

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. И. ЛОВАЧЕВСКОГО

РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Фазовая плоскость лампового генератора

Работу выполнили студенты

Есюнин М.В., Есюнин Д.В.

430 группы

научный руководитель:

Половинкин А.В.

Нижний Новгород, 2018

Оглавление

1 Теоретическая часть	1
1.1 Метод Ван-дер-Поля	1
1.2 Исходные и укороченные уравнения	5
1.3 Стационарные режимы работы генератора	6
2 Эксперимент	11
2.1 Мягкий режим генератора	11
2.1.1 Бифуркационная диаграмма	11
2.1.2 Фазовые траектории	12
2.1.3 Квазипериодические затухания	12
2.1.4 Апериодический процесс	13
2.2 Жесткий режим генератора	13
2.2.1 Бифуркационная диаграмма	13
2.2.2 Определение неустойчивого равновесия	13
2.2.3 Фазовые траектории	14
2.3 Сложно-жесткий режим генератора	14
2.3.1 Бифуркационная диаграмма	14
2.3.2 Фазовые траектории	15
2.4 Вывод	17

Цель работы

Изучение различных режимов возбуждения лампового генератора и установление зависимости амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы.

Аппаратом теоретического рассмотрения является метод Ван-дер-Поля. Полученные с его помощью результаты сравниваются с результатами экспериментального исследования фазовой плоскости изучаемой системы.

1. Теоретическая часть

1.1. Метод Ван-дер-Поля

Слабонелинейные квазиконсервативные системы могут совершать периодические движения с постоянной амплитудой, определяемой свойствами системы. Таким периодическим движениям на фазовой плоскости соответствуют изолированные замкнутые фазовые траектории, называемые *предельными циклами*.

Предельный цикл будет устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в малой окрестности предельного цикла, будут асимптотически приближаться при $t \rightarrow \infty$.

Динамические системы, а фазовом портрете которых имеется, по крайней мере, один устойчивый предельный цикл, называются автоколебательными.

Будем считать, что система описывается уравнением вида

$$\ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

где $f(x, \dot{x})$ - нелинейная ограниченная функция

μ - малый безразмерный параметр.

Нас интересуют периодические решения. Метод Ван-дер-Поля позволяет задачу отыскания периодических решений уравнения (1) свести к несравненно более простой - задаче нахождения состояний равновесия так называемых укороченных уравнений. Перейдем к их составлению.

При $\mu = 0$ уравнение (1) описывает обычный гармонический осциллятор, и его решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(t + \varphi) = A \cos \theta, \\ \dot{x} &= y = -A \sin(t + \varphi) = -A \sin \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где A и φ - произвольные постоянные, имеющие физический смысл амплитуды и фазы колебаний.

Решение можно представить и в комплексной форме в виде:

$$\begin{aligned} x &= z e^{jt} + z^* e^{-jt}, \\ \dot{x} &= y = j(z e^{jt} - z^* e^{-jt}), \end{aligned} \quad (3)$$

где z и z^* - произвольные постоянные, являющиеся комплексной и комплексно сопряженной амплитудами.

Решение вида (3) легко сводится к виду (2), если положить

$$z = \rho e^{j\varphi}, z^* = \rho e^{-j\varphi}$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} x &= \rho(e^{j(t+\varphi)} + e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \cos(t + \varphi), \\ \dot{x} &= y = j\rho(e^{j(t+\varphi)} - e^{-j(t+\varphi)}) = 2\rho \sin(t + \varphi). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |z| &= |z^*| = \rho = \frac{A}{2}, \\ \arg z &= -\arg z^* = \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

При $\mu \neq 0$, но сколь угодно малом, решение уравнения (1) не должно существенно отличаться от решения для линейного осциллятора, поэтому будем его искать в виде (2), считая теперь A и φ не постоянными величинами, а некоторыми неизвестными функциями времени:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos \theta - A(1 + \dot{\varphi}) \sin \theta = -A \sin \theta, \quad \theta = t + \varphi$$

Откуда следует

$$\dot{A} \cos \theta - A \dot{\varphi} \sin \theta = 0.$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1), будем иметь

$$\dot{A} \sin \theta + A \dot{\varphi} \cos \theta = -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta).$$

Разрешая два последних уравнения относительно \dot{A} и $\dot{\varphi}$, получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta, \\ A \dot{\varphi} &= -\mu f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta. \end{aligned} \tag{5}$$

адекватную уравнению (1), но записанную в других переменных, называемых переменными Ван-дер-Поля. Полученная система не является более простой по сравнению с уравнением (1). Однако, если учесть, что $\mu \ll 1$, то из нее можно получить приближенную, значительно более простую систему.

Правая часть системы (5) является периодической функцией явно входящего времени $\theta = t + \varphi$ и зависит от A и φ . Поскольку A и φ являются медленно меняющимися функциями времени, то можно их считать постоянными на периоде быстрых осцилляций. Воспользуемся этим и, проинтегрировав уравнения, определим средние значения за период $T = 2\pi$. Заметим, что интегрирование можно проводить не по времени, а по $\theta = t + \varphi$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta d\theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi A} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \cos \theta d\theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Запишем ее в виде

$$\frac{dA}{dt} = \mu \Phi(A), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mu \varphi(A), \tag{7}$$

где $\Phi(A)$ и $\varphi(A)$ - средние за период значения периодических функций, зависящие только

от A :

$$-f(A \cos \theta; -A \sin \theta) \sin \theta, \quad f\left(-\frac{1}{A} \cos \theta; -A \sin \theta\right) \cos \theta.$$

Полученные уравнения (7) и называются системой укороченных или усредненных уравнений. Эта система определяет амплитуду и фазу квазигармонических колебаний исходной системы, описываемой уравнением (1). Если мы найдем решения укороченных уравнений, то с помощью соотношений (2) получим приближенные решения исходной системы.

Нас интересует частный пример, когда $\varphi(A) = 0$

Этот случай довольно часто встречается на практике, например, при рассмотрении режимов работы ламповых генераторов без учета сеточных токов. Тогда система укороченных уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dA}{dt} = \mu \Phi(A), \quad \varphi = \varphi_0 = \text{Const} \quad (8)$$

Первое уравнение может исследоваться независимо от второго, т.к. оно зависит только от A . Координаты состояния равновесия A_0 на фазовой прямой A есть корни уравнения $\Phi(A_0) = 0$

При этом характеристическое уравнение имеет вид $p - \mu \Phi'_A(A_0) = 0$ и состояние равновесия будет устойчивым, если

$$\frac{d\Phi}{dA} = \Phi'_A(A_0) < 0$$

и неустойчивым при выполнении обратного неравенства.

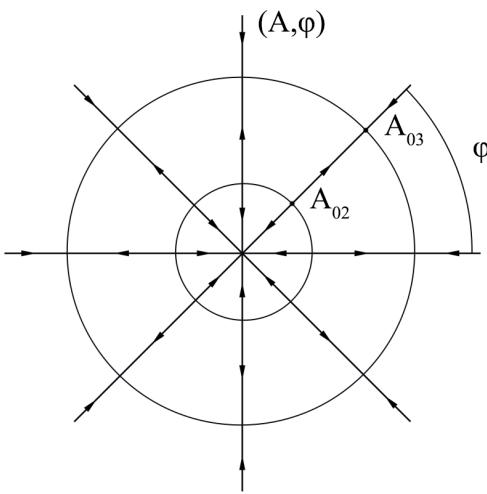


Рис. 1

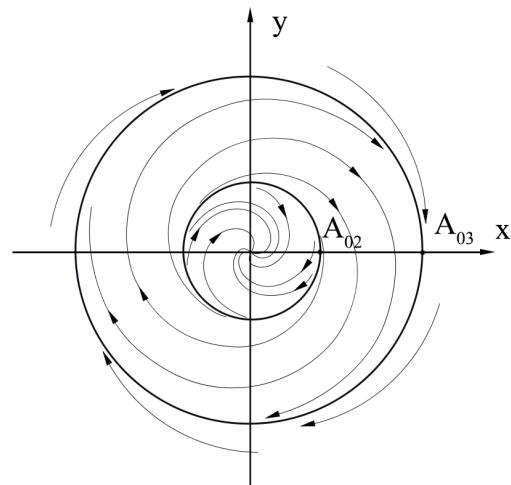


Рис. 2

Картина фазовых траекторий на плоскости переменных Ван-дер-Поля для системы

с тремя состояниями равновесия (8) (где A и φ полярные координаты), выглядит следующим образом (рис.1):

Переход к переменным xu осуществляется с помощью формул преобразования (2). Фазовый портрет на плоскости xu может быть получен, если вращать плоскость Вандер-Поля по часовой стрелке с круговой частотой $\omega = 1$ вокруг начала координат. Тогда окружности, состоящие из состояний равновесия, перейдут в круговые предельные циклы, имеющие те же радиусы A_{0i} . Предельные циклы будут устойчивы, если устойчивы состояния равновесия укороченных уравнений, и наоборот. Остальные траектории, представляющие собой отрезки прямых на плоскости переменных Вандер-Поля, преобразуются на плоскости xu в спирали (рис.2).

1.2. Исходные и укороченные уравнения

В работе исследуется LC-генератор с контуром в цепи сетки рис.3, относящийся к разряду квазисинусоидальных автоколебательных систем.

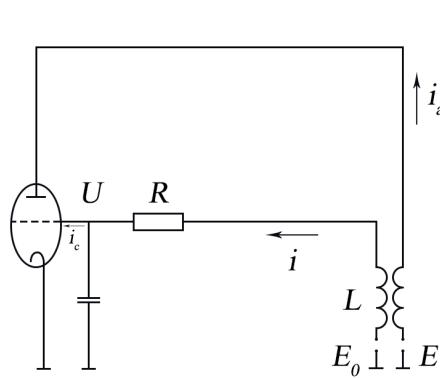


Рис. 3

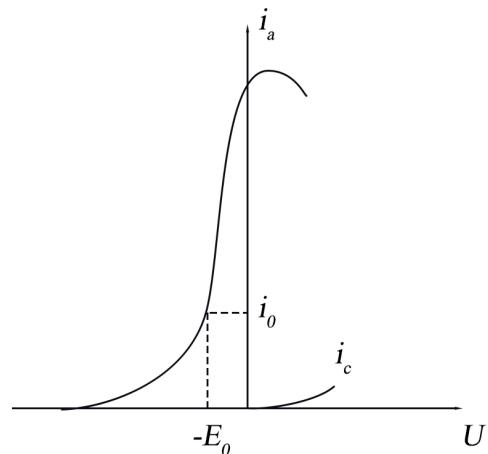


Рис. 4

Отправной точкой теоретического исследования этой системы являются уравнения Кирхгофа, которые, с учетом обозначений, принятых на рис.3, запишутся в виде:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri + U &= M \frac{di_a}{dt} - E_0, \\ i &= C \frac{dU}{dt} + i_c, \end{aligned} \quad (9)$$

где i_a и i_c - анодные и сеточные токи лампы, зависящие в общем случае от анодного и сеточного напряжений. В дальнейшем будем учитывать их зависимость только от сеточных напряжений, то есть пренебрежем реакцией анода. Качественный вид анодно-сеточной и сеточной характеристик приведен на рис.4. В проводимом рассмотрении эти нелинейные функции будут аппроксимированы полиномами.

Исключив из системы (9) ток и введя новые переменные

$$x = U + E_0, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (10)$$

запишем исходную систему (9) в виде одного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + x = \frac{d}{d\tau}[-\delta x + \sigma f_1(x)] - f_2(x) \quad (11)$$

Здесь $\sigma = \frac{M}{\sqrt{LC}} > 0$, $\alpha = \frac{L}{M}$, $\delta = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, $f_1 = (i_a - \alpha i_c)$, $f_2 = Ri_c$. Заметим, что функция $f_1(x)$ включает в себя разность анодного и сеточного токов, но т.к. сеточный ток меньше анодного, то не будет большой ошибкой считать $f_1 = i_a$.

Укороченные уравнения для данной системы будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{2}(\delta - \sigma \bar{f}_1(\rho^2))\rho, \\ \dot{\varphi} &= \frac{1}{2}\bar{f}_2(\rho^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\bar{f}_1(\rho^2)$ определяется анодно-сеточной характеристикой лампы и влияет на условия возбуждения генератора и амплитуду установившихся колебаний; $\bar{f}_2(\rho^2)$ определяется сеточной характеристикой и влияет на поправку к частоте. Для отыскания установившихся (стационарных) значений амплитуды автоколебаний достаточно найти устойчивые состояния равновесия $\bar{\rho}$ первого из уравнений системы (12). При этом из второго уравнения системы найдем поправку к частоте автоколебаний:

$$\Delta\omega = \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho}^2)}{2} \quad (13)$$

задающую величину, на которую частота колебаний генератора будет отличаться от частоты колебаний контура. Тем самым, в режиме установившихся автоколебаний будем иметь:

$$\varphi = \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho}^2)}{2}\tau + \varphi_0 \quad (14)$$

$$x = 2\bar{\rho} \cos(\tau + \varphi) = 2\bar{\rho} \cos[(1 + \frac{\bar{f}_2(\bar{\rho})}{2})\tau + \varphi_0]. \quad (15)$$

1.3. Стационарные режимы работы генератора

Прежде чем переходить к изучению различных режимов работы лампового генератора, выясним, при каких условиях справедлива та или иная аппроксимация нелинейной характеристики лампы. На динамику генератора и стационарные режимы его работы влияют только нечетные члены степенного ряда нелинейной характеристики

$f_1(x)$. Выделим из нелинейной функции нечетную ее часть с помощью соотношения

$$f_H(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (16)$$

Вид нечетной части характеристики, а, следовательно, и возможная её аппроксимация зависят от выбора рабочей точки, положение которой определяется постоянным смещением E_0 на сетке лампы. Рассмотрим возможные аппроксимации нелинейной функции f_1 и, как следствие, различные режимы работы генератора.

1. Напряжение смещения E_0 на управляющей сетке лампы (рабочая точка) выбрано так, что нечетная часть анодно-сеточной характеристики имеет вид, приведенный на рис.5. Это возможно в том случае, когда напряжение смещения задано в точке максимальной крутизны характеристики. При этом функцию f_1 достаточно точно можно представить в виде полинома третьей степени, причем аппроксимация будет справедлива для части кривой, обозначенной сплошной линией на рис.5:

$$f_1(x) = a_1 + \frac{a_2}{2}x^2 - \frac{a_3}{6}x^3 \quad (17)$$

Здесь и в дальнейшем все коэффициенты аппроксимирующего полинома будем считать положительным. Для аппроксимации (17) средняя крутизна анодно-сеточной характеристики, т.е. функция \bar{f}_1 примет вид:

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 - \frac{a_3}{2}\rho^2. \quad (18)$$

В этом случае закон изменения амплитуды колебаний, согласно системе (12) будет определяться следующим уравнением:

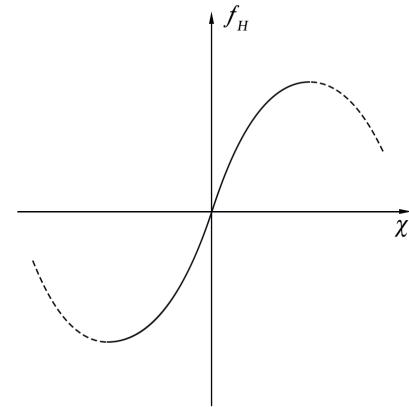


Рис. 5

где $\bar{F}(\rho) = \frac{[\delta - \sigma(a_1 - \frac{a_3}{2}\rho^2)]}{2}$. Приравнивая правую часть этого уравнения нулю, получим стационарные значения амплитуд колебаний:

$$\bar{\rho}_1 = 0, \quad \bar{\rho}_2 = \sqrt{\frac{2(-\delta + \sigma a_1)}{\sigma a_3}}. \quad (20)$$

Их устойчивость определяется корнями следующего характеристического уравнения:

$$\rho = \frac{d}{d\rho}[-\rho \bar{F}(\rho)] \Big|_{\rho=\bar{\rho}} = -\bar{F}(\bar{\rho}) - \bar{\rho} \bar{F}'(\bar{\rho}) \quad (21)$$

Состояние системы с нулевым значением $\bar{\rho}$ (невозбужденный генератор) будет устойчивым при $\bar{F}(0) > 0$, т.е. при $\sigma = \frac{\delta}{a_1}$ и неустойчивым в противном случае. Второе стационарное состояние устойчиво, если $\bar{F}'(\bar{\rho}) = \sigma a_3 \bar{\rho}_2 > 0$, что выполняется при выбранных знаках коэффициентов. Выражение (21) определяет зависимость амплитуды колебаний от линейного декремента $\delta = \frac{R\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$, коэффициента связи $\sigma = \frac{M}{\sqrt{LC}} > 0$, и коэффициентов аппроксимации анодно-сеточной характеристики a_1 и a_3 . Можно построить бифуркационные диаграммы, выражающие зависимость $\bar{\rho}_2$ от любого из перечисленных параметров. Зависимость $\bar{\rho}_2$ от параметра σ (величина обратной связи) приведена на рис.6, где точками обозначены устойчивые состояния, а крестиками - неустойчивые. Из приведенной диаграммы видно, что схема возбуждается при условии $\sigma > \frac{\delta}{a_1}$, или, если перейти к параметрам схемы, при $M > \frac{RC}{a_1}$. В этом неравенстве величина a_1 - крутизна анодно-сеточной характеристики в рабочей точке. Точка $\sigma = \frac{\delta}{a_1}$ на бифуркационной диаграмме называется *точкой бифуркации* - здесь качественно меняется поведение системы.

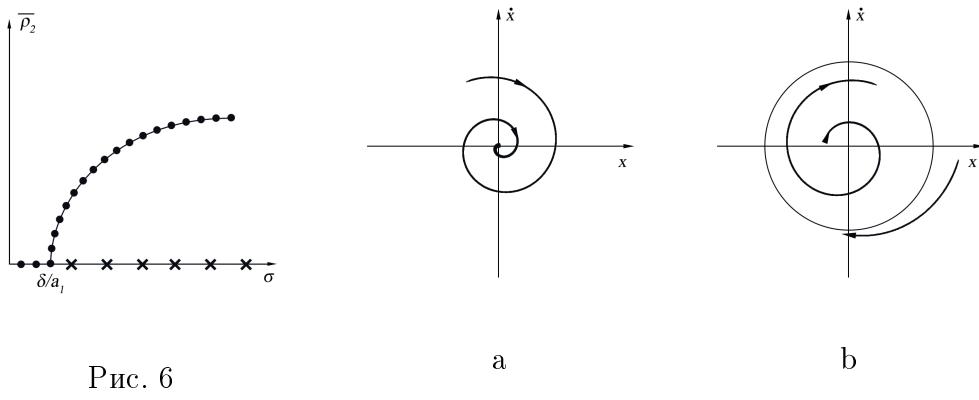


Рис. 6

а

б

Фазовые портреты системы при $\sigma < \frac{\delta}{a_1}$ и $\sigma > \frac{\delta}{a_1}$ приведены на рис.6а и рис.6б. Как видно из рис.6 и рис.6б, предельный цикл устанавливается при сколь угодно малых начальных условиях, то есть генератор обладает *мягким режимом* возбуждения по отношению к начальным условиям. Термин "мягкий" может употребляться в другом смысле - в качестве характеристики типа генератора, отличающегося плавным нарастанием установившегося значения амплитуды колебаний при медленном и непрерывном изменении параметра обратной связи. Приведенная на рис.6 бифуркационная диаграмма соответствует именно такому типу генератора.

2. Рабочая точка выбрана так, что нечетная часть характеристики имеет вид, приведенный на рис.7. Этому случаю чаще всего отвечают напряжения смещения, близкие к напряжению осечки лампы. При этом характеристику лампы необходимо аппроксимировать полиномом не ниже пятой степени. Такой аппроксимации соответствует средняя крутизна

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 + \frac{a_3}{2} \rho^2 - \frac{a_5}{12} \rho^4. \quad (22)$$

и, следовательно, уравнение, определяющее стационарные значения амплитуды автоколебаний принимает вид

$$\rho[\delta - \sigma(a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4)] = 0. \quad (23)$$

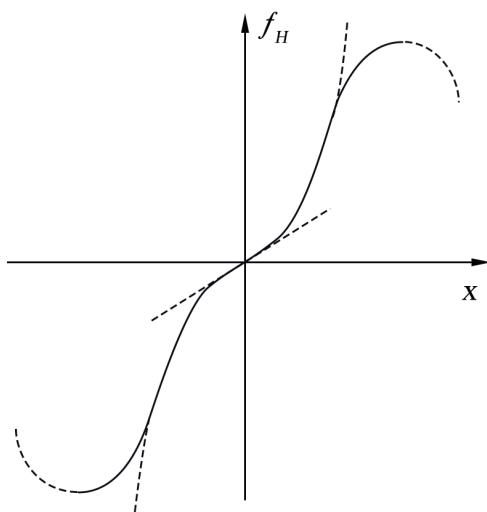


Рис. 7

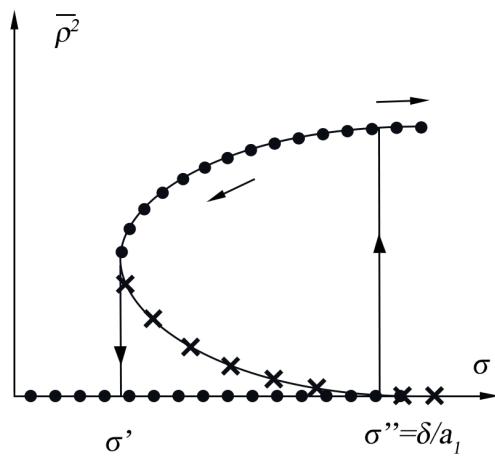


Рис. 8

Бифуркационная диаграмма для этого случая приведена на рис.8. Из него следует, что при значениях параметра σ , лежащих в интервале $\sigma' < \sigma < \sigma''$, возникновение автоколебаний возможно лишь, если начальное значение ρ превышает соответствующее пороговое значение. В этом случае говорят о *жестком режиме* возбуждения генератора. Бифуркационная диаграмма, изображенная на рис.9 характеризуется гистерезисным эффектом установления срыва автоколебаний при непрерывном изменении параметра σ . Системы с таким видом бифуркационной диаграммы относят к жёсткому типу генераторов. Для них, согласно рис.9, мягкое возбуждение возможно лишь при $\sigma > \sigma''$, т.е. за пределами области гистерезиса. На рис.10 а,б и с приведены фазовые портреты такого генератора для различных значений параметра σ .

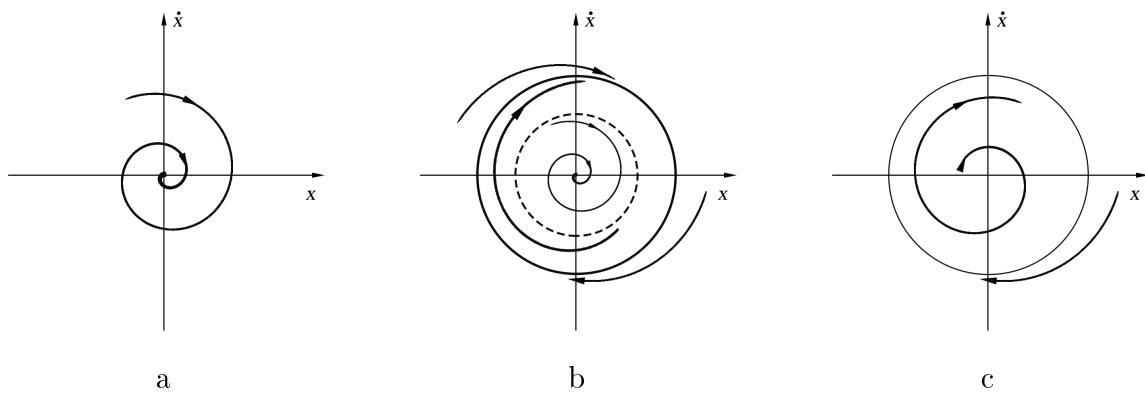


Рис. 9

3. Если рабочая точка выбрана при положительных напряжениях на сетке лампы, то график нечетной части нелинейной характеристики имеет вид, приведенный на рис.10.

Здесь для аппроксимации анодно-сеточной характеристики лампы необходимо использовать полином седьмой степени. В этом случае функция $\bar{f}_1(\rho^2)$ и уравнение для определения ненулевых состояний равновесия записутся в виде

$$\bar{f}_1(\rho^2) = a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4 - \frac{a_7}{144}\rho^6,$$

$$\delta - \sigma(a_1 + \frac{a_3}{2}\rho^2 - \frac{a_5}{12}\rho^4 - \frac{a_7}{144}\rho^6) = 0.$$

При этом возможны два варианта бифуркационной диаграммы $\bar{\rho}^2(\sigma)$, изображенные на рис.11.

В варианте а при уменьшении параметра σ происходит скачкообразный переход с большего предельного цикла на меньший и при дальнейшем уменьшении σ предельный цикл плавно исчезает. В варианте б при уменьшении параметра σ до σ_0 колебания срываются до нуля.

Описанная разновидность автоколебательных систем относится к генераторам *сложнно-жесткого типа*.

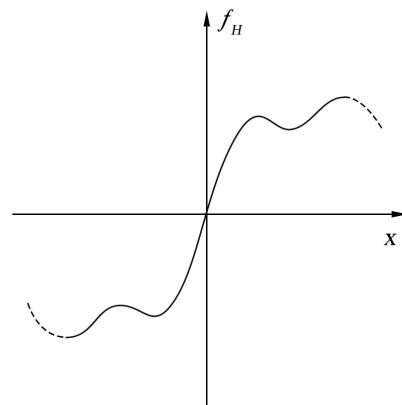


Рис. 10

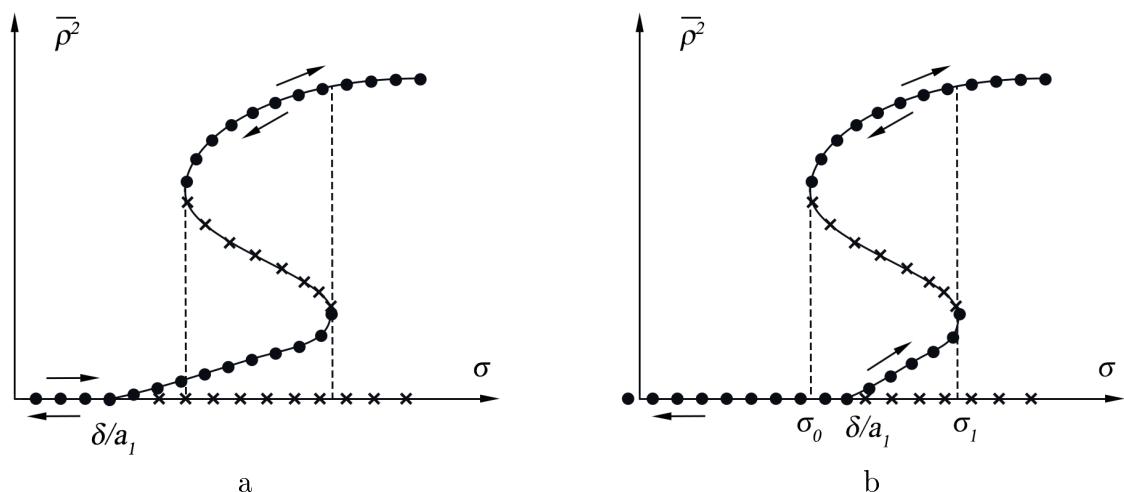


Рис. 11

2. Эксперимент

На рис.12 представлена схема установки.

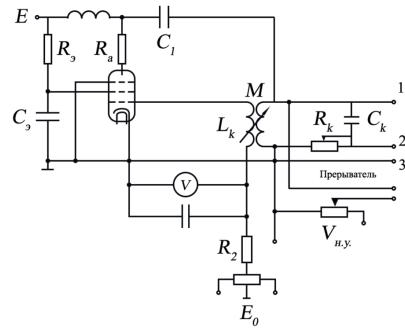


Рис. 12: схема установки

2.1. Мягкий режим генератора

Подбирай напряжения смещения E_0 , добились мягкого режима работы генератора.

2.1.1 Бифуркационная диаграмма

Сняли бифуркационную диаграмму, выражающую зависимость амплитуды автоколебаний от величины взаимоиндукции M . По графику можно наблюдать

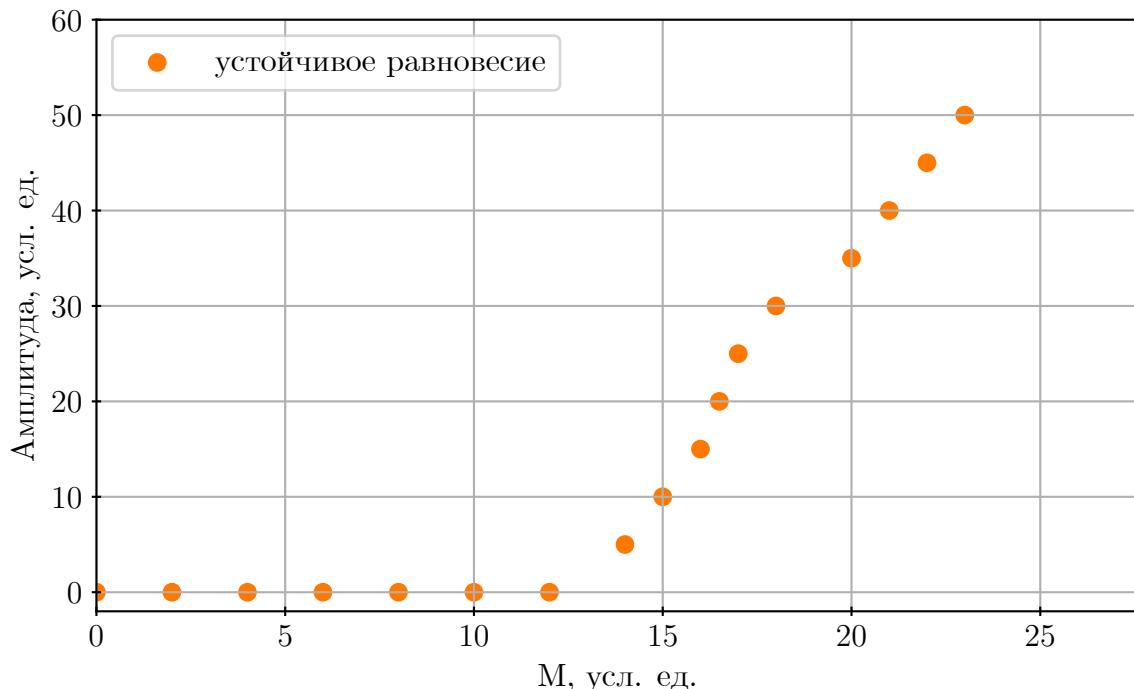


Рис. 13: бифуркационная диаграмма для мягкого режима

характерную кривую бифуркационной диаграммы для мягкого режима генератора.

2.1.2 Фазовые траектории

Получили фазовые траектории при различных начальных условиях для качественно различного поведения системы (левее и правее точки бифуркации). По фазовым

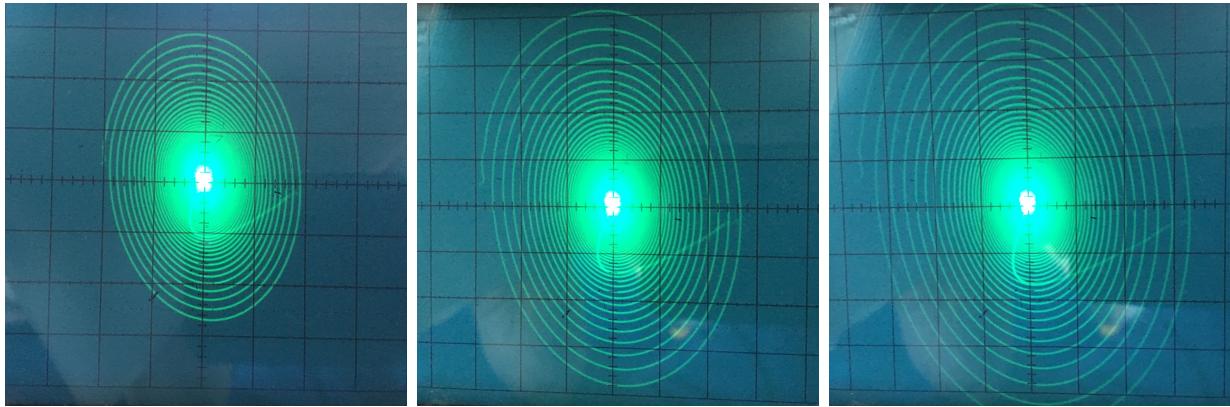


Рис. 14: Левее точки бифуркации

траекториям видно, что устойчивый режим наблюдается в нуле, так как мы находимся левее точки бифуркации. По фазовым траекториям видно, что устойчивый режим

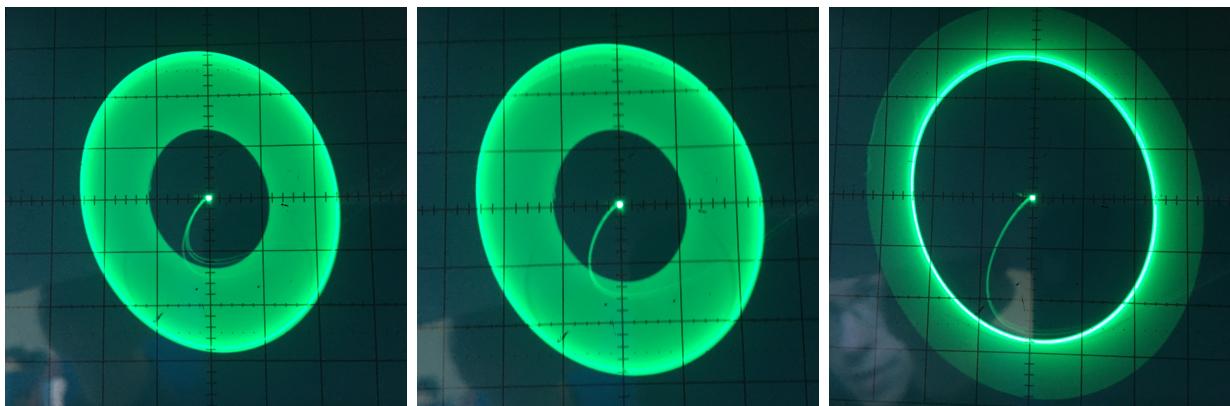


Рис. 15: Правее точки бифуркации

наблюдается на некотором значении, так как мы находимся правее точки бифуркации.

2.1.3 Квазипериодические затухания

Уменьшая обратную связь, получили квазипериодический затухающий процесс. По полученным данным определили декремент затухания для двух различных M .

Табл. 1: Декремент затухания

№	M	δ
1	5	0.154638
2	0	0.20232

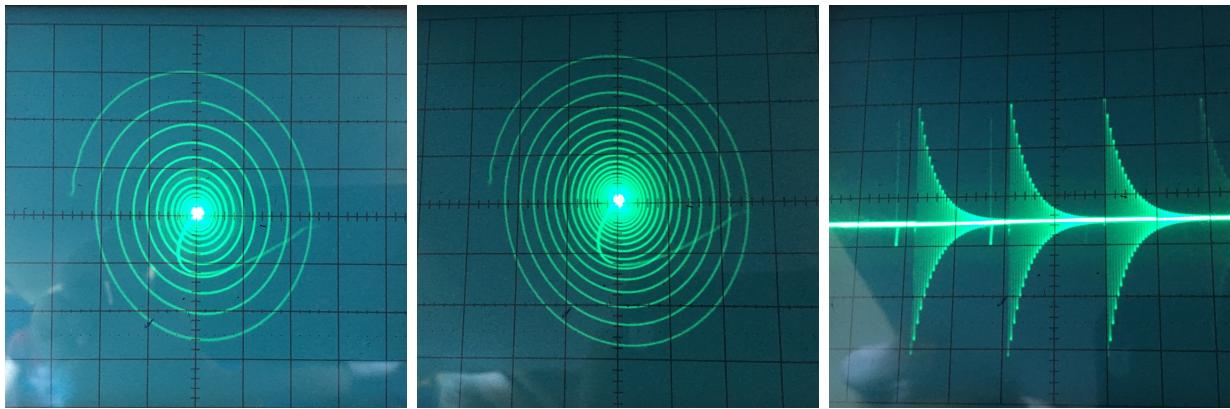


Рис. 16: Фазовые траектории и осцилограмма затухающего процесса

2.1.4 Апериодический процесс

Увеличивая потери в колебательном контуре, старались получить апериодический процесс при различных начальных условиях. Из фазового портрета видно, что



Рис. 17: Фазовый портрет при максимальных потерях в контуре

апериодический процесс не наблюдался ни при каких начальных условиях.

2.2. Жесткий режим генератора

2.2.1 Бифуркационная диаграмма

Сняли бифуркационную диаграмму, выражающую зависимость амплитуды автоколебаний от величины взаимоиндукции M . По полученной диаграмме $M' = 32$ усл. ед., $M'' = 43$ усл. ед. Здесь также можно наблюдать характерную кривую бифуркационной диаграммы для жесткого типа.

2.2.2 Определение неустойчивого равновесия

Неустойчивое равновесие на бифуркационной диаграмме находили следующим образом. Включая прерыватель и, изменяя начальные условия, определили по поведению фазовой траектории на экране осциллографа момент перехода

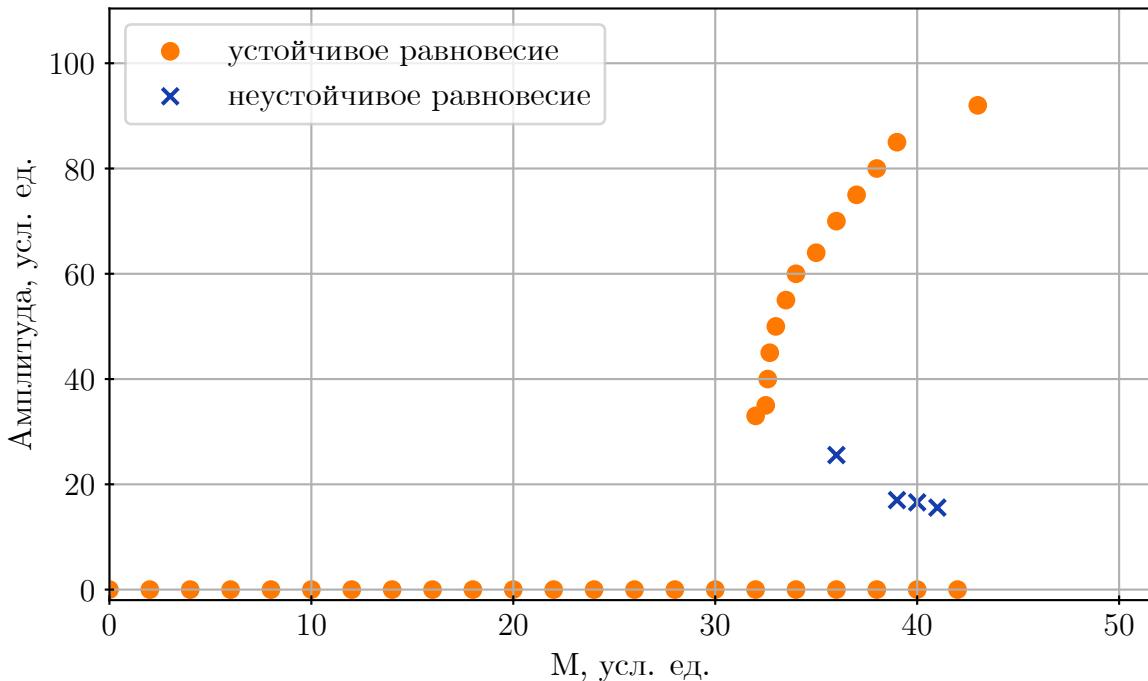


Рис. 18: бифуркационная диаграмма для жесткого режима

изображающей точки через границу области притяжения устойчивого предельного цикла. Оценку амплитуды неустойчивого цикла проводили по фазовой траектории, нормируя ее на амплитуду устойчивого цикла. Оценку также можно оценить по осцилограмме в режиме развертки.

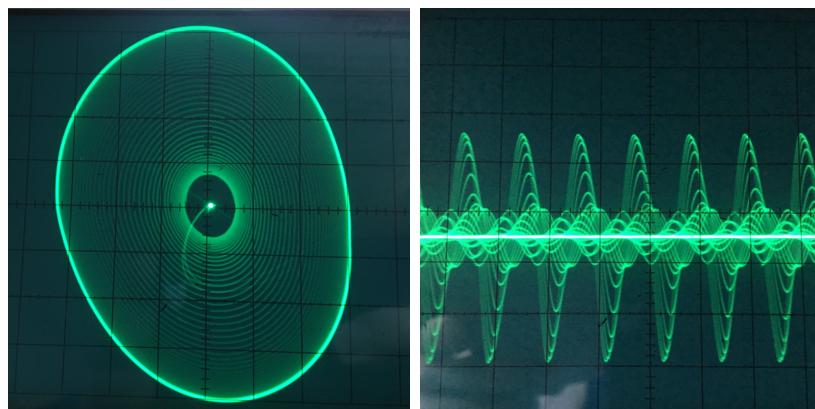


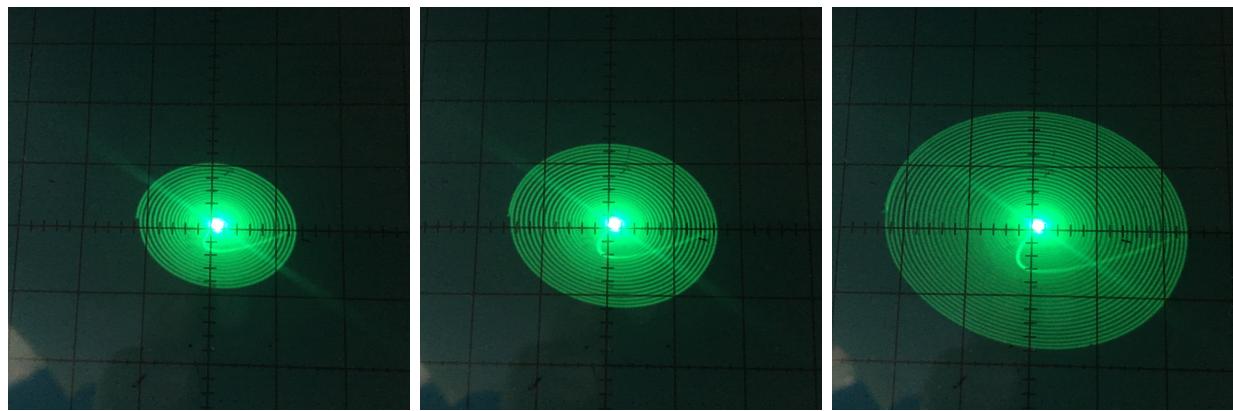
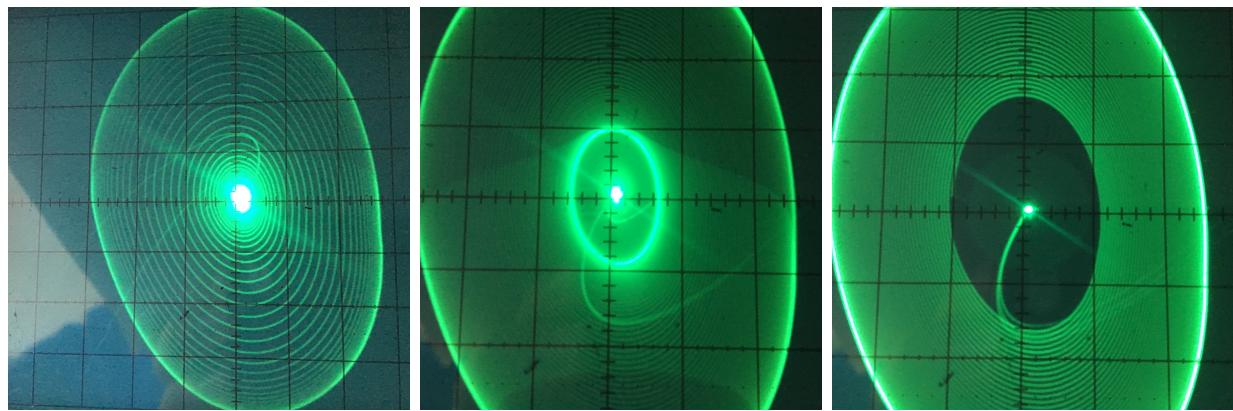
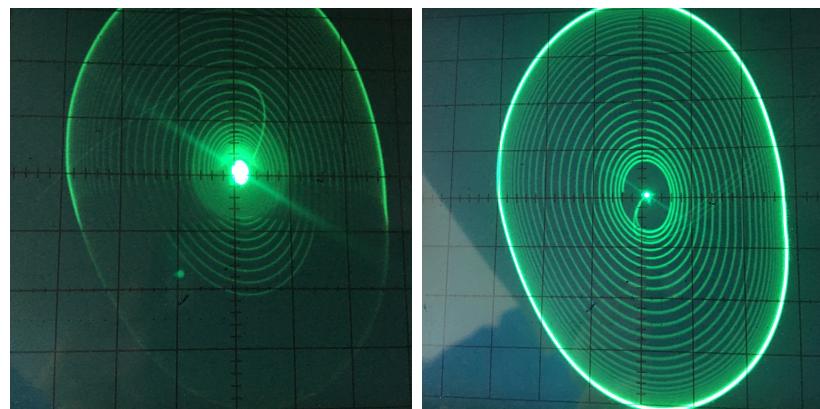
Рис. 19: Фазовые траектории и осцилограмма неустойчивого предельного цикла

2.2.3 Фазовые траектории

2.3 Полужесткий режим генератора Получены фазовые траектории при различных начальных условиях для трех значений M ($M < M'$, $M' < M < M''$, $M > M''$).

2.3.1 Бифуркационная диаграмма

Сняли бифуркационную диаграмму, выражающую зависимость амплитуды автоколебаний от величины взаимоиндукции M . В данном случае также можно

Рис. 20: Фазовые траектории при $M < M'$ Рис. 21: Фазовые траектории при $M' < M < M''$ Рис. 22: Фазовые траектории при $M > M''$

наблюдать характерную кривую бифуркационной диаграммы для сложно-жесткого типа как на рис.??.

2.3.2 Фазовые траектории

Зарисовали фазовые траектории при различных начальных условиях для трех различных значений .

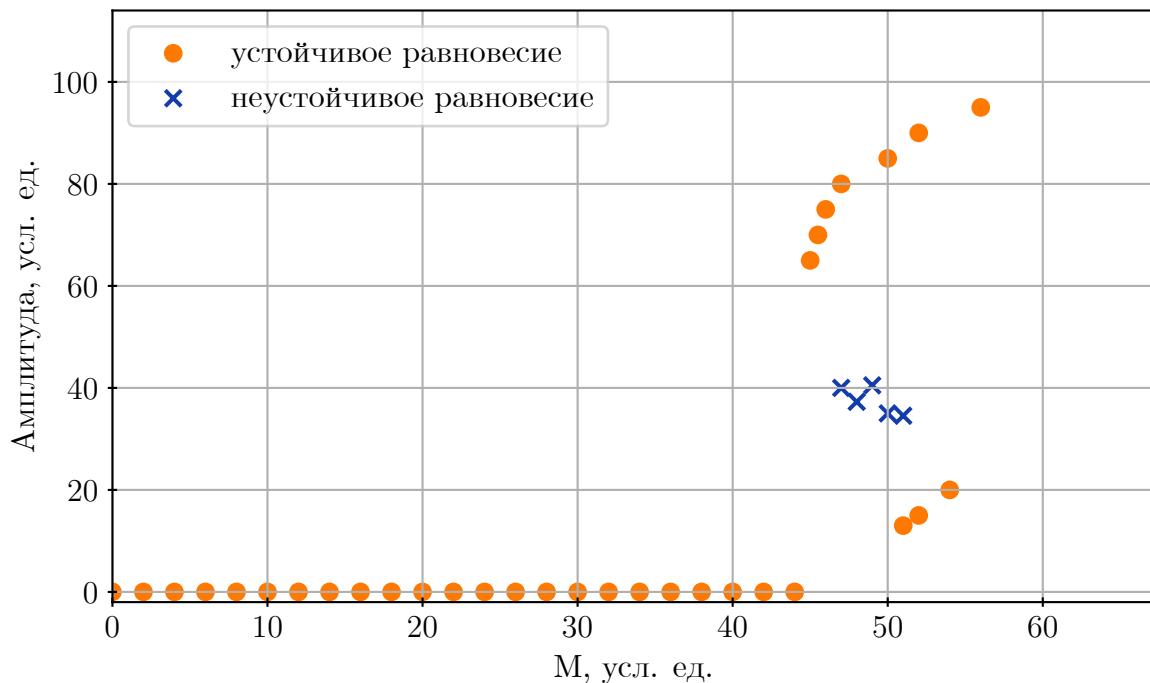
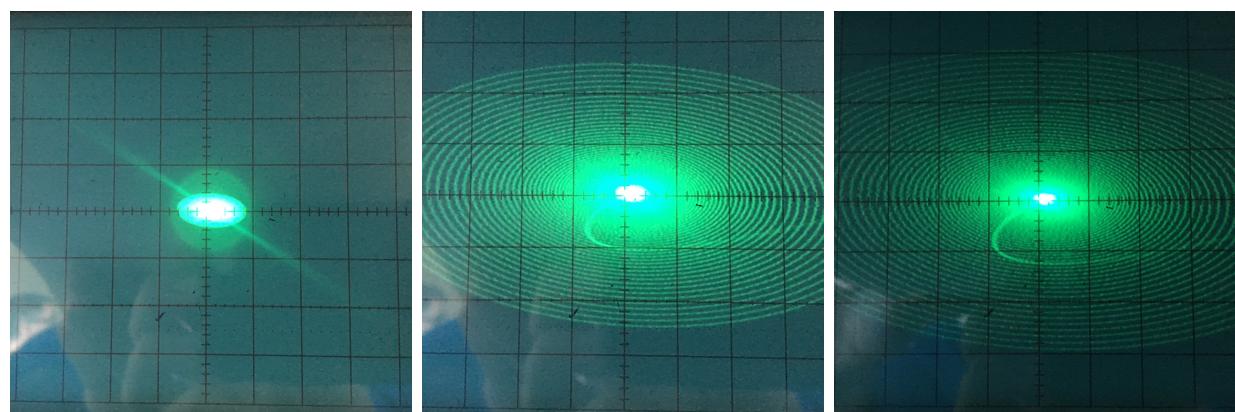
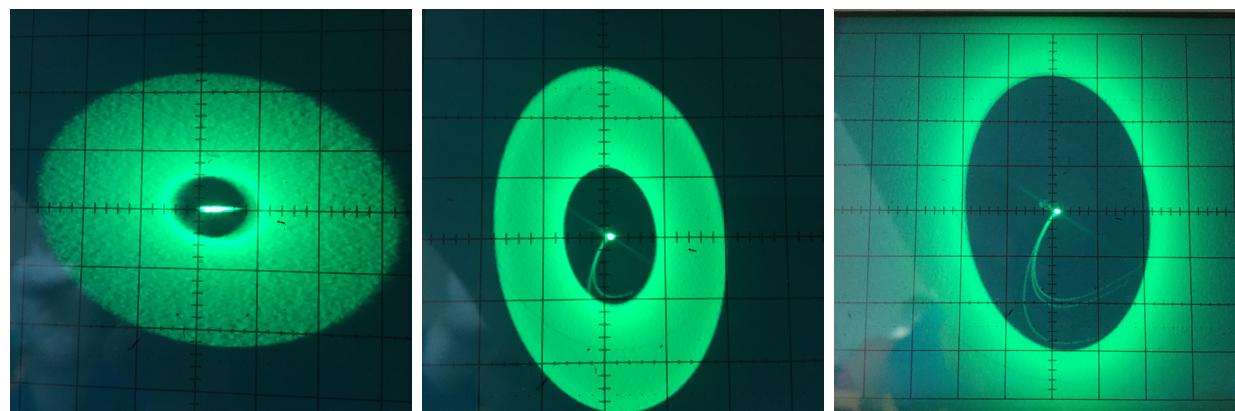
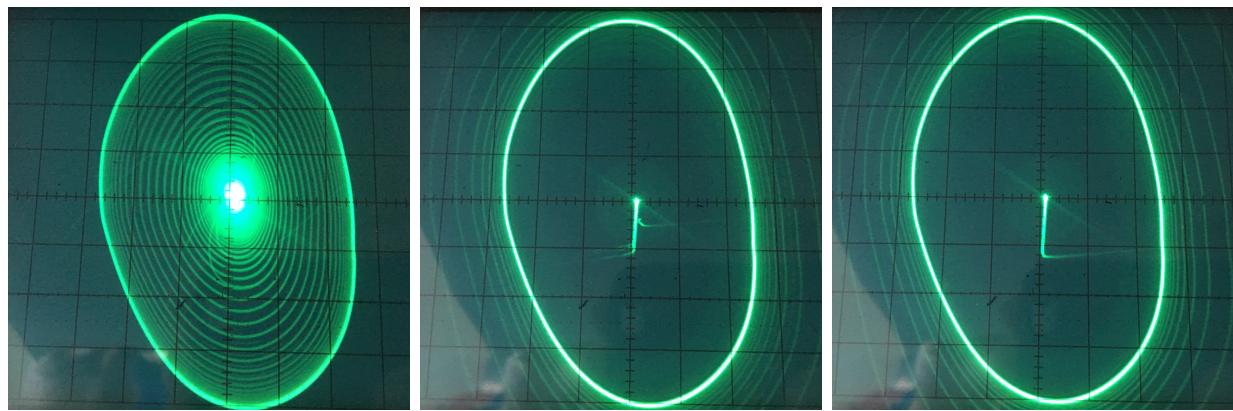


Рис. 23: бифуркационная диаграмма для сложно-жесткого режима

Рис. 24: Фазовые траектории при $M < M'$ Рис. 25: Фазовые траектории при $M' < M < M''$

Рис. 26: Фазовые траектории при $M > M''$

2.4. Вывод

Изучили различные режимы возбуждения лампового генератора и установили зависимость амплитуды автоколебаний от параметров системы. Построили бифукационные диаграммы для различных режимов генератора, которые качественно согласуются с теорией, а также рассмотрели фазовые портреты для различных состояний равновесия.