Logique
— TD 1 —
STI 3A

P. Clemente

6 avril 2016

1 Syntaxe

1.1 Formules bien formées

Exercice 1. Pour chaque formule, vérifiez qu'il s'agit d'une formule bien formée (*fbf*), et dans le cas contraire, précisez la règle enfreinte.

1. $((a \Rightarrow b) \vee c)$
2. $(a \Rightarrow b) \vee c$
3. $(a \Rightarrow b \vee c)$
4. $((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow \neg c$
5. $\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \Rightarrow a \vee b)$
6. $\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow (a \vee b)$
7. $\neg(\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow \neg(a \vee b))$
8. $\neg\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$
9. $\neg\neg\neg((a \Rightarrow b) \vee c) \Leftrightarrow (\neg a \vee b)$
10. $c \Rightarrow (\neg(a \Leftrightarrow b) \vee (d \wedge e)) \wedge \neg(a \vee \neg c)$

1.2 Simplification de formules

Dans la suite du cours et des TD, on se permettra de supprimer certaines parenthèses dans les formules. Ce raccourci d'écriture se fera selon les règles suivantes.

- priorité décroissante des opérateurs : $\neg$ puis $\{\wedge, \vee\}$ puis $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- associativité : à gauche et à droite pour $\wedge$ et $\vee$, à gauche pour $\Rightarrow$ $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ sera interprété comme $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.
- les parenthèses extérieures sont implicites.

Exercice 2. En déduire des simplifications d'écriture pour les formules suivantes :

1. $((p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q))$
2. $(((p \vee q) \vee r) \Rightarrow ((\neg p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)))$
3. $(p \vee ((p \Leftrightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow r)))$

1.3 Sous-formules

Représentation en arbres

Exercice 3. Pour chacune des formules suivantes, donner une représentation sous forme d'arbre et donner sa hauteur, en indiquant également son connecteur principal et le nombre de sous-formules.

1. $(q \Rightarrow (\neg p))$
2. $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$
3. $\neg(p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \wedge q)$
4. $(\neg((\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow \neg q)$
5. $(((p \wedge (\neg q \Rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r)) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p))$

Nombre de connecteurs de sous-formules

Exercice 4. Soit F une formule propositionnelle à n connecteurs. Quel le nombre maximum de sous-formules de F ? Le démontrer par récurrence sur n.

Longueur de sous-formules

Soit A une formule propositionnelle bien formée complètement parenthésée (sans appliquer les règles de suppression données à l'exercice intitulé "Arbres syntaxiques"). On note $u(A)$ le nombre d'occurrences du connecteur "$\neg$" ($u(A) \geq 0$) et $b(A)$ le nombre d'occurrences de connecteurs binaires ($b(A) \geq 0$).

Soit $L(A)$ la longueur de la formule de la formule A définie comme le nombre de (tous) ses symboles. Ainsi par exemple, pour $A = ((\neg p) \vee q)$, on a $L(A) = 8$.

Exercice 5. Démontrer par récurrence sur le nombre total de connecteurs de A, que $L(A) = 4 \times b(A) + 3 \times u(A) + 1$.

1.4 Transformation syntaxiques simples

Équivalence de formules

Exercice 6. Pour chaque formule ci-dessous, donner une formule logiquement équivalente telle :
- Les seules variables propositionnelles utilisées sont p et q.
- Les seuls connecteurs utilisés sont $\neg$ et $\vee$.

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow q$
3. $p \Leftrightarrow q$
4. $\neg(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

Système complet de connecteurs

$\boxed{\textbf{Exercice 7.}}$ L'exercice précédent était possible car $\{\neg, \vee\}$ est ce qu'on appelle un *système complet de connecteurs*.

Propriété : Pour montrer qu'un système de connecteurs est complet, il faut et il suffit de prouver que les fonctions logiques $\neg a$, $(a \wedge b)$ et $(a \vee b)$ peuvent s'exprimer en n'utilisant que les connecteurs du système. Il est dit fonctionnellement complet : il suffit pour exprimer toute fonction de vérité.

Par exemple, l'ensemble $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ n'est pas un système complet de connecteur. Par contre, $\{\wedge, \vee, \neg\}$ en est un.

Remarque : On peut bien sur utiliser les constantes **V** et **F** dans les propositions logiques.

Montrer que les ensembles suivants définissent chacun un système complet de connecteurs :

1. $\{\Rightarrow, \neg\}$;
2. $\{\text{Nand}\}$;
3. $\{\text{Nor}\}$.

Rappels : Tables de vérité du Nand et du Nor

a	b	a Nand b
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

a	b	a Nor b
V	**V**	**F**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**