

Travaux Dirigés de LOGIQUE

STI 3ème année

TD 3 : Logique des Propositions

Éléments de Correction

P. Clemente

1 Mise sous FNC

Exercice 1. Mettre les formules suivantes sous FNC.

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
2. $(f \Rightarrow (q \vee r))$
3. $(a \Rightarrow (b \wedge c))$
4. $(r \Rightarrow (s \wedge t)) \vee (s \Rightarrow (t \vee r))$
5. $((f \vee g) \Rightarrow h) \wedge (h \vee (f \Rightarrow h))$

Correction 1.

| | | | |
|----|--|---|------------------|
| 1. | $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ | $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$ $\Leftrightarrow (\neg p \wedge p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p \wedge \neg q)$ $\Leftrightarrow (\mathbf{F} \wedge \neg q) \vee (\mathbf{F} \wedge p)$ $\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee \mathbf{F}$ $\Leftrightarrow \square$ | (clause vide) |
| 2. | $((f \Rightarrow (q \vee r)))$ | $\Leftrightarrow (\neg f \vee q \vee r)$ | (1 seule clause) |
| 3. | $((a \Rightarrow (b \wedge c)))$ | $\Leftrightarrow (\neg a \vee (b \wedge c))$ $\Leftrightarrow (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c)$ | (2 clauses) |
| 4. | $(r \Rightarrow (s \wedge t)) \vee (s \Rightarrow (t \vee r))$ | $\Leftrightarrow (\neg r \vee (s \wedge t)) \vee (\neg s \vee (t \vee r))$ $\Leftrightarrow (\neg r \vee (s \wedge t)) \vee (\neg s \vee t \vee r)$ $\Leftrightarrow ((\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee t)) \vee (\neg s \vee t \vee r)$ $\Leftrightarrow (\neg r \vee s \vee \neg s \vee t \vee r) \wedge (\neg r \vee t \vee \neg s \vee \cancel{t} \vee r)$ $\Leftrightarrow (\mathbf{V} \vee \mathbf{V} \vee t) \wedge (\mathbf{V} \vee t \vee \neg s)$ $\Leftrightarrow \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}$ $\Leftrightarrow \mathbf{V}$ | (clause valide) |
| 5. | $((f \vee g) \Rightarrow h) \wedge (h \vee (f \Rightarrow h))$ | $\Leftrightarrow (\neg(f \vee g) \vee h) \wedge (h \vee (\neg f \vee h))$ $\Leftrightarrow ((\neg f \wedge \neg g) \vee h) \wedge (h \vee \neg f)$ $\Leftrightarrow ((\neg f \vee h) \wedge (\neg g \vee h)) \wedge (h \vee \neg f)$ $\Leftrightarrow (\neg f \vee h) \wedge (\neg g \vee h) \wedge (\cancel{\neg f \vee h})$ $\Leftrightarrow (\neg f \vee h) \wedge (\neg g \vee h)$ | (2 clauses) |

2 QuineFNC

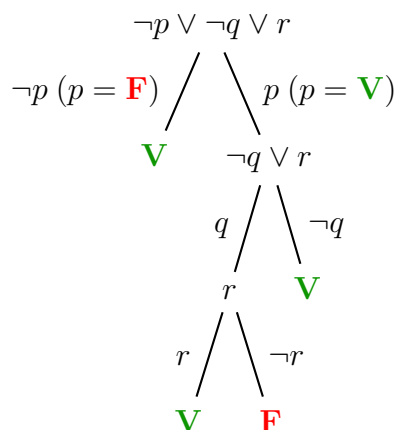
Exercice 2. Appliquer l'algorithme de QuineFNC aux formules suivantes :

1. $((p \wedge q) \Rightarrow r)$
2. $(\neg p \vee q) \vee (q \vee (r \Rightarrow \neg s))$

Correction 2.

1. $((p \wedge q) \Rightarrow r)$

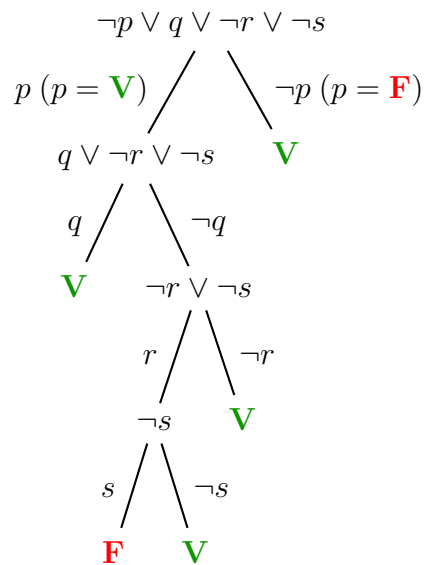
Mise sous FNC : $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r)$



La formule ci-dessus est donc simplement consistante. On remarque la grande efficacité de l'algorithme de QuineFnc puisque seule une branche est réellement développée, les autres étant systématiquement tronquées à leur premier noeud.

2. $(\neg p \vee q) \vee (q \vee (r \Rightarrow \neg s))$

Mise sous FNC : $(\neg p \vee q) \vee (q \vee (r \Rightarrow \neg s)) \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee q \vee \neg r \vee \neg s) \Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee \neg r \vee \neg s)$



3 Davis & Putnam pour les FNC

Exercice 3. Appliquer l'algorithme de Davis & Putnam pour les FNC à la formule suivante :

1. $\{a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg c \vee d, \neg d \vee c, \neg b \vee \neg c, \neg b \vee c, b \vee \neg c, \neg e, \neg f\}$

Correction 3.

1. $\{a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f, \neg a \vee b, \neg b \vee a, \neg c \vee d, \neg d \vee c, \neg b \vee \neg c, \neg b \vee c, b \vee \neg c, \neg e, \neg f\}$

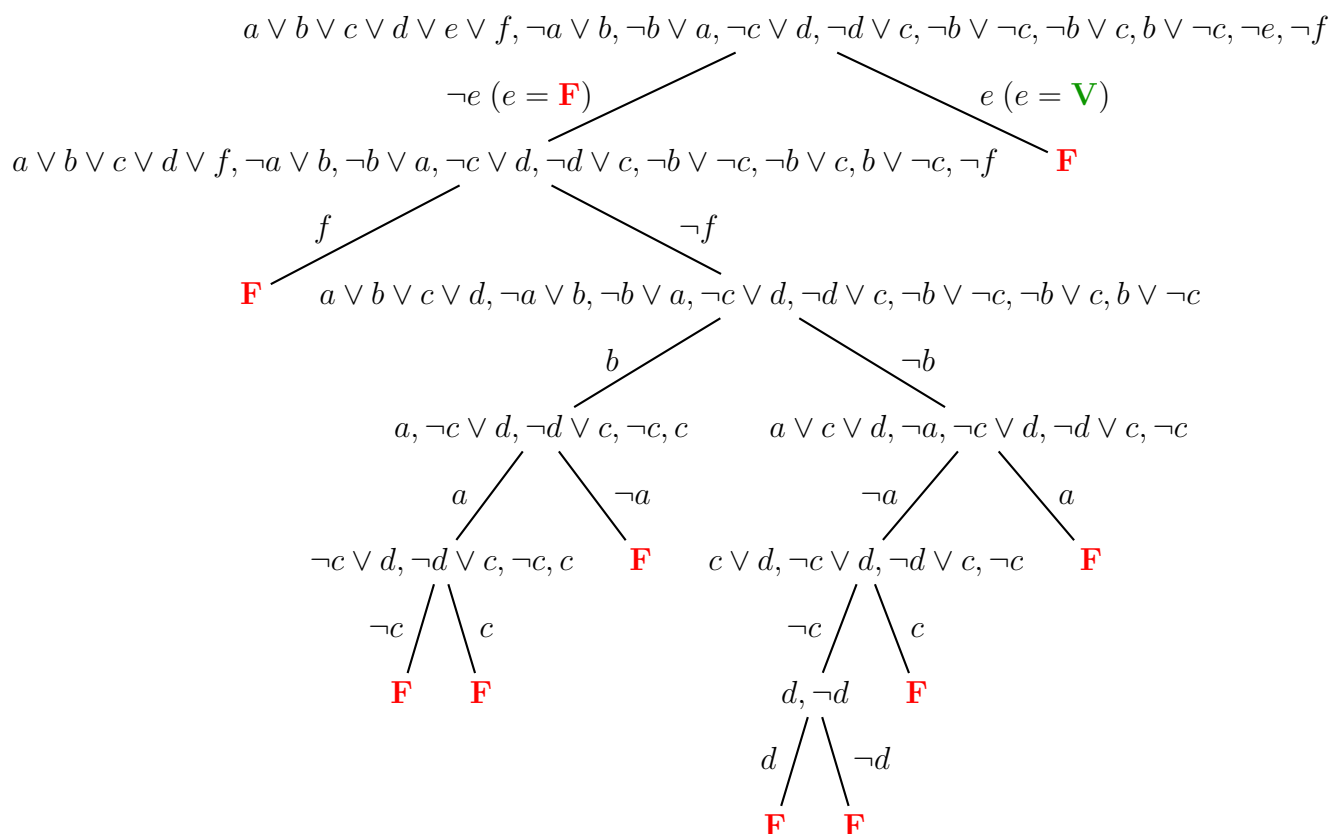
Pour l'application de l'algorithme de Quine, Davis et Putnam proposent 2 heuristiques pour le choix du littéral à utiliser pour le calcul de résolvante :

- S contient l'une des clauses à un seul littéral p ou $\neg p$;
- Un seul des littéraux p et $\neg p$ intervient dans S .

Du premier item, on pourrait choisir $\neg e$ ou $\neg f$. Du second, on ne peut rien déduire à cet instant.

Commençons donc par $\neg e$ puis nous passerons à $\neg f$ et nous poursuivrons ensuite en gardant ces deux heuristiques à l'esprit. Lorsque ces 2 heuristiques ne sont pas applicables, on applique les règles de choix classiques de Quine : une variable propositionnelle qui apparaît dans le plus de clauses possible de la FNC en cours.

On peut laisser la FNC sous la forme d'un ensemble de clauses en oubliant pas que dans ce cas les virgules sont des \wedge .



4 Résolution sur clauses de Horn

Exercice 4. Appliquer l'algorithme de résolution clausale sur clauses de Horn les formules suivantes :

1. $S = \{p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, q, r, p \vee \neg r, q \vee \neg s, s \vee \neg t, p \vee \neg q\}$
2. $S = \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee e, a \vee \neg b, b \vee \neg c, c \vee \neg d, d \vee \neg c, b, \neg a \vee \neg c \vee \neg e \vee \neg d, \neg b \vee c\}$

Correction 4.

L'algorithme est un peu différent de la résolution classique : on remplace (dans la FNC initiale chaque clause par sa résolvante). Le littéral choisi et la clause utilisée pour le calcul de la résolvante sont soulignés à chaque étape de l'algorithme.

3. $S = \{p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s, q, r, p \vee \neg r, q \vee \neg s, s \vee \neg t, p \vee \neg q\}$

| | | | | | | | |
|-------|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------|
| S | <u>$p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$</u> | <u>$q$</u> | r | $p \vee \neg r$ | $q \vee \neg s$ | $s \vee \neg t$ | $p \vee \neg q$ |
| S_1 | $p \vee \neg r \vee \neg s$ | q | r | $p \vee \neg r$ | $q \vee \neg s$ | $s \vee \neg t$ | <u>$p \vee \neg q$</u> |
| S_2 | <u>$p \vee \neg r \vee \neg s$</u> | <u>$q$</u> | <u>$r$</u> | $p \vee \neg r$ | $q \vee \neg s$ | $s \vee \neg t$ | p |
| S_3 | $p \vee \neg s$ | q | <u>r</u> | <u>$p \vee \neg r$</u> | $q \vee \neg s$ | $s \vee \neg t$ | p |
| S_4 | $p \vee \neg s$ | q | r | p | $q \vee \neg s$ | $s \vee \neg t$ | p |

On ne peut plus calculer de résolvantes. L'algorithme se termine. On n'a pas pu arriver à **F**, ce qui signifie qu'il n'y a pas de contradiction dans S et qu'il est donc consistant.

4. $S = \{\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee e, a \vee \neg b, b \vee \neg c, c \vee \neg d, d \vee \neg c, b, \neg a \vee \neg c \vee \neg e \vee \neg d, \neg b \vee c\}$

Pour aller plus vite, quand c'était possible, plusieurs étapes successives utilisant le même littéral ont été regroupées sur une même ligne.

| S | $\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee e$ | $a \vee \neg b$ | $b \vee \neg c$ | $c \vee \neg d$ | $d \vee \neg c$ | b | $\neg a \vee \neg c \vee \neg e \vee \neg d$ | $\neg b \vee c$ |
|-------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----|--|-----------------|
| S_1 | $\neg a \vee \neg c \vee e$ | a | $b \vee \neg c$ | $c \vee \neg d$ | $d \vee \neg c$ | b | $\neg a \vee \neg c \vee \neg e \vee \neg d$ | c |
| S_2 | $\neg c \vee e$ | a | $b \vee \neg c$ | $c \vee \neg d$ | $d \vee \neg c$ | b | $\neg c \vee \neg e \vee \neg d$ | c |
| S_3 | e | a | b | $c \vee \neg d$ | d | b | $\neg e \vee \neg d$ | c |
| S_4 | e | a | b | $c \vee \neg d$ | d | b | $\neg d$ | c |
| S_5 | e | a | b | $c \vee \neg d$ | d | b | \square | c |

On obtient la clause vide (\square) c'est-à-dire **F**. L'ensemble S de départ était donc inconsistent.