AISD Lista 3 Zadanie 3

Jakub Froń 308854

21 kwietnia

1 Algorytm znajdowania otoczki

1. Dzielimy zbiór punktów P na dwa rozłączne zbiory P_1 i P_2 względem pionowej prostej.
2. Wyliczamy otoczki wypukłe A dla P_1 i B dla P_2.
3. Scalamy A i B w otoczkę wypukłą, która będzie otoczką dla P.

Naszym celem jest opisanie kroku 3. Naiwny algorytm skutkowałby w całościowej złożoności $O(n^2)$, ale my postaramy się wykonać scalanie w czasie liniowym, co da nam dla całego algorytmu złożoność $O(nlogn)$.

2 Opis arytmetyki indeksów

a i b będą oznaczać wierzchołki odpowiednio otoczki A i otoczki B.
W każdej otoczce wierzchołki są numerowane od 0 przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Arytmetyka indeksów w otoczce jest w ciele modulo ilość wierzchołków odpowiedniej otoczki, zatem wyrażenie takie jak $a+1$ i $a-1$ oznaczają odpowiednio następny i poprzedni wierzchołek wokół A. Tak samo dla B.

3 Styczna do dwóch wielokątów wypukłych

Żeby łatwo scalić otoczki chcemy znaleźć dwie styczne, od góry i od dołu, do obu otoczek jednocześnie.
Z ich pomocą otoczka dla $P_1 \cup P_2$ jest prosta do skonstruowania w czasie $O(n)$.
Omówię znalezienie górnej stycznej, znalezienie dolnej jest analogiczne.
Zapis $L = (a, b)$ oznacza prostą wyznaczaną przez punkty a, b. Niech ta struktura umożliwia łatwe odzyskanie informacji o punktach a i b. (Formalność, ale czasem chcemy myśleć o L jak o prostej, a czasem jako o odcinku).
Niech a będzie punktem z A, który jest położony najbardziej na prawo (względem współrzędnej X), a b niech będzie punktem z B, który jest położony najbardziej na lewo.

Idea algorytmu znalezienia górnej stycznej do dwóch wielokątów wypukłych polega na przesuwaniu L wzwyż po wierzchołkach z A i B, przesuwanie wzwyż dla A to inkrementacja indeksu, dla B to dekrementacja. Warunek końcowy jest spełniony, gdy L jest powyżej A i B, przy czym:
Jeśli a jest lewym końcem L i $a \in A$, to L jest powyżej A, gdy $a+1$ i $a-1$ są poniżej L. Analogicznie dla B.

Algorytm dla górnej stycznej:
a, b - tak jak wyżej, najbardziej prawy i lewy punkt swoich wielokątów.

1. $L = (a, b)$
2. Dopóki L nie jest górną styczną dla A i B
   - dopóki L nie jest górną styczną dla A
     $a' \leftarrow a + 1$
     $L = (a', b)$
   - dopóki L nie jest górną styczną dla B
     $b' \leftarrow b - 1$
     $L = (a, b')$
3. zwróć L

4 Analiza problemów

1.Czy algorytm się kończy? Czy ustalenie styczności nad A będzie zawsze łamać styczność nad B lub odwrotnie?
2.Dla dwóch wielokątów istnieją 4 możliwe styczne (ponad i poniżej obu, oraz dwie na krzyż), czy algorytm wybiera odpowiednią?

Lemat 1.
Górna styczna $L = (a, b)$ styka się z A i B w ich górnych połówkach:
a i b znajdują się na ścieżce skierowanej zgodnie z ruchem wskazówek zegara pomiędzy najbardziej prawym i lewym wierzchołkiem swoich wielokątów.
D-d:
Jest to konsekwencja horyzontalnego podziału A i B. Niech T będzie pionową prostą dzielącą te zbiory.
Jeśli całość B jest znacznie wyżej niż całość A, wtedy górna styczna L będzie zbiegać do T, natomiast a będzie zbiegać do najbardziej lewego wierzchołka A (b również do najbardziej lewego w B). Natomiast jeśli B jest znacznie niżej od A, to L również zbiega do T, a a zbiega do najbardziej prawego wierzchołka A (b do naj. prawego wierzchołka B).
Pomiędzy tymi ekstremami a leży zawsze w górnej połówce A.

Zatem skoro a zaczyna od najbardziej prawego wierzchołka i jest tylko inkrementowane (porusza się przeciwnie do wskazówek zegara) to wewnętrzna pętla algorytmu dla A mogłaby działać w nieskończoność tylko, gdy a mogłoby minąć najbardziej lewy wierzchołek. Co pokażę niemożliwym w kolejnym lemacie.

Lemat 2.
Przez całość działania algorytmu L nie przecina A ani B (teraz myślimy o L jako odcinku określonym przez (a, b)).

D-d indukcyjny po krokach algorytmu:
Warunek jest prawdziwy w zerowym kroku algorytmu (przypisaniu początkowych wartości a i b).
Załóżmy, że dla n-kroków spełnione jest założenie indukcyjne, czyli $L = (a, b)$ nie przecina się ani z A ani z B. Niech w $n+1$-wszym kroku a będzie miało być inkrementowane, czyli L nie jest górną styczną A. Nowa styczna $L' = (a+1, b)$ mogłaby przecinać A tylko, gdy b byłoby pod prostą wyznaczoną przez $(a+1, a)$. Jednocześnie b nie może być pod prostą wyznaczoną przez $(a, a-1)$, gdyż L przecinałoby wtedy A, a jest to sprzeczne z założeniem indukcyjnym. Zatem jeśli następny krok powoduje przecięcie to L musi być styczne do A, zatem następny krok się nie wydarzy.

Zatem ponieważ L nie przetnie A oraz b jest na prawo od T, to a nie może przejść (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) poza najbardziej lewy wierzchołek A.
Sytuacja jest analogiczna dla B.
Zatem obie pętle się skończą, a z tego otrzymujemy podwójną styczność, co daje nam górną styczną. Pętle mogą wykonać się tylko w czasie liniowym, ponieważ przesuwają się po wielokącie tylko do przodu, nigdy nie wracają, a do tego limit kroków wyznaczony jest przez ilość wierzchołków w A i B.
Znalezienie dolnej stycznej jest analogiczne do znalezienia górnej, różnica leży tylko w znakach (odwrotnie inkrementujemy i dekrementujemy), oraz kierunkach w definicjach (zamiast pod prostą należy napisać nad prostą itp.).

Z użyciem obu stycznych proces scalania odbywa się w czasie liniowym, przykładowo:
Znając końce odcinków będących górnymi i dolnymi stycznymi (oznaczmy je: górna G = (a,b), dolna D = (c,d) | $a, c \in A$, $b, d \in B$) możemy stworzyć otoczkę przechodząc po A i B używając G, D do przejścia z jednej otoczki na drugą.
Zaczynamy od a, przechodzimy na b. Przechodzimy po B (zaczynając od b) zgodnie z ruchem wskazówek zegara (dekrementujemy) do momentu natrafienia na d. Z d przechodzimy do c wchodząc tym samym w A i przechodzimy nadal zgodnie z ruchem wskazówek zegara (inkrementujemy), aż natrafimy na a. Wtedy kończymy przechodzenie i zwracamy nową otoczkę.
Przechodzenie z a na b i z d na c to przejście z A na B i w drugą stronę. Pozostałe przejścia odbywają sie w obrębie jednego wielokąta. Podczas tych przejść zapamiętujemy wierzchołki i tworzymy nowy wielokąt.
Widać, że takie przejście odbywa się w czasie liniowym, ponieważ jest zależne

od ilości wierzchołków A i B, oraz nigdy nie cofamy się w naszym przechodzeniu (pętla kończy się przy pierwszym wejściu na wcześniej odwiedzony wierzchołek, czyli na a).

Zatem skoro scalanie odbywa się w czasie liniowym, to cały algorytm obliczania otoczki odbędzie się w czasie $O(nlogn)$.