

Отчет по лабораторной работе №6

Исследование нелинейных преобразований сигналов

Работу выполнили студенты
Есюнин М.В., Есюнин Д.В.
430 группы

Преподаватель:
Орлов И.Я.

Содержание

1	Цель работы	2
2	Назначение устройств	2
3	Аппроксимация вольт-амперных характеристик	2
3.1	Полиномиальная аппроксимация	3
3.2	Кусочно-линейная аппроксимация	4
4	Метод определения спектра сигнала на выходе нелинейной цепи	5
5	Метод, основанный на использовании тригонометрических формул кратного аргумента	5
6	Метод угла отсечки	8
7	Выделение полезных компонент спектра.	9
8	Преобразование частоты	10
8.1	Амплитудное детектирование	11

1. Цель работы

Изучение основных процессов происходящих при прохождении сигналов через радиотехнические цепи с нелинейным элементом, экспериментальное исследование полупроводникового преобразователя частоты и амплитудного диодного детектора.

2. Назначение устройств

Исследуемые в лабораторной работе устройства используются для нелинейного преобразования сигналов. Преобразователь частоты – для перемещения спектра сигнала по шкале частот без изменения характера сигнала, т.е. соотношений между компонентами спектра. Например, для модулированных колебаний это означает изменение (повышение или понижение) несущей частоты с сохранением вида модуляции и закона изменения модулированного параметра. Амплитудный детектор – для преобразования модулированного колебания в низкочастотное колебание, соответствующее модулирующему сигналу.

Основные радиотехнические преобразования сигналов осуществляются с помощью нелинейных цепей. Поэтому свойства нелинейных элементов и цепей являются фундаментом для теории большинства радиотехнических устройств.

Нелинейным называются цепи, описываемые нелинейным дифференциальными уравнениями вида (1),

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_m x \quad (1)$$

в которых хотя бы один из коэффициентов a_i является функцией y или ее производных, либо один из коэффициентов b_i – функцией x или её производных:

$$a_i = a_i(y, \frac{dy}{dt}, \dots), \quad b_i = b_i(x, \frac{dx}{dt}, \dots)$$

Уравнение электрической цепи оказывается нелинейным в том случае, когда в схеме используются какие-либо нелинейные элементы, т.е. элементы параметры, которых зависят от тока или напряжения. Нелинейными являются все электронные и полупроводниковые приборы. Особенности этих приборов определяются вольт-амперными характеристиками, т.е. зависимостями токов от приложенных напряжений.

3. Аппроксимация вольт-амперных характеристик

Математическое описание работы радиотехнической цепи начинается с составления уравнений, связывающих токи и напряжения в различных частях ее, в том числе и в нелинейных элементах. Для нелинейных элементов обычно известна графическая зависимость тока от напряжения (из справочника или эксперимента). Поэтому в радиотехнике широкое распространение

получили способы представления вольт-амперных характеристик простыми функциями, приближенно отображающими истинные характеристики. Замена истинной характеристики приближенно представляющей ее функцией называется аппроксимацией характеристики.

Выбор аппроксимирующей функции зависит от вида нелинейности, а также от режима работы нелинейного элемента.

3.1. Полиномиальная аппроксимация

Одним из наиболее распространенных способов аппроксимации является аппроксимация степенным полиномом. Полиномиальная аппроксимация заключается в представлении вольт-амперной характеристики $i = f(u)$ полиномом n -й степени. Такой способ аппроксимации является удобным для объяснения принципа действия многих нелинейных устройств.

Запишем аппроксимирующий степенной полином в форме:

$$i(v_0 + u) = i(v_0) + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n \quad (2)$$

где v_0 - напряжение, определяющее исходное положение рабочей точки на характеристике нелинейного элемента (в отсутствие сигнала), u - подаваемое на нелинейный элемент напряжение сигнала. Коэффициенты $a_1, a_2, a_3 \dots$ определяются выражениями

$$a_1 = \left(\frac{di}{du} \right)_{u=v_0}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 i}{du^2} \right)_{u=v_0}, \quad a_3 = \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 i}{du^3} \right)_{u=v_0} \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что a_1 представляет крутизну S вольт-амперной характеристики $S = (di/du)_{u=v_0}$ в рабочей точке $u = v_0$, a_2 - первую производную крутизны (с коэффициентом $1/2!$), a_3 - вторую производную крутизны (с коэффициентом $1/3!$) и т.д. При заданной форме вольт-амперной характеристики, величины коэффициентов a_1, a_2, a_3 существенно зависят от положения начальной рабочей точки на характеристике.

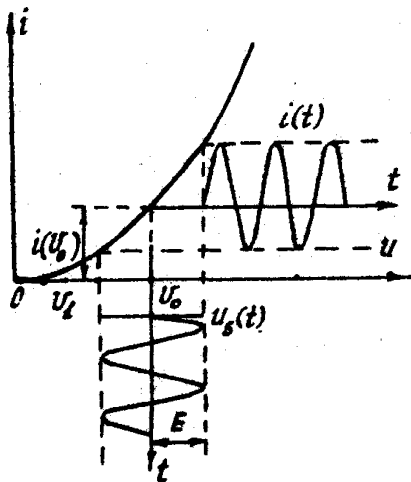


Рис. 1

Например, рабочая точка расположена на начальном участке вольт-амперной характеристики, имеющем вид квадратичной параболы рис. 1 и подводимое к нелинейному элементу напряжение сигнала u_s , накладывается на постоянное напряжение $E_0 = v_0$ не выходит за точку v_1 , т.е. за начало характеристики. Выражение (2) в данном случае можно записать в виде полинома второй степени $i(v_0 + u_s) = i(v_0) + a_1 u_s + a_2 u_s^2$

Коэффициент a_2 определяется из условия,

что при $u_s = v_1 - v_0$, ток $i = 0$, откуда вытекает уравнение

$$i(v_0) + S(v_1 - v_0) + a_2(v_1 - v_0)^2 = 0$$

определяющее

$$a_2 = -\frac{i(v_0) + S(v_1 - v_0)}{(v_1 - v_0)^2}$$

3.2. Кусочно-линейная аппроксимация

Кусочно-линейная аппроксимация заключается в замене реальной плавно меняющейся зависимости $i = f(u)$ приближенной, состоящей из отрезков прямых линий, выбираемых, касательными к реальной характеристике в нескольких точках.

Например, если рабочая точка v_0 находится на нижнем сгибе характеристики и изменение подводимого напряжения настолько велико, что используется участок ab на оси абсцисс, то характеристика аппроксимируется выражениями

$$i = \begin{cases} 0, & \text{при } u \leq v_1; \\ s(u - v_1), & \text{при } u \geq v_1. \end{cases}$$

На рис. 2 показана такая аппроксимация, содержащая два линейных участка. Данная аппрок-

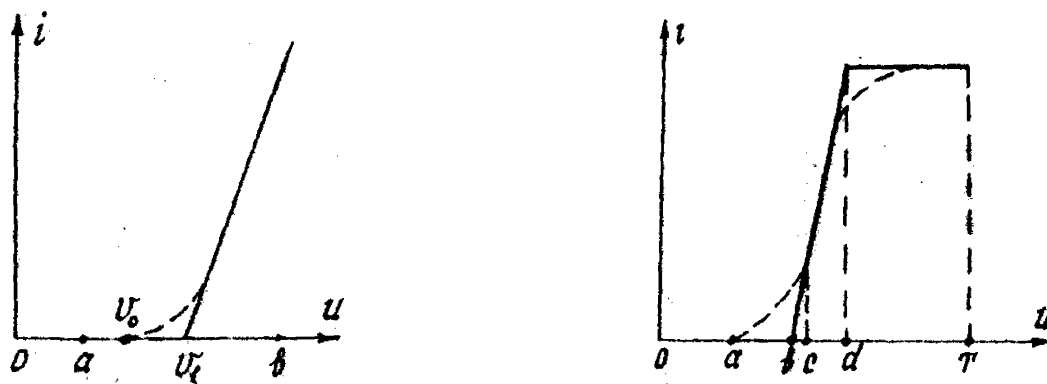


Рис. 2

симация широко используется при рассмотрении воздействия сигналов большой амплитуды. Если же амплитуда входного сигнала невелика, наблюдается значительное различие в результатах расчета по действительной и аппроксимированной характеристикам, т.е. такая аппроксимация непригодна.

4. Метод определения спектра сигнала на выходе нелинейной цепи

При рассмотрении функциональных преобразований сигналов возникает задача определения спектра колебаний на выходе нелинейной цепи. Одной из важнейших особенностей нелинейных цепей является то, что в них не выполняется принцип суперпозиции. Поэтому спектральный метод широко используемый в теории линейных цепей, непригоден для анализа нелинейных цепей.

Задача заключается в следующем: на вход безынерционного нелинейного элемента, с характеристикой аппроксимируемой зависимостью

$$i = f(u) \quad (4)$$

действует гармоническое

$$u = l_s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) \quad (5)$$

или полигармоническое колебание

$$u = l_s(t) = \sum_{k=1}^n E_k \cos(\omega_k t + \varphi) \quad (6)$$

Требуется определить спектр отклика, т.е. спектр тока i (4). Классический метод решения заключается в подстановке выражений (5), (6) в правую часть (4) с последующим определением спектральных компонент путем использования аппарата рядов Фурье в случае гармонического воздействия или кратных рядов Фурье в случае полигармонического воздействия. Однако такой метод оказывается очень трудоемким. Поэтому на практике применяются специальные методы, каждый из которых связан с определенными способами аппроксимации нелинейной зависимости (4) и характером воздействующего сигнала.

Наибольшее распространение имеют методы, основанные на использовании: 1) тригонометрических Формул кратного аргумента и 2) угла отсечки.

5. Метод, основанный на использовании тригонометрических формул кратного аргумента

Этот метод является основным при использовании полиномиальной аппроксимации и особенно удобен для выяснения принципа действия и основных особенностей таких устройств, как модуляторы, детекторы, преобразователи частоты и т.п. Рассмотрим воздействие на нелинейный элемент, характеристика которого аппроксимирована полиномом n -ой степени

$$i = a_0 + a_1 u + \dots + a_n u^n \quad (7)$$

гармонического колебания (5). Подставляя (5) в (7) получим.

$$i = a_0 + a_1 E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + \dots + a_n u E_1^n \cos^n(\omega_1 t + \varphi) \quad (8)$$

Для представления правой части (8) в виде суммы синусоидальных компонент воспользуемся известными тригонометрическими формулами, позволяющими заменить степени косинусов (или синусов) через тригонометрические функции кратных аргументов. Выполнив тригонометрические преобразования, выражение (8) приводим к виду

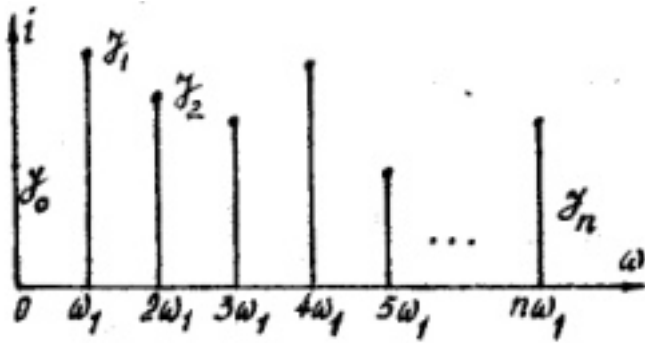
$$i = \gamma_0 + \gamma_1 \cos(\omega_1 t + \varphi) + \gamma_2 \cos(2\omega_1 t + \varphi) + \dots + \gamma_n \cos(n\omega_1 t + \varphi) \quad (9)$$

где $\gamma_0 = a_0 + \frac{1}{2}a_2 E_1^2 + \frac{3}{8}a_4 E_1^4 + \dots$ – постоянная составляющая тока нелинейного элемента, $\gamma_1 = a_1 E_1 + \frac{3}{4}a_3 E_1^3 + \frac{5}{8}a_5 E_1^5 + \dots$ – амплитуда первой гармоники.

$\gamma_2 = \frac{1}{1}a_2 E_1^2 + \frac{1}{2}a_4 E_1^4 + \dots$ – амплитуда второй гармоники.

$\gamma_3 = \frac{1}{4}a_3 E_1^3 + \frac{5}{16}a_5 E_1^5 + \dots$ – амплитуда третьей гармоники.

γ_n – амплитуда n -ой гармоники.



На рис. 3 построен спектр выходного тока.

Из сравнения (9) с (5) следует:

1. Спектр тока нелинейного элемента при воздействии на него гармонического сигнала оказывается линейчатый, содержащий составляющие с частотами, кратными частоте входного сигнала. Наивысший номер составляющей спектра получаемой при расчетах равен

степени используемого аппроксимирующего полинома. Поэтому если для какого-то применения нелинейного элемента необходимо знать n -ю гармонику, вольт-амперная характеристика его при расчетах должна быть аппроксимирована полиномом не ниже n -го порядка. 2. Постоянная составляющая и амплитуды четных гармоник определяются четными степенями напряжения в полиноме (7), а нечетных гармоник – только нечетными. 3. Текущая фаза ψ_k -ой гармоники с частотой $\omega_k = k\omega_1$ в k раз больше значения текущей фазы воздействующего сигнала

$$\psi_k = \omega_k + \varphi_k = k(\omega_1 + \varphi)$$

Начальные фазы связаны соотношением $\varphi_k = k\varphi$

Рассмотрим воздействие на нелинейный элемент бигармонического колебания

$$l_s(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t. \quad (10)$$

Ограничимся рассмотрением режима когда достаточно учитывать только линейный и квадратичный члены в полиноме (2). Подстановка (10) в (2) приводит к следующим результатам:

-для линейного члена ряда

$$l_s(t) = E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t; \quad (11)$$

-для квадратичного члена ряда

$$\begin{aligned} a_2 l_s^2(t) &= a_2 (E_1 \cos \omega_1 t + E_2 \cos \omega_2 t)^2 = \\ &= \frac{1}{2} a_2 (E_1^2 + E_2^2) + \frac{1}{2} a_2 E_1^2 \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{2} a_2 E_2^2 \cos 2\omega_2 t + \\ &+ a_2 E_1 E_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t] \end{aligned} \quad (12)$$

Первое слагаемое, не зависящее от времени, определяет приращение постоянного тока. Слагаемые с частотами $2\omega_1$ и $2\omega_2$ представляют собой вторые гармоники от соответствующих компонентов входного сигнала. Слагаемые с частотами $\omega_1 + \omega_2$ и $\omega_1 - \omega_2$ представляют собой колебания комбинационных частот.

В более общем случае, если в качестве аппроксимирующего полинома взять полином k^u - степени, при бигармоническом воздействии на нелинейное устройство, в спектре колебания на выходе нелинейного элемента, могут присутствовать следующие частоты: $\omega = 0$ - постоянная составляющая; $\omega = n\omega_1$, $n = 1, 2, \dots, k$ - гармоники частоты ω_1 ; $\omega = n\omega_2$, $n = 1, 2, \dots, k$ - гармоники частоты ω_2 ; $\omega = |n\omega_1 \pm m\omega_2|$, $n = 1, 2, \dots, k$, $m = 1, 2, \dots, k$ - комбинационные частоты (при условии $n + m \leq k$).

Спектрограмма колебания на входе и выходе нелинейного элемента, описываемого полиномом второй степени ($k = 2$) изображена на рис.4.

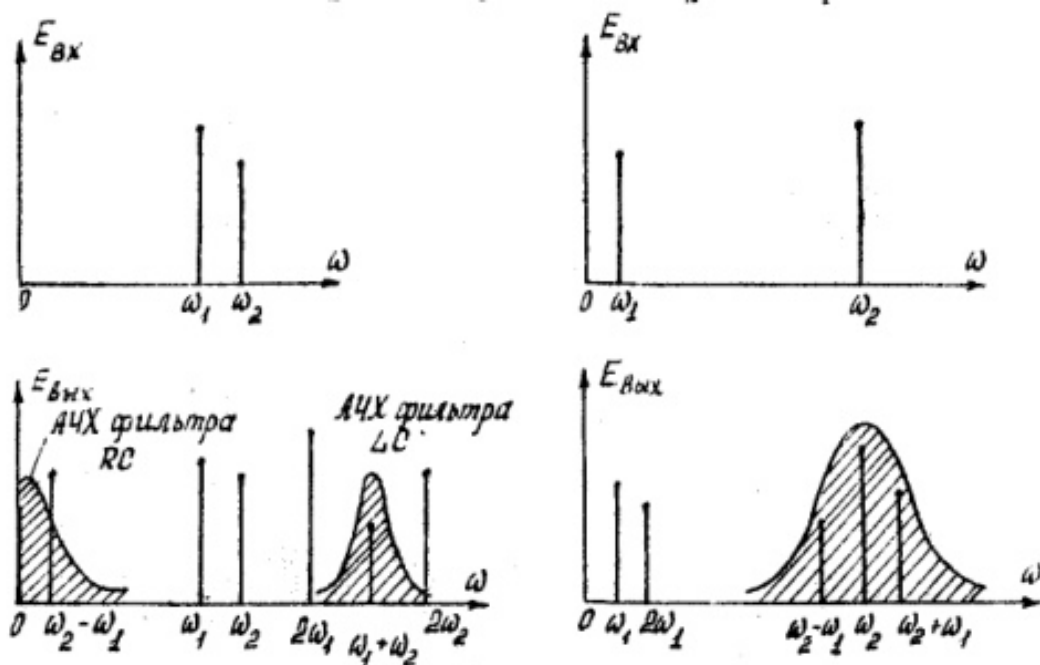


Рис. 4

Из рисунка видно, что взаимодействие двух гармонических колебаний с неодинаковыми частотами в нелинейном устройстве второй степени приводит к возникновению разностной $|\omega_1 -$

ω_2 и суммарной $\omega_1 + \omega_2$ частот (помимо гармоник $2\omega_1$ и $2\omega_2$) Для практического использования этих новых частот достаточно включить последовательно с нелинейным элементом линейную цепь (фильтр), выделяющий полезную составляющую спектра.

Свойство квадратичного нелинейного элемента, позволяющее получить комбинационные частоты, широко применяется в радиотехнике для сдвига частоты сигнала.

И в случае $\omega_1 \ll \omega_2$, когда комбинационные частоты располагаются близи частоты ω_2 и все три частоты: ω_1 ; $\omega_2 + \omega_1$ и $\omega_2 - \omega_1$ могут быть выделены одним общим фильтром (см.рис.4), можно получить спектр, соответствующий амплитудной модуляции колебания частоты ω_2 относительно низкой частотой ω_1 . При нелинейности более высокого порядка ($k > 2$) можно осуществить выделение любой из частот вида $\omega = |n\omega_1 \pm m\omega_2|$, $n + m \leq k$ При более сложном составе входного спектра, содержащем частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots$, на выходе нелинейного элемента возникают частоты $n\omega_1, n\omega_2, n\omega_3, n\omega_4, \dots$ и комбинационные частоты $n\omega_i \pm m\omega_k$, где n и m любые целые числа, а ω_i и ω_k – любая из пар частот входного спектра.

6. Метод угла отсечки

Рассмотрим теперь работу нелинейного элемента в случае кусочно-линейной аппроксимации вольт-амперной характеристики рис. 5. При гармоническом возбуждении ток $i(t)$ нелинейного

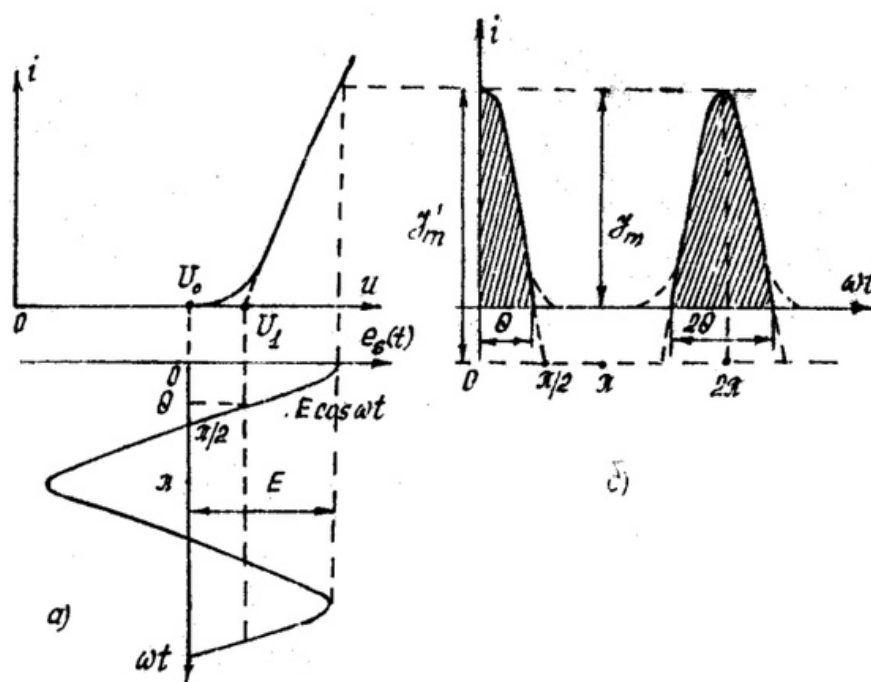


Рис. 5

элемента приобретает импульсную форму рис. 5б. Угол θ , соответствующий изменению тока от максимального значения γ_m до нуля, получил название угла *отсечки тока*. Длительность

импульсов тока равна 2θ . Из рис. 5а очевидно, что

$$\cos \theta = \frac{v_1 - v_0}{E}. \quad (13)$$

Амплитуда тока

$$\gamma_m = a_1[E - (v_1 - v_0)] = a_1E(1 - \cos \theta), \quad (14)$$

где a_1 – крутизна линейной части вольт-амперной характеристики.

При гармоническом воздействии на нелинейный элемент форма импульсов тока в пределах $-\theta < \omega t < \theta$ близка к отсеченной косинусоиде и, если пренебречь кривизной вольт-амперной характеристики на нижнем сгибе, мгновенное значение тока можно выразить уравнением

$$i(t) = \gamma'_m(\cos \omega t - \cos \theta), \quad -\theta < \omega t < \theta \quad (15)$$

γ'_m – амплитуда импульса тока при $\theta = \pi/2$. Т.к. амплитуда γ_m реального импульса соответствует моменту $\omega t = 0$ имеет место соотношение

$$\gamma_m = i(0) = \gamma'_m(1 - \cos \theta)$$

откуда

$$\gamma'_m = \frac{\gamma_m}{1 - \cos \theta}$$

Подставив это в (15) получим

$$i(t) = \frac{\gamma_m}{1 - \cos \theta}(\cos \omega t - \cos \theta), \quad -\theta < \omega t < \theta \quad (16)$$

Используя это выражение легко вычислить коэффициенты ряда Фурье (17) для периодической последовательности импульсов тока (16) нелинейного элемента рис. 5б. Ввиду четности функции $i(t)$ относительно t , ряд (17) содержит одни лишь косинусоидальные члены.

$$i(t) = \gamma_0 + \gamma_1 \cos \omega t + \gamma_2 \cos 2\omega t + \gamma_3 \cos 3\omega t + \dots + \gamma_n \cos n\omega t. \quad (17)$$

7. Выделение полезных компонент спектра.

В отклике нелинейной цепи на входные воздействия, как правило существуют не только полезные частотные составляющие, необходимые для данного преобразования сигнала, но и ряд других, мешающих, вызывающих его искажения. В связи с этим возникают задачи выделения полезных компонент спектра. Основной метод выделения полезных и подавления нежелательных спектральных составляющих основан на применении фильтров. В качестве фильтров часто применяют простейшие: параллельный колебательный контур (рис. ??а), если требуется выделить какие-либо высокочастотные составляющие; параллельную RC-цепочку (рис. ??б), когда

нужно выделить постоянную или низкочастотную составляющие.

Модуль импеданса параллельного контура (рис. ??а), настроенного на частоту ω_0 , определяется как

$$Z = \frac{R_3}{\sqrt{1 + Q^2 \Delta^2}}$$

где $R_3 = \frac{L}{rC}$, $Q = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{C}{L}}$, $\Delta = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}$. На резонансной частоте ω_0 сопротивление контура

$Z = R_3$ наибольшее, с увеличением расстрой-

ки Z убывает. Поэтому, когда через контур протекают различные компоненты тока, амплитуды которых одного порядка, значительное падение напряжения на нём создают только те компоненты, частоты которых близки к ω_0 . Компоненты тока с частотами, значительно отличающимися от ω_0 , заметного напряжения не создают, благодаря чему в выходном напряжении они практически отсутствуют.

Модуль импеданса Z цепочки RC (рис. ??б)

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

имеет максимальное значение $z = R$ при $\omega = 0$ и уменьшается с ростом частоты. Когда все составляющие тока протекают по такой цепи, заметное падение напряжения (выходное напряжение) создают только постоянная составляющая и составляющие низких частот. Скорость убывания Z с частотой определяется выбором постоянной времени этой цепи, равной $\tau = RC$

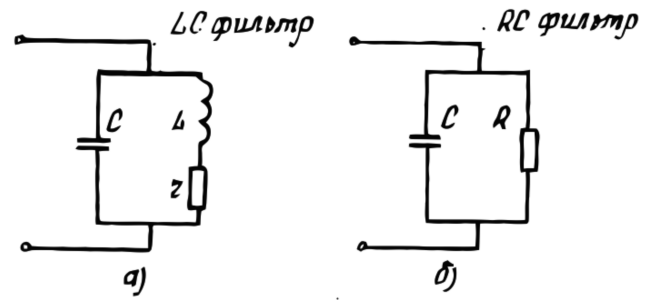


Рис. 1

8. Преобразование частоты

Сдвиг спектра сигнала по оси частот на определенную постоянную величину при сохранении структуры сигнала называется *преобразованием частоты*.

Для выяснения процессов, происходящих при преобразовании частоты, вернемся к вопросу о воздействии на нелинейный элемент двух напряжений. Однако, в данном случае только одно из колебаний, колебание создаваемое вспомогательным генератором (гетеродином), будем считать гармоническим. Под вторым колебанием будем подразумевать сигнал, подлежащий преобразованию, который может представлять собой любой сложный, но узкополосный процесс

Получаемое на выходе нелинейного элемента колебание с частотой $\omega_s(t) + \omega_r$ соответствует сдвигу спектра сигнала в область высоких частот, а колебание с частотой $\omega_s(t) - \omega_r$ в область низких частот. Для выделения одной из этих частот разностной или суммарной нужно применить соответствующую нагрузку на выходе преобразователя. Пусть, например, частоты ω_s и ω_r очень близки и требуется выделить низкую частоту, расположенную около нуля. Такая задача встречается в измерительной технике (метод "нулевых биений"). В этом случае нагрузка

должна состоять из параллельного соединения R и C (рис. 6а), обеспечивающих отфильтровывание (подавление) высоких частот ω_s и ω_r и выделение разностной частоты $|\omega_s - \omega_r|$. Если частота $|\omega_s - \omega_r|$ лежит в радиотехническом диапазоне, то для ее выделения следует применять колебательную цепь (рис. 6б).

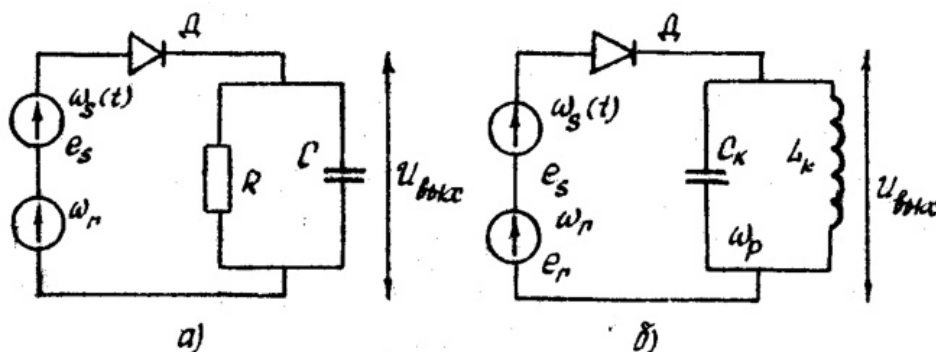


Рис. 6

8.1. Амплитудное детектирование

Детектированием принято называть преобразование модулированного колебания в низкочастотное колебание, соответствующее модулирующему сигналу. Радиотехническое устройство, предназначенное для этой цели, называют детектором.

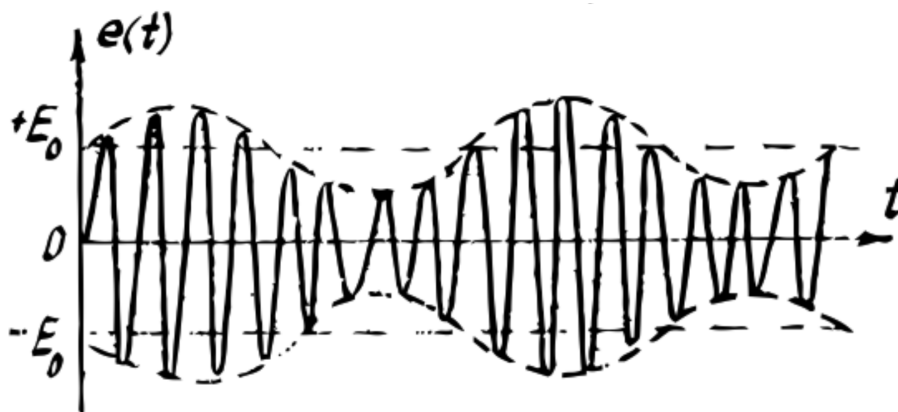


Рис. 7. Амплитудно модулированное колебание

Рассмотрим высокочастотный сигнал, модулированный по амплитуде низкочастотным колебанием:

$$u(t) = E(1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

$$\Omega \ll \omega_0$$

M - глубина модуляции. Пример такого колебания показан на рис. 7. В этом сигнале есть три гармоники: ω_0 , $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$. Подадим этот сигнал на диод. В выходном сигнале должен

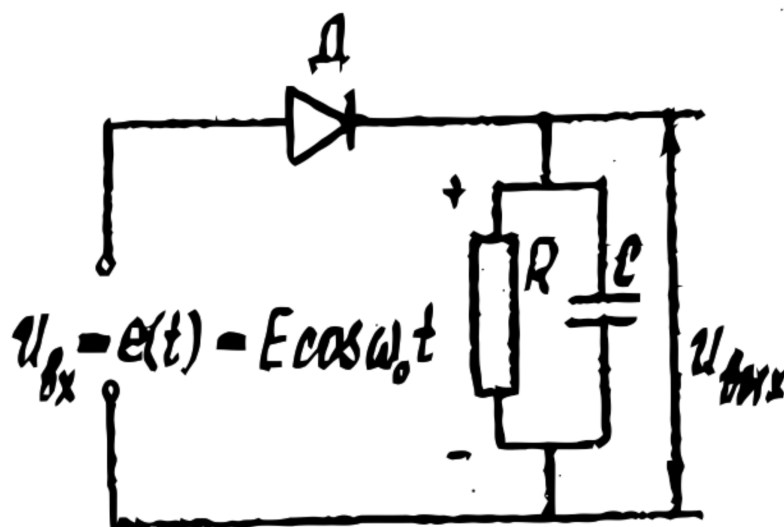


Рис. 8. Амплитудный детектор

появиться набор комбинационных частот. Среди них будет гармоника с частотой Ω . Частоты остальных гармоник будут много больше этой частоты. Для их устранения из выходного сигнала служит RC -фильтр. Таким образом, на выходе детектора получается колебание с частотой модуляции.