ТеорВер, 3 семестр, теормин

Ирина Ткаченко (:

22 января 2020 г.

Содержание

1 Аксиомы Колмогорова, аксиомы непрерывности, их связь

1.1 Аксиомы Колмогорова

(Ω, Σ) – измеримое пространство. Введём функцию $P : \Sigma \to [0, 1]$ такую, что

1. ***Аксиома I*** *(существование вероятности событий)*: $\forall A \in \Sigma : P(A) \geq 0$
2. ***Аксиома II*** *(нормировка вероятности)*: $P(\Omega) = 1$
3. ***Аксиома III*** *(аддитивность вероятности)*: пусть A – счетный набор попарно дизъюнктных подмножеств, тогда $P(\sum A) = \sum P(A)$

P – вероятностная мера, тройка (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство.

1.2 Аксиомы непрерывности для системы множеств

1.2.1 Первая аксиома

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство. Выделено событие $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ – невозрастающая последовательность событий. $B_i \in \Sigma$, $\forall\, i = 1, \ldots, +\infty$

$$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n,\ \ B \in \Sigma$$

$$P(B) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$

1.2.2 Вторая аксиома

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство. Выделено событие $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ – неубывающая последовательность событий. $A_i \in \Sigma$, $\forall\, i = 1, \ldots, +\infty$

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,\ \ A \in \Sigma$$

$$P(A) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

1.2.3 Связь аксиом непрерывности

Аксиомы непрерывности эквивалентны.

1.3 Связь аксиом Колмогорова и аксиом непрерывности

Аксиома счетной аддитивности (3-я аксиома Колмогорова) эквивалентна аксиоме конечной аддитивности плюс 1 аксиома непрерывности.

2 Свойства вероятностной меры

1. $p(\varnothing) = 0$

2. *Аксиомы конечной аддитивности* Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$, $A_i \cap A_j = \varnothing \, \forall i \neq j$ имеет место равенство:

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. Для любого события A выполнено: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. Если $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

5. Для любого события A выполнено $0 \leq P(A) \leq 1$

6. Всегда $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

3 Дискретные схемы: классическая схема, геометрическая схема, схема Бернулли, схема Пуассона. Определение, моменты

чет я уже устала(

3.1 Дискретные схемы

Дискретная схема – частный случай общей. Ω – не более чем счётно, Σ – σ-алгебра всех подмножеств Ω.

1. Для события A верно:
$$\sum_{\omega\in A} p(\omega) \geq 0$$
2. Верно:
$$p(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$$
3. Если $A_1, \ldots, A_n$ – дизъюнктный набор подмножеств, то что-то непонятное

3.1.1 Классическая схема

Пусть $|\Omega| = n$ и $\omega_1, \ldots, \omega_n$ – равновозможные, т.е. $p(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$, $p(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.

$p(\Omega) = 1$ – всё верно.

3.1.2 Геометрическая схема

Параметр схемы $p \in (0;\, 1)$. Пусть A – событие, $p = p(A) \in (0;\, 1)$ и A – результат опыта с двумя исходами. Проводятся независимые испытания до первого появления A. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, где $\omega_k = \overline{AA\ldots}A$, то есть A выпало на k-ом ходе. $p(\omega_k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$. Тогда $\sum p(\omega_k) = 1$, как и должно быть.

3.1.3 Схема Пуассона

Параметр схемы $\lambda > 0$. $\Omega = \{\omega_0, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Вероятностная мера (или вероятность?) $p(\omega_n) = \dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$. Есть положительная определённость
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

3.1.4 Схема Бернулли повторения опыта

Параметр схемы $n \geq 0$, $p \in [0;\, 1]$. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, $p(\omega) = p^{k(\omega)}q^{n-k(\omega)}$, где $k(\omega)$ – число успехов в серии из n испытаний. $\omega_n = B_{n,p}(m) = \sum \omega$ – ровно m успехов. $|B_{n,p}(m)| = C_n^m$, $p(\omega_m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.
$$\sum p(\omega_m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$$

3.2 Случайные величины, основные определения

Случайной называют **величину**, которая в результате испытания примет одно и только одно числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Формальное математическое определение следующее: пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство, тогда случайной величиной называется функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая относительно Σ и борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}$. Другими словами, функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если для любых вещественных чисел a и b множество событий ω, таких что $X(\omega) \in (a, b)$, принадлежит Σ.

Математическое ожидание EX – мера среднего значения случайной величины, равная $EX = \sum X(\omega) \cdot p(\omega)$.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания $DX = E[[X - EX]^2]$ или $DX = E[X^2] - (EX)^2$.

Среднее квадратичное отклонение равняется корню из дисперсии.

Ковариация двух случайных величин равняется

$$cov(X, Y) = \frac{D[X+Y] - DX - DY}{2} = E[XY] - EX \cdot EY$$

3.3 Определение моментов

Дана случайная величина X, определённая на некотором вероятностном пространстве.

1. k-м **начальным** моментом случайной величины X при $k \in \mathbb{N}$ называется величина $\nu_k = E[X^k]$, если математическое ожидание $E[*]$ определено.
2. k-м **центральным** моментом сл. в. X называется величина $\mu_k = E[(X - EX)^k]$
3. k-м **абсолютным** моментом сл. в. X называется величина $\nu_k = E[|X|^k]$
4. k-м **центральным абсолютным** моментом случайной величины X называется величина $\mu_k = E[|X - EX|^k]$
5. ***НЕ НАДО*** k-м **факториальным** моментом X называется величина $\mu_k = E[X(X - 1) \ldots (X - k + 1)]$

4 Функции распределения, плотности, моменты нормального, показательного, равномерного распределений

4.1 Функция распределения

4.1.1 Определение

Функция распределения — функция, характеризующая распределение случайной величины или случайного вектора; вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее или равное x.

$$F(t) = F_X(t) = P_X(X < t) = P_x((-\infty, t))$$

4.1.2 Свойства

1. $F_X(t)$ не убывает.
2. $\exists \lim\limits_{t\to\infty} F_X(t) = 1$ и $\exists \lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$
3. $F_X(t)$ непрерывна слева.

4.2 Плотность распределения

4.2.1 Определения

$P_X = P_X(dx)$ **абсолютно непрерывна**, если $\exists\, f_X(x) \geq 0\, \forall\, A \in \Sigma\, :\, P_X(A) = \int\limits_A f_X(x)dx$.

Плотность распределения вероятностей представляет собой производную функцию распределения: $f_X(x) = F'_X(x)$. $f_X(x)$ – вероятность попадания случайной величины X в отрезок $[x,\, x + \Delta x]$.

4.2.2 Свойства

Плотность распределения вероятностей:

1. неотрицательна;
2. интегрируема;
3. нормирована: $\int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

4.3 Виды распределений и их моменты

4.3.1 Нормальное распределение

$X \sim N(a,\, \sigma^2)$, $a \in \mathbb{R}$ – параметр, $\sigma \in \mathbb{R}$ – стандартное отклонение.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с параметром $a = 0$ и стандартным отклонением $\sigma = 1$.

Математическое ожидание $EX = a$, **дисперсия** $DX = \sigma^2$.

Моменты.

Первый начальный момент $EX = a$, **второй начальный момент** $E[X^2] = a^2 + \sigma^2$.

Если X имеет нормальное распределение, то для неё существуют (конечные) моменты при всех p с действительной частью больше -1. Для неотрицательных целых p, центральные моменты таковы:

$$E[X^p] = \begin{cases} 0 & p = 2n+1, \\ \sigma^p (p-1)!! & p = 2n. \end{cases}$$

Центральные абсолютные моменты для неотрицательных целых p таковы:

$$E[|X - EX|^p] = \sigma^p (p-1)!! \cdot \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & p = 2n+1, \\ 1 & p = 2n. \end{cases}$$

4.3.2 Показательное

Exp_λ, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Обладает Марковским свойством (при известном настоящем – будущее не зависит от прошлого).

Математическое ожидание $EX = \dfrac{1}{\lambda}$, **дисперсия** $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$, **моменты** $E[X^n] = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.

4.3.3 Равномерное

$X \sim U(a,\, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & x \in [a;\, b),\ b > a, \\ 0 & x \notin [a;\, b) \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \leq b, \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

Математическое ожидание $EX = \dfrac{a+b}{2}$**, дисперсия** $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$**, моменты:**

$$E[X^n] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}$$

5 Независимость событий и случайных величин. Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и непрерывных случайных величин

5.1 Определения

События называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ называют независимыми (в совокупности), если для любого набора борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ имеет место равенство:

$$P((X_1 \in B_1) \cap \ldots \cap (X_n \in B_n)) = P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n)$$

5.2 Условия независимости

5.2.1 Дискретный случай

Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда имеет место $P_{ij} = P_{xi} \cdot P_{yj}$, где P_{ij} – вероятность случайного вектора (X, Y), то есть $P_{ij} = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega : Y(\omega) = y_j\})$.

5.2.2 Просто так

Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимы, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющи, то есть $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

5.2.3 Непрерывный случай

Для того, чтобы случайные величины X и Y Были независимы, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (X, Y) была равна произведению плотностей распределения составляющих, то есть $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

6 Свойство отсутствия последействия и показательное распределение

6.1 Определение отсутствия последействия

Случайная величина обладает свойством отсутствия последствия (*Марковское*), если:

1. $P(x \geq 0) = 1$
2. $P(X > x) > 0 \, \forall \, x > 0$
3. $P(X > x + y \,|\, X \geq y) = P(X > x) \, \forall \, x, y > 0$

Свойством отсутствия последствия обладает только показательное распределение.

6.2 Показательное распределение

Exp_λ, $\lambda > 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

7 Понятие условной вероятности, условное распределение

7.1 Условная вероятность

7.1.1 Определение

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, P). **Условной вероятностью** события A при условии, что произошло событие B, называется число $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, где A и $B \subset \Omega$.

7.1.2 Формула Байеса

Формула Байеса вытекает из определения условной вероятности. Вероятность совместного события AB выражается через условные вероятности: $P(AB) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$. Следовательно,

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

7.1.3 Случай с несовместными гипотезами

Вероятность события B выражается (если A – подмножество объединений гипотез H_i) как

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$$

Формула Байеса

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)}$$

7.2 Условное распределение

7.2.1 Определение

Условное распределение – распределение случайной величины при условии, что другая случайная величина принимает определённое значение.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, Σ, P).

7.2.2 Дискретные случайные величины

Пусть X и Y – случайные величины, такие что случайный вектор $(X, Y)^T$ имеет дискретное распределение, задаваемое функцией вероятности $p_{X,Y}(x, y)$. Пусть $y_0 \in \mathbb{R}$ такой, что $P(Y = y_0) > 0$, тогда функция

$$p_{X \mid Y}(x \mid y_0) = P(X = x \mid Y = y_0) = \frac{p_{X,Y}(x, y_0)}{p_Y(y_0)}$$

где p_y – функция вероятности случайно величины Y, называется **условной функцией вероятности** случайно величины X при условии, что $Y = y_0$. Распределение, задаваемое такой функцией, называется **условным распределением**.

7.2.3 Абсолютно непрерывные случайные величины

Пусть X и Y – случайные величины, такие что случайный вектор $(X,Y)^T$ имеет абсолютно непрерывное распределение, задаваемое плотностью вероятности $f_{X,Y}(x,y)$. Пусть $y_0 \in \mathbb{R}$ такой, что $f_Y(y_0) > 0$, где f_Y – плотность случайной величины Y. Тогда функция

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y_0) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$$

называется **условной плотностью** вероятности случайной величины X при условии, что $Y = y_0$. Распределение, задаваемое такой плотностью, называется **условным распределением**.

8 Функция регрессии. Геометрический смысл

8.1 Определение

8.1.1 Первое

Регрессия — зависимость математического ожидания (например, среднего значения) случайной величины от одной или нескольких других случайных величин (свободных переменных), то есть $E[y \mid x] = f(x)$.

НЕ НАДО **Регрессионным анализом** называется поиск такой функции f, которая описывает эту зависимость. Регрессия может быть представлена в виде суммы неслучайной и случайной составляющих: $y = f(x) = \nu_1$, где f – функция регрессионной зависимости, а ν – аддтивная случайная величина с нулевым матожиданием.

В отличие от чисто функциональной зависимости $y = f(x)$, когда каждому значению независимой переменной x соответствует одно определённое значение величины y, при регрессионной связи одному и тому же значению x могут соответствовать в зависимости от случая различные значения величины y.

8.1.2 Второе (вроде более каноничное)

$\exists\, (\Omega, \Sigma, P)$ – дискретное вероятностное пространство, $X = X(\omega)$, $Y = Y(\omega)$ – случайные величины.

$\exists\, E[Y] < \infty$, $\exists\, x = x_1, x_2, \ldots$, $\exists\, B_j = \{\omega \,:\, X(\omega) = x_j\} = X^{-1}(x_j)$, $\exists\, P(B_j) > 0$.

$\exists\, T = \{B_j\}_j$ – разбиение Ω, $P_{x_j} = P(x = x_j) = P(B_j)$.

Функция $m(x)$ называется **функцией регрессии** случайной величины Y на случайную величину X:

$$m(x) = m_{Y \mid X}(x) = \begin{cases} E[Y \mid \{\omega \,:\, X(\omega) = x\}] \qquad P(X = x) \neq 0 \\ 0 \qquad P(X = x) = 0 \end{cases}$$

8.2 Геометрический смысл

Если мы полагаем, что y зависит от x, причём изменения в y вызываются именно изменениями в x, мы можем определить линию регрессии (регрессия y на x), которая лучше всего описывает прямолинейное соотношение между этими двумя переменными.

Математическое уравнение, которое оценивает линию простой (парной) линейной регрессии: $Y = a + bx$. x называется независимой переменной или предиктором. Y – зависимая переменная или переменная отклика. Это значение, которое мы ожидаем для y (в среднем), если мы знаем величину x, т.е. это "предсказанное значение y". Другими словами, это функция из Y в усреднённое x.

9 Формула полного математического ожидания, её связь с формулой полной вероятности

9.1 Формула полного математического ожидания

Пусть $T = \{A_x\}$ – разбиение Ω. Пусть EX – конечное, тогда справедлива формула

$$EX = \sum_{k\,:\,p(A_k)\neq 0} E[X \mid A_k] \cdot p(A_k)$$

9.2 Связь с ФПВ

Пусть $X = I_A$ – индикаторная случайная величина, тогда

$$p(A) = E[I_A] = \sum_{k\,:\,p(A_k)\neq 0} E[I_A \mid A_k] \cdot p(A_k) = \sum_{k\,:\,p(A_k)\neq 0} p(A \mid A_k) \cdot p(A_k)$$

То есть формула полной вероятности это частный случай формулы полного математического ожидания.

10 Условное математическое ожидание $E[Y \mid X]$. Геометрический смысл

10.1 Условное математическое ожидание

10.1.1 Определение

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное простарнство, X – случайная величина. **Математическим ожиданием** случайной величины X по множеству B называется величина (если интеграл сходится абсолютно):

$$E[X, B] = \int\limits_B X(\omega) p(d\omega)$$

Условным математическим ожиданием случайной величины X относительно события $B \in \Sigma$ с вероятностью $p(B) \neq 0$ называется величина

$$E[X \mid B] = \frac{E[X, B]}{p(B)}$$

10.1.2 Определение для дискретных

Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при условии $X = x$ называется величина:

$$E[Y \mid X = x] = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot p(y_i \mid x)$$

10.1.3 Определение для непрерывных

Условным математическим ожиданием непрерывной случайной величины Y при условии $X = x$ называется величина:

$$E[Y \mid X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y \mid x) dy$$

где $f(y \mid x)$ – условная плотность случайной величины Y пи $X = x$.

10.1.4 Интересная ссылка

Why not

10.1.5 Теорема о разложении дисперсии

$$DY = D[E[Y \mid X]] + E[D[Y \mid X]]$$

10.2 Геометрический смысл

?

11 Линейная регрессия

11.1 Определение

Линейная регрессия – метод восстановления зависимости одной (объясняемой, зависимой) переменной от другой или нескольких других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) с линейной функцией зависимости. Данный метод позволяет предсказывать значения зависимой переменной по значениям независимой переменной.

Линейная регрессия предполагает, что функция f зависит от параметров ω линейно. При этом линейная зависимость от свободной переменной x необязательна,

$$y = f(\omega, x) + \nu = \sum_{j=1}^{N} \omega_j \cdot g_j(x) + \nu$$

11.2 Другое определение))

Пусть $L_x = \{ax + b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство линейных функций от x. **Линейной регрессией** Y на X называется решение экстремальной задачи

$$inf_{g \in L_x} E[(Y - (ax + b))^2] = E[(Y - a^* x - b^*)^2]$$

То есть найти функцию $g(x) = a^* x + b^*$.

$$a^* = \frac{cov(X, Y)}{DX} \qquad b^* = EY - a \cdot EX$$

12 Неравенство для моментов

12.1 Неравенство Шварца (все моменты E)

мало ли понадобится

$$E[(XY)] \leq \sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$$

12.2 Неравенство Йенсена

12.2.1 Борелевская дичь

Борелевская сигма-алгебра – минимальная сигма-алгебра, содержащая все открытые подмножества топологического пространства (также она содержит и все замкнутые). Эти подмножества также называются борелевскими.

Борелевская функция – отображение одного топологического пространства в другое (обычно оба суть пространства вещественных чисел), для которого прообраз любого борелевского множества есть борелевское множество.

12.2.2 Формулировка

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, X – случайная величина с конечным первым моментом, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – выпуклая вниз борелевская функция. Тогда

$$\varphi(EX) \leq E[\varphi(X)]$$

12.3 Следствие из Йенсена (неравенство для моментов)

Если $E[|X|^t] < \infty$, то для любого $s \in (0, t)$ выполняется

$$\sqrt[s]{E[|X|^s]} \leq \sqrt[t]{E[|X|^t]}$$

13 Закон больших чисел

13.1 Слабый закон больших чисел

Слабый закон больших чисел гласит, что среднее значение выборки сходится по вероятности к математическому ожиданию.

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad n \to \infty$$

То есть $\forall\, \epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) = 0$$

Слабый закон утверждает, что для любых ненулевых указанных границ, независимо от того, насколько они малы, при достаточно большой выборке вероятность того, что среднее значение выборки будет близко к математическому ожиданию, очень высока в пределах этих границ.

13.2 Усиленный закон больших чисел

Последовательность $X_1, X_2, ...$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если $\forall \epsilon > 0$ вероятность одновременного выполнения всех неравенств $|\overline{X}_n - \mu_n| \le \epsilon$, $|\overline{X}_{n+1} - \mu_{n+1}| \le \epsilon, \ldots$ стремится к 1 при $n \to \infty$.

Таким образом, здесь рассматривается поведение всей последовательности сумм в целом, в то время как в обычном законе больших чисел речь идет лишь об отдельных суммах.

13.3 Теорема Колмогорова

Теорема Колмогорова для случайных величин с конечными дисперсиями утверждает, что из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D[X_n]}{n^2} < \infty$$

вытекает приложимость к последовательности X_1, $X_2, \ldots$ усиленного закона больших чисел с $A_n = E[\overline{X}_n]$.

14 Центральная предельная теорема

14.1 Классическая центральная предельная теорема

Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ – бесконечная последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание μ и дисперсию σ^2. Пусть также $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Тогда

$$\frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1),$$

где $N(0,1)$ – стандартное нормальное распределение.

Неформально говоря, классическая центральная предельная теорема утверждает, что сумма n независимых одинаково распределённых случайных величин имеет распределение, близкое к $N(n\mu, n\sigma^2)$.

14.2 Локальная центральная предельная теорема

В предположениях классической формулировки, допустим в дополнение, что распределение случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ абсолютно непрерывно, то есть оно имеет плотность. Тогда распределение Z_n также абсолютно непрерывно, и более того,

$$f_{Z_n}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $f_{Z_n}(x)$ – плотность случайной величины Z_n, а в правой части стоит плотность стандартного нормального распределения.