямоугольной ДСК . . . 8

2.2.1 Параллельный перенос . . . 8

2.2.2 Поворот на плоскости . . . 9

2.2.3 Поворот в пространстве . . . 9

3 Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение координат вектора через скалярное произведение. Критерий ортогональности векторов. Формула скалярного произведения в координатном представлении. 10

3.1 Скалярное произведение векторов . . . 10

3.1.1 Определение . . . 10

3.1.2 Координатное представление формулы . . . 10
3.1.3 Свойства . . . 10
3.1.4 Критерий ортогональности векторов . . . 10

4 Векторное произведение векторов и его свойства (кроме аддитивности). Критерий коллинеарности векторов. Формула векторного произведения в координатном представлении. Смешанное произведение векторов и его свойства. Доказательство аддитивности векторного произведения. Критерий компланарности векторов. Формула смешанного произведения в координатном представлении. Двойное векторное произведение. 11

4.1 Векторное произведение векторов . . . 11
4.1.1 Определение . . . 11
4.1.2 Левая и правая тройки векторов . . . 11
4.1.3 Свойства . . . 11
4.1.4 Координатное представление . . . 12
4.1.5 Свойство аддитивности (линейности) . . . 12
4.2 Смешанное произведение векторов . . . 12
4.2.1 Определение . . . 12
4.2.2 Свойства . . . 13
4.2.3 Критерий компланарности векторов . . . 13
4.2.4 Двойное векторное произведение . . . 13

5 Теорема об общем уравнении прямой на плоскости. Различные способы задания прямой на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение в отрезках, через точку и нормаль, параметрическое, каноническое и нормальное уравнения прямой. Вычисление расстояния от точки до прямой. Полярное уравнение прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости. 14

5.1 Уравнения, задающие прямую на плоскости . . . 14
5.1.1 Общее уравнение прямой . . . 14
5.1.2 Уравнение в отрезках . . . 15
5.1.3 Векторное уравнение . . . 15
5.1.4 Параметрическое уравнение . . . 15
5.1.5 Каноническое уравнение . . . 15
5.1.6 Нормальное векторное уравнение . . . 15
5.1.7 Полярное уравнение . . . 17
5.2 Расстояние от точки до прямой . . . 17
5.3 Взаимное расположение прямых на плоскости . . . 18
5.3.1 Параллельны или совпадают . . . 18
5.3.2 Пересекаются . . . 18
5.3.3 Перпендикулярны (подслучай п.5.3.2) . . . 18

6 Теорема об общем уравнении плоскости в пространстве. Различные способы задания плоскости в пространстве: общее уравнение плоскости, уравнение в отрезках, через точку и нормаль, нормальное уравнение плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 19

6.1 Уравнения плоскости в пространстве . . . 19
6.1.1 Общее уравнение . . . 19

6.1.2 Уравнение в отрезках . . . 20
6.1.3 Уравнение через точку и вектор нормали . . . 20
6.1.4 Нормальное уравнение . . . 21
6.2 Расстояние от точки до плоскости . . . 22
6.3 Взаимное расположение плоскостей в пространстве . . . 22
6.3.1 Плоскости параллельны или совпадают . . . 22
6.3.2 Плоскости пересекаются . . . 22

7 Я ЗАДОЛБАЛАСЬ 24

8 Два способа задания прямой в пространстве (переход от одного способа задания к другому). Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве, вычисление расстояния между прямыми. Задача о поиске общего перпендикуляра скрещивающихся прямых. Задача о поиске точки симметричной относительно заданной прямой (плоскости), уравнение плоскости через определитель. 25
8.1 Два способа задания прямой в пространстве . . . 25
8.1.1 Пересечение плоскостей . . . 25
8.1.2 Каноническое и параметрическое уравнения . . . 25
8.1.3 Переход от первого способа ко второму . . . 26
8.1.4 Переход от второго способа к первому . . . 26
8.2 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве . . . 27
8.2.1 Прямая параллельна плоскости . . . 27
8.2.2 Прямая пересекает плоскость . . . 27
8.3 Взаимное расположение прямых в пространстве . . . 27
8.3.1 Прямые параллельны или совпадают . . . 27
8.3.2 Прямые пересекаются или скрещиваются . . . 28
8.3.3 Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых . . . 29
8.4 Задачи о симметричной точке . . . 30
8.4.1 Симметрия относительно прямой . . . 30
8.4.2 Симметрия относительно плоскости . . . 30
8.5 Уравнение плоскости через определитель . . . 31

9 Всё про алгебраические кривые второго порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола). 32
9.1 Табличка . . . 32
9.2 Уравнение касательной . . . 34
9.2.1 Уравнение касательной к эллипсу . . . 34
9.3 Оптические свойства . . . 35
9.3.1 Оптические свойства эллипса . . . 35

10 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. 36

11 Алгебраические поверхности второго порядка. Определение геометрической формы поверхности второго порядка по ее уравнению (метод сечений). Цилиндрические поверхности. 37
11.1 Основные понятия . . . 37
11.2 Метод сечений . . . 37
11.3 Цилиндры . . . 44

1 Понятие вектора и основные определения с ним связанные. Линейные операции над векторами. Базис и координаты вектора, арифметические действия с векторами в координатной форме (теорема и следствие). Критерий коллинеарности векторов. Понятие линейной независимости векторов. Декартова система координат. Задача о делении отрезка в заданном отношении. Декартова прямоугольная система координат. Длина вектора, орт вектора, направляющие косинусы, проекция вектора на направление.

1.1 Вектора

1.1.1 Определения

Вектор – математический объект, характеризующийся величиной и направлением. В геометрии *вектор* – направленный отрезок прямой, то есть отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек является началом, а какая — концом. Так же иными словами, *вектор* – класс эквивалентности направленных отрезков.

Длина вектора – модуль вектора. $len(\overline{a}) = |\overline{a}| = \sqrt{a_1 + \ldots + a_n}$

1.1.2 Линейные операции и их свойства

1. Сложение $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$
2. Умножение на скаляры $\lambda_i \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{d}$, $|\lambda \cdot \overline{a}| = \lambda \cdot |\overline{a}| = |\overline{d}|$

   Свойства

   - Ассоциативность сложения: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$
   - Коммутативность сложения: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
   - $\exists$ нулевого элемента: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$, $\overline{0} \cdot \overline{a} = \overline{0}$
   - $\exists$ противоположного элемента: $\forall\, \overline{a} :\ \overline{a} + (-1) \cdot \overline{a} = 0$
   - Дистрибутивность относительно векторов: $\forall\, \alpha \in \mathbb{R} :\ \alpha \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \alpha \cdot \overline{a} + \alpha \cdot \overline{b}$
   - Дистрибутивность относительно скаляров: $\forall\, \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} :\ (\alpha + \beta) \cdot \overline{a} = \alpha \cdot \overline{a} + \beta \cdot \overline{a}$
   - Ассоциативность умножения относительно скаляров: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \overline{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{a})$
   - $\exists$ нейтрального элемента: $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$
3. Вычитание $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-1) \cdot \overline{b} = \overline{e}$

1.1.3 Линейные комбинации, линейная зависимость

Пусть имеем систему векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ и набор скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, тогда $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{a}_n$ – **линейная комбинация** данной системы векторов с данным набором коэффициентов.

Система векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует такой набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, из которых хотя бы один не равен нулю, что линейная комбинация данной системы с этим набором коэффициентов равна нулевому вектору $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{a}_n = \overline{0}$. Иными словами, один вектор можно выразить через другие.

Система векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n$ называется **линейно независимой**, если её линейная комбинация $\lambda_1 \cdot \overline{a}_1 + \ldots + \lambda_n \cdot \overline{a}_n$ равна нулевому вектору только при наборе коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ таких, что $\lambda_i = 0$. Иными словами, ни один веткор нельзя выразить через другой.

1.1.4 Базисы

Базис — система линейно независимых векторов, которая позволяет разложить любой вектор в данном пространстве.

ТЕОРЕМА (хер знает о чём, о базисе наверное)

1. любой вектор пространства может быть разложен по базису пространства;
2. любой вектор, параллельный плоскости, может быть разложен по базису этой плоскости;
3. любой вектор, параллельный прямой, может быть разложен по базису этой прямой.

Следствия из этой непонятной теоремы

1. Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.
2. Из равенства векторов следует равенство их соответствующих координат.
3. $\overline{a} = \overline{b} \cdot \lambda \Rightarrow a_1 = \lambda \cdot b_1, \ldots$
4. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{c} \Rightarrow c_1 = a_1 + b_1, \ldots$

1.2 Декартова прямоугольная система координат

1.2.1 Определение

Декартова прямоугольная система координат — система координат с взаимно перпендикулярными осями на плоскости или в пространстве, при этом с одинаковыми масштабами по осям.

1.2.2 Вектора в прямоугольной ДСК

Координаты вектора — коэффициенты единственно возможной линейной комбинации базисных векторов, равной данному вектору, в выбранной системе координат. $\overline{a} = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{e}_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – это компоненты вектора.

Арифметические действия с векторами в координатной форме

- Сложение векторов – сложение соответствующих координат.
- Умножение на число – умножение координат на число.

Единичный вектор или **орт** – вектор, норма (длина) которого равна единице. Чтобы найти этот вектор надо поделить вектор на его длину (получим сонаправленный вектор единичной длины).

Компланарный вектор – вектор, параллельный плоскости.

Компланарные векторы – векторы, которые, будучи приведёнными к общему началу, лежат в одной плоскости. Иными словами, они параллельны одной плоскости.

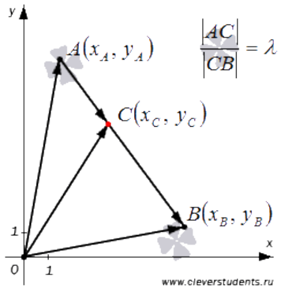
Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ – это косинусы углов, которые вектор образует с положительными полуосями координат. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

1.2.3 Критерий коллинеарности

Два вектора коллинеарны тогда только тогда, когда они линейно зависимы.

$$\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b} \Rightarrow \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b} \vee \overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$$

1.2.4 Деление отрезка в заданном соотношении



Мы знаем, что координаты радиус-вектора точки равны соответствующим координатам этой точки, поэтому, $|\overline{OA}| = (x_a, y_a)$ и $\overline{OB} = (x_b, y_b)$. Найдем координаты вектора $\overline{OC}$, которые будут равны искомым координатам точки C, делящей отрезок AB в заданном отношении λ.

В силу операции сложения векторов можно записать равенства $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$ и $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$. Их мы используем в следующем абзаце.

Так как точка делит отрезок в соотношении λ, то $|\overline{AC}| = \lambda \cdot |\overline{CB}|$. Векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ лежат на одной прямой и имеют одинаковое направление, а выше мы отметили, что $\lambda > 0$, поэтому, по определению операции умножения вектора на число, справедливо равенство $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$. Подставив в него $\overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC}$, имеем $\overline{AC} = \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OC})$. Тогда равенство $\overline{OC} = \overline{OA} + \lambda \cdot (\overline{OB} - \overline{OC})$, откуда в силу свойств операций над векторами получаем:

$$\overline{OC} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot (\overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB})$$

Осталось вычислить координаты вектора $\overline{OC} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot (\overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB})$, выполнив необходимые операции над векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ в координатах. Так как $\overline{OA} = (x_a, y_a)$ и $\overline{OB} = (x_b, y_b)$, то $\overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB} = (x_a + \lambda \cdot x_b,\ y_a + \lambda \cdot y_b)$, а следовательно:

$$\overline{OC} = \frac{1}{1+\lambda} \cdot (\overline{OA} + \lambda \cdot \overline{OB}) = \left(\frac{x_a + \lambda \cdot x_b}{1+\lambda}, \frac{y_a + \lambda \cdot y_b}{1+\lambda} \right)$$

2 Полярная система координат на плоскости и её связь с декартовой. Преобразования декартовой системы координат на плоскости и в пространстве (поворот, параллельный перенос)

2.1 Полярная система координат

2.1.1 Определение

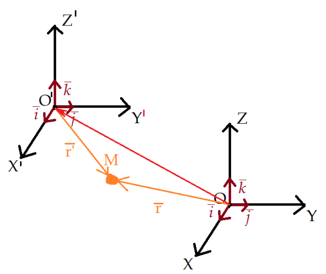
Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, исходящего из этой точки луча OA (обозначается также и как Ox), называемого полярной осью, и масштаба для изменения длин. Кроме того, при задании полярной системы координат должно быть определено, какие повороты вокруг точки O считаются положительными (на чертежах обычно положительными считаются повороты против часовой стрелки).

2.1.2 Связь полярных координат с декартовыми координатами

Установим связь между полярными координатами точки и её декартовыми координатами. Будем предполагать, что начало декартовой прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка M имеет декартовы координаты x и y и полярные координаты ρ и φ. Тогда $x = \rho \cdot \cos(\varphi)$; $y = \rho \cdot \sin(\varphi)$.

2.2 Преобразования прямоугольной ДСК

2.2.1 Параллельный перенос



$\overline{OO'} = (x_0, y_0, z_0) = O'$ – координаты нового центра СК в старых координатах.

$\overline{r} = (x, y, z) = M = \overline{OM}$

$\overline{r} == \overline{OO'} + \overline{r'}$

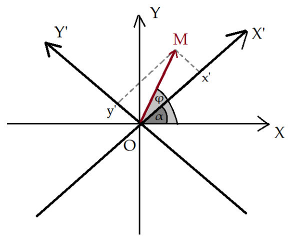
$\overline{r}' = (x', y'z')$

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \\ z = z_0 + z' \end{cases}$$

lalalalala...

lallalalala!

2.2.2 Поворот на плоскости



$$\begin{cases} x' = r\cos\varphi \\ y' = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi+\alpha) \\ y = r\sin(\varphi+\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha - y'\cdot\sin\alpha \\ y = x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \cos\alpha x + \sin\alpha y \\ y' = -\sin\alpha x + \cos\alpha y \end{cases}$$

lalala

2.2.3 Поворот в пространстве

Матрица поворота *ух ёпт, поехали выводить это говно*

Базисные векторы в изначальной ДСК – $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Базисные вектора в новой системы координат – $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. То есть, $\bar{r} = x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k} = x'\bar{e}_1+y'\bar{e}_2+z'\bar{e}_3$. Вектора $\bar{e}_1 = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)^T$, $\bar{e}_2 = (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)^T$, $\bar{e}_3 = (\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3)^T$, где α_1, β_1, γ_1 – углы между вектором $\bar{e}_1$ и соответственно осями Ox, Oy, Oz (остальные углы аналогично). Тогда

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases}$$

Ну или матрциа поворота

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

3 Скалярное произведение векторов и его свойства. Выражение координат вектора через скалярное произведение. Критерий ортогональности векторов. Формула скалярного произведения в координатном представлении.

3.1 Скалярное произведение векторов

3.1.1 Определение

Скалярное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – скалярная величина, равная произведению модулей этих векторов, умноженному на косинус угла между ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \alpha$$

3.1.2 Координатное представление формулы

Скалярная величина, равная сумме попарного произведения координат векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

3.1.3 Свойства

1. Симметричность или коммутативность: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
2. Аддитивность (линейность): $(\overline{a}_1 + \overline{a}_2) \cdot \overline{b} = \overline{a}_1 \cdot \overline{b} + \overline{a}_2 \cdot \overline{b}$
3. Однородность: $(\lambda \cdot \overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b})$

   2 и 3 свойства дают линейность по первому аргументу, а в силу свойства 1 – ещё и линейность по второму.
4. Произведение вектора самого на себя: $\overline{a} \cdot \overline{a} \geqslant 0$; $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$

3.1.4 Критерий ортогональности векторов

$$\overline{a}, \overline{b} \neq 0, \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$$

4 Векторное произведение векторов и его свойства (кроме аддитивности). Критерий коллинеарности векторов. Формула векторного произведения в координатном представлении. Смешанное произведение векторов и его свойства. Доказательство аддитивности векторного произведения. Критерий компланарности векторов. Формула смешанного произведения в координатном представлении. Двойное векторное произведение.

4.1 Векторное произведение векторов

4.1.1 Определение

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярный к плоскости этих векторов и направленный так, чтоб наименьшее вращение от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ вокруг вектора осуществлялось против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\overline{c}$.

$$\overline{a} \times \overline{b} = [\overline{a}, \overline{b}] = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\alpha$$

4.1.2 Левая и правая тройки векторов

Тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется *левой*, если поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$, видимый с конца третьего вектора $\overline{c}$, осуществляется по ходу часовой стрелки (рис. 1).

Тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется *правой*, если поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$, видимый с конца третьего вектора $\overline{c}$, осуществляется против хода часовой стрелки (рис. 2).

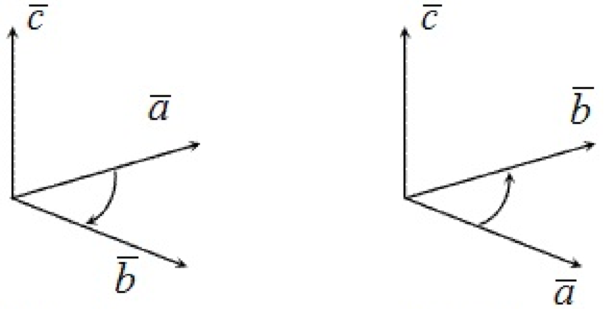


Рис. 1 Рис. 2

4.1.3 Свойства

1. *Геометрический смысл векторного произведения*: модуль векторного произведения двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах: $S_{par} = [\overline{a} \times \overline{b}]$

2. Векторное произведения двух не нулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда вектора коллинеарны.
3. Вектор $\overline{c}$, равный векторному произведению ненулевых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, перпендикулярен этим векторам.
4. Антикоммутативность: $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$
5. Ассоциативность относительно скаляра: $(\lambda \cdot \overline{a} \times \overline{b}) = \overline{a} \times (\lambda \cdot \overline{b}) = \lambda \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$

4.1.4 Координатное представление

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{bmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \overline{i} \cdot A_{11} + \overline{j} \cdot A_{12} + \overline{k} \cdot A_{13} =$$

$$= \overline{i} \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) + \overline{j} \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) + \overline{k} \cdot (a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2)$$

4.1.5 Свойство аддитивности (линейности)

Векторное произведение линейно по каждому аргументу, т.е. для любых векторов и для любого числа λ выполняется

$$[\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}] = [\overline{a}_1, \overline{b}] + [\overline{a}_2, \overline{b}]$$

$$[\lambda \cdot \overline{a}, \overline{b}] = [\overline{a}, \lambda \cdot \overline{b}] = \lambda \cdot [\overline{a}, \overline{b}]$$

Доказательство

Пусть $\overline{c} = [\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}] - [\overline{a}_1, \overline{b}] - [\overline{a}_2, \overline{b}]$. Докажем, что он равен нулю, доказав, что его скалярный квадрат равен нулю, т.е. что $(\overline{c}, \overline{c}) = 0$. (Применим свойства линейности скалярного произведения и определение смешанного произведения[1])

$$(\overline{c}, \overline{c}) = ([\overline{a}_1 + \overline{a}_2] - [\overline{a}_1, \overline{b}] - [\overline{a}_2, \overline{b}], \overline{c}) = ([\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}], \overline{c}) - ([\overline{a}_1, \overline{b}], \overline{c}) - ([\overline{a}_2, \overline{b}], \overline{c}) =$$

$$= (\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c}) - (\overline{a}_1, \overline{b}, \overline{c}) - (\overline{a}_2, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}_1 + \overline{a}_2) + (\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}_1) + (\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}_2) =$$

$$= -([\overline{c}, \overline{b}], \overline{a}_1 + \overline{a}_2) + ([\overline{c}, \overline{b}], \overline{a}_1) + ([\overline{c}, \overline{b}], \overline{a}_2) = 0$$

4.2 Смешанное произведение векторов

4.2.1 Определение

Смешанное произведение векторов — скалярное произведение вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$$

[1]см. п. 4.2

4.2.2 Свойства

- *Геометрический смысл смешанного произведения*: модуль смешанного произведения трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ равен объёму параллелепипеда, образованного этими векторами: $V_{par} = |\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})|$ ($V > 0$, если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - правая тройка, если левая тройка – $V < 0$)
- $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$

4.2.3 Критерий компланарности векторов

Если смешанное произведения трех ненулевых векторов равно нулю, то эти вектора компланарные.

4.2.4 Двойное векторное произведение

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c} \cdot (\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{d} = (a_2 \cdot b_1 \cdot c_2,\ -a_1 \cdot b_1 \cdot c_2,\ 0)$$

5 Теорема об общем уравнении прямой на плоскости. Различные способы задания прямой на плоскости: общее уравнение прямой, уравнение в отрезках, через точку и нормаль, параметрическое, каноническое и нормальное уравнения прямой. Вычисление расстояния от точки до прямой. Полярное уравнение прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости.

5.1 Уравнения, задающие прямую на плоскости

5.1.1 Общее уравнение прямой

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ (A и B одновременно не равны нулю) называется **общим уравнением прямой на плоскости**. Общее уравнение прямой называется *полным*, если все числа A, B и C отличны от нуля, в противном случае общее уравнение прямой называется *неполным*.

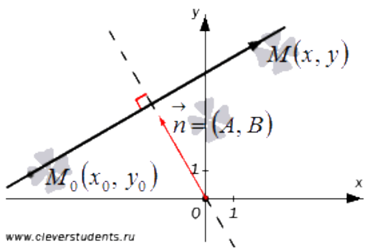
ТЕОРЕМА. Всякое уравнение первой степени вида $Ax+By+C = 0$, где A, B и C – некоторые действительные числа, причем А и В одновременно не равны нулю, задает прямую линию в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости, и любая прямая в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задается уравнением вида $Ax + By + C = 0$ при некотором наборе значений A, B и C.

Доказательство

I. Докажем сначала, что уравнение вида $Ax + By + C = 0$ задает прямую на плоскости.

Пусть координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$, то есть, $Ax_0+By_0+C = 0$. Вычтем из левой и правой частей уравнения $Ax+By+C = 0$ соответственно левую и правую части равенства $Ax_0 + By_0 + C = 0$, при этом получаем уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0)$, которое эквивалентно $Ax + By + C = 0$.

Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ представляет собой необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов $\overline{n} = (A, B)$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$. То есть, множество всех точек $M(x, y)$ определяет в прямоугольной системе координат Oxy прямую линию, перпендикулярную направлению вектора $\overline{n} = (A, B)$. Если бы это было не так, то векторы $\overline{n} = (A, B)$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ не были бы перпендикулярными и равенство $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ не выполнялось бы.



Таким образом, уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0)$ задает прямую линию в прямоугольной декартовой системе координат Oxy на плоскости, следовательно, эквивалентное ему уравнение вида $Ax + By + C = 0$ задает эту же прямую. На этом первая часть теоремы доказана.

II. Теперь докажем, что всякая прямая в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости определяется уравнением первой степени вида $Ax + By + C = 0$.

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy на плоскости задана прямая a, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0), \overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой a, и пусть $M(x, y)$ – плавающая точка этой прямой. Тогда векторы $\overline{n} = (A, B)$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ перпендикулярны, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, то есть, $(\overline{n}, \overline{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Полученное равенство можно переписать в виде $Ax+By-Ax_0-By_0 = 0$. Если принять $C = -Ax_0 - By_0$, то получим уравнение $Ax + By + C = 0$, которое соответствует прямой a.

5.1.2 Уравнение в отрезках

Уравнение в отрезках прямой, пересекающей ось Ox в точке $(a, 0)$ и ось Oy в точке $(0, b)$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \; (a \neq 0,\, b \neq 0)$$

5.1.3 Векторное уравнение

Векторное уравнение прямой в параметрической форме $\overline{r} = \overline{r}_0 + \overline{a} \cdot t, \overline{a} \neq 0$, где $\overline{a}$ — направляющий вектор прямой, $\overline{r}_0$ – радиус-вектор некоторой точки прямой.

5.1.4 Параметрическое уравнение

Прямая линия на плоскости может быть задана **параметрическим уравнением** прямой: $x = x_0 + \alpha \cdot t, y = y_0 + \beta \cdot t$ (просто разложили векторное уравнение прямой по координатам x и y), где числа α, β не равны нулю одновременно и являются компонентами направляющего вектора прямой – ненулевого вектора, лежащего на прямой.

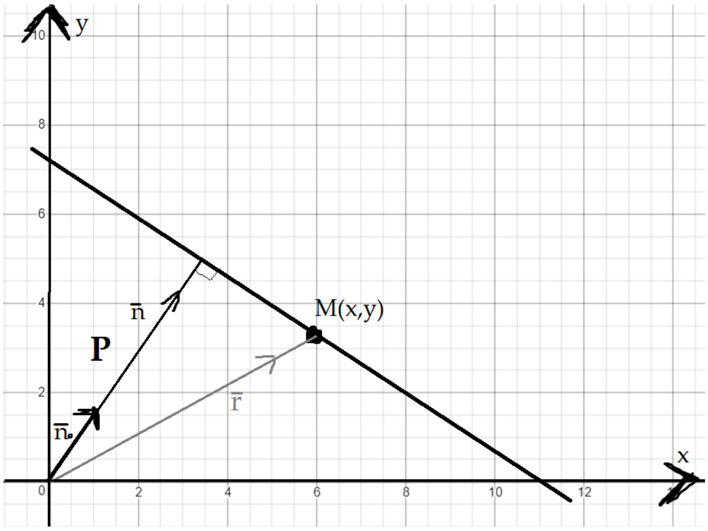
5.1.5 Каноническое уравнение

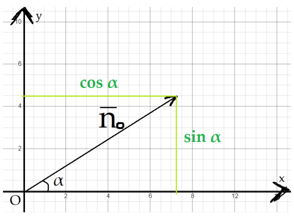
Если $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, то после исключения из уравнений прямой в параметрической форме параметра t уравнение прямой приводятся к **канонической форме**:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

5.1.6 Нормальное векторное уравнение

$(\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n}) = 0, n \neq 0$, где $\overline{n}$ – вектор нормали к прямой, $\overline{r}_0$ – радиус вектор фиксированной точки, $\overline{r}$ – радиус-вектор любой точки прямой. Это уравнение также можно записать в форме $(\overline{r}, \overline{n}) = D, \overline{n} \neq 0$, или в форме $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - P = 0$, где α – угол между нормалью $\overline{n}$ и осью Ox, а P – проекция радиус-вектора $\overline{r}$ на вектор нормали.





Расстояние от точки O до прямой L равняется P, что, в свою очередь, является проекцией радиус-вектора $\overline{r}$ на орт-вектор нормали $\overline{n}_0$. Координаты вектора $\overline{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где α – угол между осью Ox и орт-вектором $\overline{n}_0$.

Скалярное произведение векторов $(\overline{r}, \overline{n}_0)$ равняется P и так же равняется $x{\cdot}\cos\alpha{+}y{\cdot}\sin\alpha$. Следовательно, $x{\cdot}\cos\alpha{+}y{\cdot}\sin\alpha{-}P = 0$ – нормальное уравнение прямой.

Чтобы привести от общего вида к нормальному, надо поделить на $\pm\sqrt{A^2+B^2}$.

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

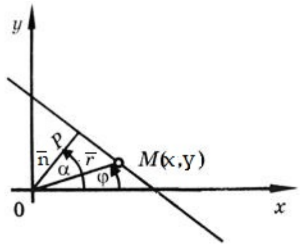
$$\Leftrightarrow \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\alpha, \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - P = 0$$

5.1.7 Полярное уравнение

Полярное уравнение в полярной системе координат задаётся через радиус-вектор $\overline{r}$, углом φ между радиус-вектором и осью Ox, проекцией P радиус-вектора на нормаль прямой и углом α между нормалью и осью Ox.

$$\begin{cases} x = \overline{r} \cdot \cos\varphi \\ y = \overline{r} \cdot \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \ \overline{r} = \frac{P}{cos(\varphi - \alpha)}$$



5.2 Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Если задано уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, то расстояние от точки $M(x, y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство

Пусть P – точка с координатами(x_0, y_0) и пусть исходная прямая имеет уравнение $ax+by+c = 0$. Пусть $Q = (x_1, y_1)$ — любая точка на прямой и $\overline{n}$ – вектор (a, b) с началом в точке Q. Вектор $\overline{n}$ перпендикулярен прямой, и расстояние d от точки P до прямой равно длине ортогональной проекции $\overline{QP}$ на $\overline{n}$. Длина этой проекции равна:

$$d = \frac{|\overline{QP} \cdot \overline{n}|}{|\overline{n}|}$$

Теперь $\overline{QP} = (x_0 - x_1,\ y_0 - y_1)$, так что $\overline{QP} \cdot \overline{n} = a \cdot (x_0 - x_1) + b \cdot (y_0 - y_1)$ и $|\overline{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда

$$d = \frac{|a \cdot (x_0 - x_1) + b \cdot (y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Поскольку Q лежит на заданной прямой, $ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow c = -ax_1 - by_1$, а тогда если раскрыть числитель нашей дроби и заменить $-ax_1 - by_1$ на c, то получится:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

5.3 Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые $L_1 = A_1x + B_1y + C_1$, $L_2 = A_2x + B_2y + C_2$; $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$; $L_1 \cap L_2 = M_0$; $M_1 \in L_1$, $M_2 \in L_2$

5.3.1 Параллельны или совпадают

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 || \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Совпадают, если $\frac{C_1}{C_2}$ равно описанному выше равенству.

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\overline{s}_1 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\overline{s}_2|}$$

5.3.2 Пересекаются

$$L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

5.3.3 Перпендикулярны (подслучай п.5.3.2)

$$L_1 : \ y = k_1 \cdot x + b_1$$

$$L_2 : \ y = k_2 \cdot x + b_2$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

6 Теорема об общем уравнении плоскости в пространстве. Различные способы задания плоскости в пространстве: общее уравнение плоскости, уравнение в отрезках, через точку и нормаль, нормальное уравнение плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости. Взаимное расположение плоскостей в пространстве

6.1 Уравнения плоскости в пространстве

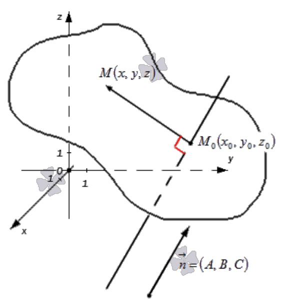
6.1.1 Общее уравнение

Общее уравнение плоскости : $Ax+By+Cz+D=0$ (A, B, C одновременно не равны нулю). Вектор с координатами $\overline{n}=(A,B,C)$ является *нормальным вектором* к плоскости.

• Пусть нам дана прямоугольная система координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве, уравнением плоскости в заданной системе координат будет такое уравнение с тремя неизвестными x, y, z, которому отвечали бы координаты всех точек этой плоскости и не отвечали бы координаты никаких прочих точек. Иначе говоря, подставив в уравнение плоскости координаты некоторой точки этой плоскости, получаем тождество. •

ТЕОРЕМА. Всякое уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$, где A, B, C и D – некоторые действительные числа, причем A, B и C одновременно не равны нулю, определяет плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве, и всякая плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве может быть задана уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$.

Доказательство



I. Первая часть теоремы гласит, что любую заданную плоскость возможно описать уравнением вида $Ax+By+Cz+D=0$. Допустим, задана некоторая плоскость и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, через которую эта плоскость проходит. Нормальным вектором этой плоскости является $\overline{n}=(A,B,C)$. Приведем доказательство, что указанную плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ задает уравнение $Ax+By+Cz+D=0$.

Возьмём произвольную точку заданной плоскости $V(x,y,z)$. В таком случае векторы $\overline{n}=(A,B,C)$ и $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ будут перпендикулярны друг другу, а значит их скалярное произведение равно нулю: $(\overline{n},\overline{M_0M})=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$.

Примем $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$, тогда получим наше исходное уравнение $Ax+By+Cz+D=0$, что и требовалось доказать.

II. Во второй части теоремы утверждается, что любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ (при A, B, $C \neq 0$) задает некоторую плоскость в прямоугольной системе координат $Oxyz$ трехмерного пространства. Докажем это.

В силу того, что A, B, $C \neq 0$, существует такая точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой отвечают уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть получим равенство $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Отнимем левую и правую части этого равенства от левой и правой частей уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$, которое эквивалентно исходному. Докажем, что оно задаёт плоскость.

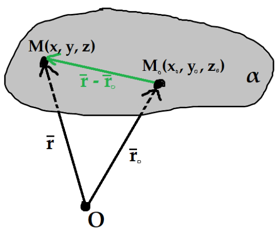
Данное уравнение представляем собой скалярное произведение векторов $\overline{n} = (A, B, C)$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ – следовательно, в силу равенства нулю, вектора перпендикулярны. Опираясь на утверждение, указанное перед теоремой, возможно утверждать, что при справедливом равенстве $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ множество точек $M(x, y, z)$ задаёт плоскость, у которой нормальный вектор $\overline{n} = (A, B, C)$. При этом плоскость проходит через точку M_0. Иначе говоря, уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ задаёт плоскость. Если примем $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$, то получим уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть уравнение исходное, что и требовалось доказать.

6.1.2 Уравнение в отрезках

Если плоскость пересекает оси Ox, Oy и Oz в точках с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ и $(0, 0,)$, то она может быть найдена, используя формулу уравнения плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ (a, b, c \neq 0)$$

6.1.3 Уравнение через точку и вектор нормали



Уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Пусть плоскости α принадлежат точки $M(x, y, z)$ и $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Вектор нормали $\overline{n} = (A, B, C)$.

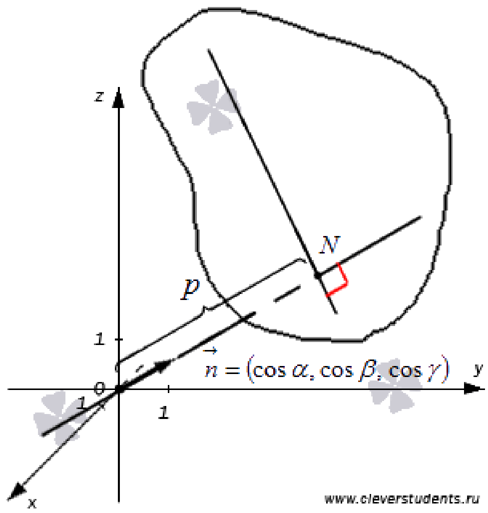
Допустим из точки O пространства проведены два радиуса вектора – $\overline{r}$ к точке M и $\overline{r}_0$ к точке M_0. Тогда вектор $\overline{r} - \overline{r}_0$ лежит в плоскости α и перпендикулярен вектору нормали $\overline{n}$. Его координаты $\overline{r} - \overline{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

$\overline{r} - \overline{r}_0 \perp \overline{n} \Leftrightarrow (\overline{r} - \overline{r}_0, \overline{n}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Получили уравнение плоскости через точку и вектор нормали.

6.1.4 Нормальное уравнение



Всё только в символах, без слов.

$$\overline{n}_0 = \frac{\overline{n}}{|\overline{n}|} \perp \alpha,\ \overline{n}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),\ M(x, y, z) \in \alpha$$

$$d(O, \alpha) = P,\ P = proection_{\overline{n}_0}\overline{r} \Leftrightarrow (\overline{r}, \overline{n}_0) = P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - P = 0$$

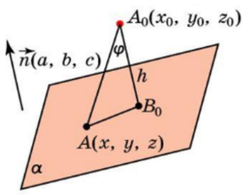
Если обе части уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить на $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot z + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ \cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\ -P = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - P = 0$$

6.2 Расстояние от точки до плоскости



Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость. Выведем формулу для нахождения расстояния от точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пусть $A(x, y, z) \in \alpha$, тогда $\overline{n} = (A, B, C)$ – вектор нормали данной плоскости.

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n} \cdot \overline{AA_0}}{|\overline{n}| \cdot |\overline{AA_0}|} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot |\overline{AA_0}|}$$

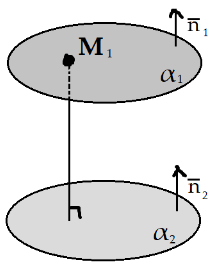
Учитывая, что $D = -Ax - By - Cz$ и то, что искомое расстояние равно $|\overline{AA_0}| \cdot \cos\varphi$, получаем

$$d(A_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6.3 Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Две плоскости $\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

6.3.1 Плоскости параллельны или совпадают

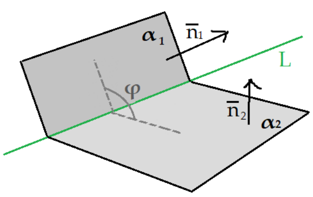


$$\alpha_1 || \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n}_1 || \overline{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \; d(\alpha_1, \alpha_2) = d(M_1, \alpha_2)$$

Чтобы плоскости совпадали:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

6.3.2 Плоскости пересекаются



$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = L,\, \varphi = \angle(\alpha_1, \alpha_2) = \angle(\overline{n}_1, \overline{n}_2)$$

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 \Leftrightarrow \left(\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}\right) \vee \left(\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}\right) \vee \left(\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2}\right)$$

Угол между плоскостями

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$$

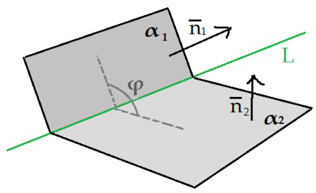
7 Я ЗАДОЛБАЛАСЬ

8 Два способа задания прямой в пространстве (переход от одного способа задания к другому). Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве, вычисление расстояния между прямыми. Задача о поиске общего перпендикуляра скрещивающихся прямых. Задача о поиске точки симметричной относительно заданной прямой (плоскости), уравнение плоскости через определитель.

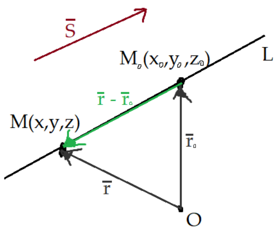
8.1 Два способа задания прямой в пространстве

8.1.1 Пересечение плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ : \ \alpha_1, \, \overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ : \ \alpha_2, \, \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases} \Leftrightarrow L = \alpha_1 \cap \alpha_2$$



8.1.2 Каноническое и параметрическое уравнения



$M_0 \in L$, $\overline{s} \,||\, L$, $\overline{s} = (l, m, n)$

$(\overline{r} - \overline{r}_0) \,||\, \overline{s} \Leftrightarrow \overline{r} - \overline{r}_0 = t \cdot \overline{s}$

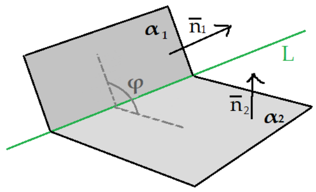
Если подставить все координаты, то получим формулу в **параметрическом виде**:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \\ z = z_0 + t \cdot n \end{cases}$$

Выразив t, получим в **каноническом виде**:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$$

8.1.3 Переход от первого способа ко второму



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ : \ \alpha_1, \, \overline{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \ : \ \alpha_2, \, \overline{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}$$

$$\overline{s} \perp \overline{n}_1, \, \overline{s} \perp \overline{n}_2 \Rightarrow \overline{s} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2$$

Ищем точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$, принадлежащую так же данным двум плоскостям.

1. Предположим, что координаты $M_0(0, y_0, z_0)$. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \\ B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 \end{cases}$$

   Если есть решения, то точка M_0 нам подходит, можем составить каноническое и параметрическое уравнения.

   Если решений нет, то прямая $L \,||Oyz$, смотрим $M_0(x_0, 0, z_0)$

2. аналогично, если подставив координаты точки $M_0(x_0, 0, z_0)$ в исходную систему и если решения есть, то точка подходит; если решений нет, то $L \,||Oxz$, смотрим точку $M_0(x_0, y_0, 0)$

3. Если точки $M_0(0, y_0, z_0)$ и $M_0(x_0, 0, z_0)$ не подошли, то точка $M_0(x_0, y_0, 0)$ обязана подойти.

8.1.4 Переход от второго способа к первому

Преобразуем данную систему, это изи.

$$\begin{cases} (x - x_0) \cdot m = (y - y_0) \cdot l \ : \ \alpha_1 \\ (x - x_0) \cdot n = (z - z_0) \cdot l \ : \ \alpha_2 \end{cases}$$

8.2 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Плоскость $\alpha\ :\ Ax + By + Cz + D = 0$, прямая $L\ :\ \overline{s} = (l, m, n),\ M_0(x_0, y_0, z_0)$

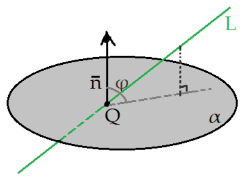
8.2.1 Прямая параллельна плоскости

$$L\,||\alpha \ \Leftrightarrow\ \overline{n} \perp \overline{n}\ \Leftrightarrow\ (\overline{s}, \overline{n}) = 0\ \Leftrightarrow\ Al + Bm + Cn = 0$$

Если прямая принадлежит плоскости:

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}$$

8.2.2 Прямая пересекает плоскость



$$L \cap \alpha = Q\ \Leftrightarrow\ \overline{n} \not\perp \overline{s}\ \Leftrightarrow\ Al + Bm + Cn \neq 0$$

$$\angle(L, \alpha) = \varphi = 90^\circ - \angle(L, \overline{n})$$

$$\sin\varphi = \cos(\angle(\overline{n}, \overline{s})) = \frac{(\overline{n}, \overline{s})}{|\overline{n}| \cdot |\overline{s}|}$$

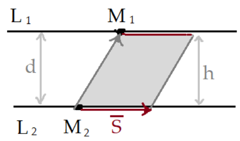
8.3 Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые $L_1\ :\ \overline{s}_1 = (l_1, m_1, n_1),\ M_1(x_1, y_1, z_1),\ \ L_2\ :\ \overline{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)\ M_2(x_2, y_2, z_2)$

8.3.1 Прямые параллельны или совпадают

$$L_1\,||L_2\ \Leftrightarrow\ \overline{s}_1\,||\overline{s}_2\ \Leftrightarrow\ \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

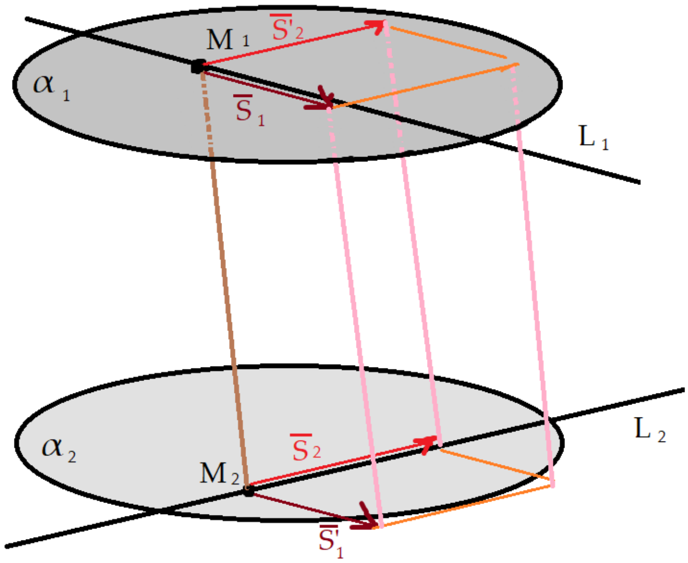
$$d = dist(L_1, L_2)$$



$$d = h = \frac{|\overline{s} \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\overline{s}|}$$

Если прямые совпадают, то $dist(L_1, L_2) = 0$

8.3.2 Прямые пересекаются или скрещиваются

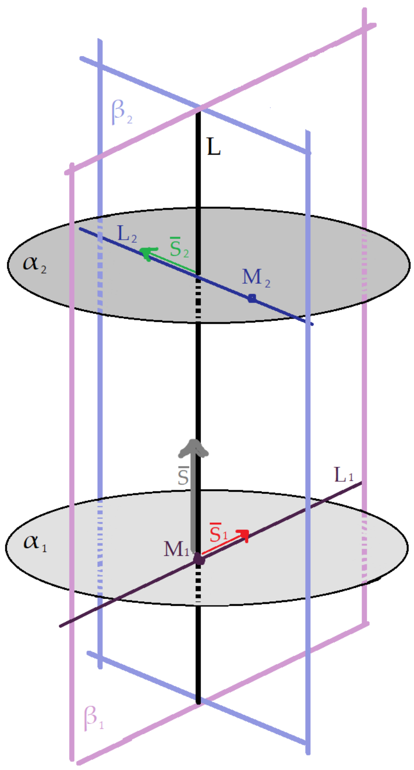


L_1 и L_2 скрещиваются, т.е. $\overline{s}_1 \nparallel \overline{s}_2$. Расстояние между прямыми равно высоте параллелепипеда на векторах $\overline{s}_1, \overline{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$.

$$d(L_1, L_2) = h = \frac{V}{S_{\overline{s}_1, \overline{s}_2}} = \frac{|\overline{s_1} \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\overline{s}_1 \times \overline{s}_2|}$$

Если L_1 и L_2 пересекаются, то $d(L_1, L_2) = 0 \Leftrightarrow \overline{s_1} \cdot \overline{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0 \Leftrightarrow \overline{s}_1, \overline{s}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ – компланарны.

8.3.3 Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых



Допустим даны две прямые L_1 и L_2, их точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Нужно составить уравнение прямой L – общего перпендикуляра скрещивающихся прямых L_1 и L_2.

1. Находим координаты векторов $\overline{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\overline{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ – направляющих векторов прямых L_1 и L_2.

2. Находим координаты (A_1, B_1, C_1) вектора нормали $\overline{n}$ плоскости α_1, проходящей через прямую L_1 параллельно прямой L_2, из равенства $\overline{n} = \overline{s}_1 \times \overline{s}_2$. Этот вектор будет являться направляющим вектором $\overline{s}$ для искомой прямой L.

3. Проведём плоскость β_1, в которой лежат прямые L и L_1. Её вектор нормали $\overline{n}_1 = \overline{s} \times \overline{s}_1$.

4. Зная координаты точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, принадлежащей прямой L_1 и, следовательно, плоскости β_1, и вектор нормали $\overline{n}_1$, можем составить уравнение плоскости β_1.

5. Повторив шаги (2) – (4), можно составить уравнение плоскости β_2, проходящей через прямые L и L_2.

Прямая L является пересечением плоскостей β_1 и β_2 – система уравнений данных плоскостей будет являться уравнением искомой прямой L.

8.4 Задачи о симметричной точке

8.4.1 Симметрия относительно прямой

ЗАДАЧА. Найти координаты точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, симметричной точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно прямой $L\ :\ \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

РЕШЕНИЕ

1. Находим уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Так как плоскость перпендикулярна заданной прямой, то в качестве ее вектора нормали можно взять направляющий вектор прямой, т.е. $\overline{n} = \overline{s} = (l, m, n)$ Поэтому уравнение плоскости будет иметь вид $\alpha\ :\ l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$.
2. Находим точку $M_3(x_3, y_3, z_3)$ пересечения прямой L и плоскости α.
3. Точка $M_3(x_3, y_3, z_3)$ является серединой отрезка M_1M_2, где точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ является искомой точкой (duh), поэтому
$$\begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ y_2 = 2y_3 - y_1 \\ z_2 = 2z_3 - z_1 \end{cases}$$

8.4.2 Симметрия относительно плоскости

ЗАДАЧА. Найти координаты точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, симметричной точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ относительно плоскости $\alpha\ :\ Ax+By+Cz+D=0$.

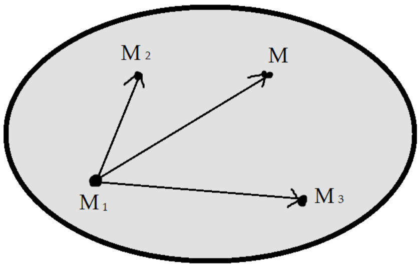
РЕШЕНИЕ

1. Находим уравнение прямой, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Так как прямая перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве ее направляющего вектора можно взять вектор нормали плоскости, т.е. $\overline{s} = \overline{n} = (A, B, C)$. Поэтому уравнение прямой будет: $L\ :\ \dfrac{x-x_1}{A}=\dfrac{y-y_1}{B}=\dfrac{z-z_1}{C}$.
2. Находим точку $M_3(x_3, y_3, z_3)$ пересечения прямой L и плоскости α.
3. Точка $M_3(x_3, y_3, z_3)$ является серединой отрезка M_1M_2, где точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ является искомой точкой (duh), поэтому
$$\begin{cases} x_2 = 2x_3 - x_1 \\ y_2 = 2y_3 - y_1 \\ z_2 = 2z_3 - z_1 \end{cases}$$

8.5 Уравнение плоскости через определитель

Уравнение плоскости можно задать с помощью трёх заданных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Очевидно, что множество точек $M(x, y, z)$ определяет в прямоугольной системе координат $Oxyz$ в трехмерном пространстве плоскость, проходящую через три различные и не лежащие на одной прямой точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ тогда и только тогда, когда три вектора $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ компланарны.

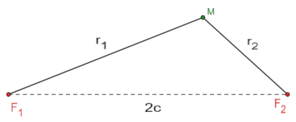


Следовательно, должно выполняться условие компланарности трех векторов $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ – то есть, их смешанное произведение должно равняться нулю.

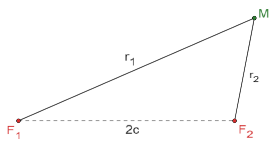
$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = \begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} = 0$$

9 Всё про алгебраические кривые второго порядка на плоскости (эллипс, гипербола, парабола).

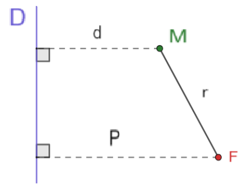
9.1 Табличка

<table>
<tr><th></th><th>Эллипс</th><th>Гипербола</th><th>Парабола</th></tr>
<tr><td>I определение</td>
<td>

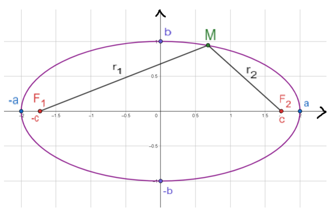
$$r_1 + r_2 = 2a > 2c$$

F_1 и F_2 – фокусы, r_1 и r_2 – фокальные радиусы.</td>
<td>

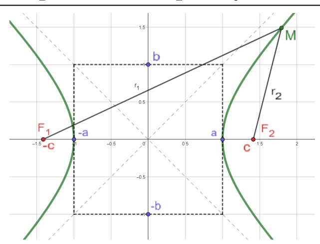
$$|r_2 - r_1| = 2a < 2c$$

F_1 и F_2 – фокусы, r_1 и r_2 – фокальные радиусы.</td>
<td>

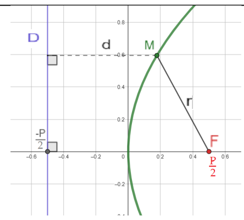
$$r = d$$

F – фокус, r – фокальный радиус.</td></tr>
<tr><td>Каноническое уравнение</td>
<td>

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = a^2 - c^2$$

a и b – большая и малая полуоси.</td>
<td>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ b^2 = c^2 - a^2$$

a и b – действительная и мнимая полуоси. Асимптоты $y = \pm\frac{b}{a} \cdot x$, вершины a и $-a$.</td>
<td>

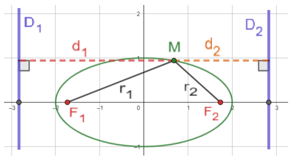
$$y^2 = 2Px$$</td></tr>
<tr><td>Эксцентриситет</td>
<td>$$\xi = \frac{c}{a} < 1$$

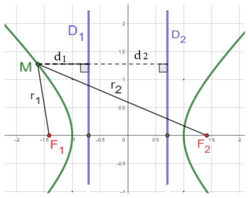
если $\xi = 1$ – окружность</td>
<td>$$\xi = \frac{c}{a} > 1$$</td>
<td>$$\xi = 1$$</td></tr>
<tr><td>Фокальные радиусы</td>
<td>$$r_{1,2} = a \pm \xi \cdot x$$</td>
<td>Левая ветвь:

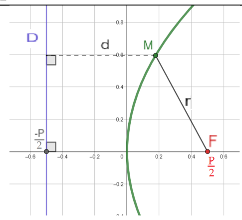
$$r_{1,2} = -\xi \cdot x \mp a$$

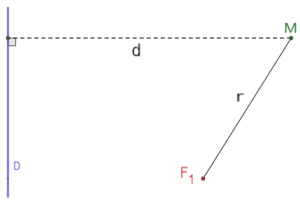
правая ветвь:

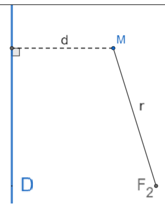
$$r_{1,2} = -\xi \cdot x \pm a$$</td>
<td>$$r = x + \frac{P}{2}$$</td></tr>
</table>

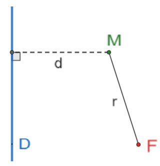
<table>
<tr><td></td><td>Эллипс</td><td>Гипербола</td><td>Парабола</td></tr>
<tr><td>Директрисы</td>
<td>

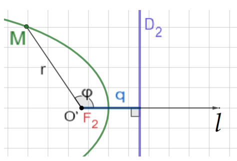
$$D_{1,2}\ :\ x = \mp\frac{a}{\xi}$$
$$\frac{r}{d} = \xi = \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$$</td>
<td>

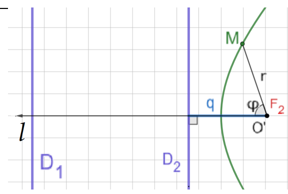
$$D_{1,2}\ :\ x = \mp\frac{a}{\xi}$$
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \frac{r}{d} = \xi$$</td>
<td>

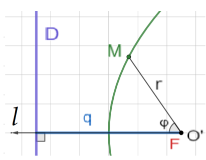
$$D\ :\ x = -\frac{P}{2}$$
$$\frac{r}{d} = \xi = 1$$</td></tr>
<tr><td>II определение</td>
<td>

ГМТ такое, что отношение расстояний от любой из точек до фиксированной точки F и до фиксированной прямой D было меньше 1.
$$\frac{r}{d} < 1$$</td>
<td>

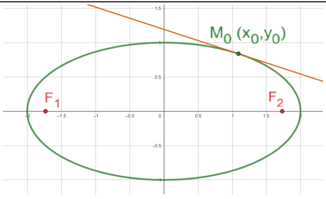
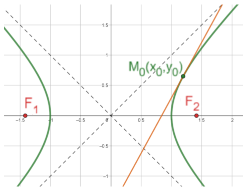
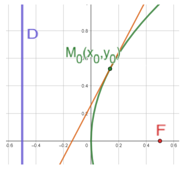
ГМТ такое, что отношение расстояний от любой из точек до фиксированной точки F и до фиксированной прямой D было больше 1.
$$\frac{r}{d} > 1$$</td>
<td>

ГМТ такое, что расстояние от любой из точек до фиксированной прямой D было равно расстоянию от любой точки до фиксированной точки F.
$$\frac{r}{d} = 1$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Полярные уравнения</td>
<td colspan="3">а) Начало координат выбирается в фокусе, а полярная ось
в направлении соответствующей директрисы. $P = \xi \cdot q$ – фокальный параметр.</td></tr>
<tr><td>

$$r = \frac{P}{1 + \xi\cos\varphi}$$
$$P = \frac{b^2}{a} = \xi \cdot (\frac{a}{\xi} - c) = \xi \cdot q$$</td>
<td>

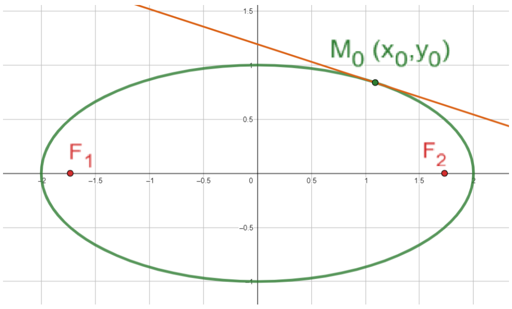
$$r = \frac{\pm P}{1 \pm \xi\cos\varphi}$$
$$P = \frac{b^2}{a} = \xi \cdot (c - \frac{a}{\xi}) = \xi \cdot q$$</td>
<td>

$$r = \frac{P}{1 + \cos\varphi}$$
$$P = q$$</td></tr>
</table>

	Эллипс	Гипербола	Парабола
	б) Начало координат выбирается в фокусе, а полярная ось в направлении противоположно директрисе. $P = \xi \cdot q$ – фокальный параметр. **Чё делаем?** Да тупо у тех уравнений выше знак меняем в знаменателе на противоположный.		
Уравнение касательной	 $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	 $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	 $yy_0 = P(x + x_0)$

9.2 Уравнение касательной

9.2.1 Уравнение касательной к эллипсу



Будем рассматривать для верхней полуплоскости, то есть $x \in (-a; a)$, $y > 0$. Уравнение эллипса в таком случае:

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Уравнение производной в точке $M_0(x_0, y_0)$ (принадлежащей эллипсу):

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Найдём производную.

$$y' = b \cdot \frac{-\dfrac{2x}{a^2}}{2 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{-bx}{a^2 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}}$$

$$y'(x_0) = \frac{-bx_0}{a^2 \cdot \sqrt{1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}}} = \frac{-bx_0}{a^2 \cdot \dfrac{y_0}{b}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Т.к. точка M_0 лежит на эллипсе, то уравнение эллипса подходит и для неё, т.е. $y_0 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$. Подставим всю дичь в уравнение касательной.

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow a^2 y_0 (y - y_0) = -b^2 x_0 (x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2 \Leftrightarrow b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 \mid : (a^2 b^2) \Leftrightarrow$$

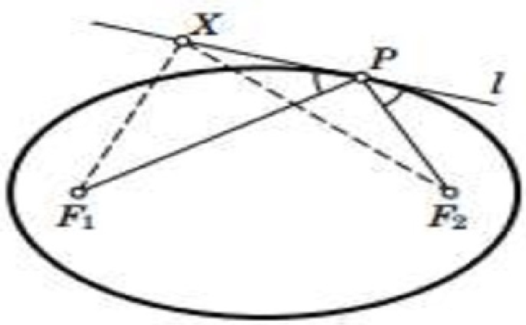
$$\Leftrightarrow \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

Т.к. точка M_0 лежит на эллипсе, то $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, то есть

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

9.3 Оптические свойства

9.3.1 Оптические свойства эллипса



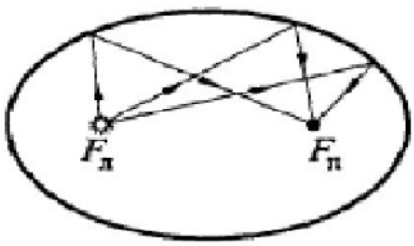
Пусть прямая l касается эллипса в точке P, тогда прямая l будет являться внешней биссектрисой угла F_1PF_2.

Доказательство Пусть X – произвольная точка на прямой l, отличная от P. Так как X лежит вне эллипса, то

$$XF_1 + XF_2 > PF_1 + PF_2,$$

т.е. из всех точек прямой l точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. *Но какого-то хуя в силу выше сказанного чего-то там бля я не поняла чего, углы бля равны, че бля*

Физическая интерпретация. Если поместить в один из фокусов эллипса с зеркальной "поверхностью"точечный источник света, то все лучи после отражения от этой "поверхности"сойдутся в другом его фокусе.



10 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

. Если A, B и C одновременно не нули – прямая невырожденная (эллипс, гипербола, парабола), иначе – вырожденная (пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, прямая, точка, пустое множество.)

1. $B \neq 0$ – делаем поворот.

   $$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

   Подставляем в уравнение, приравниваем коэффициент при $x'y'$ нулю (то есть коэффициент B'), находим косинус и синус угла α, подставляем в уравнение, счастливо живем

2. $B = 0$

   (a) Если A и C не нули одновременно, то выделяем квадраты и анализируем по свободному члену че получается (че)

   (b) Если $A \neq 0, C = 0$, то выделяем квадрат для x и анализируем по свободному члену че получается (че)

   (c) Если $A = 0$, $C \neq 0$, то выделяем квадрат для y и анализируем по свободному члену че получается (че)

11 Алгебраические поверхности второго порядка. Определение геометрической формы поверхности второго порядка по ее уравнению (метод сечений). Цилиндрические поверхности.

11.1 Основные понятия

Алгебраические ПВП – ГМТ, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второго порядка.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$$

ПВП	
Невырожденные	Вырожденные
эллипсоид; гиперболоид: а) однополостный; б) двуполостный; параболоид: а) эллиптический; б) гиперболический; конус	точка; прямая; пара $\|\|$ прямых; пара $\cap$ прямых; эллиптический цилиндр; гиперболический цилиндр; параболический цилиндр; $\varnothing$; плоскость

11.2 Метод сечений

Я пипец какой ленивый

① Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a, b, c > 0$$

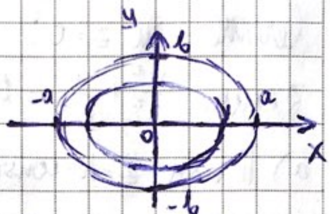
$|x| \le a, \ |y| \le b, \ |z| \le c$

а) сечения $\parallel Oxy$

$z = h = const$

$z \in [-c; c]$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1$$



С ростом h эллипсы уменьшаются

б) $\parallel Oxz$ и $\parallel Oyz$

$y = h = const$

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1$$

$x = h = const$

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)}=1$$

Аналогично, но другие параметры эллипсов

2

Гиперболоид

Однополостный

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

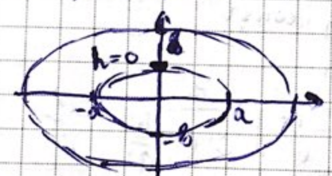
Сечение при $z=0$:

эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

а) $\parallel Oxy$, $z=h=const$

$$\frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}_{\alpha}}+\frac{y^2}{\underbrace{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}_{\beta}}=1$$

$|h|\uparrow$, α и $\beta\uparrow$



Если $a=b$ – гиперб. вращ-я

Двуполостный

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

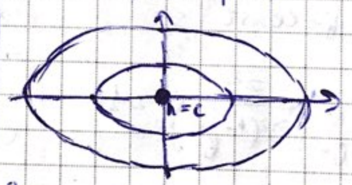
Сечение при $z=0$: $\varnothing$

При $z\in(-c;c)$ нет поверх-ти

а) $\parallel Oxy$, $z=h=const$

$$\frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}_{\alpha}}+\frac{y^2}{\underbrace{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}_{\beta}}=1$$

$|h|\uparrow$, α и $\beta\uparrow$



Если $a=b$ – гиперб. вращ-я

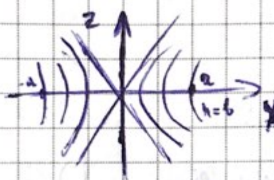
Продолжение однополостного

б) $\parallel Oxz$

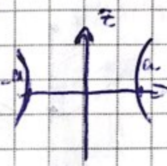
$$y = h = const \quad \underbrace{\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}}_{\beta} = 1$$

гипербола

$|h|\uparrow,\ h\in(-b;b) \Rightarrow \alpha \text{ и } \beta \downarrow$

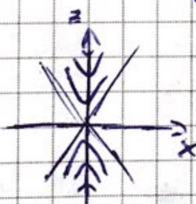


$|h| = b$

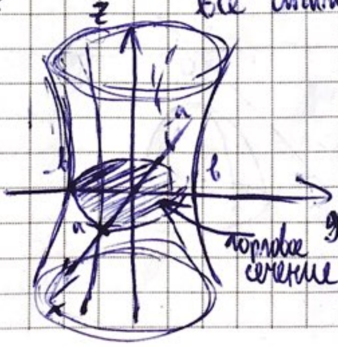


$|h|\uparrow,\ |h|>b, \Rightarrow \alpha \text{ и } \beta \downarrow$

Запишем по-другому: $\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2}-1\right)} = -1$



в) при $\parallel Oyz$
всё аналогично б)



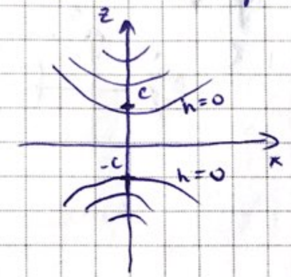
Продолжение двуполостного

б) || ~~xO~~ Oxz

$y = h = const$ $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2} \Big| \cdot (-1)$

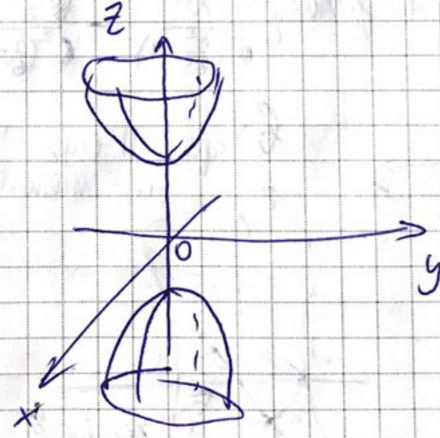
$$\frac{z^2}{\underbrace{c^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}_{\alpha}} - \frac{x^2}{\underbrace{a^2\left(1+\frac{h^2}{b^2}\right)}_{\beta}} = 1$$

$|h| \uparrow$, α и $\beta \uparrow$



в) || Oyz

Аналогично б)



③ Параболоид

эллиптический

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

$z \geq 0$

а) сечение $\parallel Oxy$

$z = h = const$

$$\underbrace{\frac{x^2}{2a^2h}}_{\alpha}+\underbrace{\frac{y^2}{2b^2h}}_{\beta}=1$$ — эллипс

$|h|\uparrow$, α и β $\uparrow$

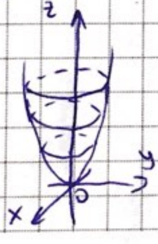
$a=b$ — параболоид вращения

б) $\parallel Oyz$, $x=h=const$

$2z=\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}$ — парабола, ветви $\uparrow$

в) $\parallel Oxz$

аналогично б)



гиперболический

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

а) сечение $\parallel Oxy$

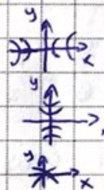
$z = h = const$

$$\frac{x^2}{2a^2h}-\frac{y^2}{2b^2h}=1$$ — гипербола

$h>0$:

$h<0$:

$h=0$:

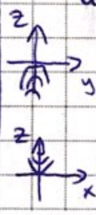


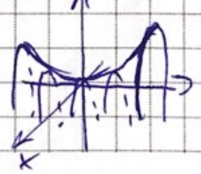
б) $\parallel Oyz$, $x=h=const$

$2z=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{a^2}$ — парабола, ветви $\downarrow$

в) $\parallel Oxz$, $y=h=const$

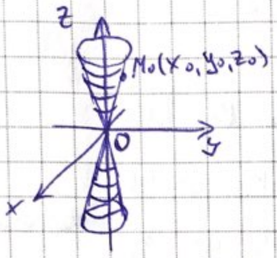
$2z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{h^2}{b^2}$ — парабола, ветви $\uparrow$





④ Конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$



$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in$ конусу

$\overline{OM_0} = \overline{s} = (x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{cases} x = x_0 t + 0 \\ y = y_0 t + 0 \\ z = z_0 t + 0 \end{cases} \to \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

1) $z = h = const$, сечение $\parallel Oxy$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$ ← эллипс

2) $y = h = const$, сечение $\parallel Oxz$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$$ ← гипербола, аналогично 3) $x = h = const$, $\parallel Oyz$

4) $\parallel$ касательной конуса: парабола
или образующей

11.3 Цилиндры

НУ цилиндры это ух как легко, есть там всякие эллиптические (ну как в детстве рисовали), гиперболические (как два бесконечно уходящих в ширину столбика), параболические (один бесконечно уходящий в ширину столбик) и пара пересекающихся плоскостей

еще есть пара параллельных прямых (плоскостей), прямая (плоскость), точка (прямая)

Короч, на плоскости – какая-то кривая второго порядка, а в пространстве выходит столбик (ну функция $F(x, y) = 0$, где $z = 0$)