目录

高等代数笔记

陈群

May 29, 2019

1 行列式

1.1 n 元排列

定义 1.1 (n 元排列) $1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的全排列称为一个 n 元排列.

显然,$1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的 n 元排列有 $n!$ 个.

定义 1.2 (逆序数对和逆序数) 给定一个数对 $(a, b), a \neq b$, 若有 $a>b$, 则称 (a, b) 为逆序数对. 一组数 $1, 2, 3, ..., n$ 中的逆序数对的个数称为该数列的逆序数, 记作 $\tau(1, 2, 3, ..., n)$

对于数列 2431, 其中的逆序数对为 $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$, 其逆序数为 4.

定义 1.3 (奇排列与偶排列) 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定理 1.1 对换排列中的两个数的位置会改变排列的奇偶性.

证明. 1. 对换相邻位置的两个数.
设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_j...a_n$, 则对换之后的排列为：$a_1a_2...a_ja_i...a_n$, 两个排列进行比计较可以知道, 对于前 $i-1$ 个位置而言, 互换前后的逆序数不变, 对于第 $j+1$ 到 n 个位置而言, 互换前后的逆序数也没有改变. 交换前, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_i, a_j) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k)$$

交换后, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_j, a_i) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k)$$

上述两式的差为 $\tau(a_j, a_i) - \tau(a_i, a_j) = \pm 1$, 故两个排列的奇偶性相反.

2. 一般情况下

设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_{i+1}...a_{i+s}a_j...a_n$, 则对换之后的排列为:$a_1a_2...a_ja_{i+1}...a_{i+s}a_i...a_n$, 可以看做 $s+1+s$ 次相邻元素之间的对换, 每一次都改变了排列的奇偶性, 由于 $2s+1$ 为奇数, 从而交换前后排列的奇偶性相反. □

定理 1.2 任一 n 元排列 $j_1j_2...j_n$ 与 $123...n$ 可以经过一系列的对换互变且所做的对换的次数与原排列 $j_1j_2...j_n$ 的奇偶性相同.

证明. 设 $j_1j_2...j_n$ 经过 s 次对换变为 $123, ...n$, 显然 $123, ...n$ 是偶排列. 由于每互换一次改变排列的奇偶性, 所以若 $j_1j_2...j_n$ 为奇排列, 则 s 为奇数; 若 $j_1j_2...j_n$ 为偶排列, 则 s 为偶数 □

1.2 n 阶行列式

定义 1.4 (n 阶行列式) n 阶行列式为 $n!$ 项代数和, 其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积. 每一项按照行指标的自然顺序排列, 列指标所成的排列是奇排列时带负号, 偶排列时带正号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1j_2...j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2...j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

记作 $|A|$ 或者 $\det A$

特别地, 可以写作:

$$|A| := \sum_{i_1i_2...i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2...i_n)} a_{i_11}a_{i_22}...a_{i_nn}$$

由上式可以得出结论:

性质 1.1

$$|A| := |A^T|$$

性质 1.2 A 作行变换, 第 i 行乘以 k, 得到 A

$$A \xrightarrow{①k} B$$

得到

$$|B| = k|A|$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

B 的行列式可以表示为:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots k a_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 设左式为 $|A|$, 则有

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{j_i} + c_{j_i}) \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{j_i} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

性质 1.4

$$A \xrightarrow{(i,k)} C \Rightarrow |C| = -|A|$$

证明. 设：

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_i} \dots a_{ij_k} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_k} \dots a_{kj_i} \dots a_{nj_n} \\ &= (-1)|A| = -|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.5 两行或者两列相等的行列式的值为 *0*.

证明. 设 A 的两行相等, 则互换相等的两行, 行列式 $|A|$ 不变, 由上一性质, 即 $|A| = -|A|$, 则 $|A| = 0$. □

性质 1.6 行列式两行或者两列成比例, 则该行列式为 *0*.

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ la_{i1} & la_{i2} & la_{i3} & \dots & la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = l0 = 0$$

□

性质 1.7

$$A \xrightarrow{ⓚ+①l} D \Rightarrow |A| = |D|$$

证明. 设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+la_{i1} & a_{k2}+la_{i2} & a_{k3}+la_{i3} & \dots & a_{kn}+la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + l0 = |A| \end{aligned}$$

□

2 线性空间

2.1 线性空间的定义

定义 2.1

$$S \times M := \{(a,b) | A \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的笛卡尔积

定义 2.2 非空集合 S 上的一个代数运算定义为 $S \times S$ 到 S 的一个映射.

定义 2.3 设 V 是一个非空集合,K 是一个数域. 若 V 上有一个运算, 称为加法, 即 $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha+\beta$;$K$ 与 V 之间有运算, 称为数量乘法, 即 $k \times V \to V : (k,\alpha) \mapsto k\alpha$, 并且满足如下运算法则:

(1) $\alpha+\beta = \beta+\alpha, \quad \forall \alpha,\beta \in V$

(2) $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma), \quad \forall \alpha,\beta \in V$

(3) V 中有元素 0, 使得: $\alpha+0=\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(4) $\forall \alpha \in V$, 有 $\beta \in V$, 满足 $\alpha+\beta=0$. 称 β 为 α 的负元

(5) $1\alpha=\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(6) $(kl)\alpha=k(l\alpha), \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha, \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

那么称 V 为数域 K 上的一个线性空间.V 中元素可以称为向量,V 可以称作向量空间.

例 2.1 $\mathbb{R}^X$:={非空集合 X 到 R 的映射}, 称为 X 上的实值函数. 规定:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x)+g(x), && \forall x \in X \\
(kf)(x) &:= kf(x), && \forall x \in X, k \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

零函数为:

$$0(x) := 0, \forall x \in X$$

易证 $\mathbb{R}^X$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

设 V 是数域 K 上的线性空间, 其具有以下性质:

性质 2.1 V 中的零元是唯一的.

证明. 假设零元不唯一, 设 $0_1, 0_2$ 都是 V 的零元, 且有 $0_1 \neq 0_2$. 由 0_2 是零元, 所以 $0_1+0_2=0_1$; 由 0_1 是零元, 所以 $0_2+0_1=0_2$, 所以 $0_1=0_2$, 与假设矛盾, 故假设不成立. □

性质 2.2 对于任意的 $\alpha \in V$,α 的负元是唯一的, 记作 $-\alpha$.

证明. 假设负元不唯一, 设 β_1, β_2 都是 α 的负元, 且有 $\beta_1 \neq \beta_2$. 则有

$$
\begin{aligned}
\beta_1+\alpha+\beta_2 &= \beta_1+(\alpha+\beta_2)=\beta_1+0=\beta_1 \\
\beta_1+\alpha+\beta_2 &= (\beta_1+\alpha)+\beta_2=0+\beta_2=\beta_2
\end{aligned}
$$

所以 $\beta_1=\beta_2$, 与假设矛盾, 故而假设不成立. □

性质 2.3 $0\alpha=0, \quad \forall \alpha \in V$

证明.

$$
\begin{aligned}
&0\alpha=(0+0)\alpha=0\alpha+0\alpha \\
&0\alpha+(-0\alpha)=0\alpha+0\alpha+(-\alpha) \\
&0=0\alpha
\end{aligned}
$$

□

性质 2.4 $k0=0, \quad \forall k \in K$

证明.

$$k0 = k(0+0) = k0 + k0$$
$$k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0)$$
$$0 = k0$$

□

性质 2.5 若 $k\alpha = 0$, 则有 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$

证明. 假设 $k \neq 0$

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha)$$

由 $k\alpha = 0$, 则有 $\alpha = 0$ □

性质 2.6 $(-1)\alpha = -\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

证明.

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0$$

所以 $(-1)\alpha$ 是 α 的负元, 为 $-\alpha$. □

2.2 线性子空间

定义 2.4 V 是数域 K 上的线性空间, 其中的元素为 α,U 是 V 的的一个非空子集. 若 U 对于 V 的加法和数量乘法（以 V 中的加法和数量乘法对 U 中的元素作运算）也是 K 上的线性空间, 则称 U 是 V 的子空间.

定理 2.1 V 的非空子集 U 是子空间

$\Longleftrightarrow$

(1). 若 $\alpha, \beta \in U$, 则 $\alpha + \beta \in U$.(U 对于 V 的加法封闭)

(2). 若 $\alpha \in U$, 则 $k\alpha \in U$.(U 对于 V 的数量乘法封闭)

证明. "$\Rightarrow$": 有定义可以得到;
"$\Leftarrow$":V 的加法和数量乘法限定到 U 上为 U 的加法和数量乘法, 显然 8 条运算法则中, 1,2,5,6,7,8 是成立的. 对于第 3 和第 4 条
3. 由 $U \neq \varnothing, \exists \beta \in U$, 使得,$0\beta = 0 \in U$, 从而 $0 \in U$, 零元存在.
4. 对于任意的 $\alpha \in U$, 有 $(-1)\alpha \in U$, 即 $-\alpha \in U$, 从而负元存在. □

例 2.2 $\{0\}$ 空间是子空间

定义 2.5 若存在一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s \in W$, 则将 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s$ 称为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的线性组合. 其中 $k_1,k_2,...,k_s \in K$. 令 $W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s|k_1,k_2,...,k_s \in k\}$, 则有 $0 \in W$ 且 W 对于 V 的加法和数量乘法封闭, 从而 W 是 V 的子空间, 将其称作由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 生成的子空间, 记作 $<\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s>$.

定义 2.6 $\beta \in <\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s>$
$:\Longleftrightarrow$ 存在 $l_1,l_2,...,l_s \in K$ 使得 $\beta=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+...+l_s\alpha_s$.
此时称,β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出.

对于方程组:
$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_n\alpha_n=\beta$
$\Longleftrightarrow K$ 中有一组 $c_1,c_2,...,c_n$, 使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+...+c_n\alpha_n=\beta$
$\Longleftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出.
$\Longleftrightarrow \beta \in <\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n>$(生成的子空间).

2.3 线性相关与线性无关

定义 2.7 设 V 是数域 K 上的一个线性空间,对于 V 中的一个向量组:$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,(s\geq 1)$,若 K 中有不全为 0 的一组数,使得:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s=0$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性相关,否则,称 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关. 即:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_s\alpha_s=0 \quad \Longrightarrow \quad k_1=k_2=...=k_s=0$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关.

对于线性方程组

(1) 若存在不全为 0 的 $c_1,c_2,...c_n$,使得 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+...+c_n\alpha_n=0 \quad \Longleftrightarrow \quad$ 方程组有非零解.
(2) K^s 中的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关. $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+...+x_n\alpha_n$ 只有零解.

K^n 中的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式:$|A|=0$

K^n 中的列向量 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式:$|A|\neq 0$

行向量的性质与上述情况相同.

2.4 线性相关和线性无关的向量组

(1) α 线性相关 $\iff$ $\exists k \neq 0$, 使得 $k\alpha = 0$ $\iff$ $\alpha = 0$
从而 α 线性无关 $\iff$ $\alpha \neq 0$

(2) 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 中，如果有一部分向量组线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关.

(3) 向量组线性无关 $\implies$ 不存在部分向量组线性相关（任何部分向量组线性无关）

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关 $\iff$ 由定义可得，存在 K 中不全为 0 的数 $k_1, k_2, ..., k_s$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_i \neq 0$, 则有

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + k_s\alpha_s)$$

$\iff$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 至少有一个向量可以由其余的向量线性表出. 其中第一个条件的必要性（"$\Leftarrow$"）的证明为：

证明. 设 $\alpha_j = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$
$\implies$ $0 = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$ $\implies$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关. □

则有逆否命题：
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关 $\iff$ 其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出.

命题 2.2 **若 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, 其表出方式是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关.**

证明. "$\Leftarrow$":
设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{1}$$

假设表出不唯一，即 β 还可以表示成:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + ... + b_s\alpha_s \tag{2}$$

其中 $a_i \neq b_i$. (2)-(1)可以得到：

$$0 = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + ... + (b_s - a_s)\alpha_s$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，可以得到：

$$a_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., s$$

即 $a_i = b_i$, 假设不成立,β 的表出方式是唯一的.
"$\Rightarrow$":
反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关，则有 K 中的 $k_1, k_2, ..., k_s(k_i$ 不全为零) 使得：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$$

此外，由

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{3}$$

可以得到：

$$\beta = (a_1 + k_1)\alpha_1 + (a_2 + k_2)\alpha_2 + ... + (a_s + k_s)\alpha_s \tag{4}$$

由 $k_1, k_2, ..., k_s$ 不全为零，不妨设 $k_i \neq 0$，则有 $a_i + k_i \neq a_i$. 则(3)式和(4)式相比较，至少有一项是不相等的（第 i 个位置），从而 β 有两种不相同的表出方式，这与已证明的必要性矛盾，故而假设不成立，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 是线性无关的. □

命题 2.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出.

证明. 由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, ..., .k_s, l$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s + l\beta = 0$$

若 $l = 0$, 则有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，则有 $k_1, k_2, ..., .k_s$ 全为零，再加上 l, 有 $k_1, k_2, ..., .k_s, l$ 全为零，与 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关矛盾，假设不成立. 所以 $l \neq 0$. 则有

$$\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - ... - \frac{k_s}{l}\alpha_s$$

□

2.5 极大线性无关组

定义 2.8

$$< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s > := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s | k_i \in K, i = 1, 2, ..., s\}$$

称为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 生成的向量空间.

定义 2.9 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的一个部分组若满足:

(a) 该部分组线性无关.

(b) 从 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中其余的向量中 *(若有)* 任取一个向量添加进来得到的新的部分组都线性相关.

则称它是为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的极大线性无关组.

定义 2.10 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中的每一个向量都可以由 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 线性表出，则称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 线性表出. 若 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 可以相互线性表出，则称这两个向量组是等价的，记作:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}$$

命题 2.4 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价.

证明. 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m (m \leq s)$

$$\alpha_j = 0\alpha_1 + ... + \alpha_j + ... + 0\alpha_s, \quad j = 1, 2, ..., m$$

故而 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中的所有的元素都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出.

同时显然 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出. 对于 $\alpha_j (m < j \leq s)$，将其添加到 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 中，形成 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_j$, 由极大线性无关组的定义，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \alpha_j$ 线性相关，由前一命题可得，α_j 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出，从而 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 线性表出.

故而，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 可以相互线性表出,$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价. □

性质 2.7 等价具有以下的性质：

(1). 每一个向量与其自身等价（反身性）

(2). 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\} \Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$, 对称性

(3). $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\}, \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_t\} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, ..., \gamma_t\}$, 传递性

证明. 第三个性质的证明。

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\beta_j, i = 1, 2, ..., s$$

$$\beta_j = \sum_{l=1}^{t} b_{jl}\gamma_l, j = 1, 2, ..., r$$

则有

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \sum_{l=1}^{t} b_{jl}\gamma_l = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{t} a_{ij}b_{jl}\gamma_l$$
$$= \sum_{l=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jl}\gamma_l = \sum_{l=1}^{t}\gamma_l[\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jl}\gamma_l]$$

所以有 α_i 可以由 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t$ 线性表出。 □

由以上等价关系的对称性和传递性可以得到：

命题 2.5 **向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价。**

引理 2.6 **若 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出，若 $r > s$, 那么 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 一定线性相关。**

证明. 由已知可以得到

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + ... + a_{s1}\alpha_s$$
$$\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + ... + a_{s2}\alpha_s$$
$$\vdots$$
$$\beta_r = a_{1r}\alpha_1 + ... + a_{sr}\alpha_s$$

令

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + ... + x_r\beta_r = 0$$

则有

$$x_1(a_{11}\alpha_1 + ... + a_{s1}\alpha_s)$$
$$+x_2(a_{12}\alpha_1 + ... + a_{s2}\alpha_s)$$
$$\vdots$$
$$+x_r(a_{1r}\alpha_1 + ... + a_{sr}\alpha_s) = 0$$
$$\Rightarrow (a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r)\alpha_1 + ... + (a_{s1}x_1 + ... + a_{sr}x_r)\alpha_s = 0$$

取向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中的一个极大线性无关组，不妨设其为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, 且有 $m \leq s < r$, 则有方程组：

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r = 0$$
$$a_{21}x_1 + ... + a_{2r}x_r = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mr}x_r = 0$$

由 $m \leq s < r$，方程组由非零解，设非零解为 $k_1, k_2, ..., k_r$, 得到

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + ... + k_r\beta_r = 0$$

$k_1, k_2, ..., k_r$ 不全为零，从而 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 线性相关。 □

推论 2.7 若 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表处，且 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性无关，那么 $r \le s$.

推论 2.8 等价的线性无关的两个向量组所含有的向量的个数相等。即

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m\} \cong \{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_s\} \Rightarrow m = s$$

证明. 由前一推论可以得到。 □

推论 2.9 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 的任意两个极大线性无关组所含有的向量个数相等。

定义 2.11 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的任意一个极大线性无关组所含有的向量个数称为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的秩 *(rank)*. 只含有 *0* 的向量组的秩规定为 *0*. 记作 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$

命题 2.10 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关
$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是其本身的极大线性无关组
$\Rightarrow \mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\} = s$

命题 2.11 向量组 *(I)* 可以由向量组 *(II)* 线性表出，则 $\mathrm{rank}(I) \le \mathrm{rank}(II)$

证明. 取 (I) 中的极大线性无关组 (I)’,(II) 中极大线性无关组 (II)’,

$$(I) \cong (I)'(II) \cong (II)'$$

则有

$$(I)' \cong (I)'$$

即 (I)’ 可以由 (II)’ 线性表出. 由推论2.7，(I)’ 所含向量的个数 $\le$ (II)’ 所含向量的个数。即为 $\mathrm{rank}(I) \le \mathrm{rank}(II)$ □

推论 2.12 等价的向量组的秩相等。

2.6 基、维数和坐标

定义 2.12 设 V 是数域 K 上任意的线性空间。
V 的一个有限子集 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$ 线性相 *(无)* 关 $:\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性相 *(无)* 关
V 的一个无限子集 S 线性相关 $:\Leftrightarrow S$ 有一个有限子集是线性相关的
从而有，V 的一个无限子集 S 线性无关 $:\Leftrightarrow S$ 任何一个有限子集是线性无关的

定义 2.13 设 V 是数域 K 上任意的线性空间。V 的一个子集 S 若满足以下条件：

(1). S 是线性无关的
(2). V 中的任意向量可以由 S 中的有限多个向量线性表出

则称 S 是 V 的一个基.

若 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是 V 的一个（有序）基（$\varnothing$ 规定为线性无关）

命题 2.13 任何一个线性空间都有一个基。

定义 2.14 若 V 有一个基是有限维的，则称 V 是有限维的。
若 V 有一个基是无限维的，则称 V 是无限维的。

定理 2.14 若 V 是有限维的，则 V 的任意两个基所含有向量的个数相同。

证明. 设 V 有一个基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, 任取另外一个基 S, 假设 S 所含有的向量个数 $k>n$, 则 S 中可以取出 $\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$, 且 $\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出。由 $n+1>n$, 据引理2.7,$\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$ 线性相关，这与 S 是一个基矛盾，假设不成立，进一步有 $k<=n$

$$\{\beta_1,\beta_2,..,\beta_k\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$$

由两个向量组都是线性无关的，从而由推论2.12, 等价的线性无关向量组含有相同的个数，从而 $k=n$ □

推论 2.15 若 V 是无限维的线性空间，则 V 的任意一个基都是无限子集。

证明. □