Lista 0

Kamil Matuszewski

1 marca 2016

1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Zadanie 4

Udowodnić poprawność "mnożenia po rosyjsku".

Zastanówmy się co robi nasz algorytm. Mamy podane liczby n i m. W każdym kroku liczbę n dzielimy przez dwa, a liczbę m mnożymy przez dwa. Wykonujemy to dopóki $n \neq 1$. Jeśli w obecnym kroku liczba n jest nieparzysta, dodajemy do całej sumy liczbę m w tym kroku. Ostatecznie suma jest wynikiem mnożenia.
Pomyślmy o naszej liczbie n w postaci binarnej. W każdym kroku algorytmu dzielimy ją przez 2 - czyli w rzeczywistości przesuwamy binarnie w lewo, czy inaczej - usuwamy ostatni bit. Jeśli liczba jest nieparzysta - to znaczy, jeśli liczba w zapisie binarnym kończy się na 1 - to do sumy dodajemy liczbę m. W i-tym kroku nasza liczba m to tak naprawdę $2^i \cdot m$. Innymi słowy, to, co wykonuje nasz algorytm możemy zapisać jako:

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n} n_i 2^i m$$

Zauważmy, że jeśli i-ty bit liczby n to zero, suma nie jest zwiększona, a jeśli i-ty bit to 1, zwiększamy ją dokładnie o naszą liczbę m w i-tym kroku. Możemy to zapisać inaczej, jako:

$$m \sum_{i=0}^{\log_2 n} n_i 2^i$$

Teraz, zauważmy, że $\sum_{i=0}^{\log_2 n} n_i 2^i = n$, i mamy, że nasz algorytm w rzeczywistości liczy $n \cdot m$

Jeśli mówimy o jednorodnym kryterium kosztów, złożoność czasowa naszego algorytmu to $O(\log_2 n)$ - ponieważ w każdym przejściu pętli dzielimy liczbę n, mnożymy liczbę m oraz ewentualnie dodajemy do sumy liczbę m. Wykonujemy to dokładnie $\log_2 n$ razy, każde działanie w czasie $O(1)$, stąd taki wynik. Co do złożoności pamięciowej, to jest ona $O(1)$, bo z każdym przejściem programu przechowujemy tylko kolejne liczby.

Jeśli chodzi o logarytmiczne kryterium kosztów, to złożoność czasowa to $\log_2 n$ czyli pętle, i $\log_2 nm$ bo w najgorszym wypadku nasza m którą chcemy dodać do sumy ma taką długość, stąd $O(\log_2 n \log_2 nm)$. Pamięciowo to najdłuższe będą liczby m w n'tym kroku i ostateczna suma. Obie mogą mieć maksymalnie $\log_2 nm$ bitów, stąd, złożoność pamięciowa to $O(\log_2 nm)$

Zadanie 5

Chcielibyśmy uogólnić algorytm "macierzowy" obliczania n-tej liczby Fibbonacciego na inne ciągi, w których kolejne elementy są liniową kombinacją skończonej liczby elementów wcześniejszych. Inaczej, chcielibyśmy macierz, taką, że:

$$A \cdot \begin{vmatrix} a_{k+l-1} \\ \vdots \\ a_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k+l} \\ \vdots \\ a_{k+1} \end{vmatrix}$$

Gdzie $a_{k+l} = \alpha_0 a_k + \cdots + \alpha_l a_{k+l-1}$
Można łatwo sprawdzić, że macierz A to:

$$\begin{vmatrix} \alpha_l & \alpha_{l-1} & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Teraz, co jeśli n'ty element zależy również od jakiegoś $W(n)$? Sytuacja jest podobna. Teraz:

$$a_n = \alpha_l a_{n-1} + \cdots + \alpha_0 a_{n-k} + W(n)$$

gdzie

$$W(n) = b_0 n^0 + b_1 n^1 + \cdots + b_s n^s$$

Teraz, chcemy macierz A, taką, że:

$$A \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \\ 1 \\ n^1 \\ \vdots \\ n^s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \\ 1 \\ (n+1)^1 \\ \vdots \\ (n+1)^s \end{vmatrix}$$

Teraz, można sprawdzić, że:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

gdzie:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \alpha_l & \alpha_{l-1} & \dots & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_s \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = 0$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{0}{1} & \dots & \binom{0}{s} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{1}{s} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{s}{0} & \binom{s}{1} & \dots & \binom{s}{s} \end{vmatrix}$$

Bo, $(n+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i$ więc:

$$\begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \binom{s}{0} & \binom{s}{1} & \dots & \binom{s}{s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ n \\ \vdots \\ n^s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ n+1 \\ \vdots \\ (n+1)^s \end{vmatrix}$$

Zadanie 6

licznik = 0
Przejdź po tablicy wykonując:
    licznik $\leftarrow a_i\%2$ XOR licznik
Zwróć licznik

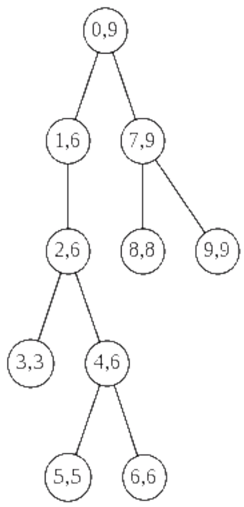
Zajmujemy tylko rozmiar tablicy + jeden bit. Jeśli możemy zmieniać na wejściu, zajmujemy tylko długość najdłuższej liczby + jeden bit.

Zadanie 7

bool=0 Jeśli $u_i = v_i$ to bool = 1, zakończ.
Weź z listy parę (p_i, u_i)
W.P.P.
Dopóki $p_i \neq$ korzeń
    Jeśli $p_i = v_i$ to bool = 1, zakończ.
    W.P.P. weź parę (x_i, p_i); $p_i = x_i$
Zakończ.

AKTUALIZACJA

Uwaga, rozwiązanie lepsze:
Wcześniej nie zauważyłem, że mamy więcej niż jedno zapytanie. Mamy listę zapytań. Wywoływanie dla każdej pary wierzchołków tego algorytmu jest trochę kosztowne. Dlatego zmienimy rozwiązanie. Przetworzymy nasze drzewo DFS'em i ustalimy dla każdego wierzchołka czas wejścia i czas wyjścia. Oznaczać to będzie, w którym "kroku" weszliśmy do wierzchołka, i w którym musieliśmy się cofnąć do jego rodzica. Stąd na początku czas=0, i z każdym krokiem będzie się zwiększał o 1. Wtedy sprawdzenie czy wierzchołek v leży na ścieżce z u do korzenia, możemy wykonać w czasie O(1), sprawdzając, czy czas wejścia do u jest z przedziału czasu wejścia i wyjścia do v. Przykład: para(x,y) oznacza (czas wejścia, czas wyjścia).



```
Czas;

funkcja Odwiedź(u):
  oznacz u jako odwiedzony
  czas wejścia u = czas
  dla każdego wierzchołka v na liście sąsiedztwa u:
    jeżeli v nieodwiedzony:
      czas++
      Odwiedź(v)
  czas wyjścia u = czas;

funkcja DFS2(graf G)
  Czas=0;
  dla każdego wierzchołka u z grafu G:
    oznacz u jako nieodwiedzony
  Odwiedź(korzeń);

funkcja CzyLeży(v,u)
  Jeśli czas wejścia u ⩾ czas wejścia v i czas wejścia u ⩽ czas wyjścia v:
    zwróć tak;
  zwróć nie;
```

Zadanie 8

Weźmy ciąg wielomianów $W_0(x), W_1(x), \ldots, W_n(x)$, taki, że
$W_0(x) = x$ a $W_k(x) = (W_{k-1}(x) - 2)^2$. Czyli mamy:

$$W_n(x) = (\ldots((x-2)^2 - 2)^2 \cdots - 2)^2$$

Zauważmy, że chcemy wiedzieć co stoi przy x^2. Skoro tak, to w wielomianie $W_k(x)$ nie ma dla nas znaczenia nic poza $a_k x^2 + b_n x + c_n$ (bo tylko z tego w kolejnych wielomianach możemy otrzymać coś przy x^2).
Weźmy więc $a_k x^2 + b_k x + c_k$. Interesuje nas a_n.
$a_0 = 0$ $b_0 = 1$ $c_0 = 0$ (bo $W_0(x) = x$).
$a_1 = 1$ $b_1 = -4$ $c_1 = 4$ (bo $W_1(x) = x^2 - 4x + 4$)
Sprawdźmy, jak otrzymać kolejne a_k:

$$(a_k x^2 + b_k x + c_k - 2)^2 = a_k^2 x^4 + 2a_k b_k x^3 + (2a_k c_k - 4a_k + b_k^2)x^2 + (2b_k c_k - 4b_k)x + (c_k^2 - 4c_k + 4)$$

Teraz, mamy:

$$c_{k+1} = c_k^2 - 4c_k + 4 = (c_k - 2)^2$$

Zauważmy, że $c_1 = (0-2)^2 = 4$, $c_3 = (4-2)^2 = 4, \ldots\ c_k = 4$.
Teraz:

$$b_{k+1} = 2b_k c_k - 4b_k = 8b_k - 4b_k = 4b_k$$

$b_1 = -4$, $b_2 = -4 * 4$, $\cdots$, $b_k = -4^k$.
Teraz:

$$a_{k+1} = 2a_k c_k - 4a_k + b_k^2 = 8a_k - 4a_k - 4^k = 4a_k + (-4^k)^2 = 4a_k + 16^k$$

Nadchodzi najciekawsza część: zbudujmy algorytm podobny do algorytmu z zad 5.

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_k \\ 16^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k+1} \\ 16^{k+1} \end{vmatrix}$$

Skoro tak, możemy zapisać, że:

$$\begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 16\end{vmatrix}^n \begin{vmatrix}a_0\\16^0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_n\\16^n\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 16\end{vmatrix}^n \begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_n\\16^n\end{vmatrix}$$

Jeśli oznaczymy

$$A = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 1\\0 & 16\end{vmatrix}^n$$

Wtedy, $a_n = a_{12}$ Możemy więc zastosować algorytm szybkiego potęgowania i mamy odpowiedź.