目录

高等代数笔记

陈群

November 16, 2019

1 行列式

1.1 n 元排列

定义 1.1 (n 元排列) $1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的全排列称为一个 n 元排列.

显然,$1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的 n 元排列有 $n!$ 个.

定义 1.2 (逆序数对和逆序数) 给定一个数对 $(a, b), a \neq b$, 若有 $a>b$, 则称 (a, b) 为逆序数对. 一组数 $1, 2, 3, ..., n$ 中的逆序数对的个数称为该数列的逆序数, 记作 $\tau(1, 2, 3, ..., n)$

对于数列 2431, 其中的逆序数对为 $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$, 其逆序数为 4.

定义 1.3 (奇排列与偶排列) 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定理 1.1 对换排列中的两个数的位置会改变排列的奇偶性.

证明. 1. 对换相邻位置的两个数.
设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_j...a_n$, 则对换之后的排列为：$a_1a_2...a_ja_i...a_n$, 两个排列进行比计较可以知道, 对于前 $i-1$ 个位置而言, 互换前后的逆序数不变, 对于第 $j+1$ 到 n 个位置而言, 互换前后的逆序数也没有改变. 交换前, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_i, a_j) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k)$$

交换后, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_j, a_i) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k)$$

上述两式的差为 $\tau(a_j,a_i)-\tau(a_i,a_j)=\pm1$, 故两个排列的奇偶性相反.

2. 一般情况下

设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_{i+1}...a_{i+s}a_j...a_n$, 则对换之后的排列为:$a_1a_2...a_ja_{i+1}...a_{i+s}a_i...a_n$, 可以看做 $s+1+s$ 次相邻元素之间的对换, 每一次都改变了排列的奇偶性, 由于 $2s+1$ 为奇数, 从而交换前后排列的奇偶性相反. □

定理 1.2 任一 n 元排列 $j_1j_2...j_n$ 与 $123...n$ 可以经过一系列的对换互变且所做的对换的次数与原排列 $j_1j_2...j_n$ 的奇偶性相同.

证明. 设 $j_1j_2...j_n$ 经过 s 次对换变为 $123,...n$, 显然 $123,...n$ 是偶排列. 由于每互换一次改变排列的奇偶性, 所以若 $j_1j_2...j_n$ 为奇排列, 则 s 为奇数; 若 $j_1j_2...j_n$ 为偶排列, 则 s 为偶数 □

1.2 n 阶行列式

定义 1.4 (n 阶行列式) n 阶行列式为 $n!$ 项代数和, 其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积. 每一项按照行指标的自然顺序排列, 列指标所成的排列是奇排列时带负号, 偶排列时带正号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1j_2...j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2...j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

记作 $|A|$ 或者 $\det A$

特别地, 可以写作:

$$|A| := \sum_{i_1i_2...i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2...i_n)} a_{i_11}a_{i_22}...a_{i_nn}$$

由上式可以得出结论:

性质 1.1

$$|A| := |A^T|$$

性质 1.2 A 作行变换, 第 i 行乘以 k, 得到 A

$$A \xrightarrow{①k} B$$

得到

$$|B| = k|A|$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

B 的行列式可以表示为:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots k a_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 设左式为 $|A|$, 则有

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{j_i} + c_{j_i}) \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{j_i} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

性质 1.4

$$A \xrightarrow{(i,k)} C \Rightarrow |C| = -|A|$$

证明. 设：

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_i} \dots a_{ij_k} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_k} \dots a_{kj_i} \dots a_{nj_n} \\ &= (-1)|A| = -|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.5 两行或者两列相等的行列式的值为 *0*.

证明. 设 A 的两行相等, 则互换相等的两行, 行列式 $|A|$ 不变, 由上一性质, 即 $|A| = -|A|$, 则 $|A| = 0$. □

性质 1.6 行列式两行或者两列成比例, 则该行列式为 *0*.

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ la_{i1} & la_{i2} & la_{i3} & \dots & la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = l0 = 0$$

□

性质 1.7

$$A \xrightarrow{k + i\, l} D \Rightarrow |A| = |D|$$

证明. 设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+la_{i1} & a_{k2}+la_{i2} & a_{k3}+la_{i3} & \dots & a_{kn}+la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + l0 = |A| \end{aligned}$$

□

1.3 Laplace 定理

定理 1.3 (Laplace 定理) 对于行列式 $A = a(i,j)$, 取定 k 行, $i_1, i_2, \dots, i_k$ 行, k 列, $j_1, j_2, \dots, j_k$ 列，其中 $i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_k$, 行列交叉处的 k^2 个元素按照原来的排列顺序形成一个 k 阶行列式，称为 A 的 k 阶子式，记作

$$A\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

划去上述 k 行 k 列后剩余的元素按照原有顺序组成 $n-k$ 阶行列式，称为 k 阶行列式的余子式。令

$$\{i'_1, i'_2, \dots, i'_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

其中 $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n-k}$

$$\{j'_1, j'_2, \dots, j'_{n-k}\} = \{1, 2, \dots, n\} \backslash \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$$

其中 $j'_1 < j'_2 < \dots < j'_{n-k}$ 这个余子式是 A 的 $n-k$ 阶子式，记作：

$$A\begin{pmatrix} i_1', i_2', ..., i_{n-k}' \\ j_1', j_2', ..., j_{n-k}' \end{pmatrix}$$

另外将

$$(-1)^{i_1+i_2+...+i_k+j_1+j_2+...+j_k}A\begin{pmatrix} i_1', i_2', ..., i_{n-k}' \\ j_1', j_2', ..., j_{n-k}' \end{pmatrix}$$

称作代数余子式。可以证明

$$|A| = (-1)^{i_1+i_2+...+i_k+j_1+j_2+...+j_k}A\begin{pmatrix} i_1, i_2, ..., i_k \\ j_1, j_2, ..., j_k \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} i_1', i_2', ..., i_{n-k}' \\ j_1', j_2', ..., j_{n-k}' \end{pmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned}|A| = &\sum_{u_1...u_k v_1...v_{n-k}} (-1)^{i_1-1+i_2-2+...+i_k-k+\tau(u_1u_2...u_kv_1v_2...v_{n-k})}\\ &\times a_{i_1u_1}a_{i_2u_2}...a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}...a_{i_{n-k},v_{n-k}}\\ = &\sum_{\substack{1\le j_1<...<j_k\le n\\ j_1,...,j_k\in\{1,2,...,n\}}}\sum_{u_1...u_k}\sum_{v_1...v_{n-k}}(-1)^{i_1+...+i_k-k(k+1)/2}\\ &\times(-1)^{j_1+...+j_k-k(k+1)/2+\tau(u_1...u_k)+\tau(v_1...v_{n-k})}\\ &\times a_{i_1u_1}a_{i_2u_2}...a_{i_ku_k}a_{i_1'v_1}...a_{i_{n-k}'v_{n-k}}\end{aligned}$$

其中，$j_1, ..., j_n \in \{1, 2, 3, ..., n\}$。

上式的本质是对 n 元全排列的一个拆解：先从 n 个数中选取 k 个出来，然后放到前 k 个位置，并作 k 元全排列，剩下的 $n-k$ 个元素放到后 $n-k$ 个位置，作 $n-k$ 元全排列。可以证明以上方法得到的集合和 n 元全排列的结果集合相等。论述如下：显然上述方法得到的每一个排列结果都是属于全排列结果之中的某一个；对于每一个 n 元全排列，设其为 $m_1m_2..., m_kl_1l_2...l_{n-k}$, 按照上述的方法，可以看作是，先从集合 $\{1, 2, 3, ..., n\}$ 中选取 $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$ 出来，（其中自带大小关系），并且排列成 $m_1m_2..., m_k$, 剩余的部分排列成 $l_1l_2...l_{n-k}$ 即可，从而两个排序方式所有结果构成的集合存在着一一对应的关系，从而上述方式可以得到 n 元全排列。第二种论述方法：首先上述方法得到的结果是全排列的一种，而上述方法得到的所有结果的总和为：

$$\mathrm{C}_n^k k!(n-k)! = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!(n-k)!}k!(n-k)! = n!$$

这个数和 n 元全排列所有结果之和相等，从而上述方法得到的结果集合就是 n 元全排列结果集合。

对于排列的转变

$$12...n \longrightarrow i_1 i_2 ... i_k i'_1 ... i'_{n-k}$$

由于 $i_1 < i_2 < ... < i_k, i'_1 < ... < i'_{n-k}$

$$\begin{aligned}
&12...n \xrightarrow{i_1-1} i_1 12...n \\
&i_1 12...n \xrightarrow{i_2-2} i_1 i_2 12...n \\
&... \\
&\longrightarrow i_1 i_2 ... i_k i'_1 ... i'_{n-k}
\end{aligned}$$

总共经过了 $i_1 - 1 + i_2 - 2 + ... + i_k - k$ 次互换。

对于任意给定的 $j_1, j_2, ..., j_k$, 设由任意一种排列 $u_1 u_2 ... u_k$ 经过 s 次互换，得到了 $j_1 j_2 ... j_k$, 则有

$$\begin{aligned}
(-1)^{\tau(u_1 u_2 ... u_k v_1 v_2 ... v_{n-k})} &= (-1)^s (-1)^{j_1 j_2 ... j_k v_1 v_2 ... v_{n-k}} \\
&= (-1)^{\tau(u_1 u_2 ... u_k)} (-1)^{j_1 - 1 + j_2 - 2 + ... + j_k - k + \tau(v_1 u_2 ... v_{n-k})}
\end{aligned}$$

□

2 线性空间

2.1 线性空间的定义

定义 2.1

$$S \times M := \{(a, b) | a \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的笛卡尔积

定义 2.2 非空集合 S 上的一个代数运算定义为 $S \times S$ 到 S 的一个映射.

定义 2.3 设 V 是一个非空集合,K 是一个数域. 若 V 上有一个运算, 称为加法, 即 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$;$K$ 与 V 之间有运算, 称为数量乘法, 即 $k \times V \to V : (k, \alpha) \mapsto k\alpha$, 并且满足如下运算法则：

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(2) $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(3) V 中有元素 0, 使得：$\alpha + 0 = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(4) $\forall \alpha \in V$, 有 $\beta \in V$, 满足 $\alpha + \beta = 0$. 称 β 为 α 的负元

(5) $1\alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(6) $(kl)\alpha = k(l\alpha), \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

(7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

(8) $k(\alpha+\beta) = k\alpha + k\beta, \quad \forall k,l \in K, \alpha \in V$

那么称 V 为数域 K 上的一个线性空间.V 中元素可以称为向量,V 可以称作向量空间.

例 2.1 $\mathbb{R}^X$:={非空集合 X 到 R 的映射}, 称为 X 上的实值函数. 规定:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x)+g(x), && \forall x \in X \\
(kf)(x) &:= kf(x), && \forall x \in X, k \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

零函数为:

$$0(x) := 0, \forall x \in X$$

易证 $\mathbb{R}^X$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

设 V 是数域 K 上的线性空间, 其具有以下性质:

性质 2.1 V 中的零元是唯一的.

证明. 假设零元不唯一, 设 $0_1, 0_2$ 都是 V 的零元, 且有 $0_1 \neq 0_2$. 由 0_2 是零元, 所以 $0_1 + 0_2 = 0_1$; 由 0_1 是零元, 所以 $0_2 + 0_1 = 0_2$, 所以 $0_1 = 0_2$, 与假设矛盾, 故假设不成立. □

性质 2.2 对于任意的 $\alpha \in V$,α 的负元是唯一的, 记作 $-\alpha$.

证明. 假设负元不唯一, 设 β_1, β_2 都是 α 的负元, 且有 $\beta_1 \neq \beta_2$. 则有

$$\begin{aligned}
\beta_1 + \alpha + \beta_2 &= \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0 = \beta_1 \\
\beta_1 + \alpha + \beta_2 &= (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2
\end{aligned}$$

所以 $\beta_1 = \beta_2$, 与假设矛盾, 故而假设不成立. □

性质 2.3 $0\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in V$

证明.

$$\begin{aligned}
&0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \\
&0\alpha + (-0\alpha) = 0\alpha + 0\alpha + (-\alpha) \\
&0 = 0\alpha
\end{aligned}$$

□

性质 2.4 $k0 = 0, \quad \forall k \in K$

证明.

$$
\begin{aligned}
&k0 = k(0+0) = k0 + k0 \\
&k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0) \\
&0 = k0
\end{aligned}
$$

□

性质 2.5 若 $k\alpha = 0$, 则有 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$

证明. 假设 $k \neq 0$

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha)$$

由 $k\alpha = 0$, 则有 $\alpha = 0$ □

性质 2.6 $(-1)\alpha = -\alpha, \quad \forall\alpha \in V$

证明.

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0$$

所以 $(-1)\alpha$ 是 α 的负元, 为 $-\alpha$. □

2.2 线性子空间

定义 2.4 V 是数域 K 上的线性空间, 其中的元素为 α,U 是 V 的的一个非空子集. 若 U 对于 V 的加法和数量乘法（以 V 中的加法和数量乘法对 U 中的元素作运算）也是 K 上的线性空间, 则称 U 是 V 的子空间.

定理 2.1 V 的非空子集 U 是子空间

$\Longleftrightarrow$

(1). 若 $\alpha, \beta \in U$, 则 $\alpha + \beta \in U$.(U 对于 V 的加法封闭)
(2). 若 $\alpha \in U$, 则 $k\alpha \in U$.(U 对于 V 的数量乘法封闭)

证明. "$\Rightarrow$": 有定义可以得到;
"$\Leftarrow$":V 的加法和数量乘法限定到 U 上为 U 的加法和数量乘法, 显然 8 条运算法则中, 1,2,5,6,7,8 是成立的. 对于第 3 和第 4 条
3. 由 $U \neq \varnothing, \exists\beta \in U$, 使得,$0\beta = 0 \in U$, 从而 $0 \in U$, 零元存在.
4. 对于任意的 $\alpha \in U$, 有 $(-1)\alpha \in U$, 即 $-\alpha \in U$, 从而负元存在. □

例 2.2 $\{0\}$ 空间是子空间

定义 2.5 若存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in W$, 则将 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的线性组合. 其中 $k_1, k_2, ..., k_s \in K$. 令 $W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s | k_1, k_2, ..., k_s \in k\}$, 则有 $0 \in W$ 且 W 对于 V 的加法和数量乘法封闭, 从而 W 是 V 的子空间, 将其称作由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 生成的子空间, 记作 $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s >$.

定义 2.6 $\beta \in < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s >$
$:\Longleftrightarrow$ 存在 $l_1, l_2, ..., l_s \in K$ 使得 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_s\alpha_s$.
此时称,β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出.

对于方程组:
$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \beta$
$\Longleftrightarrow K$ 中有一组 $c_1, c_2, ..., c_n$, 使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = \beta$
$\Longleftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性表出.
$\Longleftrightarrow \beta \in < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$（生成的子空间）.

2.3 线性相关与线性无关

定义 2.7 设 V 是数域 K 上的一个线性空间,对于 V 中的一个向量组:$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, (s \geq 1)$,若 K 中有不全为 0 的一组数，使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关，否则，称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关. 即:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = ... = k_s = 0$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关.

对于线性方程组

(1) 若存在不全为 0 的 $c_1, c_2, ...c_n$，使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = 0 \quad \Longleftrightarrow$ 方程组有非零解.
(2) K^s 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关. $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n$ 只有零解.

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式：$|A| = 0$

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式：$|A| \neq 0$

行向量的性质与上述情况相同.

2.4 线性相关和线性无关的向量组

(1) α 线性相关 $\iff$ $\exists k \neq 0$, 使得 $k\alpha = 0$ $\iff$ $\alpha = 0$
从而 α 线性无关 $\iff$ $\alpha \neq 0$

(2) 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 中，如果有一部分向量组线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关.

(3) 向量组线性无关 $\Longrightarrow$ 不存在部分向量组线性相关（任何部分向量组线性无关）

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关 $\iff$ 由定义可得，存在 K 中不全为 0 的数 $k_1, k_2, ..., k_s$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_i \neq 0$, 则有

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + k_s\alpha_s)$$

$\iff$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 至少有一个向量可以由其余的向量线性表出. 其中第一个条件的必要性（”$\Leftarrow$”）的证明为：

证明. 设 $\alpha_j = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$
$\Longrightarrow$ $0 = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$ $\Longrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关. □

则有逆否命题：
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关 $\iff$ 其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出.

命题 2.2 若 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, 其表出方式是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关.

证明. ”$\Leftarrow$”:
设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{1}$$

假设表出不唯一，即 β 还可以表示成:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + ... + b_s\alpha_s \tag{2}$$

其中 $a_i \neq b_i$. (2)-(1)可以得到：

$$0 = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + ... + (b_s - a_s)\alpha_s$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，可以得到：

$$a_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., s$$

即 $a_i = b_i$, 假设不成立,β 的表出方式是唯一的.

”⇒”:

反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关，则有 K 中的 $k_1, k_2, ..., k_s (k_i$ 不全为零) 使得：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$$

此外，由

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{3}$$

可以得到：

$$\beta = (a_1 + k_1)\alpha_1 + (a_2 + k_2)\alpha_2 + ... + (a_s + k_s)\alpha_s \tag{4}$$

由 $k_1, k_2, ..., k_s$ 不全为零，不妨设 $k_i \neq 0$，则有 $a_i + k_i \neq a_i$. 则(3)式和(4)式相比较，至少有一项是不相等的（第 i 个位置），从而 β 有两种不相同的表出方式，这与已证明的必要性矛盾，故而假设不成立，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 是线性无关的. □

命题 2.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出.

证明. 由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关，则存在不全为零的一组数 $k_1, k_2, ..., .k_s, l$, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s + l\beta = 0$$

若 $l = 0$, 则有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，则有 $k_1, k_2, ..., .k_s$ 全为零，再加上 l, 有 $k_1, k_2, ..., .k_s, l$ 全为零，与 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, \beta$ 线性相关矛盾，假设不成立. 所以 $l \neq 0$. 则有

$$\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - ... - \frac{k_s}{l}\alpha_s$$

□

2.5 极大线性无关组

定义 2.8

$$< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s > := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s | k_i \in K, i = 1, 2, ..., s\}$$

称为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 生成的向量空间.

定义 2.9 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的一个部分组若满足:

(a) 该部分组线性无关.

(b) 从 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中其余的向量中 *(若有)* 任取一个向量添加进来得到的新的部分组都线性相关.

则称它是为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的极大线性无关组.

定义 2.10 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 中的每一个向量都可以由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性表出，则称 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 线性表出. 若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_r$ 可以相互线性表出，则称这两个向量组是等价的，记作:

$$\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\}$$

命题 2.4 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价.

证明. 不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m(m\le s)$

$$\alpha_j=0\alpha_1+...+\alpha_j+...+0\alpha_s,\quad j=1,2,...,m$$

故而 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 中的所有的元素都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出.

同时显然 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出. 对于 $\alpha_j(m<j\le s)$，将其添加到 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 中，形成 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\alpha_j$, 由极大线性无关组的定义，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,\alpha_j$ 线性相关，由前一命题可得，α_j 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出，从而 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出.

故而，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 可以相互线性表出,$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价. □

性质 2.7 等价具有以下的性质：

(1). 每一个向量与其自身等价（反身性）

(2). 若 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\}\Rightarrow\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$, 对称性

(3). $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}\cong\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\},\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_r\}\cong\{\gamma_1,\gamma_1,...,\gamma_t\}\Rightarrow\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}\cong\{\gamma_1,\gamma_1,...,\gamma_t\}$, 传递性

证明. 第三个性质的证明。

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\beta_j,\quad i=1,2,...,s$$

$$\beta_j=\sum_{l=1}^{t}b_{jl}\gamma_l,\quad j=1,2,...,r$$

则有

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \sum_{l=1}^{t} b_{jl}\gamma_l = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{t} a_{ij}b_{jl}\gamma_l \\ &= \sum_{l=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jl}\gamma_l = \sum_{l=1}^{t}\gamma_l\left[\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jl}\gamma_l\right]\end{aligned}$$

所以有 α_i 可以由 $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_t$ 线性表出。 □

由以上等价关系的对称性和传递性可以得到：

命题 2.5 **向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价。**

引理 2.6 **若 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出，若 $r > s$, 那么 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 一定线性相关。**

证明. 由已知可以得到

$$\begin{aligned}\beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + ... + a_{s1}\alpha_s \\ \beta_2 &= a_{12}\alpha_1 + ... + a_{s2}\alpha_s \\ &\vdots \\ \beta_r &= a_{1r}\alpha_1 + ... + a_{sr}\alpha_s\end{aligned}$$

令

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + ... + x_r\beta_r = 0$$

则有

$$\begin{gathered}x_1(a_{11}\alpha_1 + ... + a_{s1}\alpha_s) \\ +x_2(a_{12}\alpha_1 + ... + a_{s2}\alpha_s) \\ \vdots \\ +x_r(a_{1r}\alpha_1 + ... + a_{sr}\alpha_s) = 0 \\ \Rightarrow (a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r)\alpha_1 + ... + (a_{s1}x_1 + ... + a_{sr}x_r)\alpha_s = 0\end{gathered}$$

取向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 中的一个极大线性无关组，不妨设其为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, 且有 $m \le s < r$, 则有方程组：

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + ... + a_{1r}x_r &= 0 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2r}x_r &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mr}x_r &= 0\end{aligned}$$

由 $m \le s < r$，方程组由非零解，设非零解为 $k_1, k_2, ..., k_r$, 得到

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + ... + k_r\beta_r = 0$$

$k_1, k_2, ..., k_r$ 不全为零，从而 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 线性相关。 □

引理 2.7 若 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表处，且 $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r$ 线性无关，那么 $r \leq s$.

推论 2.8 等价的线性无关的两个向量组所含有的向量的个数相等。即

$$\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} \cong \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_s\} \Rightarrow m = s$$

证明. 由前一推论可以得到。 □

推论 2.9 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ 的任意两个极大线性无关组所含有的向量个数相等。

定义 2.11 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的任意一个极大线性无关组所含有的向量个数称为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的秩 *(rank)*. 只含有 *0* 的向量组的秩规定为 *0*. 记作 $\mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$

命题 2.10 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关
$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 是其本身的极大线性无关组
$\Leftrightarrow \mathrm{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\} = s$

命题 2.11 向量组 *(I)* 可以由向量组 *(II)* 线性表出，则 $\mathrm{rank}(I) \leq \mathrm{rank}(II)$

证明. 取 (I) 中的极大线性无关组 (I)’,(II) 中极大线性无关组 (II)’,

$$(I) \cong (I)'$$
$$(II) \cong (II)'$$

则有

$$(I)' \cong (I)'$$

即 (I)’ 可以由 (II)’ 线性表出. 由引理2.7，(I)’ 所含向量的个数 ≤ (II)’ 所含向量的个数。即为 $\mathrm{rank}(I) \leq \mathrm{rank}(II)$ □

推论 2.12 等价的向量组的秩相等。

2.6 基、维数和坐标

定义 2.12 设 V 是数域 K 上任意的线性空间。
V 的一个有限子集 $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s\}$ 线性相 *(无)* 关 $:\Leftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相 *(无)* 关
V 的一个无限子集 S 线性相关 $:\Leftrightarrow S$ 有一个有限子集是线性相关的
从而有，V 的一个无限子集 S 线性无关 $:\Leftrightarrow S$ 任何一个有限子集是线性无关的

定义 2.13 设 V 是数域 K 上任意的线性空间。V 的一个子集 S 若满足以下条件：

(1). S 是线性无关的
(2). V 中的任意向量可以由 S 中的有限多个向量线性表出

则称 S 是 V 的一个基.

若 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s\}$, 则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是 V 的一个（有序）基（$\varnothing$ 规定为线性无关）

命题 2.13 任何一个线性空间都有一个基。

定义 2.14 若 V 有一个基是有限维的，则称 V 是有限维的。
若 V 有一个基是无限维的，则称 V 是无限维的。

定理 2.14 若 V 是有限维的，则 V 的任意两个基所含有向量的个数相同。

证明. 设 V 有一个基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, 任取另外一个基 S, 假设 S 所含有的向量个数 $k>n$, 则 S 中可以取出 $\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$, 且 $\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出。由 $n+1>n$, 据引理2.7,$\beta_1,\beta_2,..,\beta_{n+1}$ 线性相关，这与 S 是一个基矛盾，假设不成立，进一步有 $k<=n$

$$\{\beta_1,\beta_2,..,\beta_k\}\cong\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$$

由两个向量组都是线性无关的，从而由推论2.12, 等价的线性无关向量组含有相同的个数，从而 $k=n$ □

推论 2.15 若 V 是无限维的线性空间，则 V 的任意一个基都是无限子集。

证明. 假设 V 有一个基是有限子集，由 V 中任何一个基的向量个数相同，这与 V 是无限维矛盾。 □

定义 2.15 若 V 是有限维的，则将 V 的任何一个基所含有向量个数称为 V 的维数，记作 $\dim_K V$ 或者 $\dim V$；若 V 是无限维的，则将 V 的维数记成 $\dim V=\infty$；$\{0\}$ 的维度规定为 *0*.

命题 2.16 设 $\dim V=n$, 则 V 任意 $n+1$ 个向量都线性相关。

证明. 设 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基，则对于 V 中的任意 $n+1$ 个向量 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,\beta_{n+1}$ 都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出，由 $n+1>n$, 从而 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n,\beta_{n+1}$ 线性相关。 □

定义 2.16 设 $\dim V=n$, 取 V 的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，则 V 中的任意一个向量可以表示成

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+...+a_n\alpha_n$$

且表示方式唯一。将 $(a_1,a_2,...,a_n)$ 称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 下的坐标。

证明. 由定义2.2可得. □

对于

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

$$a=a_1e_1+a_2e_2+\dots+a_3e_3:=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$e_1,e_2,...,e_n$ 为 K_n 的一个基（标准基）。

命题 2.17 设 $\dim V=n$, 则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基。

证明. 从 V 中取线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$，任取 $\beta\in V$, 由命题2.16,$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n,\beta$ 线性相关，从而 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是极大线性无关组，β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出。由 β 的任意性可以得出，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基。 □

命题 2.18 设 $\dim V=n$, 若 V 中没一个向量都可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基。

证明. 取 V 的一个基 $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n$, 则有 $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n$ 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性表出，且 $\delta_1,\delta_2,...,\delta_n$，从而有

$$\mathrm{rank}(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\le\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

$$\Rightarrow n=\mathrm{rank}(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\le\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\le n$$

于是有：

$$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=n$$

□

命题 2.19 设 $\dim V=n,V$ 中任意线性无关的向量组都可以扩充为 V 的一个基。

证明. 设 V 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性无关。若 $s=n$, 则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关，由前一命题可知，$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 是 V 的一个基。

若 $s<n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 不是 V 的一个基，从而 V 中至少由向量 β_1 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 线性表出，于是 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1$ 必定线性无关。如果 $s+1<n$, 则至少还有 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1,\beta_2$ 线性表出。以此类推有 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_r$ 线性无关，且 $s+r=n.\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s,\beta_1,...,\beta_r$ 是 V 的一个基。 □

命题 2.20 设 $\dim V = n, W$ 是 V 的一个子空间，则有 $\dim W \le \dim V$.

证明. W 中取一基 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, 可以扩充成 V 中的一个基。 □