# Lista 2
# Zadanie 6

Krystyna Korzonek

6 kwietnia 2020

## 1 Lemat

W grafie w ktorym wszystkie wagi krawędzi są różne:

$$\text{krawędż } e \text{ należy do jakiegoś minimalnego drzewa spinającego}$$
$$\Updownarrow$$
$$e \text{ nie jest maksymalna na żadnym cyklu}$$

**Dowód:**

### 1.1 $\Uparrow$

Załóżmy nie wprost, że $e$ nie jest maksymalna na żadnym cyklu, ale nie należy do żadnego minimalnego drzewa spinającego. Niech T będzie dowolnym takim drzewem. Po dołożeniu krawędzi $e$ w T$\cup e$ powstaje cykl. $e$ nie jest największą krawędzią na tym cyklu, wagi krawędzi są różne, istnieje krawędź o większej wadze. Można usunąć tą krawędź z drzewa, w zamian dokładając e - powstaje drzewo spinające o mniejszej sumie wag, sprzeczność.

### 1.2 $\Downarrow$

Załóżmy nie wprost, że krawędź $e = (u, v)$ należąca do minimalnego drzewa spinającego T jest maksymalna na cyklu C. Graf T$\setminus e$ ma dwie spójne składowe: $V_1$ i $V_2$. Jeden koniec krawędzi $e$ należy do $V_1$, a drugi do $V_2$. Na C występuje inna krawędź, której jeden koniec należy do $V_1$, a drugi do $V_2$ - m. (Cykl to $(uc_1c_2...c_lv)$, u $\in V_1$, v $\in V_2$, gdyby każda krawędż poza e miała

wierzchołki w jednej spójnej składowej byłoby: $c_1 \in V_1, c_2 \in V_1, ..., c_l \in V_1, v \in V_1$, sprzeczność)
Graf T\$e \cup m$ jest drzewem spinającym - ma n-1 krawędzi i jest spójny. Waga krawędzi $e$ jest większa od wagi krawędzi m, T\$e \cup m$ ma więc mniejszą sumę wag niż T. Sprzeczność.

# 2 Algorytm

Dzięki lematowi wystarczy sprawdzić, czy istnieje taki cykl, na którym krawędź $e = (u, v)$ jest największa. Wystarczy puścić DFS-a z $u$ po samych krawędziach o wadze mniejszej od wagi $e$. DFS odwiedzi $v$ dokładnie wtedy, gdy istnieje cykl, na którym $e$ jest maksymalne $\Leftrightarrow$ $e$ nie należy do żadnego MST.

```
dfs(u)
return !visited[v]

dfs(x)
    visited[x] = true
    dla s - sasiadow x
        jesli waga(s,x) < waga(u, v)
            jesli visited[x] == false
                dfs(s)
```

# 3 Złożoność

Złożoność DFS-a to O(n+m).