Матан коллок 12.11.2018

27 февраля 2020 г.

Содержание

1 БИЛЕТ 1 – Множества. Операции над ними. Свойства

- **Множество** – совокупность элементов, объектов, которые можно мыслить как единое целое.
- Операции над множествами
  1. **Объединением** (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.
  $$A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$
  2. **Пересечением** (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.
  $$A \cup B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$
  3. **Разностью** множеств A и B называется множество $A \backslash B$, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.
  $$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$
  4. **Включение** множества B в множество A – все элементы множества B принадлежат множеству A (*нестрогое включение* — возможен случай, что множество A состоит только из элементов множества B).
  $$B \subset A = \{x : x \in B \Rightarrow x \in A\}$$
  $B \subset A \Rightarrow A \backslash B$ - дополнение множества B до A.
- Свойства

Свойства множеств относительно операции объединения	Свойства множеств относительно операции пересечения
1. Коммутативность	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Идемпотентность	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
5. Закон де Моргана	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Операции с множеством	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
7. Операции с множеством	
$A \cup U = U \Rightarrow U = \overline{\varnothing} \Rightarrow \overline{U} = \varnothing$	$A \cap U = A$
8. Законы поглощения:	
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cup \overline{A} = U$	$A \cap (A \cup B) = A$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2 БИЛЕТ 2 – Отображения. Функции

$$f : X \to Y$$

- **Отображение** – соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент из другого множества. ($f : X \to Y$)

- Функция **сюръективна**, если каждому элементу множества Y может быть сопоставлен хотя бы один элемент множества X. То есть, функция f сюръективна, если образ множества X при отображении совпадает с множеством Y: $f(X) = Y$

- Функция **инъективна**, если любым двум разным элементам из множества X сопоставляются разные элементы из множества Y. Более формально, функция f инъективна, если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ таких, что $f(x_1) = f(x_2)$, следует, что $x_1 = x_2$. Другими словами, при инъекции не бывает так, чтобы два или больше разных элементов из множества X отображались в один и тот же элемент из Y.

- Функция **биективна**, если она одновременно сюръективна и инъективна.

3 БИЛЕТ 3 — Аксиомы вещественных чисел

1. Аксиомы сложения
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a + b$
   (a) $a + b = b + a$
   (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (c) $\exists\, 0 : a + 0 = a$
   (d) $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists - a : -a + a = 0$
2. Аксиомы умножения
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \cdot b$
   (a) $a \cdot b = b \cdot a$
   (b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
   (c) $\exists\, 1 : a \cdot 1 = a$
   (d) $\forall a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \quad \exists\, a^{-1} : a^{-1} \cdot a = 1$
3. Дистрибутивность
   $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
4. Аксиомы сравнения
   $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$
   (a) $a > b,\ b > c \ \Rightarrow\ a > c$
   (b) $a < b \ \Leftarrow\ a + c < b + c$
   (c) $\forall c > 0,\ a < b \ \Leftarrow\ a \cdot c < b \cdot c$
5. Непрерывность действительных чисел
   $A \subset \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}$
   $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a < b \quad \exists\, \gamma \in \mathbb{R} : a < \gamma < b$

4 БИЛЕТ 4 — Неравенство Коши-Буняковского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Неравенство Коши-Буняковского

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

где a_i, b_i — действительные числа.

Доказательство:

Рассмотрим вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$, где $\lambda \in R$. Найдем скалярное произведение этого вектора на себя. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$(\bar{a} + \lambda b, \bar{a} + \lambda b) \geq 0$$

Раскроем скобки

$(\bar{a}, \bar{a}) + \lambda(\bar{a}, \bar{b}) + \lambda(\bar{b}, \bar{a}) + \lambda^2(\bar{b}, \bar{b}) \geq 0?$

$$\lambda^2(\bar{b}, \bar{b}) + 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{a}) \geq 0$$

Получили квадратный трехчлен относительно λ, который принимает неотрицательные значения. Такое возможно, когда его дискриминант неположителен, т.е. в случае, если

$$(\bar{a}, \bar{b})^2 - (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \leq 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq (\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b}) \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})^2 \leq |\bar{a}|^2 \left|\bar{b}\right|^2$$

Что и требовалось доказать.

5 БИЛЕТ 5 — Счётные множества. Два простейших свойства

Множество X называется **счетным**, если оно равномощно* множеству натуральных чисел N.
Свойства

1. Любое бесконечное множество содержит бесконечное счетное подмножество.

   Доказательство:

   - Пусть X – бесконечное множество; тогда оно во всяком случае непусто, т. е. в нем существует по крайней мере один элемент, обозначим его через x_1. Поскольку множество X бесконечно, то множество $X \backslash \{x_1\}$ также непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_2. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим элемент x_n. Поскольку X - бесконечное множество, то множество $X \backslash \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ непусто, т. е. содержит по крайней мере один элемент, обозначим его x_{n+1} и т. д. Множество $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ - искомое счетное подмножество множества X.

2. Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

   Доказательство:

   - Пусть X – счетное множество: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ и Y включает X. Обозначим через y_1 элемент из Y, имеющий наименьший номер в X, через y_2 – элемент множества Y, имеющий следующий ближайший номер, и т. д. Поскольку каждый элемент множества Y является некоторым элементом x_n множества X и, следовательно, имеет номер n, то через конечное число шагов (не больше, чем n) он получает некоторый номер m и в множестве Y, т. е. будет обозначен y_m, причем, поскольку множество Y бесконечно, этот процесс может быть продолжен неограниченно. Таким образом, все элементы множества Y окажутся перенумерованными, что и означает счетность этого множества.

* Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются *равномощными*.

6 БИЛЕТ 6 — Счётность множества рациональных чисел

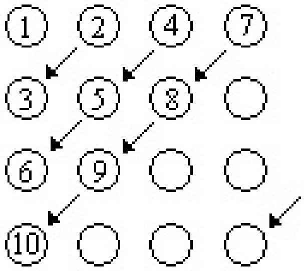
ТЕОРЕМА. Множество всех рациональных чисел счетно.

Доказательство: Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом (см. таблицу):

0	1	-1	2	-2	$\dots$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Здесь в n-ю строчку помещены рациональные числа, записываемые несократимыми рациональными дробями со знаменателем n и упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, причем непосредственно за каждым положительным числом следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме, в которой в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации. В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

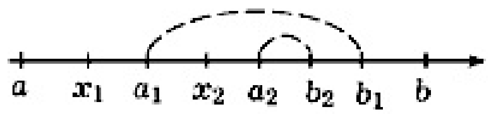


7 БИЛЕТ 7 – Несчётность отрезка

Любой отрезок множества действительных чисел состоит из несчетного множества точек.

Доказательство:

Допустим противное: пусть точки некоторого отрезка $[\,a,b\,]$, a принадлежит $\mathbb{R}$, b принадлежит $\mathbb{R}$, $a < b$, можно занумеровать: $[\,a,b\,] = \{x_1, x_2 ..., x_n, ...\}$. Выберем акой-либо отрезок $[\,a_1, b_1\,]$ лежащий на $[\,a,b\,]$ и не содержащий точки x_1 (см рис.):



$$x_1 \notin [\,a_1, b_1\,] \subset [\,a,b\,]$$

Далее выберем отрезок $[\,a_2, b_2\,]$, лежащий на $[\,a_1, b_1\,]$ и не содержащий точки x_2, и т. д. Таким образом, если выбран отрезок $[\,a_n, b_n\,]$, то выберем отрезок $[\,a_{n+1}, b_{n+1}\,]$, лежащий на $[\,a_n, b_n\,]$ и не содержащий точки x_{n+1}. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $[\,a_n, b_n\,]$, $n = 1, 2, ...$, такую, что

$$x_n \notin [\,a_n, b_n\,],\ n = 1, 2, ... \tag{1}$$

Следовательно, ни одна точка x_n не принадлежит пересечению $[\,a_n, b_n\,]$, но согласно принципу вложенных отрезков существует точка, обозначим ее ξ, принадлежащая всем отрезкам $[\,a_n, b_n\,]$:

$$\xi \in [\,a_n, b_n\,],\ n = 1, 2, ..., \tag{2}$$

а поэтому и отрезку $[\,a,b\,]$, ибо $[\,a_n, b_n\,]$ включает $[\,a,b\,]$ при всех $n = 1, 2, ...$ А так как все точки отрезка $[\,a,b\,]$ по предположению перенумерованы, то точка ξ также должна иметь какой-то номер, т. е. существует такое натуральное число X_{n_0}, что $\xi = x_{n_0}$, и тогда согласно (2) получим:

$$x_{n_0} \in [\,a_n, b_n\,], n = 1, 2, ...$$

В частности, $x_{n_0} \in [\,a_{n_0}, b_{n_0}\,]$, а это противоречит условию (1).

8 БИЛЕТ 8 – Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности

Точка a (конечная или бесконечно удаленная) числовой прямой называется **пределом** некоторой числовой последовательности действительных чисел, если, какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены рассматриваемой последовательности начиная с некоторого номера.

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \exists\, n_\xi \;\; \forall n > n_\xi : x_n \in U(a, \xi)$$

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**.

$$\exists\, a \in \mathbb{R} \;\forall \xi > 0 \;\exists\, n_\xi \in \mathbb{N} \;\forall n > n_\xi : |x_n - a| < \xi$$

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \;\forall \xi > 0 \;\exists\, n_\xi \in \mathbb{N} \;\forall n > n_\xi : a - \xi < x_n < a + \xi$$

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПРЕДЕЛА. Последовательность точек расширенной числовой прямой может иметь на этой прямой только один предел.

Доказательство (методом от противного):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \;\; \lim_{n\to\infty} x_n = b$$

Выберем непересекающиеся окрестности:

$$\xi_1 > 0, \xi_2 > 0 : U(a, \xi_1) \cap U(b, \xi_2) = \varnothing.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \;\exists\, n_1 \;\; \forall n > n_1 : x_n \in U(a, \xi_1);$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \;\exists\, n_2 \;\; \forall n > n_1 : x_n \in U(b, \xi_2);$$

$$n_0 = max(n_1, n_2) : \forall n > n_0 : x_n \in U(a, \xi_1) \wedge x_n \in U(b, \xi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; x_n \in [\, U(a, \xi_1) \cap U(b, \xi_2)\,] \wedge [\, U(a, \xi_1) \cap U(b, \xi_2)\,] = \varnothing$$

Пришли к полной чепухе, значит, верно обратное.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство:
Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \xi = 1,$$

тогда:

$$\exists\, n_0 \,\forall n > n_0 : |x_n - a| < 1.$$

$$d = max(1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_n - a|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; |x_n - a| < d, \;\; a - d < x_n < a + d.$$

9 БИЛЕТ 9 – Теорема о предельном переходе в неравенствах

$$x_n, y_n, a, b \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ a < b\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \exists\, n_0\ \forall n > n_0 : x_n < y_n$$

Доказательство:

Пусть $U(a) \cap V(b) = \varnothing$.

$$\forall x \in U \wedge y \in V,\ x < y$$
$$\exists\, n_0\, \forall n > n_0 : x_n \in U, y_n \in V\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \exists\, n_0\, \forall n > n_0 : x_n < y_n$$

10 БИЛЕТ 10 – Теорема о двух городовых

$$x_n, y_n, z_n \in \mathbb{R}, x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Доказательство:

Выберем произволную окрестность точки a: $U(a)$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \ \exists\, n_1 \ \ \forall n > n_1 : x_n \in U(a);$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \ \exists\, n_2 \ \ \forall n > n_2 : z_n \in U(a);$$

$$n_0 = max(n_1, n_2) : \ x_n \in U(a) \wedge z_n \in U(a)\, \forall n > n_0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ y_n \in U(a)\, \forall n > n_0 \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

11 БИЛЕТ 11 – Бесконечно малая последовательность

Бесконечная малая последовательность:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- Любая конечная линейная комбинация бесконечно малых является бесконечно малой.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot \alpha_n + \lambda \cdot \beta_n) = 0$$

  Доказательство:

$$c > |\lambda| + |\mu|$$

$$\exists\, n_0\, \forall n > n_0 : |\alpha_n| < \frac{\xi}{c},\ |\beta_n| < \frac{\xi}{c};$$

$$|\lambda \cdot \alpha_n + \mu \cdot \beta_n| \leqslant |\lambda| \cdot |\alpha_n| + |\mu| \cdot |\beta_n| < \frac{|\lambda| + |\mu|}{c} \cdot \xi < \xi$$

- Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой последовательностью.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \qquad \exists\, b\, \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leqslant b.$$

$$\forall n > n_\xi : |\alpha_n| < \frac{\xi}{b},$$

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\xi}{b} \cdot b = \xi$$

- Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

- Предел обратной последовательности от бесконечно малой равен бесконечности.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$$

12 БИЛЕТ 12 – Теорема об арифметичских свойствах предела

1. Добавление (?)
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n,\ \{\alpha_n\} \to 0.$$

   Доказательство:
$$\alpha_n = |x_n - a|.$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\xi > 0\ \exists\, n_0\, \forall n > n_0 :$$
$$|x_n - a| < \xi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

2. Конечная линейная комбинация сходящихся последовательностей – сходящаяся последовательность, и ее предел равен такой же линейной комбинации пределов данных последовательностей.
$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

   Доказательство:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R};\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$
$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n = (\lambda \cdot a + \mu \cdot b) + (\lambda \cdot \alpha_n + \mu \cdot \beta_n).$$
$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot \alpha_n + \mu \cdot \beta_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n) = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot x_n + \mu \cdot y_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

3. Предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению этих последовательностей.
$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

   Доказательство:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R};\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$
$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + (\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n\beta_n).$$
$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

4. Предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ y_n \neq 0,\ b \neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Доказательство:

$$\exists n_0\ \forall n > n_0 : y_n > \frac{b}{2} > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}.$$

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n \cdot b - \beta_n \cdot a}{b \cdot (b+\beta_n)} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

13 БИЛЕТ 13 – Критерий Коши сходящейся последовательности

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**.

$$\exists\, a \in \mathbb{R}\ \forall \xi > 0\ \exists\, n_\xi \in \mathbb{N}\ \forall n > n_\xi : |x_n - a| < \xi$$

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow\ \forall \xi > 0\ \exists\, n_\xi \in \mathbb{N}\ \forall n > n_\xi : a - \xi < x_n < a + \xi$$

Фундаментальная последовательность – такая последовательность, у которой:

$$\forall \xi > 0\ \exists\, n_\xi \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N},\, n > n_\xi,\, m > n_\xi :$$

$$|x_n - x_m| < \xi.$$

КРИТЕРИЙ КОШИ СХОДЯЩЕЙСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \forall \xi > 0\ \exists\, n_\xi \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N},\, n > n_\xi : |x_n - a| < \xi.$$

$$n > n_\xi,\, m > n_\xi,\, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi.$$

14 БИЛЕТ 14 – Теорема Больцано-Вейерштрасса

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности – бесконечно большую подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.

Доказательство:

$\{x_n\}$ – ограничена $\Rightarrow\ \exists\,[\,a, b\,] : a \leqslant x_n \leqslant b\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Разделим отрезок на два равных. $x_{n_1} \in [\,a_1, b_1\,]$.
Продолжим: $x_{n_2} \in [\,a_2, b_2\,]$, $n_2 > n_1, \ldots \Rightarrow$

$$x_{n_k} \in [\,a_k, b_k\,],\ n_{k''} > n_{k'},\ k'' > k'.$$

$\{x_{n_k}\}$ – подпоследовательность x_n.
Система вложенных отрезков $[\,a_k, b_k\,]$, $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$, $k \to \infty$.

$$\exists\,\alpha = \cap[\,a_k, b_k\,];\ \lim_{n\to\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_k = \alpha.$$

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\{x_{n_k}\} = \alpha.$$

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} > 1,\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : x_{n_2} > 2, \ldots,\ \exists\, n_k \in \mathbb{N} : x_{n_k} > k, \ldots\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots,\ x_{n_1} > 1,\ x_{n_2} > 2,\ \ldots,\ x_{n_k} < k,\ \ldots\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

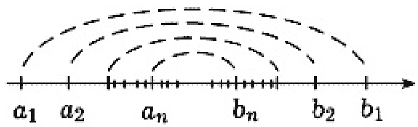
15 БИЛЕТ 15 – Теорема о стягивающих отрезках

Система числовых отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$$

называется **системой вложенных отрезков**, если выполняется условие:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$



ТЕОРЕМА. Система вложенных отрезков имеет непустое пересечение.

Доказательство:

Пусть задана система вложенных отрезков

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots; a_n, b_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots.$$

Обозначим через A множество всех левых концов a_n отрезков этой системы, а через B – множество их правых концов b_n. Из неравенства

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

следует, что

$$\forall m, n \in \mathbb{R} : a_m \leqslant b_n.$$

Поэтому по свойству непрерывности действительных чисел существует такое число ξ, что для всех номеров m и n выполняется неравенство $a_m < \xi < b_n$, а в частности, неравенство

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, n = 1, 2, \ldots$$

Это и означает, что точка ξ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$.

16 БИЛЕТ 16 – Теорема о существовании верхней и нижней граней

Верхняя грань множества – наименьшее число из множества верхних границ множества.

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall a \in A : a \leqslant M \quad (\forall m \geqslant M)$$

Множество чисел m – верхние границы множества A, число M – верхняя грань множества A, само множество A называется *ограниченным сверху*. Иными словами, M это *супремум* A $\Rightarrow\; M = sup\, A$.

Нижняя грань множества – наибольшее число из множества нижних границ множества.

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\, \forall a \in A : a \geqslant M \quad (\forall m \leqslant M)$$

Множество чисел m – нижние границы множества A, число M - нижняя грань множества A, само множество A называется *ограниченным снизу*. Иными словами, M это *инфимум* A $\Rightarrow\; M = inf\, A$.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ГРАНЕЙ
Если $X \neq \varnothing$ и X ограничено сверху (снизу), то

$$\exists \text{ sup } X < \infty \quad (\exists \text{ inf } X > -\infty)$$

Доказательство (для верхней грани, для нижней аналогично):

Пусть M – множество всех верхних границ множества X, то есть $X \leqslant M$.Тогда

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : X \leqslant c \leqslant M$$

$$X \leqslant c \leqslant M \;\Rightarrow\; X \leqslant c; \tag{1}$$

$$X \leqslant c \leqslant M \;\Rightarrow\; c \leqslant E; \tag{2}$$

Исходя из условий (1) и (2),

$$c = sup\, X < \infty$$

17 БИЛЕТ 17 – Теорема о пределе монотонной последовательности

Если последовательность $\{x_n\}$ является нестрого возрастающей (нестрого убывающей) и ограничена сверху (снизу), то $\{x_n\}$ является сходящейся, причем для неубывающей:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = sup\, x_n,$$

а для невозрастающей:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = inf\, x_n.$$

Иными словами, любая монотонная и ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел.

Доказательство:

Пусть последовательность x_n является неубывающей ограниченной последовательностью. Поскольку последовательность неубывающая, то для всех n выполняются неравенства $x_{n+1} \geqslant x_n$.

Поскольку последовательность ограничена, то она имеет точную верхнюю границу $a = sup\, x_n$. Это означает, что:

$$\forall n : x_n \leqslant a; \tag{1}$$

$$\forall \xi > 0 \ \exists\, N = N(\xi) : x_N > a - \xi \tag{2}$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, то при $n > N$ имеем

$$x_n \geqslant x_N > a - \xi \tag{3}$$

Здесь мы также использовали (2). Комбинируя с (1), находим: $a - \xi < x_n \leqslant a$ при $n > N$. Поскольку $a < a + \xi$, то $a - \xi < x_n < a + \xi$, или

$$|x_n - a| < \xi \, \forall n > N.$$

Это и означает, что число $a = sup\, x_n$ является пределом последовательности $\{x_n\}$.

18 БИЛЕТ 18 – Определение числа e, соответствующий замечательный предел

e — основание натурального логарифма, математическая константа, иррациональное число. Иногда число e называют числом Эйлера или числом Непера.

ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$$

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ФОРМУЛЫ МУАВРА-СТИРЛИНГА

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

19 БИЛЕТ 19 – Свойства верхнего и нижнего пределов

Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности данной последовательности называется ее **частичным пределом**.

Всякая последовательность имеет хотя бы один частичный конечный или бесконечный предел, причем заведомо конечный, если данная последовательность ограничена.

Наибольший частичный предел последовательности называется ее **верхним пределом**, наименьший частичный предел – **нижним пределом**.

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = M_1 \qquad \varliminf_{n\to\infty} x_n = M_2$$

У любой последовательности существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.

СВОЙСТВА

1. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к верхнему пределу M_1.
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M_1$$
2. Для любой сходящейся подпоследователн786ьности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$:
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant M_1$$

1. Существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к нижнему пределу M_2.
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M_2$$
2. Для любой сходящейся подпоследователнности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$:
$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant M_2$$

20 БИЛЕТ 20 – Ряд. Необходимое условие сходимости ряда

Пара последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$, $u_n, s_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, где

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

называется **рядом**, или **бесконечной суммой**, и обозначается как

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ называются *членами ряда*, а элементы последовательности $\{s_n\}$ – его *частичными суммами.*
Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

то он называется *суммой ряда* и ряд называется *сходящимся*, в ином случае – *расходящимся.*

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ РЯДА. Если ряд сходится, то последовательность всех его членов стремится к нулю.

Доказательство:

Если ряд сходится, то есть существует конечный предел последовательности его частичных сумм s_n, то из равенства $u_n = s_n - s_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ СХОДИТСЯ.

21 БИЛЕТ 21 – Критерий Коши сходимости ряда

Для того чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \xi > 0 \; \exists \, n_0 \, \forall n > n_0, \, \forall p \geqslant 0 : |u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \xi$$

Доказательство:

Равенство следует непосредственно из критерия Коши для существования конечного предела последовательности, примененного к последовательности частичных сумм радяа, так как

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}.$$

P.S.: при $p = 0$ получаем еще одно доказательство необходимого условия сходимости ряда.

22 БИЛЕТ 22 – Признак Даламбера

Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\, u_n > 0,\, n = 1, 2, \ldots$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$ – расходится.

Если $l = 1$, то ничего определенного сказать нельзя (теорема не подходит).

Доказательство:

Пусть $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \exists\, n_0 > 1\, \forall n > n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} < q \;\Rightarrow\; u_{n+1} < u_n \cdot q$$

Применяя конечное неравенство последовательно, получим

$$u_{n_0+1} < u_{n_0} \cdot q^1;\; u_{n_0+2} < u_{n_0+1} \cdot q^2;\; \ldots;\; u_{n_0+k} < u_{n_0+k-1} \cdot q^k$$

Ряд $u_{n_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу условия $0 < q < 1$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$. Следовательно, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Пусть теперь $l > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; \exists\, n_0 > 1\, \forall n > n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \;\Rightarrow\; u_{n+1} > u_n.$$

Применяя последовательно для больших номеров n_0, получим

$$u_{n+1} > u_n > \ldots > u_{n_0+1} > n_0 > 0.$$

Последовательность членов ряда не стремится к нулю, а значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

23 БИЛЕТ 23 – Признак Коши (радикальный)

Пусть для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ u_n > 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$ – расходится.

Если $l = 1$, то ничего определенного сказать нельзя (теорема не подходит).

Доказательство:

Пусть $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \exists\, n_0\, \forall n > n_0 : u_n < q^n.$$

Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$. Это означает сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Пусть теперь $l > 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \exists\, n_0\, \forall n > n_0 :\ \sqrt[n]{u_n} > 1 \ \Rightarrow\ u_n > 1.$$

Следовательно, последовательность членов ряда не стремится к нулю, значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

24 БИЛЕТ 24 – Признак сравнения

Пусть $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Тогда:

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Доказательство:

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то есть имеет конечную сумму

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n,\ \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} v_{n_k},\ \forall n = 1, 2, \ldots : \sigma_n < \sigma.$$

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ s_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} v_k = \sigma_n \leqslant \sigma,$$

А это (в силу леммы*) означает, что ряд $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots)$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ тоже расходится, иначе бы сходился ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ по доказанному выше.

**Лемма.* Если члены ряда неотрицательны, то он сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.

СЛЕДСТВИЯ

Пусть $u_n \geqslant 0$, $v_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l,$$

тогда:

- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится и $0 \leqslant l < +\infty$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится и $0 < l \leqslant +\infty$, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

25 БИЛЕТ 25 – Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{ абсолютно сходится } \iff \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ - сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n - \text{ сходится, а } \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ - расходится, } \iff \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится условно.}$$

ТЕОРЕМА 1.Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Доказательство:

$$\sum_{i=0}^{n} |u_n| = S \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, n_0\, (\forall n > n_0 \,\wedge\, \forall p \in \mathbb{Z}) : \sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}| < \xi.$$

$$\left| \sum_{k=0}^{p} u_{n+k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}| < \xi \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} u_n = S \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 2. Линейная комбинация абсолютно сходящихся рядов есть абсолютно сходящийся ряд.

Доказательство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = U \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = V \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda| \cdot |u_n| + |\mu| \cdot |v_n| = \lambda \cdot U + \mu \cdot V \in \mathbb{R}$$

$$|\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n| \leqslant |\lambda| \cdot |u_n| + |\mu| \cdot |v_n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n| = S \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda \cdot u_n + \mu \cdot v_n = \Sigma \in \mathbb{R}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если ряд абсолютно сходится, то любой ряд, составленный из членов данного ряда, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = U \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \{u_{n_k}\} : \sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = \Sigma \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n_k} = U.$$

ТЕОРЕМА 4. Если ряды абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений членов этих рядов, также абсолютно сходится, причем его сумма равна произведению сумм этих рядов.

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m| = U \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = V \in \mathbb{R},$$

$$\sum u_m \cdot v_n = U \cdot V.$$

Доказательство:

$$\begin{array}{ccccc} u_1 \cdot v_1 & u_1 \cdot v_2 & \dots & u_1 \cdot v_n & \dots \\ u_2 \cdot v_1 & u_2 \cdot v_2 & \dots & u_2 \cdot v_n & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ u_m \cdot v_1 & u_m \cdot v_2 & \dots & u_m \cdot v_n & \dots \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

$$u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1 + \dots$$

$$|u_1 \cdot v_1| + |u_1 \cdot v_2| + |u_2 \cdot v_2| + |u_2 \cdot v_1| + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| = U_n \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} |v_k| = V_k \in \mathbb{R}, s_n = \sum_{k=1}^{n} |u_{m_k} \cdot v_{n_k}|.$$

$$s_1 = |u_1 \cdot v_1| = U_1 \cdot V_1$$

$$s_4 = |u_1 \cdot v_1| + |u_1 \cdot v_2| + |u_2 \cdot v_2| + |u_2 \cdot v_1| = (|u_1| + |u_2|)(|v_1| + |v_2|) = U_2 \cdot V_2 \leqslant U \cdot V$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$s_{n^2} = (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|) \cdot (|v_1| + |v_2| + \dots |v_n|) = U_n \cdot V_n \leqslant U \cdot V.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{m_k} \cdot v_{n_k} = U \cdot V$$

26 БИЛЕТ 26 – Теорема Лейбница

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по модулю, то ряд сходится.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,\ u_n \geqslant u_{n+1} > 0,\ n = 1, 2, \ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot u_n = S \in \mathbb{R};$$

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Доказательство:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}\cdot u_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2k-1} - u_{2k}).$$

$$u_{2k-1} - u_{2k} \geqslant 0 \ \Rightarrow\ S_{2k} \leqslant S_{2k+2}$$

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} \ \Rightarrow\ S_{2k} < u_1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1} = \left(\sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n+1}\cdot u_n\right) + u_{2k+1}.$$

$$\lim_{k\to\infty} u_{2k+1} = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S;\ \lim_{k\to\infty} S_n = S. \ \Rightarrow$$

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \leqslant S_{2k-1} \ \Rightarrow\ S \leqslant S_{2k-1}.$$

$$S - S_{2k} \leqslant S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1}; \tag{1}$$

$$S_{2k-1} - S \leqslant S_{2k-1} - S_{2k} = u_{2k}. \tag{2}$$

По индукции [условия (1) и (2)] доказано, что

$$|S - S_n| \leqslant u_{n+1}.$$

27 БИЛЕТ 27 – Теорема Римана

Если ряд сходится условно и если A – любое число или любой из символов бесконечности, то надлежаще выбранной перестановкой членов этого ряда можно всегда заставить новый ряд сходиться к A.

Доказательство:

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^+ = +\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = +\infty$$

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > A;$$

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1-1}^+ \leqslant A;$$

$$u_1^+ + u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - u_2^- - \ldots - u_{n_2}^- < A;$$

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - u_2^- - \ldots - u_{n_2-1}^- \geqslant A.$$

$$u_1^+ + u_2^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - u_2^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_2+1} + \ldots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots - u_{n_4}^- + u_{n_3+1}^+ + \ldots$$

$$s_{n_1},\ s_{n_1+n_2},\ s_{n_2+n_3}, \ldots,\ s_{n_k+n+k+1},\ \ldots$$

$$s_{n_1} > A,\ s_{n_1+n_2} < A,\ s_{n_2+n_3} > A, \ldots$$

$$|A - s_{n_k+n_{k+1}}| \leqslant u_{n_{k+1}}^{\pm} < \xi \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} s_{n_k+n_{k+1}} = A.$$

$$n > n_1 + n_2,\ \exists\, k :$$

$$(s_{n_k+n_{k+1}} \leqslant s \leqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}}) \wedge (s_{n_k+n_{k+1}} \geqslant s \geqslant s_{n_{k+1}+n_{k+2}}) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} s_n = A$$