Матан экзамен

27 февраля 2020 г.

Содержание

1 БИЛЕТ 24 – Функция одной вещественной переменной. Области определения и изменения. График функции. Сложная функция. Свойства функции. Обратная функция. Способы задания функции

Задание **функции** $y = f(x)$ вещественной переменной x означает, что каждому значению x из числового множества X (области определения) ставится в соответствие число y из числового множества Y (области значений).

- **Аргументом** функции $y = f(x)$ является вещественная переменная x; аргументом функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ является вектор $(x_1, \ldots, x_n)$, составленный из вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$.
- **Областью определения** функции $y = f(x)$ является множество X допустимых значений переменной x.
- **Областью изменения** функции $y = f(x)$ является множество Y допустимых значений переменной y.

Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X и U - множество значений этой функции. Пусть, множество U (или его подмножество) является областью определения функции $y = f(u)$. Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$. Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$. Её называют **композицией функций** или **сложной функцией**.

1.1 Свойства Функций

Функция называется **чётной**, если:

1. Область определения функции симметрична относительно нуля, т.е. для любого x, принадлежащего области определения, $-x$ также принадлежит области определения;
2. При замене значения аргумента x на противоположное $-x$ значение функции не изменится, т.е. $f(-x) = f(x)$ для любого x из области определения функции.

Функция называется **нечётной**, если

1. Область определения функции симметрична относительно нуля, т.е. для любого x, принадлежащего области определения, $-x$ также принадлежит области определения;
2. $f(-x) = -f(x)$ для любого x из области определения функции.

1.2 Обратная Функция

Обратная функция — функция, обращающая зависимость, выражаемую данной функцией. Например, если функция от x даёт y, то обратная ей функция от y даёт x. Обратная функция функции f обычно обозначается f^{-1}.

1.3 Способы задания функций

1. Табличный способ
2. Графический способ
3. Аналитический способ
4. Словесный способ

2 БИЛЕТ 25 – Два определения предела функции и их эквивалентность

- Определение предела по Коши

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall U(A)\ \exists U(x_0)\ :\ f(X\cap U(x_0)) \subset U(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ :\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$$

- Определение предела по Гейне

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall x_n,\ \lim_{n\to\infty} x_n = A\ :\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

2.1 Эквивалентность определений

Пусть число A является пределом функции $f(x)$ в точке a по Коши. Выберем произвольную подходящую последовательность x_n , $n \in N$, то есть такую, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Покажем, что A является пределом по Гейне.
Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и укажем для него такое $\delta > 0$, что для всех x из условия $0 < |x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В силу того, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, для $\delta > 0$ найдётся такой номер $n_\delta \in N$, что $\forall n \geqslant n_\delta$ будет выполняться неравенство $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
Докажем теперь обратное утверждение: предположим, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Гейне, и покажем, что число А является пределом функции $f(x)$ в точке a по Коши. Предположим, что это неверно, то есть: $\exists\, \varepsilon_0 > 0\, \forall\, \delta > 0\ :\ \exists\, x_\delta\ :\ 0 < |x_\delta - a| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon$. В качестве δ рассмотрим $\delta = \frac{1}{n}$, а соответствующие значения x_δ будем обозначать x_n. Тогда при любом $n \in N$ выполняются условия $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ и $|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность x_n является подходящей, но число A не является пределом функции $f(x)$ в точке a. Получили противоречие.

3 БИЛЕТ 26 – Бесконечные пределы и односторонние пределы

Функция имеет **бесконечный** предел, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\,(-\infty) \;\Leftrightarrow\; \forall\, M > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;:\; \forall x \in X,\, |x - a| < \delta \;:\; f(x) > M \;\;(f(x) < -M)$$

Число A называется **левосторонним** пределом, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;:\; \forall x \in X,\, a - x < \delta \;:\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

4 БИЛЕТ 27 – Свойства пределов функции. Ограниченность функции, имеющей предел. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой переменной. Отделимость от нуля

4.1 Свойства пределов функций

- **ТЕОРЕМА ОБ ОТДЕЛИМОСТИ ОТ НУЛЯ** Если функция имеет конечный предел в точке, то существует окрестность этой точки, в которой функция ограничена на пересечении окрестности с множеством X.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \forall c,\, 0 < c < |A| \; \exists U(x_0) \cap X \;\; : \; f(x) > c \;\; (if \;\; A > 0)$$

- Предел постоянной функции равен значению этой постоянной.
- Если значение функции не меньше некоторого числа a на множестве X и существует конечный или определённого знака бесконечный предел функции в некоторой точке x_0, то и предел в этой точке x_0 будет не меньше числа a.

4.2 Ограниченность функции, имеющей предел

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то она ограниченна в некоторой окрестности этой точки a.

4.3 Предельный переход в неравенстве

Пусть $f, g : X \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка множества X.

$$\forall x \in X \;: f(x) \leqslant g(x), \; \lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B \Rightarrow A \leqslant B$$

4.4 Теорема о сжатой переменной

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = A, \, \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

5 БИЛЕТ 28 – Арифметические свойства пределов

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B;$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

6 БИЛЕТ 29 – Предел монотонной функции

Если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a;b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a;b)$ эта функция имеет конечные пределы слева и справа, а в точках a и b – правосторонний и левосторонний пределы.

7 БИЛЕТ 30 – Бесконечно малые функции. Критерий Коши существования предела

7.1 Бесконечно малые функции

Функция называется **бесконечно малой**, если её предел при $x \to \infty$ или $x \to x_0$ её предел равен нулю.
Если функция $y = f(x)$ представима при $x \to x_0$ в виде суммы постоянного числа b и бесконечно малой величины $\alpha(x) : f(x) = b + \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

7.2 Критерий Коши существования предела

Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in x$ имела в (конечной или бесконечно удаленной) точке x_0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любых $x' \in X \cap U(x_0)$ и $x'' \in X \cap U(x_0)$ выполнялось бы неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists U(x_0) \ : \forall x' \in X \cap U(x_0), \forall x'' \in X \cap U(x_0) \ : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

8 БИЛЕТ 31 – Непрерывность функции в точке. Критерий непрерывности

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если:

1. Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
2. Существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3. Этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = (x_0 + \Delta x) - f(x_0),\ x_0 \in X,\ x \in X \ \ : \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

9 БИЛЕТ 32 – Точки разрыва

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,\ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = B,\ A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$$

$(A - B)$ – скачок функции в точке x_0.

- $A - B = 0$ – устранимый разрыв в точке x_0;
- $A - B \neq 0$ – разрыв I рода в точке x_0;
- Если $A \in \{+\infty; -\infty; \infty; \varnothing\}$, $B \in \{+\infty; -\infty; \infty; \varnothing\}$, то разрыв II рода в точке x_0.

10 БИЛЕТ 33 – Непрерывность функции на множестве. Теоремы Вейерштрасса и Коши

Функция называется **непрерывной на множестве** X, если она непрерывна по множеству X в каждой его точке.

ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА Непрерывная на отрезке функция ограничена и принимает на нём наибольшее и наименьшее значение.

ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО-КОШИ Непрерывная на отрезке функция, принимая какие-либо два значения, принмиает и любое лежащее между ними значение.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),\ x_0 \in [\,a; b\,],\ f(a) = A,\ f(b) = B \ \Rightarrow\ \forall\, C \in [\,A; B\,]\, \exists \varepsilon \in [\,a; b\,] \ :\ f(\varepsilon) = C.$$

11 БИЛЕТ 34 – Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на множестве X, если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\; :\; \forall\, x', x'' \in X,\, |x'' - x'| < \varepsilon\;\; :\; |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

ТЕОРЕМА КАНТОРА Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нём.

12 БИЛЕТ 35 – Непрерывность элементарных функций

Все элементарные функции являются непрерывными в любой точке свой области определения.
Функция называется **элементарной**, если она построена из конечного числа композиций и комбинаций (с использованием 4 действий - сложение, вычитание, умножение и деление) основных элементарных функций.
Множество основных элементарных функций включает в себя:

- алгебраические многочлены, рациональные дроби;
- показательные, степенные и логарифмические функции;
- тригонометрические, обратные тригонометрические, гиперболические и обратные гиперболические функции.

13 БИЛЕТ 36 – Сравнение функций. Символы Ландау

$$\exists\,\dot{U}(x_0),\, c>0\;\;:\;\forall\, x\in\dot{U}(x_0),\;\;|f(x)|\leqslant c\cdot|g(x)|\;\Rightarrow\;f(x)=O(g(x)),\,x\to x_0$$

хз че я тут написала, вот норм определения
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две функции, определенные в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , причем в этой окрестности $g(x_0)\neq 0$.

1. $f(x)$ является "О большим"от $g(x)$ при $x\to x_0$ и пишут $f(x)=O(g(x))$, если существует константа $C>0$, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 имеет место неравенство $|f(x)|\leqslant C\cdot|g(x)|$.

$$f(x)=\varphi(x)\cdot g(x),\;\exists\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=k\;\Rightarrow\;f(x)=O(g(x)),\,x\to x_0$$

2. $f(x)$ является "о малым"от $g(x)$ при x/tox_0 и пишут $f(x)=o(g(x))$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такая проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ точки x_0, что для всех $x\in\dot{U}(x_0)$ имеет место неравенство $|f(x)|<\varepsilon|g(x)|$.

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\,\dot{U}(x_0)\;:\;\forall\,x\in\dot{U}(x_0)\;\;:\;|f(x)|<\varepsilon|g(x)|$$

Функция $f(x)$ называется функцией **того же порядка** при $x\to x_0$, что и функция $g(x)$, если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x\in X\cap U$ выполняется неравенство

$$c_1\cdot|g(x)|\leqslant|f(x)|\leqslant c_2\cdot|g(x)|$$

Функция $f(x)$ называется **эквивалентной** функции $g(x)$ (или асимптотически равной ей) при $x\to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

14 БИЛЕТ 37 – Определение производной. Геометрический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0), x \in U(x_0)$. Тогда производная это:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ Производная – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0. Касательная – предельное положение секущей.

15 БИЛЕТ 38 – Дифференцируемость функции и её дифференциал

Функция дифференцируется в точке x_0 тогда и только тогда, когда имеет в этой точке производную.

$$dy = f'(x_0)dx$$

Дифференциалом функции в некоторой точке x называется главная, линейная часть приращения функции. Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной x (аргумента).

$$f : X \to \mathbb{R},\, U(x_0) \subset X.$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),\, \Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$$

Δx или же dx – дифференциал.
Дифференцируемая в точке функция так же непрерывна в ней.
Дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной в точке x_0.

$$\Delta x = x - x_0$$

16 БИЛЕТ 39 – Односторонние производные

Правая производная $f'_+(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Левая производная $f'_-(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ТЕОРЕМА Для того чтобы в точке x существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x функция $f(x)$ имела правую и левую производные, и эти производные были равны между собой: $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.

17 БИЛЕТ 40 – Правила дифференцирования и таблица производных

десткий сад

18 БИЛЕТ 41 – Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных неявно и заданных параметрически

18.1 ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него.
Рассмотрим этот подход более детально. Пусть дана функция $y = f(x)$. Возьмем натуральные логарифмы от обеих частей:

$$ln\, y = ln\, f(x)$$

Теперь продифференцируем это выражение как сложную функцию, имея ввиду, что y - это функция от x.

$$(ln\, y)' = (ln\, f(x))' \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = (ln\, f(x))'$$

Отсюда видно, что искомая производная равна

$$y' = y \cdot (ln\, f(x))' = f(x) \cdot (ln\, f(x))'$$

Такая производная от логарифма функции называется логарифмической производной.

18.2 ФУНКЦИИ ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Если существует $y = f(x)$ такая, что $F\big(x, f(x)\big) = 0$, то говорят, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как функцию от x неявно. То есть, функция, заданная **неявно**, – функция, в которой невозможно выразить y через x.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ Приводим к виду $\ldots = 0$. Рассматриваем функцию двух переменных $F(x, y) = \ldots$. Производную y' можно будет найти по формуле $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, где F'_x, F'_y – частные производные.

18.3 ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Функция задана **параметрически**, если она представлена в виде

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ x = \psi(t) \end{cases}$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ Функции $x(t)$ и $y(t)$ определены и непрерывны еа некотором интервале изменения параметра t. Найдем дифференциалы от правых и левых частей каждого из равенств:

$$\begin{cases} dx = x'_t dt \\ dy = y'_t dt \end{cases}$$

Далее, разделив второе уравнение на первое, и с учетом того, что $\frac{dy}{dx} = y'_x$, получим выражение для первой производной функции, заданной параметрически:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

19 БИЛЕТ 42 – Производные и дифференциалы высших порядков

19.1 ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$f : X \to \mathbb{R},\ (a,b) \subset X;\ x_0 \in (a,b)$$
$$\exists\, f'(x)\, \forall x \in (a,b)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$$
$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},\ n = 1, 2, \ldots$$

Функция называется n **раз непрервывно дифференцируемой** на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

19.2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$dy = f'(x)dx$$
$$d^2y = f''(x_0)dx^2$$
$$\ldots$$
$$d^ny = y^{(n)}dx^n,\ n = 1, 2, \ldots$$
$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

20 БИЛЕТ 43 – Свойства дифференцируемых функций. Французские теоремы

20.1 СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$d^n(y_1 + y_2) = d^n y_1 + d^n y_2$$

$$d^n(cy) = cd^n y,\, c = const$$

$$d^n(y_1 \cdot y_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot dy_1^{n-k} \cdot dy_2^k$$

20.2 ТЕОРЕМА ФЕРМА

Если функция определена в некоторой окрестности точки, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) значение и имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то эта производная равна нулю.

$$f : X \to \mathbb{R},\, U(x_0) \subset X$$

$$f(x_0) \geqslant f(x)\, \forall\, x \in U(x_0)\;\; \exists\, f'(x) \forall x \in U(x_0)\;\; : \; f(x_0) = 0$$

20.3 ТЕОРЕМА РОЛЛЯ

Любая действительная дифференцируемая функция, принимающая одинаковые значения на концах интервала, должна иметь в этом интервале хотя бы одну стационарную точку, т.е. точку, в которой первая производная равна нулю.

1. Функция $f(x)$ непрерывна на $[\,a; b\,]$;
2. Функция $f(x)$ имеет производную в широком смысле на (a, b);
3. f(a)=f(b)

$$\exists\, \varepsilon \in (a, b)\;\; : \; f'(\varepsilon) = 0$$

20.4 ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\,a, b\,]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то в этом интервале существует хотя бы одна точка $x = \varepsilon$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\varepsilon)(b - a)$$

Данная теорема называется также формулой **конечных приращений**, поскольку она выражает приращение функции на отрезке через значение производной в промежуточной точке этого отрезка.

20.5 ТЕОРЕМА КОШИ

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[\,a, b\,]$ и дифференцируются на интервале (a, b). Тогда если $g'(x) \neq 0\, \forall x \in (a, b)$:

$$\exists\, \varepsilon \in (a, b)\;\; : \; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}$$

21 БИЛЕТ 44 – Формулы Тейлора и Маклорена. Формула остаточного члена

Формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_n(x)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора.
Остаточный член в форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta \cdot (x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

Остаточный член в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta \cdot (x-a))}{n!} \cdot (1-\theta)^n \cdot (x-a)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

Остаточный член в форме Пеано

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

Формула Маклорена

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!} \cdot x + \frac{P''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

22 БИЛЕТ 45 – Разложение элементарных функций по формуле Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, |x| < \infty,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \ldots, |x| < \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} - \ldots, |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} - \ldots, x \in (-1; 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \ldots, |x| < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} - \cdots, |x| \le 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, |x| < 1,$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, |x| < \infty,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, |x| < \infty,$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right), |x| < 1,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots, |x| < 1.$$

23 БИЛЕТ 46 – Правило Лопиталя

$$f\text{"}X \to \mathbb{R},\ g : Z \to \mathbb{R},\ [\,a, b\,] \subset X,\ [\,a, b\,] \subset Z$$

1. $$f(a) = g(a) = 0$$

2. $$\exists\, f'_{+0}(a),\ \exists\, g'_{+0}(c) \neq 0,\ c \in Z\ \ :\ \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

24 БИЛЕТ 47 – Исследование функций на монотонность и экстремумы

Берём производную и ставим знаки

25 БИЛЕТ 48 – Исследование функций на выпуклость и точки перегиба

Берём вторую произвдоную и расставляем знаки

26 БИЛЕТ 49 – Нахождение асимптот графика функции

Вертикальная асимптота графика, как правило, находится в точке бесконечного разрыва функции. Всё просто: если в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ терпит бесконечный разрыв, то прямая, заданная уравнением $x = a$ является вертикальной асимптотой графика.
Таким образом, чтобы установить наличие вертикальной асимптоты $x = a$ в точке $x = a$, достаточно показать, что хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ бесконечен. Чаще всего это точка, где знаменатель функции равен нулю.

Наклонные (как частный случай – горизонтальные) асимптоты могут нарисоваться, если аргумент функции стремится к $+\infty$ или к $-\infty$. Поэтому график функции не может иметь больше двух наклонных асимптот. Например, график экспоненциальной функции $f(x) = e^x$ обладает единственной горизонтальной асимптотой при $x \to -\infty$, а график арктангенса $f(x) = arctg(x)$ при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ – двумя такими асимптотами, причём различными.
Нахождение:

1. Находим вертикальные асимптоты. Ищем точку, где односторонние пределы бесконечны (предельчики ищем)

2. Находим наклонные асимптоты. Уравнение вида $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)$$

   Смотри при $+\infty$ и при $-\infty$

27 БИЛЕТ 50 – Нахождение наибольших и наименьших значений функции

Находим тчоки минимума или максимума, подставляем их и концы отрезка в функцию, выделяем наименьшее или наибольшее.