**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики»**

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова
Департамент электронной инженерии

ОТЧЕТ

по выполнению практического задания № 4-7
по дисциплине
«Основы построения инфокоммуникационных систем и сетей»

Выполнила студентка БИТ231
Байздренко В.М.

Преподаватель:
Саматов М.Р.

Москва, 2025

Практическое задание №4

Задание

1. Смоделировать работу фильтра низких, высоких частот и полосового фильтра, выделяя по одной гармонике. Выделить 2 гармоники с помощью полосового фильтра.
2. Провести фильтрацию периодической последовательности прямоугольных импульсов для 3, 1 и ½ лепестков.

Теория

Сигнал – это функция от времени, которая несет в себе информацию. Чтобы лучше понять структуру сложного сигнала, его можно разложить на синусоидальные функции с различными частотами, амплитудами и фазами. По теореме Жозефа Фурье любой периодический сигнал можно разложить в **ряд Фурье** – сумму гармоник:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \sin\,(2\pi f_k + \varphi_k),$$

где A_k – амплитуда *k*-ой гармоники, f_k – частота *k*-ой гармоники, φ_k – начальная фаза *k*-ой гармоники.

Такое представление в виде гармоник позволяет проще и лучше анализировать частотный состав сигнала. Это используется во многих методах обработки и анализа сигналов, включая проектирование фильтров, спектральный анализ и цифровую обработку сигналов.

Спектр сигнала – это разложение сигнала на его гармонические составляющие в частотной области. Для периодического сигнала спектр является дискретным, а для непериодического – непрерывным.

Фильтр – это устройство или алгоритм, предназначенный для изменения спектрального состава сигнала. Фильтры позволяют изменять частотный состав сигнала, извлекая из него полезную информацию или удаляя нежелательные компоненты, например, шумы.

Типы фильтров:

1. Фильтр низких частот

Фильтр низких частот пропускает только гармоники с частотами ниже заданной границы f_c, подавляя остальные.

2. Фильтр высоких частот

Фильтр высоких частот пропускает только гармоники с частотами выше заданной границы f_c, подавляя все более низкие гармоники. Таким образом, ФНЧ может использоваться для удаления постоянной составляющей (частота равная нулю) или низкочастотных помех.

3. Полосовой фильтр

Полосовой фильтр пропускает только гармоники, находящиеся в заданной полосе частот от f_L до f_H, подавляя все остальные.

Также фильтры бывают разными **по структуре**:

- Г-фильтр
- Т-фильтр
- П-фильтр

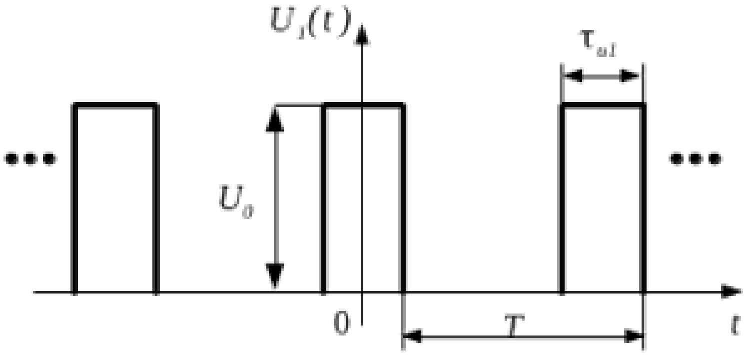
Также существуют сигналы в виде последовательности **прямоугольных импульсов**. Они характеризуются следующими параметрами:

U_0 – амплитуда прямоугольного импульса,

T – период прямоугольного импульса,

τ_u – длительность импульса,

$q = T/\tau_u$ – скважность (коэффициент заполнения).



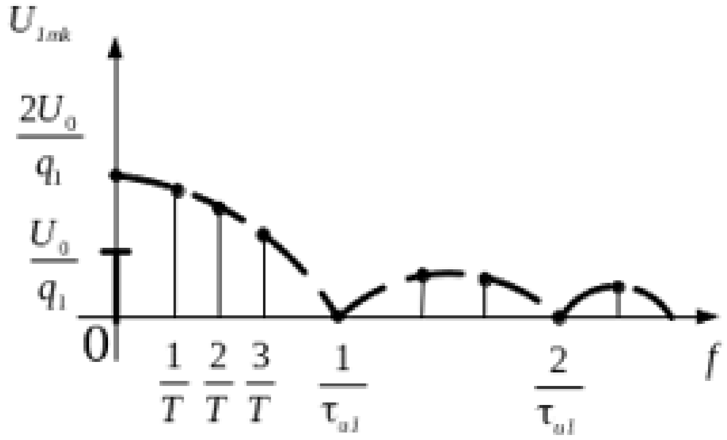
Последовательный прямоугольный импульс, как и любой периодический сигнал, можно представить в виде суммы гармоник. Эти гармоники в спектре располагаются на частотах, кратных $\frac{1}{T}$. Амплитуды этих гармоник определяются по формуле:

$$X_n = \frac{U_o}{q} sinc\left(\frac{n}{q}\right),$$

где n – номер гармоники.

Следовательно амплитуды гармоник убывают по функции $sinc\left(\frac{n}{q}\right)$. Первая гармоника ($n = 1$) имеет максимальную амплитуду. Чем выше гармоника, то есть чем больше ее частота, тем меньше амплитуда гармоники. Если $\frac{n}{q}$ равно целому числу, то функция sinc равна нулю.

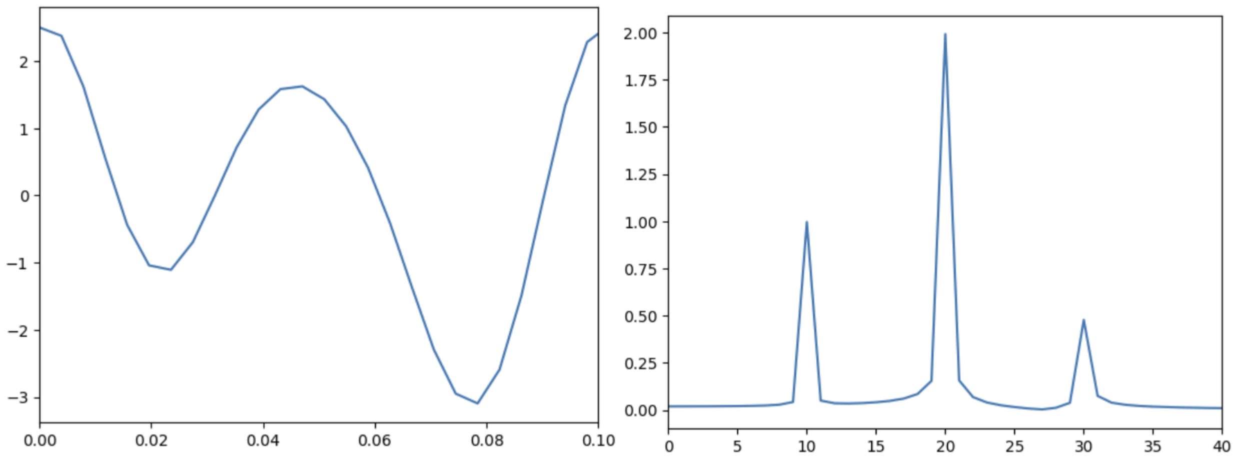
Таким образом спектр сигнала, состоящего из последовательности прямоугольных импульсов, имеет форму “**лепестков**”. Ширина лепестка обратно пропорциональна длительности импульса τ_u.



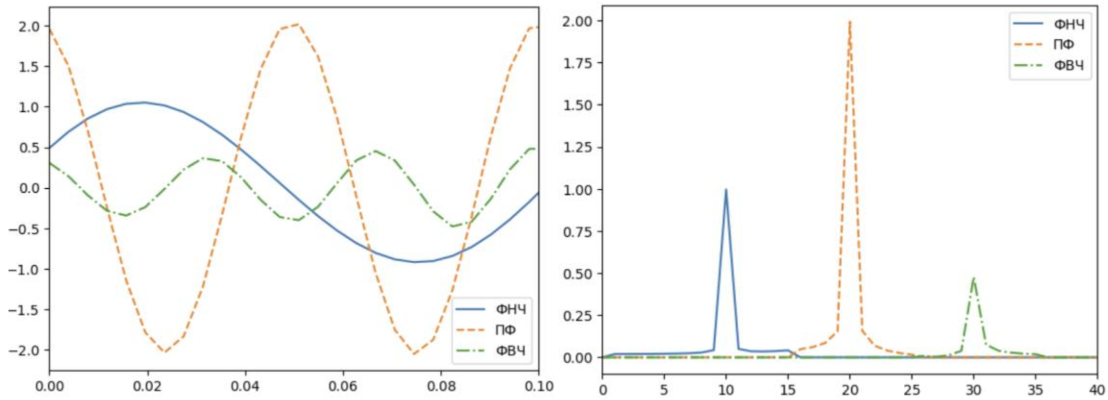
Решение

Код: https://colab.research.google.com/drive/126m6FG74jd0_zW6XMTadSVZAPnBAaTXu?usp=sharing

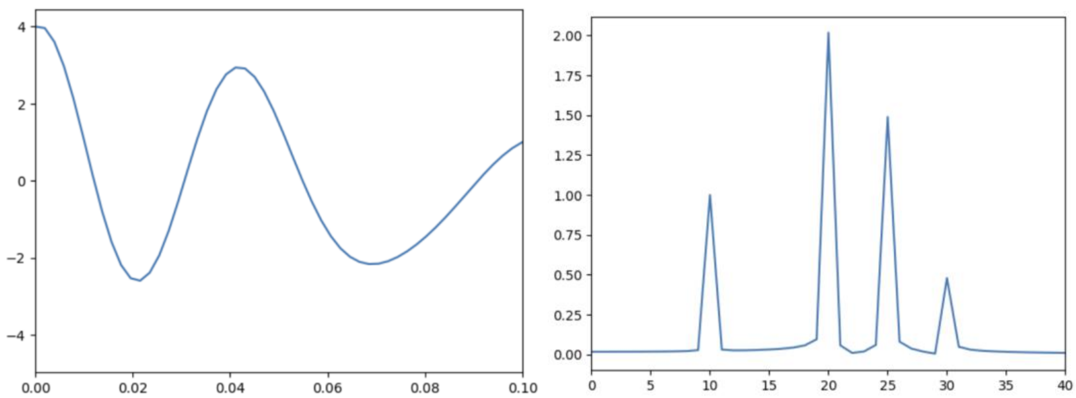
Задание 1.



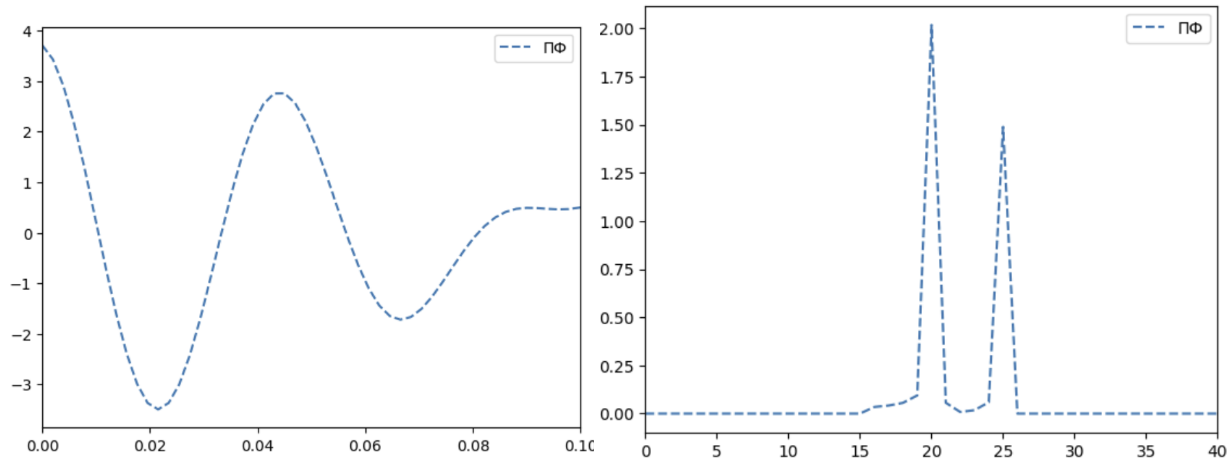
Исходный сигнал и его спектр



Сигнал и спектр после прохождения через фильтры

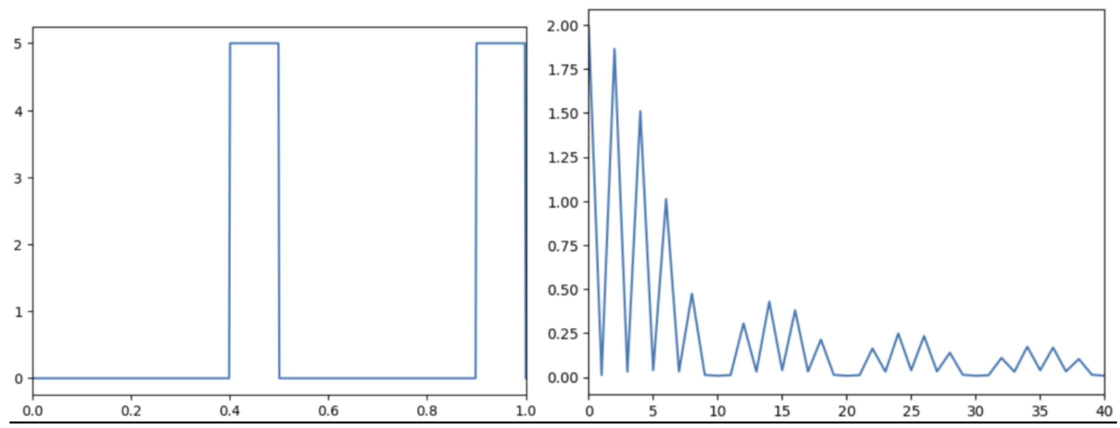


Исходный сигнал и его спектр

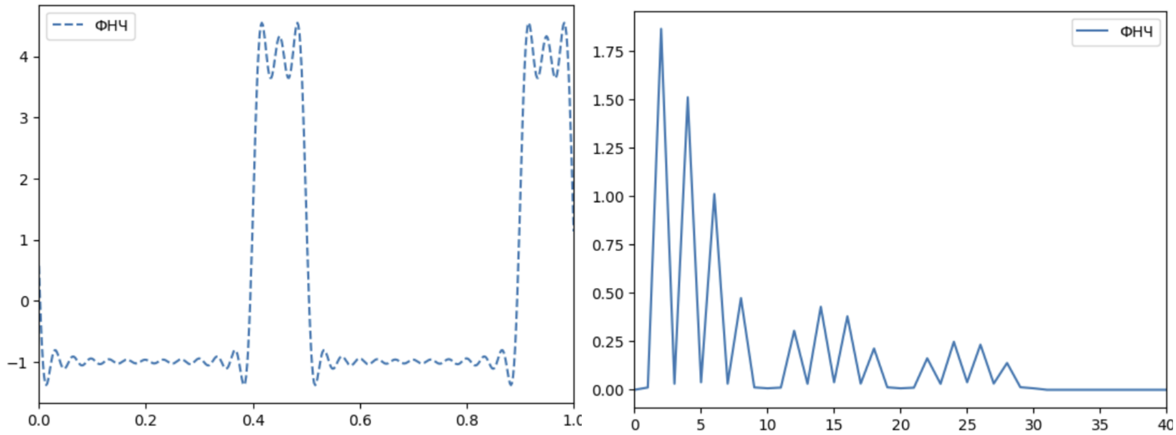


Сигнал и его спектр после прохождения через полосовой фильтр (выделено две гармоники)

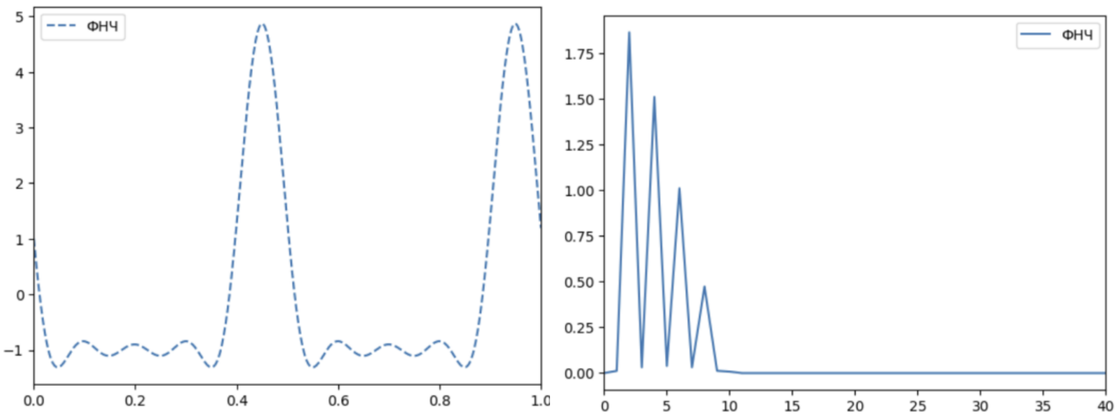
<u>Задание 2.</u>



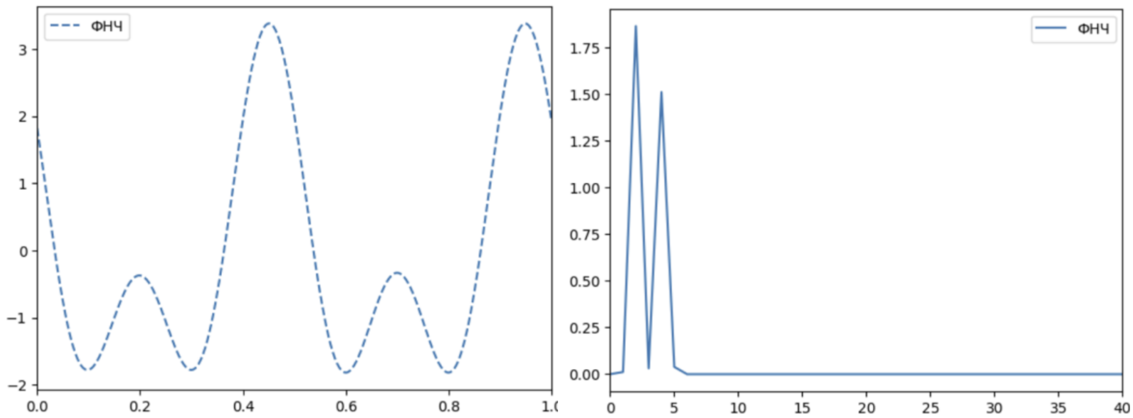
Исходный прямоугольный сигнал и его спектр



Сигнал и его спектр с выделением 3 лепестков



Сигнал и его спектр с одним выделенным лепестком



Сигнал и его спектр с ½ выделенного лепестка

Практическое задание №5

Задание

1. Рассчитать значения компонент полосового фильтра для 3 различных характеристических сопротивлений четырехполюсника.
2. Рассчитать значения компонент фильтра низких частот Т-типа для 3 различных характеристических сопротивлений четырехполюсника. В отчет привести вывод использованных формул.

Теория

Четырехполюсник – это электрическая цепь, имеющая две пары выводов: входную и выходную. Он используется для передачи или преобразования электрических сигналов между источником и нагрузкой.

Фильтры относятся к четырехполюсникам, так как имеют также две пары выводов. На одну пару подается входной сигнал, на другой паре получается выходной сигнал, который преобразован фильтром.

Характеристическое сопротивление четырехполюсника – параметр четырехполюсника, равный среднему геометрическому из двух его входных сопротивлений при холостом ходе и коротком замыкании противоположных зажимов. То есть входное сопротивление четырехполюсника равно его выходному сопротивлению.

При этом сопротивлении мощность передается через четырехполюсник без отражений. То есть сигнал не “отражается” обратно к источнику. Также при характеристическом сопротивлении четырехполюсника происходит максимальная передача мощности.

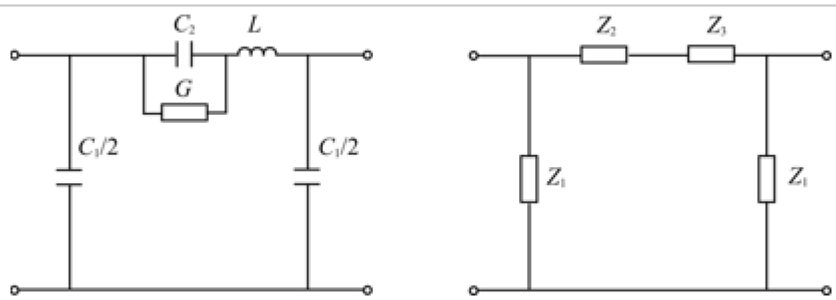
Полосовой фильтр состоит из конденсаторов и индуктивностей. Так как каждый элемент цепи фильтра имеет импеданс, зависящий от частоты сигнала, гармоники, из которых состоит сигнал, затухают. Также импедансы конденсаторов и катушек имеют мнимую часть, что приводит к фазовому сдвигу сигнала.

Импеданс конденсатора:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Импеданс индуктивности:

$$Z_L = j\omega L$$



Чтобы характеризовать затухание сигнала и его фазовый сдвиг при прохождении через четырехполюсник используется передаточная функция $\Gamma(f)$.

$$\Gamma(f) = \alpha(f) + j\varphi(f),$$

где $\alpha = Re(\Gamma)$ – аттенюация, $\varphi = Im(\Gamma)$ – фазовый сдвиг.

Аттенюация или собственное затухание - это логарифмическая мера затухания сигнала при прохождении через фильтр.

Фазовый сдвиг — это изменение фазы сигнала при прохождении через фильтр.

Передаточная функция $\Gamma(f)$ связана с импедансами элементов цепи. Она зависит от типа фильтров, структуры цепи и параметров элементов. Для полосового фильтра, изображенного на схеме ранее, передаточная функция равна:

$$\Gamma(f) = 2\,\mathrm{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{Z_2(f, \mathrm{C}_2) + Z_3(f, L)}{Z_1(f, \mathrm{C}_1)}}\right)$$

Выразим $\Gamma(f)$:

$$Z_2 + Z_3 = \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L = \frac{1 - \omega^2 L C_2}{j\omega C_2}$$

$$\frac{1}{Z_1} = j\,\frac{1}{2}\omega C_1$$

Тогда:

$$\frac{Z_2 + Z_3}{Z_1} = \frac{C_1}{2C_2}(1 - \omega^2 L C_2)$$

Из условия $(1 - \omega_{\text{н}}^2 L C_2) = 0$ и $\frac{C_1}{2C_2}(1 - \omega_{\text{в}}^2 L C_2) = -1$, где $\omega_{\text{н}}$ – нижняя частота полосового фильтра, где $\omega_{\text{в}}$ – верхняя частота полосового фильтра, следует, что $C_2 = \frac{1}{\omega_{\text{н}}^2 L}$ и $C_1 = \frac{2}{L(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)}$.

Из структуры фильтра следует, что $Z_0 = \sqrt{\frac{Z_1^2(Z_2+Z_3)}{2Z_1+Z_2+Z_3}}$.

$$Z_1 = \frac{2}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega} L(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2);$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{\omega_{\text{н}}^2 L}{j\omega};$$

$$Z_3 = j\omega L$$

Таким образом мы приходим к тому, что

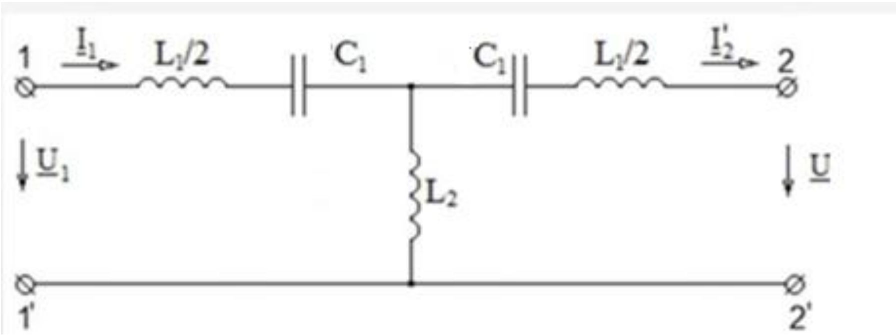
$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{L^2(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)^2 \cdot (\omega^2 - \omega_{\text{н}}^2)}{\omega^2(2\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2 - \omega^2)}}$$

Отсюда выведем формулу для индуктивности через характеристическое сопротивление:

$$L = \sqrt{\frac{Z_0^2(f_0)\omega_0^2(2\omega_\text{в}^2 - \omega_\text{н}^2 - \omega_0^2)}{(\omega_\text{в}^2 - \omega_\text{н}^2)^2 \cdot (\omega_0^2 - \omega_\text{н}^2)}}$$

Теперь мы можем вывести значения индуктивности и конденсаторов через характеристическое сопротивление.

Теперь проведем аналогичный вывод формул для значений индуктивности и конденсаторов для Т-фильтра:



Передаточная функция равна:

$$\Gamma(f) = 2\,\text{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{2Z_1(f, \text{C}_1) + Z_2(f, L_1)}{Z_3(f, L_2)}}\right)$$

$$2Z_1 + Z_2 = \frac{2}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_1}{2} = \frac{4 - \omega^2 L_1 C_1}{2j\omega C_1}$$

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{j\omega L_2}$$

$$\frac{2Z_1 + Z_2}{Z_3} = \frac{L_2}{2C_1}(4 - \omega^2 L_1 C_1)$$

Из условия $(4 - \omega_\text{н}^2 L_1 C_1) = 0$ и $\frac{L_2}{2C_1}(4 - \omega_\text{в}^2 L_1 C_1) = -1$, где $\omega_\text{н}$ – нижняя частота полосового фильтра, где $\omega_\text{в}$ – верхняя частота полосового фильтра, следует, что $L_1 = \frac{4}{\omega_\text{н}^2 C_1}$ и $L_2 = \frac{1}{2\text{C}_1(\omega_\text{в}^2 - \omega_\text{н}^2)}$.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z_3\ (Z_1 + Z_2)^2}{2Z_1 + 2Z_2 + Z_3}}$$

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$

$$Z_2 = 2j\omega L_1 = \frac{8j\omega}{\omega_\text{н}^2 C_1}$$

$$Z_3 = j\omega L_2 = \frac{j\omega}{2\mathrm{C}_1(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)}$$

$$Z_0(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega}{2\mathrm{C}_1(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{8\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2}{2C_1^2(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2) * \left(2 + \frac{16\omega^2}{\omega_{\text{н}}^2} + \frac{\omega^2}{2(\omega_{\text{н}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)}\right)}}$$

$$C_1 = \frac{1 + \frac{8\omega^2}{\omega_n^2}}{\sqrt{2Z_0^2(\omega_{\text{в}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)(2 + \frac{16\omega^2}{\omega_{\text{н}}^2} + \frac{\omega^2}{2(\omega_{\text{н}}^2 - \omega_{\text{н}}^2)})}}$$

Решение

Код:
https://colab.research.google.com/drive/1ZflL-X1HCwn_gfuYGfBNycwxu1a8n3ly?usp=sharing

Практическое задание №6

Задание

1. Рассчитать частотные и фазовые характеристики полосового фильтра для 2 различных характеристических сопротивлений четырехполюсника.
2. Рассчитать частотные и фазовые характеристики фильтра низких частот Т-типа для 2 различных характеристических сопротивлений четырехполюсника. Расчеты проводить для фильтра, рассматриваемого в задании практического занятия 5.

Теория

Фазовые и частотные характеристики — это характеристики, которые описывают поведение систем (например, фильтров, усилителей или передаточных функций) при воздействии на них сигналов в зависимости от частоты.

Частотная характеристика описывает зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты входного сигнала.

Фазовая характеристика описывает сдвиг фазы выходного сигнала относительно входного в зависимости от частоты.

Решение

Код:

https://colab.research.google.com/drive/1EDfcPqljWlpWZYCR6k7P0AbQQfaEvu9b

Практическое задание №7

Задание

1. Провести численное решение
   - нелинейных уравнений методами дихотомии и Ньютона;
   - интегральных уравнений методами левых прямоугольников и трапеции;
   - дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта 4-го порядка.
2. Провести численное решение
   - нелинейных уравнений модифицированным методом Ньютона;
   - интегральных уравнений методом средних прямоугольников;
   - дифференциальных уравнений методом Эйлера.

Теория

Метод дихотомии – это численный метод для решения нелинейных уравнений. Другое его название – метод половинного деления. Он используется для нахождения корней уравнения $f(x) = 0$, при этом $f(x)$ должна быть непрерывна на отрезке $[a, b]$. Метод основан на том, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет разные знаки на концах этого отрезка $f(a) \cdot f(b) < 0$, то существует хотя бы один корень в этом интервале.

Алгоритм заключается в постоянном делении отрезка пополам, пока $|f(c)| > \varepsilon$, где ε – необходимая точность, а c – середина отрезка. При этом, если $f(a) * f(c) < 0$, то корень лежит в $[a, \text{c}]$, если $f(b) * f(c) < 0$, то корень лежит в $[c, b]$.

Метод Ньютона также, как и метод дихотомии, используется для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$. В основе метода лежит аппроксимация функции f(x) её касательной в окрестности текущего приближения. Для этого метода используется формула:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Метод повторяется, пока $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$.

Модифицированный метод Ньютона отличается тем, что производна f' вычисляется только один раз. Формула для этого метода следующая:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_0)}$$

Метод левых прямоугольников – метод для решения интегральных уравнений. Отрезок интегрирования делится на n равных частей, и под графиком функции строятся прямоугольники так, что левый угол каждого из прямоугольников лежит на $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Метод средних прямоугольников аналогичен методу левы прямоугольников, но в нем середина горизонтальной кромки каждого прямоугольника лежит на $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Аналогично для метода правых прямоугольников: правый угол каждого прямоугольника лежит на $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Метод трапеций также используется для решения интегральных уравнений, но в отличии от метода левых прямоугольников он строит трапеции.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

Метод Эйлера — это простой метод для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка — это эффективный метод для решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. В отличие от метода Эйлера, который делает один прогноз за шаг, метод Рунге-Кута 4-го порядка использует четыре промежуточных вычисления и затем усредняет их. Это уменьшает ошибку и повышает точность.

$$k1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$
$$k2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, yn + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Решение

Код:

https://colab.research.google.com/drive/1dQdz_m5jiL4JGSMIdhZUfO5MNAGgl5f_?usp=sharing