Travaux Dirigés de LOGIQUE
STI 3A
TD 2 : Logique des Propositions

P. Clemente

2 Sémantique

2.1 Tables de vérité

Question 1. Pour chacune des formules suivantes (après simplification éventuelle), donner :
- l'ensemble de ses sous-formules ;
- sa table de vérité ;
- une interprétation à **V**.

1. $(\neg((p \wedge q) \Rightarrow p))$
2. $(p \Rightarrow (q \vee (\neg q)))$
3. $(q \vee (\neg(q \wedge q)) \Rightarrow (\neg p))$

2.2 Tautologies

Tables de vérité et algorithme de Quine

Question 2. Démontrer que chacune des formules suivantes est une tautologie avec l'algorithme de Quine.

1. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
2. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
3. $(\neg(p \vee q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$
4. $(\neg(p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
5. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Tables de vérité VS **algorithme de Quine**

Question 3. Pour les formules suivantes, vous utiliserez et comparerez l'efficacité des **deux** méthodes.

1. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
2. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

Algorithme de réduction

Question 4. Utiliser la méthode dite de *réduction* (démonstration par l'absurde utilisant l'implication) pour démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$

2.3 Consistance, inconsistance, validité

Question 5. Que peut-on dire des formules suivantes : consistante, valide, contradictoire ?

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
2. $((p \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow m)) \Rightarrow ((p \vee s) \Rightarrow q)$

Votre intuition est-elle d'accord ?

2.4 Conséquence logique

Rapellons la notion de conséquence logique. Si E est un ensemble de formules, la notation $E \models C$ signifie que toutes les interprétations rendant *vraies* toutes les formules de E rendent également *vraie* la formule C. C est alors une conséquence logique de E.

Remarque : Une *tautologie* est une conséquence logique de l'ensemble vide.

D'une façon générale, si $E = \{H_1, ..., H_n\}$ on a :

$$\{H_1, ..., H_n\} \models C \Leftrightarrow (H_1 \wedge ... \wedge H_n) \Rightarrow C$$

Question 6. Montrer que $\neg p$ est une conséquence logique de $p \Rightarrow m$ et $\neg m$.

Question 7. Est-ce que $\neg m$ est une conséquence logique de $p \Rightarrow m$ et $\neg p$.

2.5 Logique trivalente

Le but de cet exercice est d'étendre la logique propositionnelle « classique » (travaux déjà effectuées par le passé) vers une logique avec trois valeurs de vérité : **V**, **F** et Inconnu (notée **?**). Les principes pour étendre un connecteur (unaire ou binaire) booléen sont :

- Si tous les arguments sont parmi **V**et **F**, alors le connecteur doit renvoyer le même résultat que dans le cas classique ;
- Si un ou plusieurs arguments sont à valeur **?**, le résultat est **V**(*resp.* **F**) si et seulement si on obtient toujours quand on remplace tous les arguments valant **?** par toutes les combinaisons possibles de **V**et **F**. Si le résultat ne peut être ni **V**ni **F** il est alors **?**.

Par exemple, la table de vérité du connecteur $\neg$ selon ces deux principes devient :

x	$\neg x$
V	**F**
V	**F**
?	?

Question 8. Donner la table de vérité du connecteur $\wedge$ pour la logique trivalente.

Question 9. Donner la table de vérité du connecteur $\vee$ pour la logique trivalente.

Question 10. Est-ce que la loi de *De Morgan*, qui dit que les deux formules $\neg(A \wedge B)$ et $\neg A \vee \neg B$ ont toujours la même valeur de vérité, est toujours vraie ?