Zadanie 9 z listy 3 AiSD

Bartosz Brzoza 309426

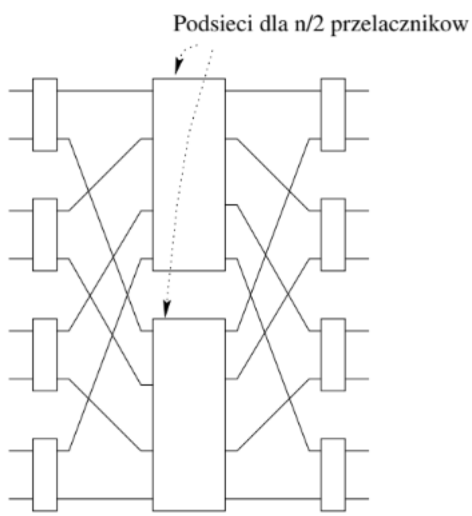
Marzec 2020

1 Sformułowanie zadania

Obliczyć prawdopodobieństwo $P(W_n = id)$ uzyskania permutacji identycznościowej przez sieć Benesa-Waksmana, w której przełączniki ustawione są losowo i niezależnie od siebie w jeden z dwóch stanów z prawdopodobieństwem 0.5.

2 Analiza problemu

Sieć W_n wygląda tak:



Załóżmy, że pierwszy lewy przełącznik u góry jest w pozycji x. BSO powiedzmy, że kieruje on pierwszą linię do dolnej sieci $W_{\frac{n}{2}}$. Aby sieć była identycznością, to pierwszy prawy przełącznik też musi łączyć pierwszą linię wyjściową z dolną siecią $W_{\frac{n}{2}}$, czyli też musi być w pozycji x. Powyższe rozumowanie przeprowadzamy dla każdej pary przełączników z lewej i prawej. Dodatkowo obie podsieci $W_{\frac{n}{2}}$ muszą być identycznościami. Reasumując: prawe przełączniki muszą być ustawione tak samo jak lewe oraz podsieci $W_{\frac{n}{2}}$ muszą być identycznościami.

Zachodzi zatem zależność rekurencyjna:

$$P(W_n = id) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} P(W_{\frac{n}{2}} = id)^2$$

oznaczmy $q_n = \log P(W_n = id)$, wtedy:

$$q_n = \frac{1}{2} n \log\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \log P(W_{\frac{n}{2}} = id)$$

$$q_n = -\frac{1}{2} n + 2 q_{\frac{n}{2}}, q_2 = -1$$

rozpisując

$$q_n = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \cdots - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \text{ (jest } \log n \text{ składników)}$$

$$q_n = -\frac{n}{2} \log n$$

czyli

$$P(W_n) = 2^{-\frac{n}{2} \log n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$