

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики»**

Московский институт электроники и математики им. А.Н. Тихонова
Департамент электронной инженерии

ОТЧЕТ

по выполнению практического задания № 1-3
по дисциплине
«Основы построения инфокоммуникационных систем и сетей»

Выполнила студентка БИТ231
Байздренко В.М.

Преподаватель:
Саматов М.Р.

Москва, 2025

Практическое задание №1

Теория

В телекоммуникационных системах и сетях информация передается с помощью сигналов. Эти сигналы – это физические процессы или явления, которые несут в себе информацию и передают её от одного устройства к другому. Сигналы могут быть представлены в различных формах, таких как электрические, магнитные, акустические или оптические.

Согласно теории передачи информации:

Аналоговый сигнал – это функция времени $s(t)$, где как время t , так и значения сигнала s могут принимать любые значения в пределах своего диапазона.

Дискретный сигнал – это последовательность отсчетов, полученных путем выборки значений аналогового сигнала в конкретные моменты времени.

Цифровой сигнал – это дискретный сигнал, дополнительно квантованный по уровню, то есть значения его отсчетов ограничены конечным набором возможных значений.

1. Математическая модель сигнала

Математическая модель сигнала представляет из себя зависимость некоторой величины от времени. Существует аналоговый сигнал – это непрерывный сигнал, который может принимать любое значение в определенном диапазоне. Также сигнал может быть детерминированным – если его значение можно точно определить в любой момент времени.

2. Дискретизация сигнала

Дискретизация – это процесс преобразования непрерывного (аналогового) сигнала в дискретный, путем выборки его значений в определенные моменты времени. Этот процесс описывается теоремой Котельникова.

Теорема Котельникова:

«Для корректной реконструкции исходного аналогового сигнала из его дискретных отсчетов частота дискретизации f_s должна быть не менее двух максимальных частот спектра исходного сигнала:

$$f_s \geq 2 * f_{\max},$$

где f_{\max} – максимальная частота спектра сигнала.»

Если условие теоремы Котельникова не выполняется ($f_s < 2 * f_{\max}$), возникает эффект, при котором высокочастотные компоненты сигнала искажаются и воспринимаются как низкочастотные. Это происходит потому, что при выборке значений сигнала в дискретные моменты времени информация о различии между высокими и низкими частотами теряется.

3. Квантование сигнала

Квантование – это ключевой этап преобразования аналогового или дискретного сигнала в цифровой формат. Он заключается в ограничении значений сигнала конечным набором уровней, что позволяет представить сигнал в виде фиксированных чисел, например, бит.

Цифровые устройства (например, компьютеры) не могут обрабатывать непрерывные значения, поэтому необходимо "округлить" каждое значение сигнала до ближайшего уровня из заранее определенного набора. Эти уровни называются **квантовыми уровнями**.

Квантование сигнала состоит из нескольких этапов:

1. Определение диапазона сигнала.
2. Разбиение этого диапазона на равные интервалы – шаги квантования Δ .

Шаг квантования – величина интервала между соседними **уровнями квантования**.

3. Каждое значение дискретного сигнала округляется до ближайшего к нему уровня квантования.

Задание

1. Смоделировать дискретный по времени сигнал для различного количества временных отсчетов, соответствующих выполнению и не выполнению теоремы Котельникова.
2. Реализовать дискретный (квантованный) по уровню сигнал для 3 различных шагов квантования.

Результат

Код:

https://colab.research.google.com/drive/1wKR5DZfFjscOdmJKdDEp_1wHR9k51VCG?usp=sharing

Задание 1.

Задание будем реализовывать на python в среде Google Colab.

Рассмотрим сигнал $s(x) = 1 + \sin(2\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 0.5\cos(6\pi x)$, где $x = ft$, f – опорная частота (входной параметр кода), t – время.

Сначала смоделируем дискретный сигнал, соответствующий невыполнению теоремы Котельникова (см. Рисунок 1.1). При опорной частоте 2 Гц максимальная частота спектра сигнала равна 12 Гц. Рассмотрим временной интервал, равный 1 с, и число временных отсчетов 10. Тогда частота дискретизации равна 10 Гц, что меньше, чем $2 * 12$ Гц. Таким образом на Рисунке 1.1 представлено невыполнение теоремы Котельникова.

Опорная частота сигнала 2
Временной интервал 1
Число временных отсчетов 10

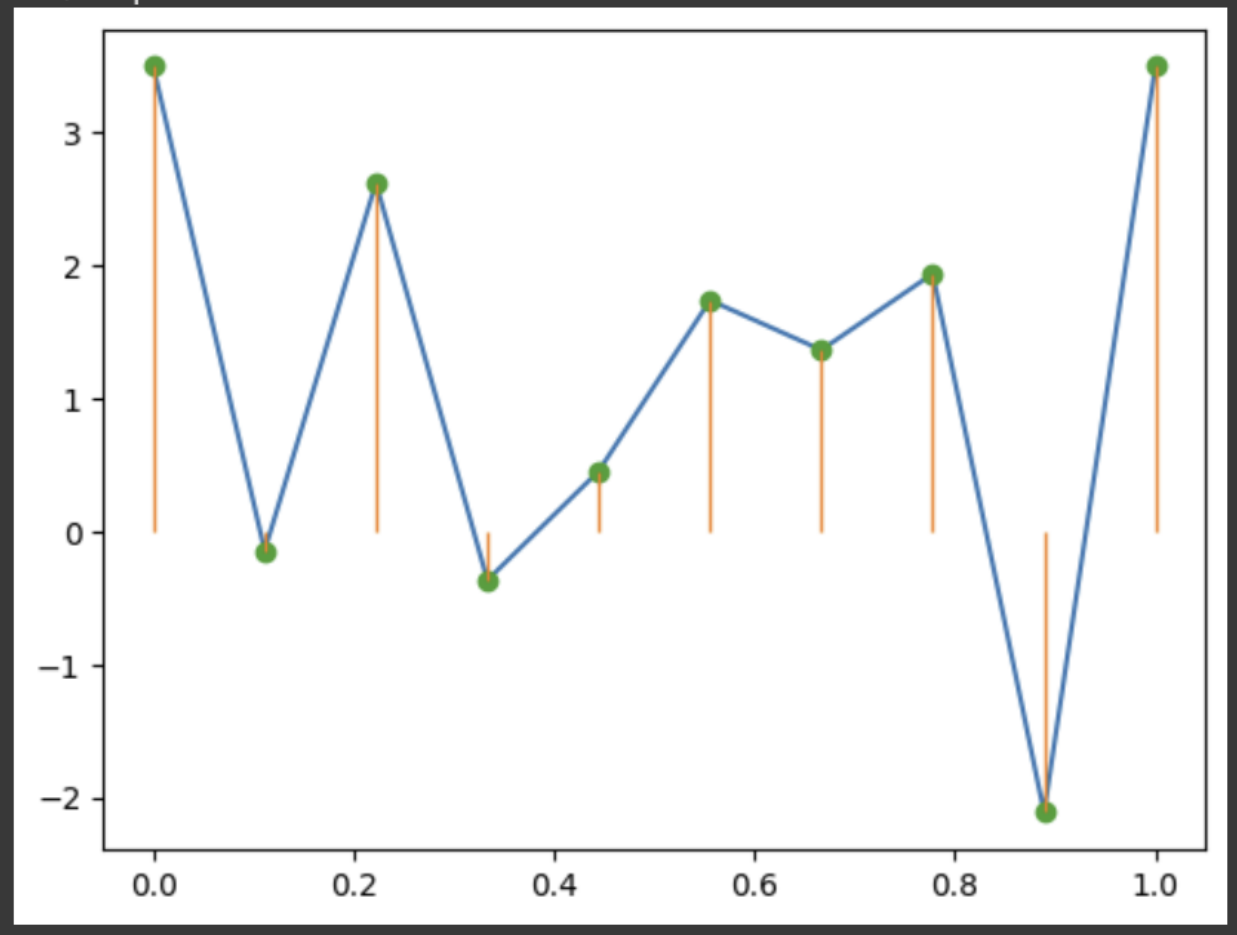


Рисунок 1.1. Дискретный сигнал при невыполнении теоремы Котельникова.

Теперь смоделируем дискретный сигнал, соответствующий выполнению теоремы Котельникова (см. Рисунок 1.2). При опорной частоте 2 Гц максимальная частота спектра сигнала равна 6 Гц. Рассмотрим временной интервал, равный 1 с, и число временных отсчетов 40. Тогда частота дискретизации равна 40 Гц, что меньше, чем $2 * 6$ Гц. Таким образом на Рисунке 1.2 представлено выполнение теоремы Котельникова.

Также рассмотрим тот же сигнал при числе временных интервалов 100. Тогда частота дискретизации равна 100 Гц, что также соответствует выполнению Теоремы Котельникова.

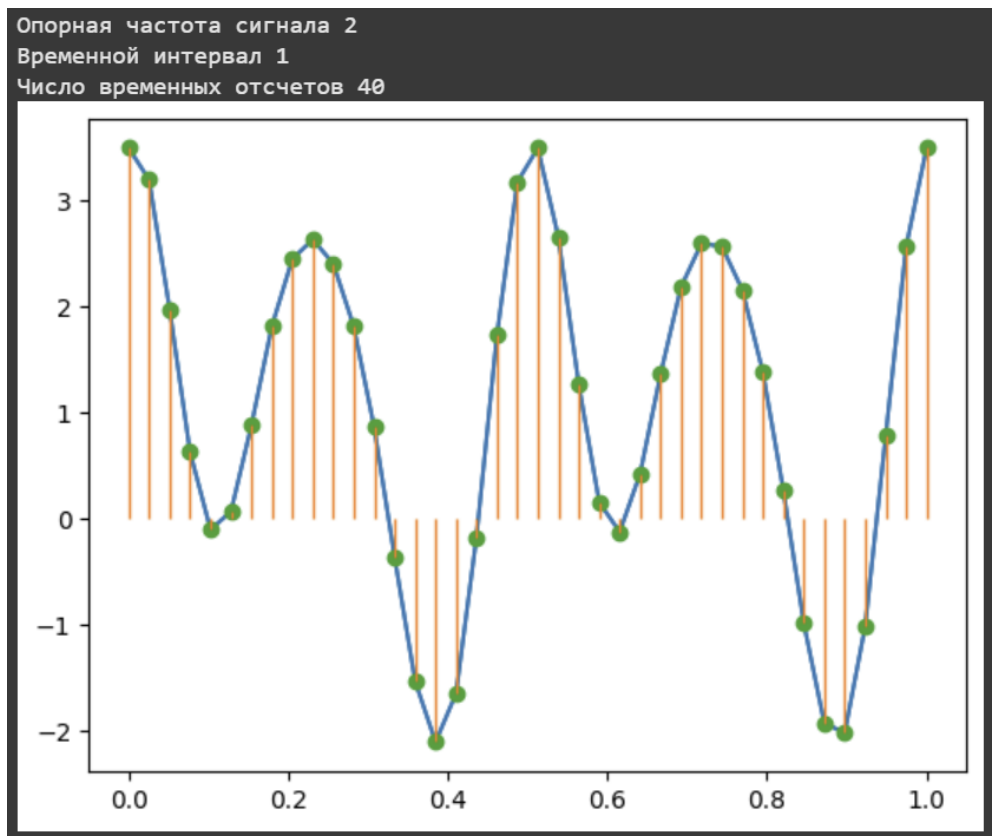


Рисунок 1.2. Дискретный сигнал при выполнении теоремы Котельникова ($f_s=40\text{Гц}$).

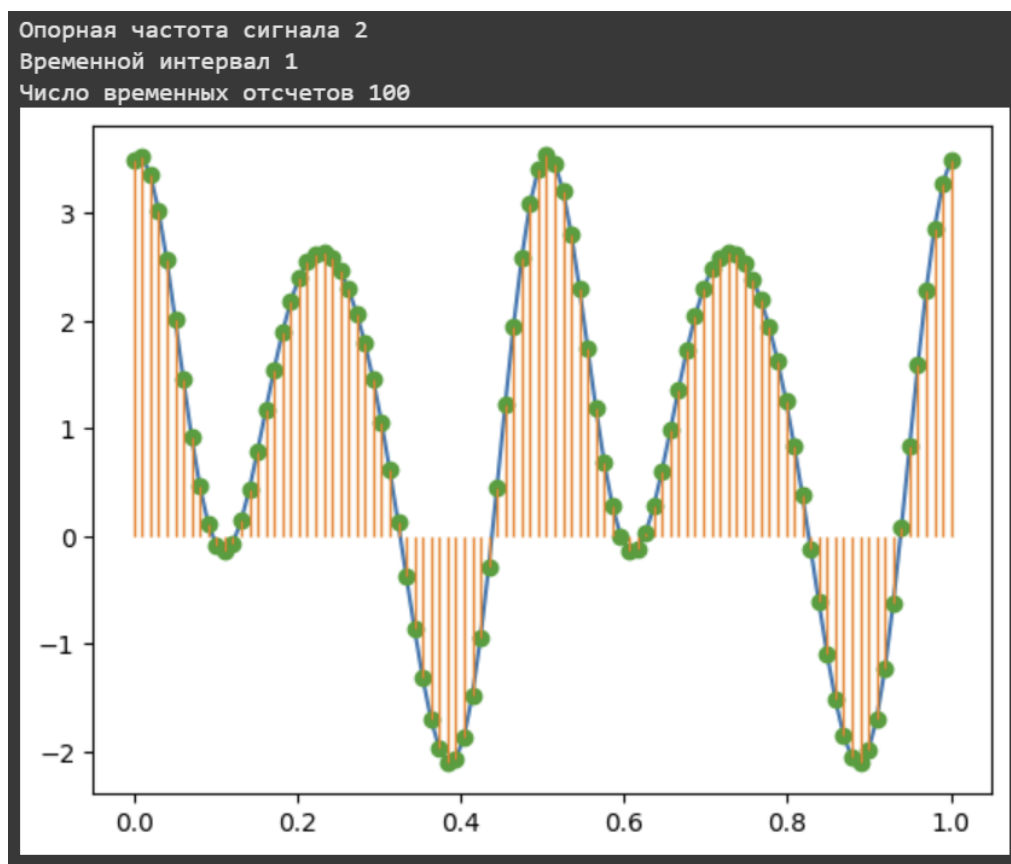


Рисунок 1.3. Дискретный сигнал при выполнении теоремы Котельникова ($f_s=100\text{Гц}$).

Задание 2.

Рассмотрим сигнал $s(x) = 1 + \sin(2\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 0.5\cos(6\pi x)$, где $x = ft$, f – опорная частота (входной параметр кода), t – время. Зададим опорную частоту сигнала 2 Гц, временной интервал 1 с, число временных отсчетов 100, так как в таком случае теорема Котельникова выполняется.

Напишем функцию, которая будет округлять значение дискретного сигнала к ближайшему уровню квантования, если известен шаг квантования. Таким образом при шаге квантования 1 получим график на Рисунке 2.1. При шаге квантования 2 получим график на Рисунке 2.2. При шаге квантования 3 – Рисунок 2.3.

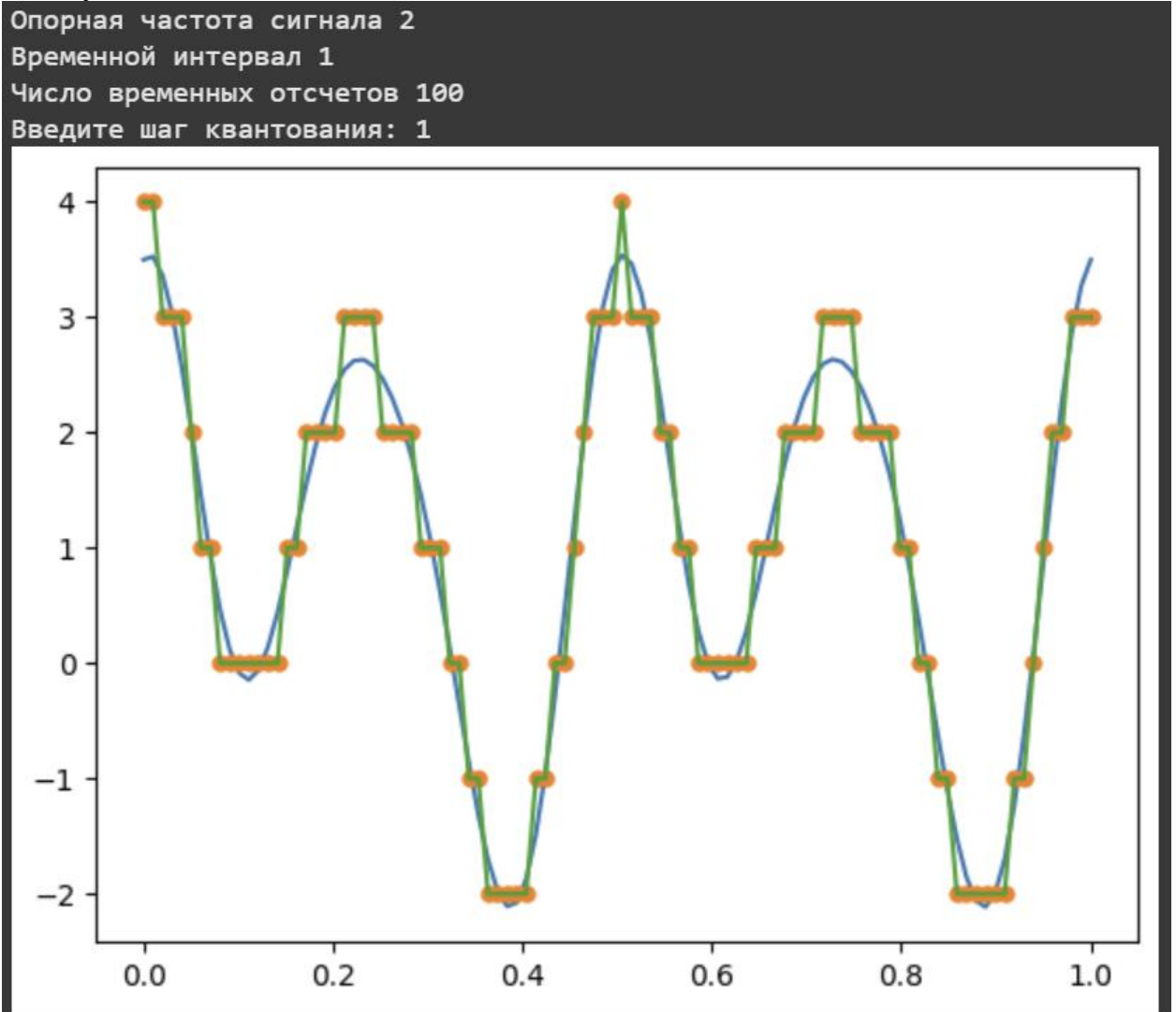


Рисунок 2.1. Квантование сигнала $s(x)$ при шаге квантования 1.

Опорная частота сигнала 2
Временной интервал 1
Число временных отсчетов 100
Введите шаг квантования: 2

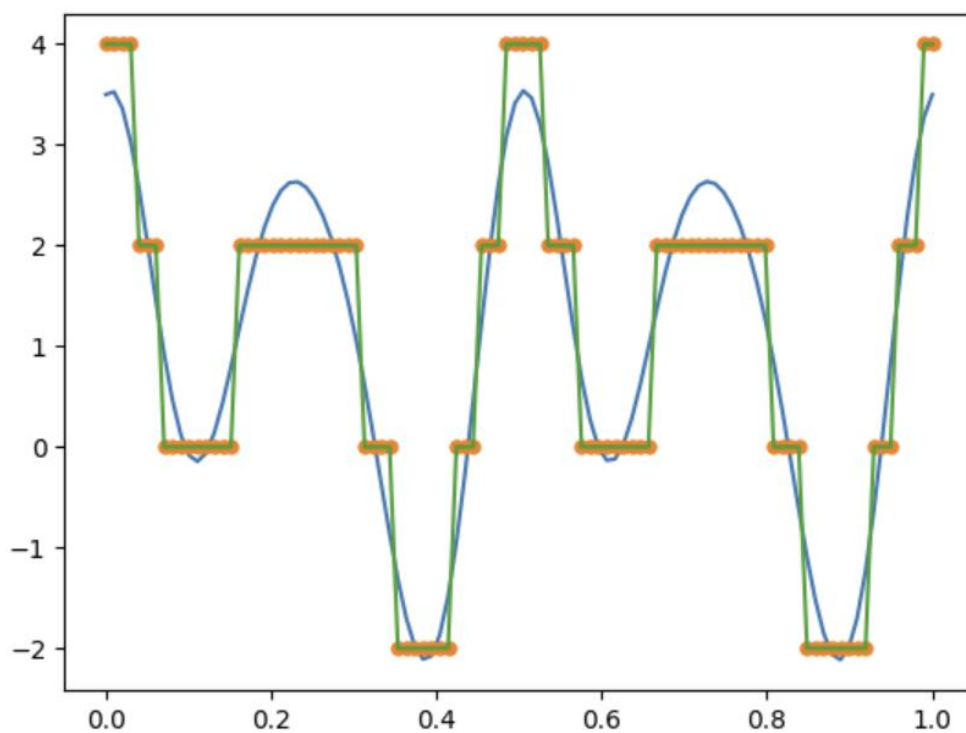


Рисунок 2.2. Квантование сигнала $s(x)$ при шаге квантования 1.

Опорная частота сигнала 2
Временной интервал 1
Число временных отсчетов 100
Введите шаг квантования: 3

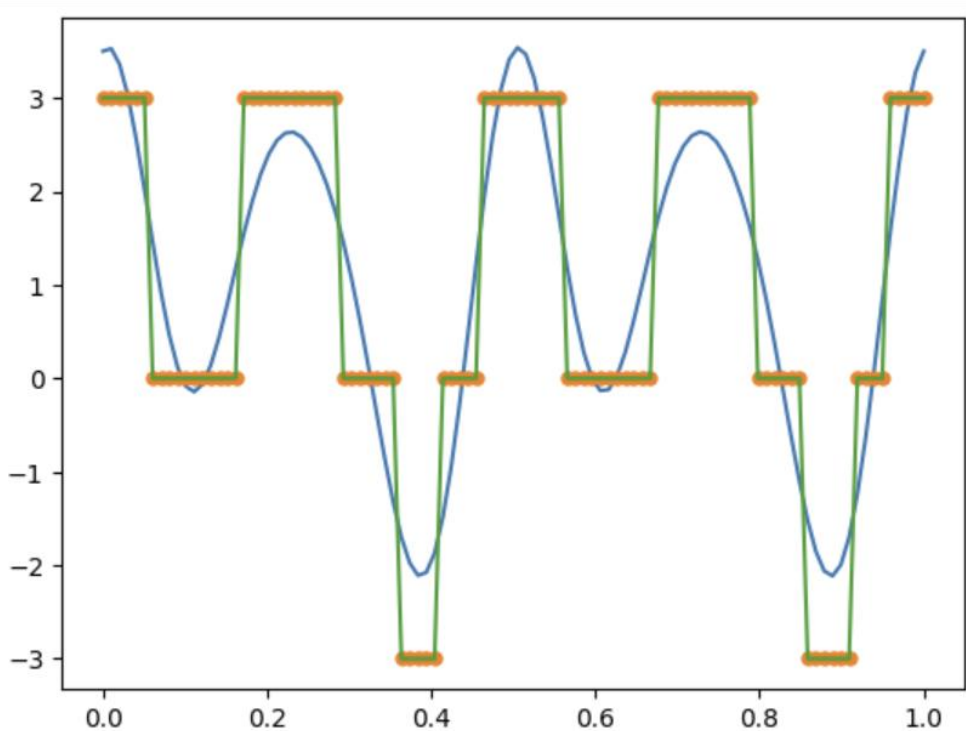


Рисунок 2.3. Квантование сигнала $s(x)$ при шаге квантования 1.

Выводы

1. При невыполнении теоремы Котельникова, когда частота дискретизации меньше двух максимальных частот спектра, высокочастотные гармоники при дискретизации искажаются и воспринимаются как низкочастотные.
2. При выполнении теоремы Котельникова дискретный сигнал корректно отображает исходный сигнал.
3. Моделирование дискретного и квантованного сигнала показало, что параметры дискретизации и квантования значительно влияют на качество. Это важно учитывать при передачи данных.

Практическое задание №2

Теория

1. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье является одним из фундаментальных инструментов в теории сигналов и систем. Оно позволяет представить сигнал как сумму гармонических колебаний с различными частотами, амплитудами и фазами для получения спектральной характеристики сигнала по его математической модели.

Для анализа сигнала и получения его спектральной характеристики используются математические методы преобразования Фурье:

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

Это метод, позволяющий получить спектр дискретного сигнала путем суммирования значений сигнала, умноженных на комплексные экспоненты. ДПФ дает возможность разделить сигнал на его гармонические составляющие.

Быстрое преобразование Фурье (БПФ):

Это оптимизированный вариант ДПФ, который значительно снижает вычислительную сложность за счет использования симметричных свойств комплексных экспонент.

Чтобы восстановить исходный сигнал из его спектральной характеристики, используют обратные преобразования: обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) и обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ).

2. Спектр сигнала

Сигнал может быть разложен на набор синусоидальных или косинусоидальных волн с различными частотами, амплитудами и фазами. Эти волны называются гармоническими компонентами. Спектр представляет из себя распределение гармоник сигнала по частотной прямой, проще говоря, в каком соотношении распределена энергия сигнала по каждой из частот. В отличие от временной области, где сигнал описывается как функция времени $s(t)$, в частотной области он представляется как функция частоты $S(f)$.

Спектр необходим, например, для фильтрации сигнала от шумов или сжатия данных.

Задание

1. Провести расчет быстрого и дискретного преобразования Фурье (БПФ и ДПФ) для 3 различных гармонических сигналов. Не забывайте про выполнение теоремы Котельникова.
2. Реализовать БПФ и ДПФ для периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Результат

Код: <https://colab.research.google.com/drive/1IdM1u7uMBmD9TccOD--c368zTiEa1ejr?usp=sharing>

Задание 1.

Рассмотрим три гармонических сигнала:

$$s_1(x) = 1 + \sin(2\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 0.5\cos(6\pi x)$$

$$s_2(x) = 3 + \sin(4\pi x) + 1\cos(7\pi x) + 2\cos(9\pi x)$$

$$s_3(x) = 3 + \sin(4\pi x) + 1\cos(7\pi x) + 0.5\cos(9\pi x) + 5\cos(6\pi x)$$

где $x = ft$, f – опорная частота (входной параметр кода), t – время.

Пусть опорная частота будет равна 10, временной интервал 1с, число временных отсчетов 256. В таком случае частота дискретизации сигнала будет равна 256 Гц, поэтому теорема Котельникова будет выполняться для всех трех сигналов. Рассчитаем БПФ и ДПФ для всех трех сигналов.

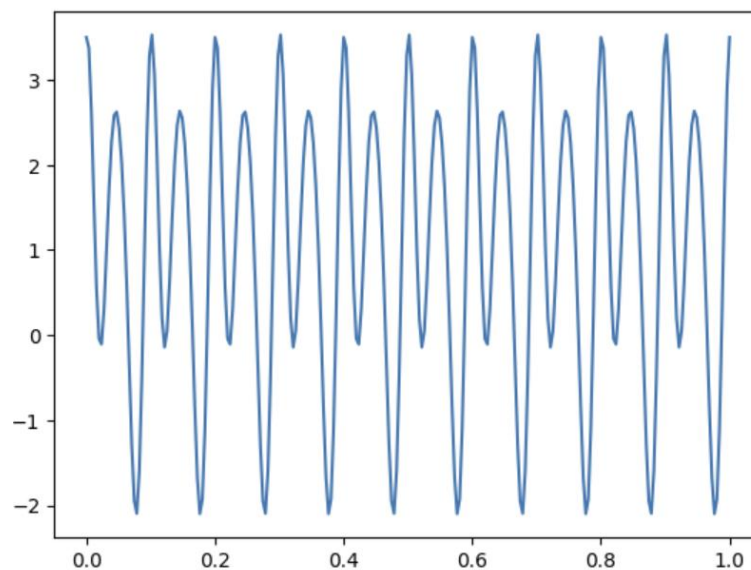


Рисунок 3.1. Сигнал $s_1(t)$.

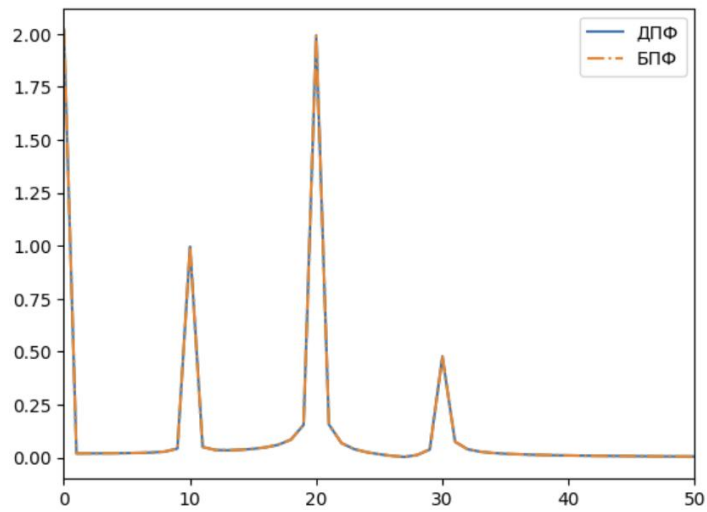


Рисунок 3.2. ДПФ и БПФ для $s_1(t)$.

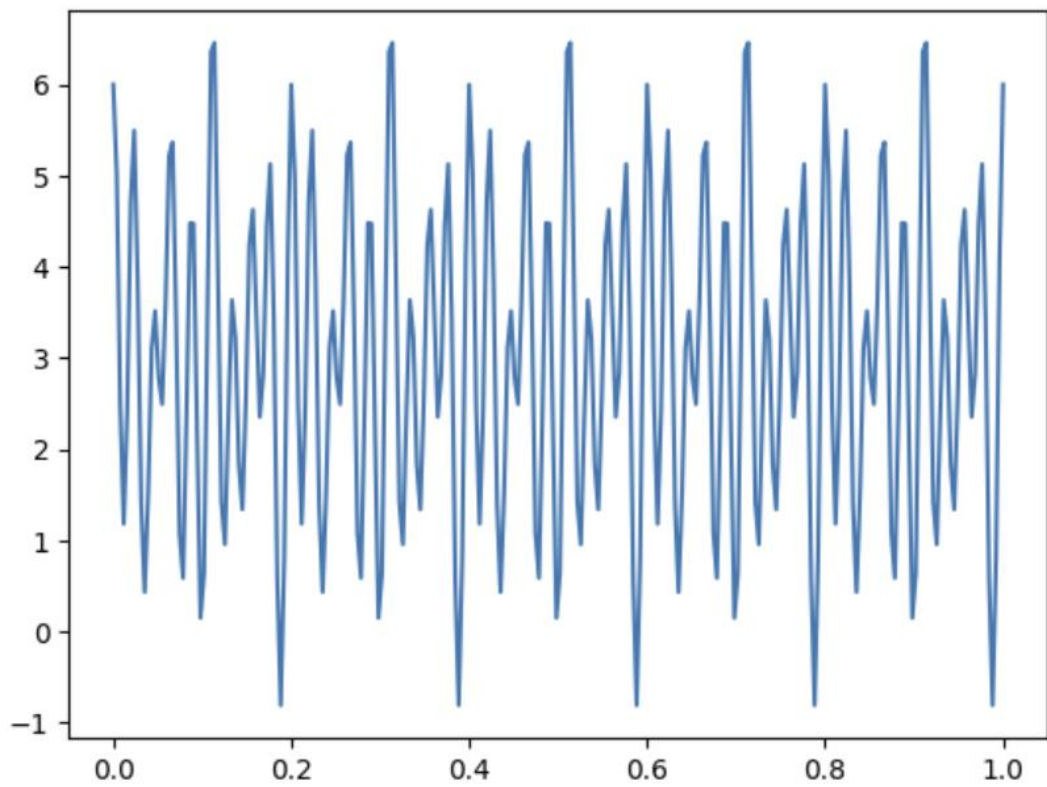


Рисунок 3.3. Сигнал $s_2(t)$.

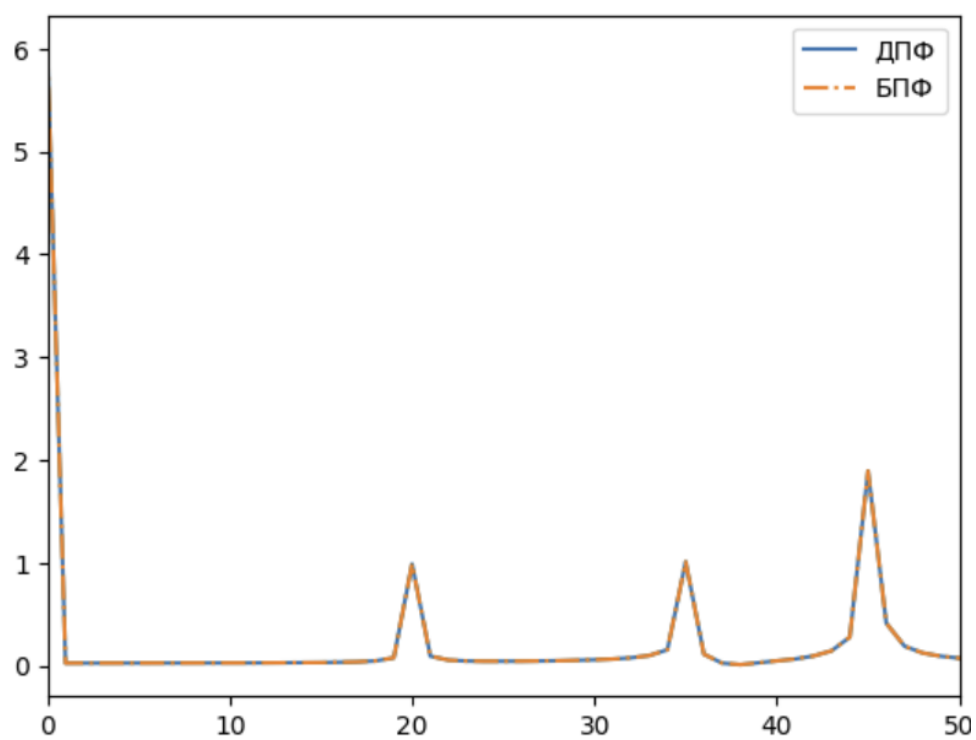


Рисунок 3.4. ДПФ и БПФ $s_2(t)$.

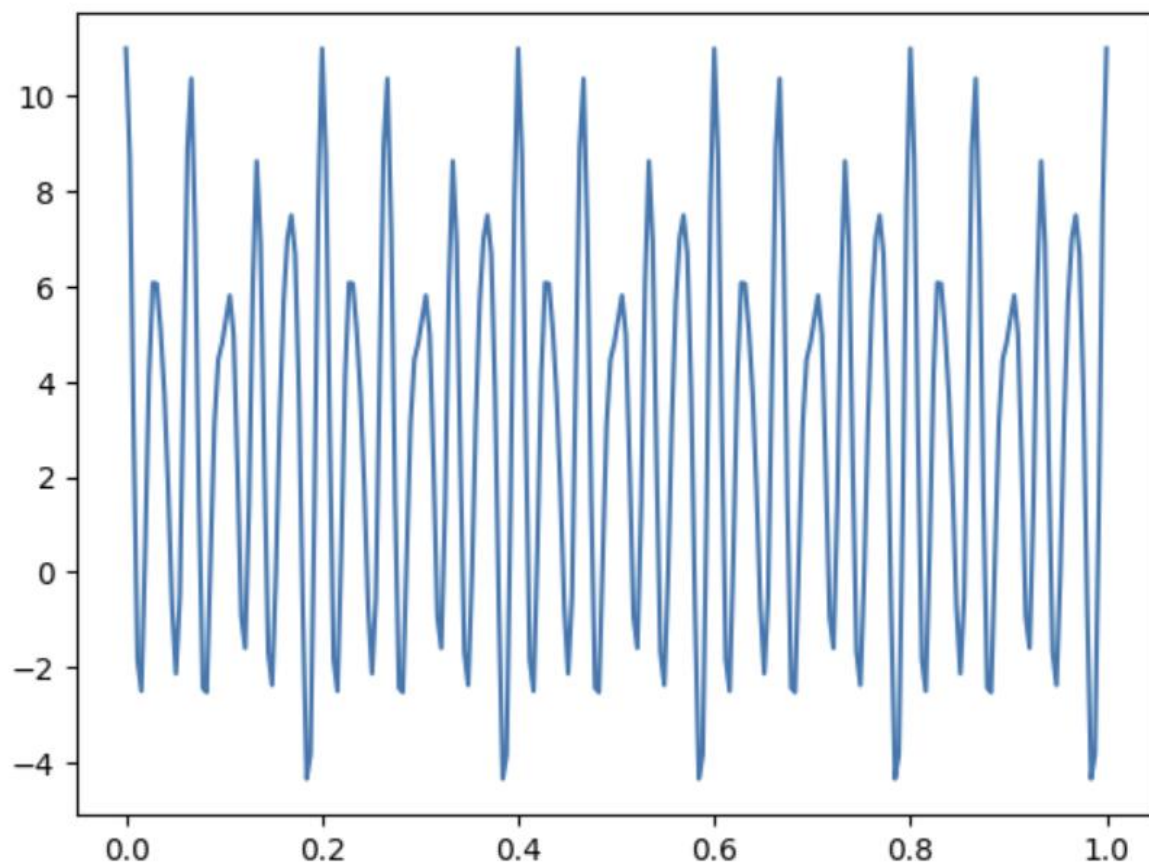


Рисунок 3.3. Сигнал $s_3(t)$.

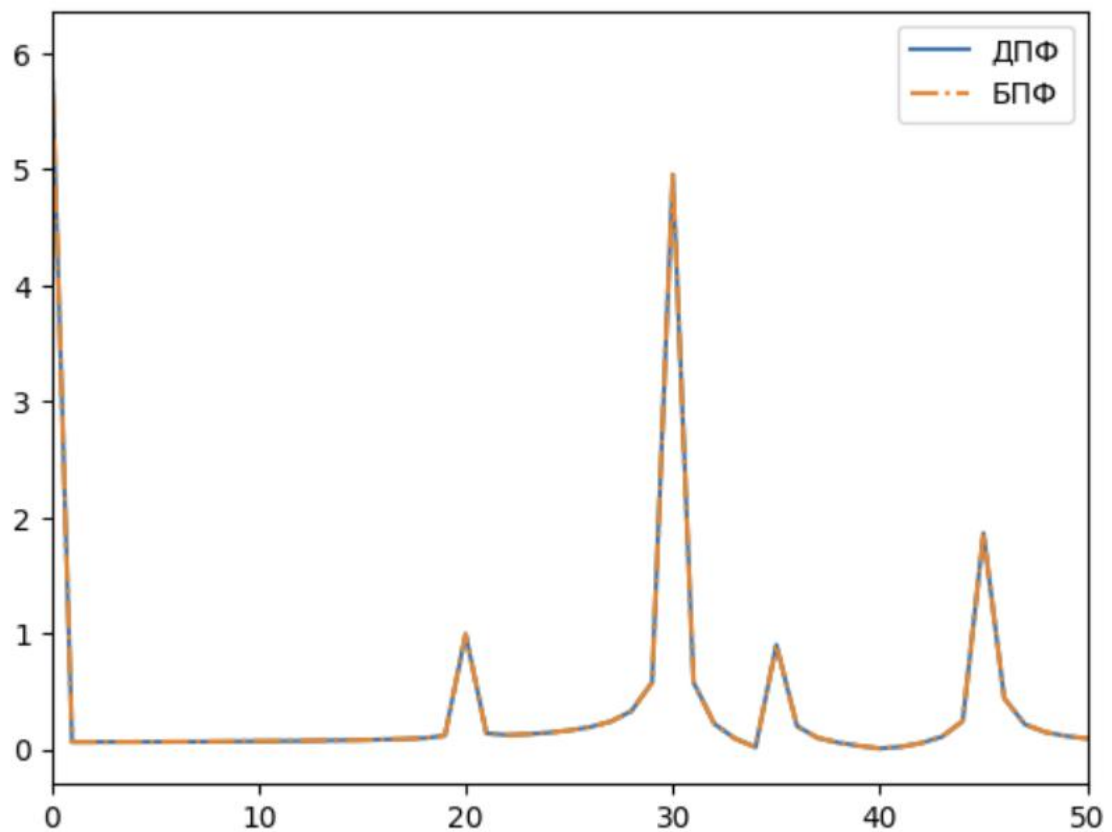


Рисунок 3.3. ДПФ и БПФ для $s_3(t)$.

Задание 2.

Зададим прямоугольный сигнал $s_4(t)$ (периодическая последовательность прямоугольных импульсов) с периодом $T = 5$, амплитудой $U = 5$ и длительностью импульса $\tau = 1$. Рассчитаем для него ДПФ и БПФ (опорная частота 10 Гц, временной интервал 1с, число временных отсчетов 512).

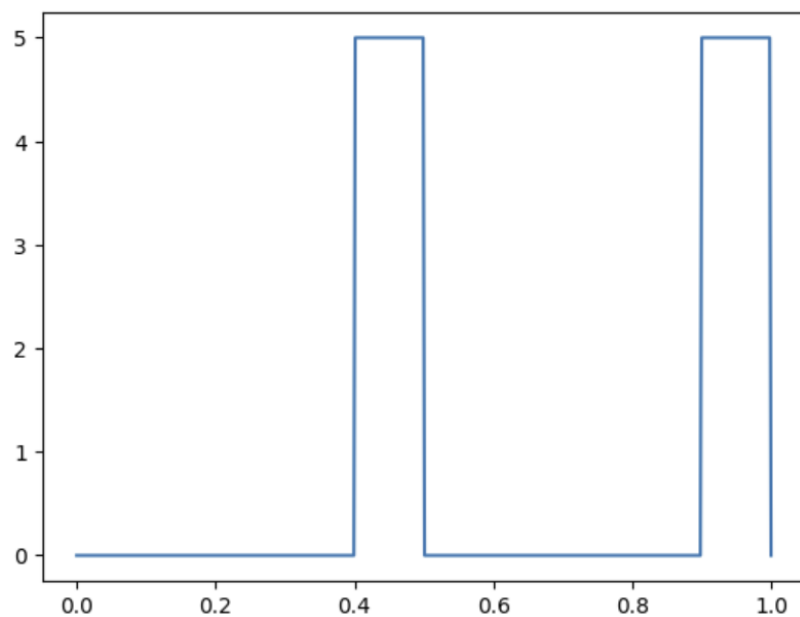


Рисунок 4.1. Сигнал $s_4(t)$.

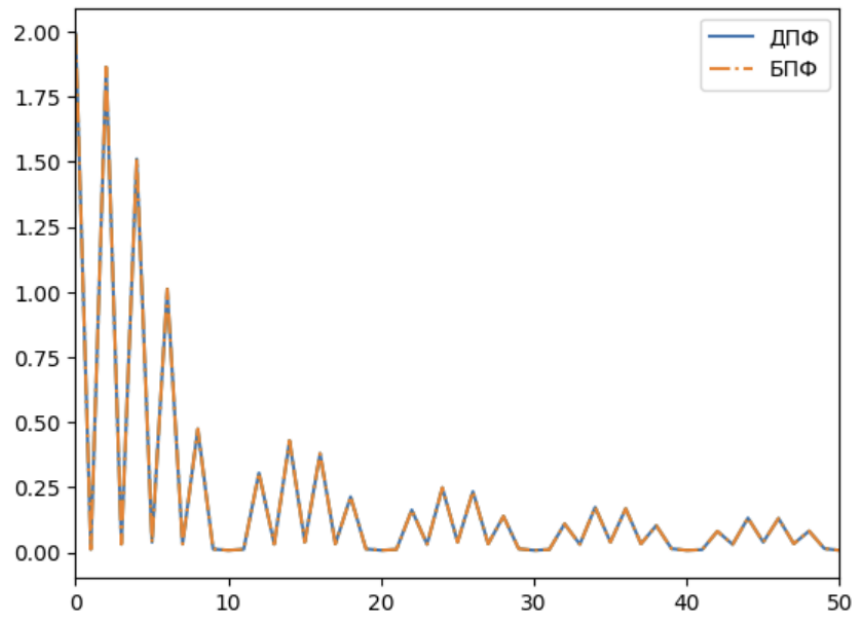


Рисунок 4.2. ДПФ и БПФ для $s_4(t)$.

Выводы

1. Преобразование Фурье позволяет эффективно анализировать частотный состав сигналов.
2. Во всех заданиях практической работы спектры сигналов корректно отражают их спектральный состав.
3. Анализ прямоугольного сигнала согласуется с теоретически верным (хоть и неожиданным для меня).

Практическое задание №3

Теория

Обратное прямое преобразование Фурье позволяет восстановить непрерывный сигнал $s(t)$ из его спектральной плотности $S(f)$, которая была получена с помощью прямого преобразования Фурье. Обратное дискретное преобразование Фурье применяется для восстановления дискретного сигнала $s[n]$ из его дискретного спектра $S[k]$, который был получен с помощью прямого дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

ОППФ и ОДПФ часто применяются, например, для восстановления сигнала после анализа, удаления шумов или сжатия данных, так как эти действия связаны со спектром сигнала, который получается благодаря БПФ и ДПФ.

Задание

1. Провести расчет прямого и обратного дискретного преобразования Фурье для 3 различных гармонических сигналов. Не забывайте про выполнение теоремы Котельникова.
2. Реализовать расчет прямого и обратного дискретного преобразования Фурье для гармонического сигнала с переменной частотой (частота меняется 2 раза на рассматриваемом временном промежутке).

Результат

Код: <https://colab.research.google.com/drive/1puQUfbPIOzATF6Oz6dn9eCrMz-rSBg7I?usp=sharing>

Задание 1.

Рассмотрим три гармонических сигнала:

$$s_1(x) = 1 + \sin(2\pi x) + 2\cos(4\pi x) + 0.5\cos(6\pi x)$$

$$s_2(x) = 3 + \sin(4\pi x) + 1\cos(7\pi x) + 2\cos(9\pi x)$$

$$s_3(x) = 3 + \sin(4\pi x) + 1\cos(7\pi x) + 0.5\cos(9\pi x) + 5\cos(6\pi x)$$

где $x = ft$, f – опорная частота (входной параметр кода), t – время.

Пусть опорная частота будет равна 10, временной интервал 1с, число временных отсчетов 256. В таком случае частота дискретизации сигнала будет равна 256 Гц, поэтому теорема Котельникова будет выполняться для всех трех сигналов. Рассчитаем ДПФ и БПФ для этих трех сигналов, после чего рассчитаем ОБПФ и ОДПФ.

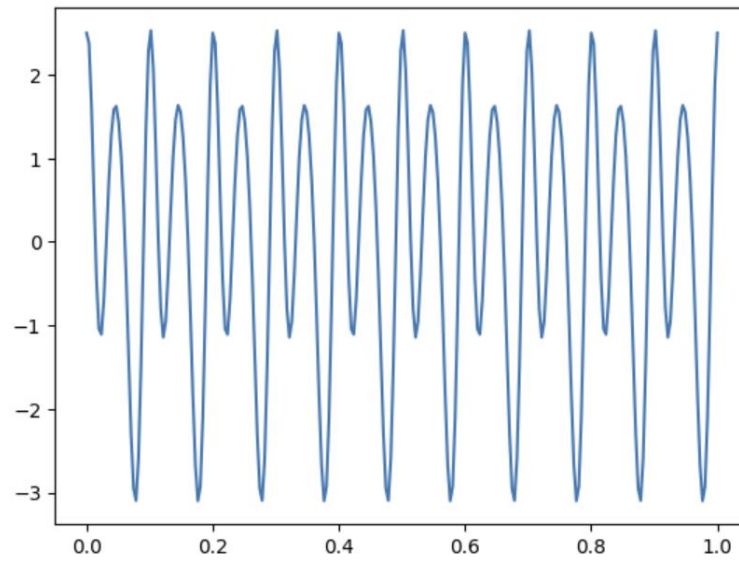


Рисунок 5.1. Сигнал $s_1(x)$.

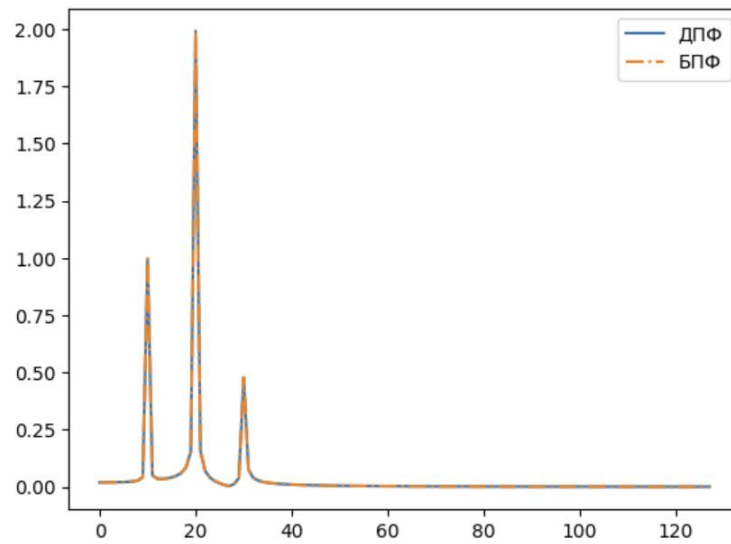


Рисунок 5.2. ДПФ и БПФ для $s_1(x)$.

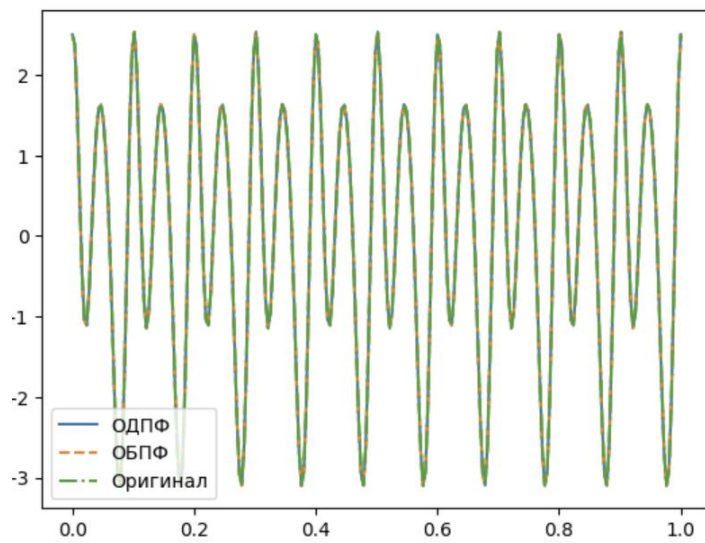


Рисунок 5.3. ОДПФ и ОБПФ для $s_1(x)$, наложенные на сам сигнал.

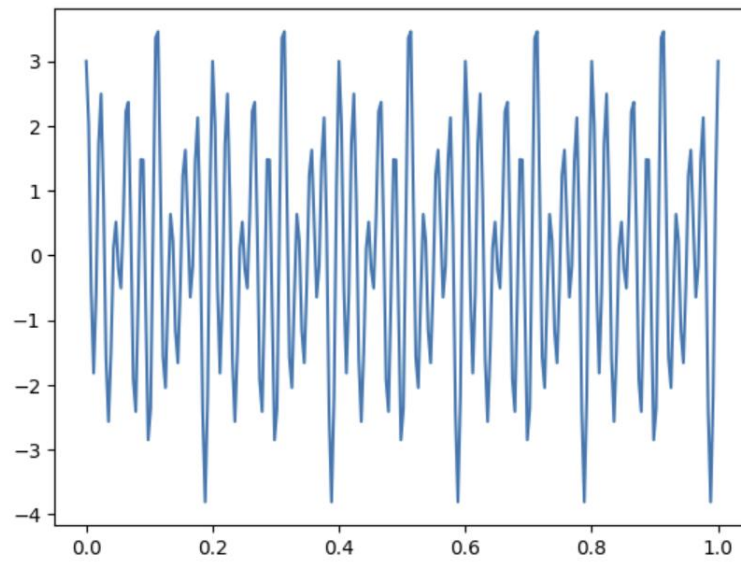


Рисунок 5.4. Сигнал $s_2(x)$.

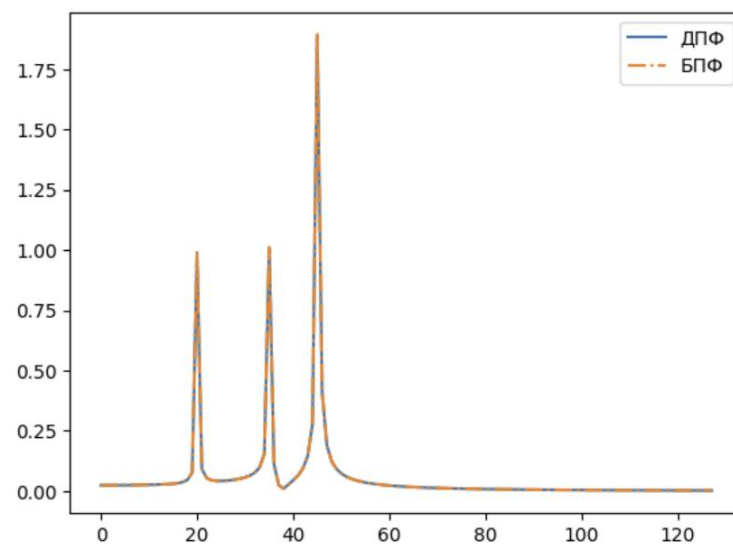


Рисунок 5.5. ДПФ и БПФ для $s_2(x)$.

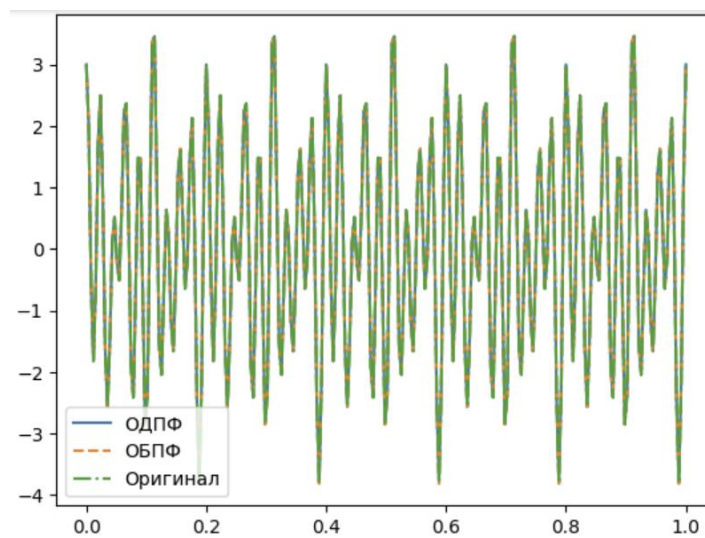


Рисунок 5.6. ОДПФ и ОБПФ для $s_2(x)$, наложенные на сам сигнал.

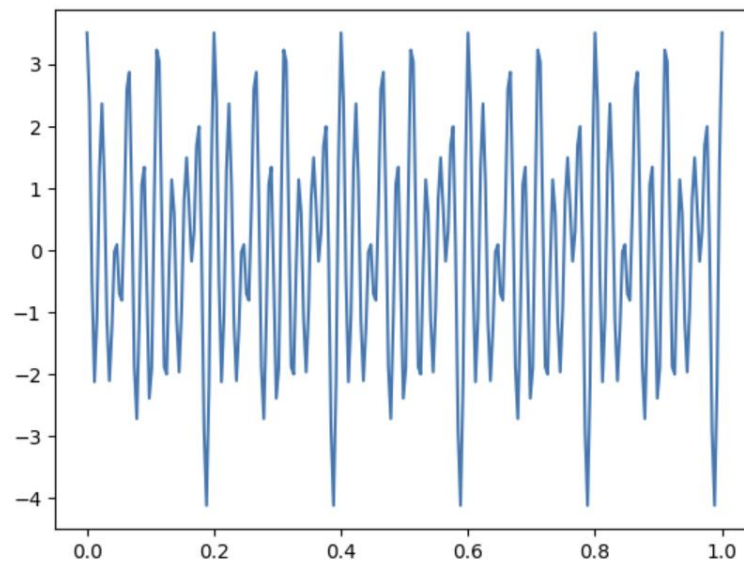


Рисунок 5.7. Сигнал $s_3(x)$.

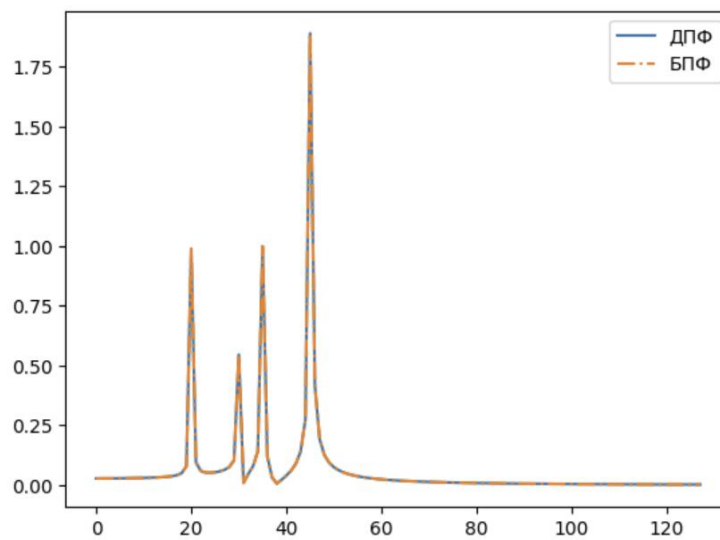


Рисунок 5.8. ДПФ и БПФ для $s_3(x)$.

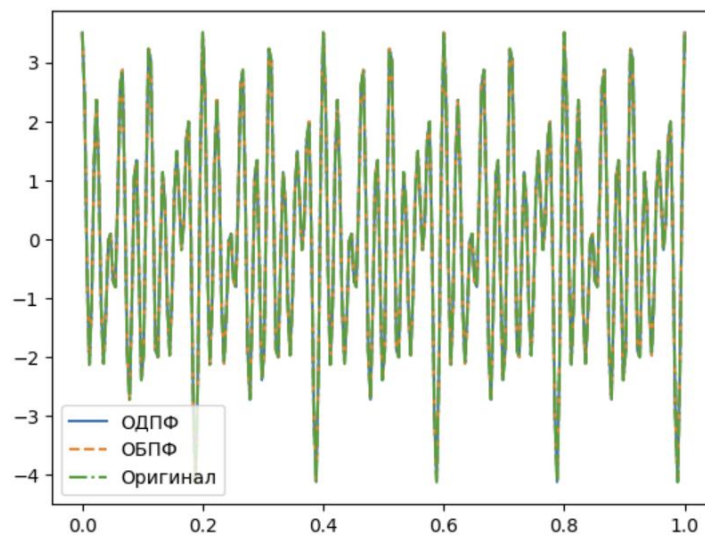


Рисунок 5.9. ОДПФ и ОБПФ для $s_3(x)$, наложенные на сам сигнал.

Задание 2.

Зададим сигнал, частота которого будет меняться дважды на рассматриваемом промежутке времени:

При $0 < t < T/3$:

$$s(x) = \sin(\pi x) + 2\cos(3\pi x) + 4\cos(6\pi x)$$

При $T/3 < t < 2T/3$:

$$s(x) = \sin(2\pi x) + 2\cos(6\pi x) + 4\cos(9\pi x)$$

При $2T/3 < t < T$:

$$s(x) = \sin(3\pi x) + 2\cos(9\pi x) + 4\cos(12\pi x)$$

Где t – момент времени, T – рассматриваемый временной интервал, $x = ft$, f – опорная частота (входной параметр кода).

Пусть опорная частота будет равна 10, временной интервал 1с, число временных отсчетов 256. В таком случае частота дискретизации сигнала будет равна 256 Гц, поэтому теорема Котельникова будет выполняться для всех трех фрагментов сигналов. Рассчитаем ДПФ и БПФ для этого сигнала, после чего рассчитаем ОБПФ и ОДПФ.

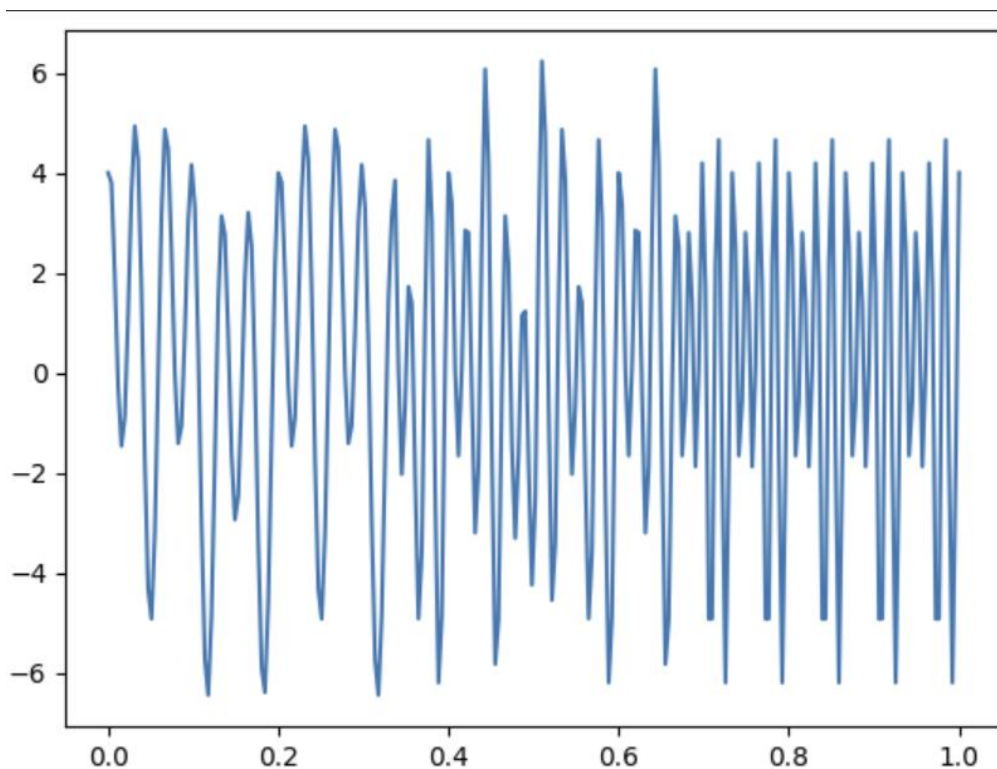


Рисунок 5.10. Сигнал $s(x)$.

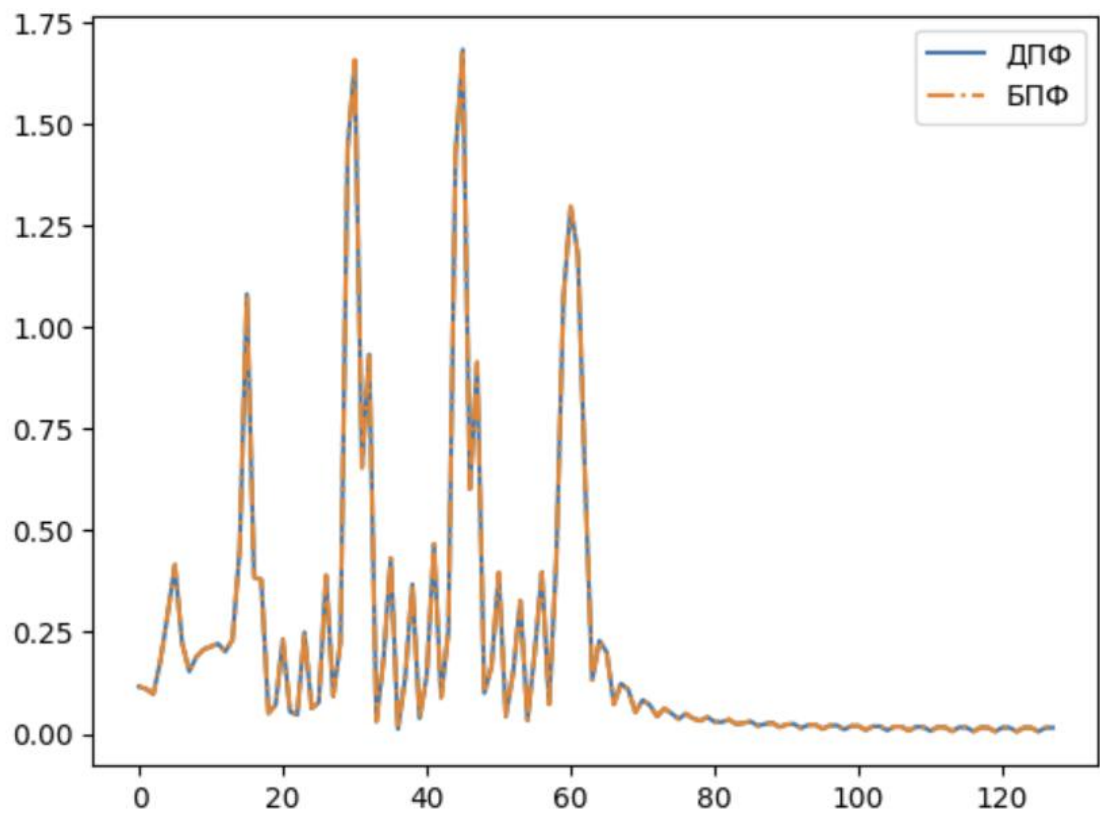


Рисунок 5.11. ДПФ и БПФ для $s_3(x)$.

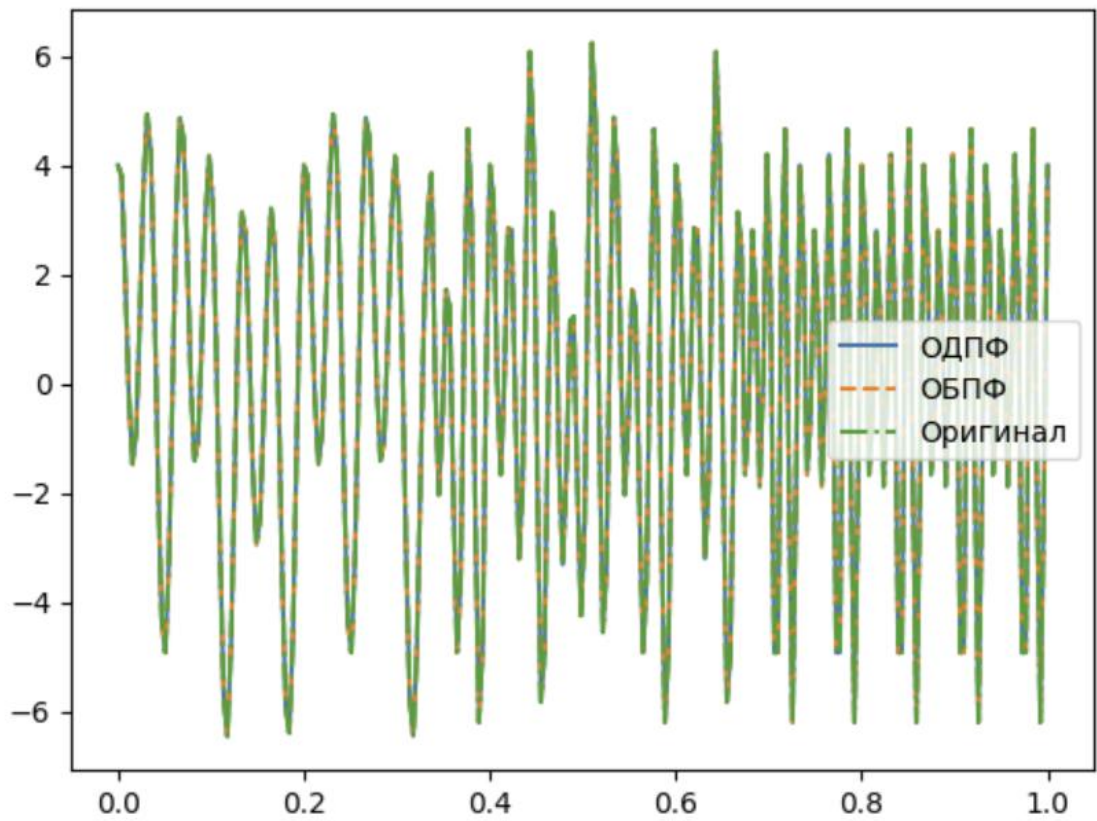


Рисунок 5.12. ОДПФ и ОБПФ для $s_3(x)$, наложенные на сам сигнал.

Стоит отметить, что на Рисунке 5.11 произошло наложение частот из-за недостаточно большого числа временных отсчетов, но на итоговый график ОДПФ и ОБПФ (см. Рисунок 5.12) это не повлияло, и сигнал удалось восстановить.

Выводы

1. ОДПФ и ОБПФ позволяют восстановить сигнал с высокой точностью.
2. Для всех заданий практической работы исходный сигнал совпал с сигналом после ОДПФ и ОБПФ.
3. Даже при изменении частоты сигнала возможно получить правильный спектр сигнала, из которого потом можно будет восстановить исходный сигнал с помощью ОДПФ и ОБПФ.