Группа М3235
Команда №4

Математический анализ

Типовой расчёт №1

Олеся Чеботарёва
Ирина Ткаченко
Андрей Сухарев
Николай Тананыкин

Октябрь 2019, 3 семестр

Оглавление

Глава 1

Дифференцируемость функции двух переменных в точке

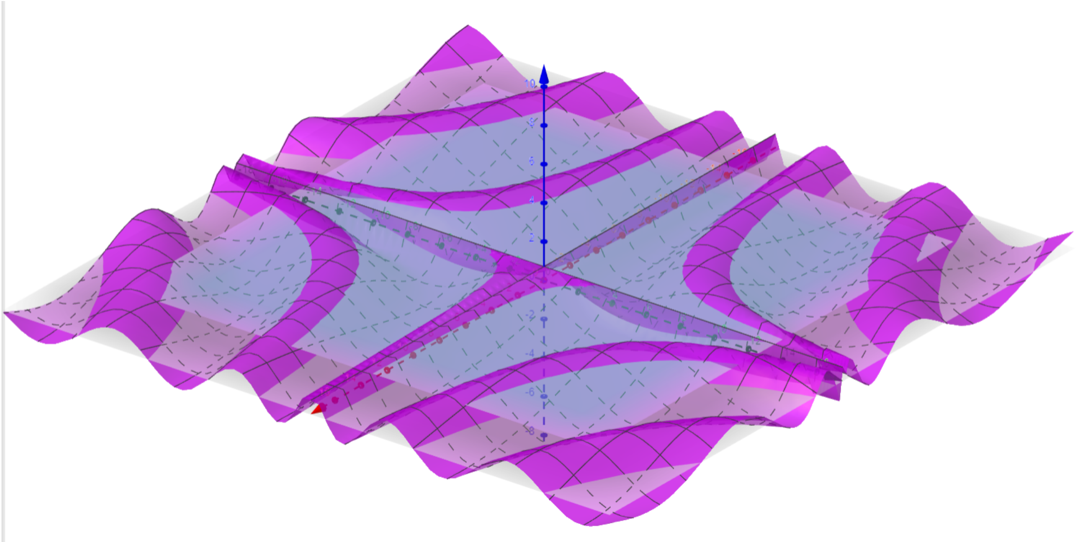
Дана функция

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right)$$

Выяснить, является ли заданная функция дифференцируемой в точке $M(0, 0)$.
Построить график этой функции (поверхность).

Построить плоскость $z - z_0 = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Является ли эта плоскость касательной к поверхности?

График функции (нажми на меня)



Функция является дифференцируемой, если $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(r)$, где $r = \|\Delta x,\, \Delta y\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Найдём производные в окрестности точки M:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{(x-\Delta x)y^2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

При вычисленных выше значениях проверим равенство $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} = o(\sqrt{x^2 - y^2})$.

Теория: m является o малым от n, если $\lim \frac{|m|}{|n|} = 0$. Тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|2\sin\sqrt[3]{xy^2} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{2}\right)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|\sqrt[3]{r^3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi}|}{r} = \left|\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}}\right|$$

$\rceil\, \varphi = \dfrac{\pi}{3}$, тогда:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left|\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\pi}{3}}\right| \neq 0$$

Следовательно, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt[3]{xy^2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \neq o(\sqrt{x^2-y^2})$. Следовательно, **функция не дифференцируема**.

Плоскость $z - z_0 = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ является плоскостью $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. На графике выше она изображена голубым цветом. Она является касательной к нашей поверхности по определнию:

> **Определение 5** *Плоскость, в которой лежат все касательные прямые к данной поверхности в данной точке, называется* ***касательной плоскостью***.
>
> *Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется* ***нормалью*** *к поверхности.*
>
> Уравнение касательной плоскости в точке M_0:
>
> $$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y-y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)(z-z_0) = 0.$$

P.S.: красным цветом изображена ось Ox, зелёным цветом ось Oy, синим цветом ось Oz.

Глава 2

Наибольшее и наименьшее значение функции двух переменных в области

Даны три точки: $A(0,0,12)$, $B(0,0,4)$ и $C(8,0,8)$. На плоскости Oxy найдите такую точку D, чтобы сфера, проходящая через A, B, C и D, имела наименьший радиус. Изобразите на графике.

Используемая теория:

Теорема 3 (Достаточное условие экстремума) *Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные второго порядка и $df(x^0) = 0$. Тогда*

1. *если $d^2f(x^0)$ – положительно определенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***строгий минимум*** *$f(x)$;*
2. *если $d^2f(x^0)$ – отрицательно определенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***строгий максимум*** *$f(x)$;*
3. *если $d^2f(x^0)$ – неопределенная квадратичная форма, то в точке (x_0, y_0)* ***экстремума нет.***

Составим уравнение сферы по известным нам точкам (R – радиус сферы).

$$\begin{cases} (0-a)^2+(0-b)^2+(12-c)^2=R^2 \\ (0-a)^2+(0-b)^2+(4-c)^2=R^2 \\ (8-a)^2+(0-b)^2+(8-c)^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+(12-c)^2=R^2 \\ a^2+b^2+(4-c)^2=R^2 \\ (8-a)^2+b^2+(8-c)^2=R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 128-16c=0 \\ -16a=8c-112 \\ b^2=R^2-a^2-c^2-16+8c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\sqrt{R^2-25} \\ c=8 \end{cases}$$

Составим уравнение по искомой точке $D(x,y,z)$.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

$$(x-3)^2+(y-\sqrt{R^2-25})^2+(z-8)^2=R^2$$

Так как $D\in Oxy$, то $z=0$.

$$R=\sqrt{(x-3)^2+(y-\sqrt{R^2-25})+64}=\sqrt{x^2-6x+y^2-2y\sqrt{R^2-25}+R^2+48}$$

$$\begin{cases} R'_x=0 \\ R'_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{R}=0 \\ \dfrac{y-\sqrt{R^2-25}}{R}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\sqrt{R^2-25} \end{cases}$$

Критическая точка $M(x,y)=M(3,\sqrt{R^2-25})$. Рассмотрим вторые частные производные в этой точке.

$$R''_{xx}(M)=\frac{R-\frac{x-3}{R}(x-3)}{R^2}=\frac{(y-\sqrt{R^2-25})^2+64}{R^3}=8$$

$$R''_{xy}(M)=\frac{0-\frac{y-\sqrt{R^2-25}}{R}(x-3)}{R^2}=0$$

$$R''_{yy}(M)=\frac{R-\frac{y-\sqrt{R^2-25}}{R}(y-\sqrt{R^2-25})}{R^2}=\frac{(x-3)^2+64}{R^3}=8$$

Тогда найдем d^2R и исследуем его в точке M.

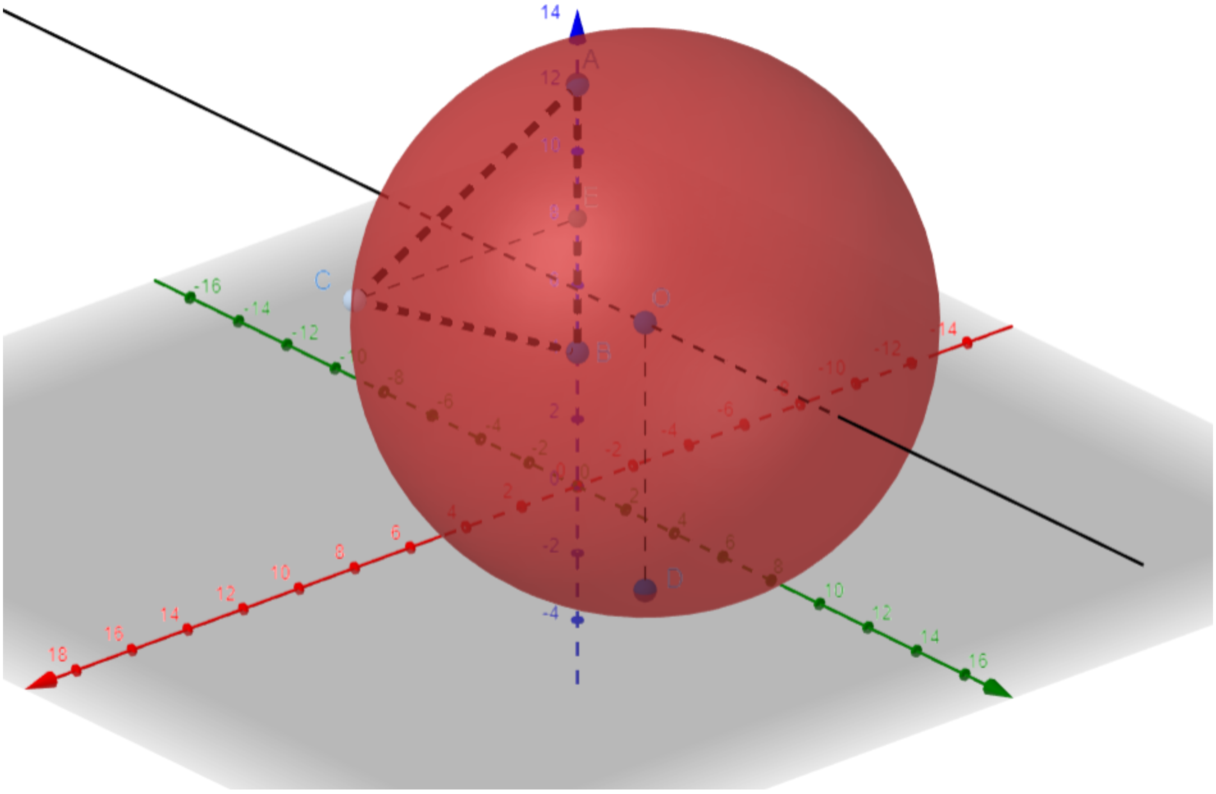
$$d^2R(M)=R''_{xx}R''_{yy}-R''_{xy}R''_{yx}=64>0$$

Также, $A > 0$. Следовательно, по теореме 3 о достаточном условии экстремума, точка M – точка минимума. Тогда $R_{min} = 8$. Координаты точки D тогда:

$$x = 3, \quad y = \sqrt{R^2 - 25} = \sqrt{39}, \quad z = 0$$

Ответ: точка $D(3, \sqrt{39}, 0)$.

График (нажми на меня)



Глава 3

Решение дифференциального уравнения в частных производных с помощью замены переменной

Решить уравнение, приняв за новые независимые переменные u и v, а w – за новую функцию:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

если $u=x+z$, $v=y+z$, $w=x+y+z$.

Глава 4

Производная по направлению

Найти производную функции

$$f(x, y, z) = ln(e^x, e^y, e^z)$$

в направлении луча, образующего с осями координат углы $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ соответственно и острый угол с осью Oz, в данной точке $M(0, 0, 0)$.

Угол между осью Oz и лучом составляет $\dfrac{\pi}{3}$.

Зададим вектор $\bar{l} = \big(\cos\dfrac{\pi}{3}, \cos\dfrac{\pi}{4}, \cos\dfrac{\pi}{3}\big)$. Тогда производаня функции по вектору $\bar{l}$ равна:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}(M) = (\operatorname{grad} f(M), \bar{l}) = \left.\frac{e^x}{e^x + e^y + e^z}\right|_{(0,0,0)} \cdot \cos\frac{\pi}{3} +$$

$$+ \left.\frac{e^y}{e^x + e^y + e^z}\right|_{(0,0,0)} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \left.\frac{e^z}{e^x + e^y + e^z}\right|_{(0,0,0)} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{2 + \sqrt{2}}{6}$$

Глава 5

Неявная функция

Определяет ли уравнение

$$F(\overline{x}, y) = \frac{x_1}{y} + ln\frac{y}{x_2} + 1 = 0$$

неявную функцию $y = f(x)$ в точке $M(-2, 2, 2)$? Будет ли эта функция дифференцируема? Если да, найти её полный дифференциал первого порядка и все частные производные второго порядка в точке M.

Воспользуемся следующей теорией:

Теорема 2 *Пусть функция $F(x, y)$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определена в окрестности точки (x_0, y_0) и выполнены следующие условия:*

1) $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0);

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда существует прямоугольник $K = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b\}$, в котором уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию от x: $y = f(x)$. При этом функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(x_0 - a, x_0 + a)$ и её производная

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Замечание 1 *Для функции n переменных* $y = y(x_1, \ldots x_n)$, *заданной неявно уравнением*

$$F(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

будет выполнено

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Приступим.

1. $F'_{x_1} = \frac{1}{y}$, $F'_{x_2} = -\frac{1}{x_2}$, $F'_y = -\frac{x_1}{y^2} + \frac{1}{y}$ все непрерывны в окрестности точки M.
2. $F(M) = \frac{-2}{2} + ln\frac{2}{2} + 1 = 0$
3. $F'_y(M) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 0$

Значит, по Теореме 2 уравнение $F(x,y) = 0$ задаёт $y = y(x)$ как неявную функцию в окрестности точки M, при этом $y(x)$ является непрерывно дифференцируемый в окрестности точки (x_{1_0}, x_{2_0}).

Тогда полный дифференциал функции $y(x)$ равен (используя Замечание 1):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 = -\frac{F'_{x_1}(x,y)}{F'_y(x,y)}dx_1 - \frac{F'_{x_2}(x,y)}{F'_y(x,y)}dx_2 = \frac{y}{x_1 - y}dx_1 + \frac{y^2}{x_2(y - x_1)}dx_2$$

Частные вторые производные:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}(x_1 - y) - \left(1 - \frac{\partial y}{\partial x_1}\right)y}{(x_1 - y)^2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}x_1 - y}{(x_1 - y)^2} = \frac{y^2}{(x_1 - y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_2}(x_1 - y) + y \cdot \frac{\partial y}{\partial x_2}}{(x_1 - y)^2} = \frac{y^2 x_1}{x_2(y - x_1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{x_2} \cdot \frac{2y \cdot \frac{\partial y}{\partial x_1}(y - x_1) - y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} - 1\right)}{(y - x_1)^2} = \frac{x_1 y}{(y - x_1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = \frac{2y \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x_2} \cdot x_2(y - x_1) - y^2\left(y - x_1 + x_2 \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x_2}\right)}{(x_2(y - x_1))^2} = \frac{-\,y^2 x_1^2}{x_2^2(y - x_1)^3}$$

Глава 6

Условный экстремум

С помощью метода Лагранжа исследовать функцию

$$f(x, y, z) = x - y + 2z$$

на условный экстремум при данном уравнении связи $x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$. Составим функцию Лагранжа.

$$L = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)$$

Частные производные по x, y, z и λ.

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 - 16 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Мы получили два значения λ (множителя Лагранжа), значит у нас две стационарных точек, подозреваемых в экстремуме. Тогда первая стационарная точка $A = (-2, 2, -2)$, а вторая $B = (2, -2, 2)$.

Составим квадратичную форму по формуле $d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{xz}dxdz + 2L''_{yz}dydz$:

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2\lambda dz^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

По определению: если $d^2L(Tochka) > 0$, то $Tochka$ является точкой строгого условного минимума функции, если < 0 – то точкой строгого условного максимума.

$d^2L(A) = \dfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0 \Rightarrow A$ – точка условного минимума.

$d^2L(B) = -\dfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0 \Rightarrow B$ – точка условного максимума.