

## 目录

# 高等代数笔记

陈群

November 15, 2019

## 1 行列式

### 1.1 $n$ 元排列

**定义 1.1 ( $n$  元排列)**  $1, 2, 3, \dots, n$  (或者  $n$  个不同的正整数) 的全排列称为一个  $n$  元排列.

显然,  $1, 2, 3, \dots, n$  (或者  $n$  个不同的正整数) 的  $n$  元排列有  $n!$  个.

**定义 1.2 (逆序数对和逆序数)** 给定一个数对  $(a, b), a \neq b$ , 若有  $a > b$ , 则称  $(a, b)$  为逆序数对. 一组数  $1, 2, 3, \dots, n$  中的逆序数对的个数称为该数列的逆序数, 记作  $\tau(1, 2, 3, \dots, n)$

对于数列 2431, 其中的逆序数对为  $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$ , 其逆序数为 4.

**定义 1.3 (奇排列与偶排列)** 逆序数为奇数的排列称为奇排列; 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

**定理 1.1** 对换排列中的两个数的位置会改变排列的奇偶性.

**证明.** 1. 对换相邻位置的两个数.

设对换之前的排列为  $a_1 a_2 \dots a_i a_j \dots a_n$ , 则对换之后的排列为:  $a_1 a_2 \dots a_j a_i \dots a_n$ , 两个排列进行比计可以知道, 对于前  $i-1$  个位置而言, 互换前后的逆序数不变, 对于第  $j+1$  到  $n$  个位置而言, 互换前后的逆序数也没有改变. 交换前, 第  $i, j$  位置的逆序数和为:

$$\tau(a_i, a_j) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_i, a_k) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_j, a_k)$$

交换后, 第  $i, j$  位置的逆序数和为:

$$\tau(a_j, a_i) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_j, a_k) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_i, a_k)$$

上述两式的差为  $\tau(a_j, a_i) - \tau(a_i, a_j) = \pm 1$ , 故两个排列的奇偶性相反.

2. 一般情况下

设对换之前的排列为  $a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_{i+s} a_j \dots a_n$ , 则对换之后的排列为:  $a_1 a_2 \dots a_j a_{i+1} \dots a_{i+s} a_i \dots a_n$ , 可以看做  $s+1+s$  次相邻元素之间的对换, 每一次都改变了排列的奇偶性, 由于  $2s+1$  为奇数, 从而交换前后排列的奇偶性相反.  $\square$

**定理 1.2** 任一  $n$  元排列  $j_1 j_2 \dots j_n$  与  $123 \dots n$  可以经过一系列的对换互变且所做的对换的次数与原排列  $j_1 j_2 \dots j_n$  的奇偶性相同.

**证明.** 设  $j_1 j_2 \dots j_n$  经过  $s$  次对换变为  $123 \dots n$ , 显然  $123 \dots n$  是偶排列. 由于每互换一次改变排列的奇偶性, 所以若  $j_1 j_2 \dots j_n$  为奇排列, 则  $s$  为奇数; 若  $j_1 j_2 \dots j_n$  为偶排列, 则  $s$  为偶数  $\square$

## 1.2 $n$ 阶行列式

**定义 1.4 ( $n$  阶行列式)**  $n$  阶行列式为  $n!$  项代数数和, 其中每一项是不同行不同列的  $n$  个元素的乘积. 每一项按照行指标的自然顺序排列, 列指标所成的排列是奇排列时带负号, 偶排列时带正号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

记作  $|A|$  或者  $\det A$

特别地, 可以写作:

$$|A| := \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

由上式可以得出结论:

**性质 1.1**

$$|A| := |A^T|$$

**性质 1.2**  $A$  作行变换, 第  $i$  行乘以  $k$ , 得到  $A$

$$A \xrightarrow{\textcircled{1} * k} B$$

得到

$$|B| = k|A|$$

**证明.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$B$  的行列式可以表示为:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots ka_{ij_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k|A| \end{aligned}$$

$\square$

性质 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 设左式为  $|A|$ , 则有

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{j_i} + c_{j_i}) \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{j_i} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

性质 1.4

$$A \xrightarrow{(i,k)} C \Rightarrow |C| = -|A|$$

证明. 设:

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_i} \dots a_{ij_k} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_k} \dots a_{kj_i} \dots a_{nj_n} \\ &= (-1)|A| = -|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.5 两行或者两列相等的行列式的值为 0.

**证明.** 设  $A$  的两行相等, 则互换相等的两行, 行列式  $|A|$  不变, 由上一性质, 即  $|A| = -|A|$ , 则  $|A| = 0$ .  $\square$

**性质 1.6** 行列式两行或者两列成比例, 则该行列式为 0.

**证明.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ la_{i1} & la_{i2} & la_{i3} & \dots & la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = l \cdot 0 = 0$$

$\square$

**性质 1.7**

$$A \xrightarrow{\textcircled{k} + \textcircled{i}l} D \Rightarrow |A| = |D|$$

**证明.** 设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + la_{i1} & a_{k2} + la_{i2} & a_{k3} + la_{i3} & \dots & a_{kn} + la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + l \cdot 0 = |A| \end{aligned}$$

$\square$

### 1.3 Laplace 定理

**定理 1.3** 对于行列式  $A = a(i, j)$ , 取定  $k$  行,  $i_1, i_2, \dots, i_k$  行,  $k$  列,  $j_1, j_2, \dots, j_k$  列, 其中  $i_1 < i_2 < \dots < i_k, j_1 < j_2 < \dots < j_k$ , 行列交叉处的  $k^2$  个元素按照原来的排列顺序形成一个  $k$  阶行列式, 称为  $A$  的  $k$  阶子式, 记作

$$A \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ j_1, j_2, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

划去上述  $k$  行  $k$  列后剩余的元素按照原有顺序组成  $n-k$  阶行列式, 称为  $k$  阶行列式的余子式。令

$$i'_1, i'_2, \dots, i'_{n-k} = 1, 2, \dots, n \setminus i_1, i_2, \dots, i_k$$

其中  $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{n-k}$

## 2 线性空间

### 2.1 线性空间的定义

定义 2.1

$$S \times M := \{(a, b) | a \in S, b \in M\}$$

称为  $S$  与  $M$  的笛卡尔积

定义 2.2 非空集合  $S$  上的一个代数运算定义为  $S \times S$  到  $S$  的一个映射。

定义 2.3 设  $V$  是一个非空集合,  $K$  是一个数域。若  $V$  上有一个运算, 称为加法, 即  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$ ;  $K$  与  $V$  之间有运算, 称为数量乘法, 即  $k \times V \rightarrow V : (k, \alpha) \mapsto k\alpha$ , 并且满足如下运算法则:

- (1)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in V$
- (2)  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \forall \alpha, \beta \in V$
- (3)  $V$  中有元素  $0$ , 使得:  $\alpha + 0 = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$
- (4)  $\forall \alpha \in V$ , 有  $\beta \in V$ , 满足  $\alpha + \beta = 0$ . 称  $\beta$  为  $\alpha$  的负元
- (5)  $1\alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$
- (6)  $(kl)\alpha = k(l\alpha), \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$
- (7)  $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$
- (8)  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$

那么称  $V$  为数域  $K$  上的一个线性空间。 $V$  中元素可以称为向量,  $V$  可以称作向量空间。

例 2.1  $\mathbb{R}^X := \{\text{非空集合 } X \text{ 到 } \mathbb{R} \text{ 的映射}\}$ , 称为  $X$  上的实值函数。规定:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), & \forall x \in X \\ (kf)(x) &:= kf(x), & \forall x \in X, k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

零函数为:

$$0(x) := 0, \forall x \in X$$

易证  $\mathbb{R}^X$  是  $\mathbb{R}$  上的一个线性空间。

设  $V$  是数域  $K$  上的线性空间, 其具有以下性质:

性质 2.1  $V$  中的零元是唯一的。

证明. 假设零元不唯一, 设  $0_1, 0_2$  都是  $V$  的零元, 且有  $0_1 \neq 0_2$ . 由  $0_2$  是零元, 所以  $0_1 + 0_2 = 0_1$ ; 由  $0_1$  是零元, 所以  $0_2 + 0_1 = 0_2$ , 所以  $0_1 = 0_2$ , 与假设矛盾, 故假设不成立。□

性质 2.2 对于任意的  $\alpha \in V$ ,  $\alpha$  的负元是唯一的, 记作  $-\alpha$ 。

**证明.** 假设负元不唯一, 设  $\beta_1, \beta_2$  都是  $\alpha$  的负元, 且有  $\beta_1 \neq \beta_2$ . 则有

$$\begin{aligned}\beta_1 + \alpha + \beta_2 &= \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0 = \beta_1 \\ \beta_1 + \alpha + \beta_2 &= (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2\end{aligned}$$

所以  $\beta_1 = \beta_2$ , 与假设矛盾, 故而假设不成立. □

**性质 2.3**  $0\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in V$

**证明.**

$$\begin{aligned}0\alpha &= (0 + 0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \\ 0\alpha + (-0\alpha) &= 0\alpha + 0\alpha + (-\alpha) \\ 0 &= 0\alpha\end{aligned}$$

□

**性质 2.4**  $k0 = 0, \quad \forall k \in K$

**证明.**

$$\begin{aligned}k0 &= k(0 + 0) = k0 + k0 \\ k0 + (-k0) &= k0 + k0 + (-k0) \\ 0 &= k0\end{aligned}$$

□

**性质 2.5** 若  $k\alpha = 0$ , 则有  $k = 0$  或  $\alpha = 0$

**证明.** 假设  $k \neq 0$

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha)$$

由  $k\alpha = 0$ , 则有  $\alpha = 0$  □

**性质 2.6**  $(-1)\alpha = -\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

**证明.**

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1 - 1)\alpha = 0$$

所以  $(-1)\alpha$  是  $\alpha$  的负元, 为  $-\alpha$ . □

## 2.2 线性子空间

**定义 2.4**  $V$  是数域  $K$  上的线性空间, 其中的元素为  $\alpha, U$  是  $V$  的一个非空子集. 若  $U$  对于  $V$  的加法和数量乘法 (以  $V$  中的加法和数量乘法对  $U$  中的元素作运算) 也是  $K$  上的线性空间, 则称  $U$  是  $V$  的子空间.

**定理 2.1**  $V$  的非空子集  $U$  是子空间

$\iff$

- (1). 若  $\alpha, \beta \in U$ , 则  $\alpha + \beta \in U$ . ( $U$  对于  $V$  的加法封闭)
- (2). 若  $\alpha \in U$ , 则  $k\alpha \in U$ . ( $U$  对于  $V$  的数量乘法封闭)

证明. " $\Rightarrow$ ": 有定义可以得到;

" $\Leftarrow$ ":  $V$  的加法和数量乘法限定到  $U$  上为  $U$  的加法和数量乘法, 显然 8 条运算法则中, 1, 2, 5, 6, 7, 8 是成立的.

对于第 3 和第 4 条

3. 由  $U \neq \emptyset, \exists \beta \in U$ , 使得,  $0\beta = 0 \in U$ , 从而  $0 \in U$ , 零元存在.

4. 对于任意的  $\alpha \in U$ , 有  $(-1)\alpha \in U$ , 即  $-\alpha \in U$ , 从而负元存在.  $\square$

## 例 2.2 $\{0\}$ 空间是子空间

**定义 2.5** 若存在一组向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in W$ , 则将  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$  称为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合. 其中  $k_1, k_2, \dots, k_s \in K$ . 令  $W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_1, k_2, \dots, k_s \in K\}$ , 则有  $0 \in W$  且  $W$  对于  $V$  的加法和数量乘法封闭, 从而  $W$  是  $V$  的子空间, 将其称作由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  生成的子空间, 记作  $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$ .

**定义 2.6**  $\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$

$\Leftrightarrow$  存在  $l_1, l_2, \dots, l_s \in K$  使得  $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s$ .

此时称  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出.

对于方程组:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$$

$\Leftrightarrow K$  中有一组  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , 使得  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = \beta$

$\Leftrightarrow \beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出.

$\Leftrightarrow \beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$  (生成的子空间).

## 2.3 线性相关与线性无关

**定义 2.7** 设  $V$  是数域  $K$  上的一个线性空间, 对于  $V$  中的一个向量组:  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, (s \geq 1)$ , 若  $K$  中有不全为 0 的一组数, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 否则, 称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关. 即:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \implies k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

对于线性方程组

(1) 若存在不全为 0 的  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , 使得  $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0 \Leftrightarrow$  方程组有非零解.

(2)  $K^s$  中的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关.  $\Leftrightarrow$  齐次线性方程组  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$  只有零解.

$K^n$  中的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关  $\Leftrightarrow$  以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为列向量的矩阵  $A$  的行列式:  $|A| = 0$

$K^n$  中的列向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关  $\Leftrightarrow$  以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  为列向量的矩阵  $A$  的行列式:  $|A| \neq 0$

行向量的性质与上述情况相同.

## 2.4 线性相关和线性无关的向量组

(1)  $\alpha$  线性相关  $\Leftrightarrow \exists k \neq 0$ , 使得  $k\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$

从而  $\alpha$  线性无关  $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

(2) 对于向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  中, 如果有一部分向量组线性相关, 则  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性相关.



(3) 向量组线性无关  $\implies$  不存在部分向量组线性相关 (任何部分向量组线性无关)

(4) 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关  $\iff$  由定义可得, 存在  $K$  中不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$  使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设  $k_i \neq 0$ , 则有

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s)$$

$\iff \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  至少有一个向量可以由其余的向量线性表出. 其中第一个条件的必要性 (" $\Leftarrow$ ") 的证明为:

**证明.** 设  $\alpha_j = l_1\alpha_1 + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + l_s\alpha_s$

$\implies 0 = l_1\alpha_1 + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + l_s\alpha_s \implies \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关.  $\square$

则有逆否命题:

向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关  $\iff$  其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出.

**命题 2.2** 若  $\beta$  可以由向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , 其表出方式是唯一的充分必要条件是  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关.

**证明.** " $\Leftarrow$ ":

设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_s\alpha_s \quad (1)$$

假设表出不唯一, 即  $\beta$  还可以表示成:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_s\alpha_s \quad (2)$$

其中  $a_i \neq b_i$ . (??)-(??)可以得到:

$$0 = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + \dots + (b_s - a_s)\alpha_s$$

由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 可以得到:

$$a_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

即  $a_i = b_i$ , 假设不成立,  $\beta$  的表出方式是唯一的.

" $\Rightarrow$ ":

反证法. 假设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相关, 则有  $K$  中的  $k_1, k_2, \dots, k_s$  ( $k_i$  不全为零) 使得:

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

此外, 由

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_s\alpha_s \quad (3)$$

可以得到:

$$\beta = (a_1 + k_1)\alpha_1 + (a_2 + k_2)\alpha_2 + \dots + (a_s + k_s)\alpha_s \quad (4)$$

由  $k_1, k_2, \dots, k_s$  不全为零, 不妨设  $k_i \neq 0$ , 则有  $a_i + k_i \neq a_i$ . 则(??)式和(??)式相比较, 至少有一项是不相等的 (第  $i$  个位置), 从而  $\beta$  有两种不相同的表出方式, 这与已证明的必要性矛盾, 故而假设不成立,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是线性无关的.  $\square$

**命题 2.3** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性相关, 那么  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出.

**证明.** 由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性相关, 则存在不全为零的一组数  $k_1, k_2, \dots, k_s, l$ , 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + l\beta = 0$$

若  $l = 0$ , 则有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关, 则有  $k_1, k_2, \dots, k_s$  全为零, 再加上  $l$ , 有  $k_1, k_2, \dots, k_s, l$  全为零, 与  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$  线性相关矛盾, 假设不成立. 所以  $l \neq 0$ . 则有

$$\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{l}\alpha_s$$

□

## 2.5 极大线性无关组

**定义 2.8**

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_i \in K, i = 1, 2, \dots, s\}$$

称为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  生成的向量空间.

**定义 2.9**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的一个部分组若满足:

- (a) 该部分组线性无关.
- (b) 从  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中其余的向量中 (若有) 任取一个向量添加进来得到的新的部分组都线性相关.

则称它是为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的极大线性无关组.

**定义 2.10** 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中的每一个向量都可以由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表出, 则称  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可以由  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性表出. 若  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  可以相互线性表出, 则称这两个向量组是等价的, 记作:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$$

**命题 2.4**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和它的任意一个极大线性无关组等价.

**证明.** 不妨设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的一个极大线性无关组为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \leq s)$

$$\alpha_j = 0\alpha_1 + \dots + \alpha_j + \dots + 0\alpha_s, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

故而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中的所有的元素都可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出.

同时显然  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出. 对于  $\alpha_j (m < j \leq s)$ , 将其添加到  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中, 形成  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_j$ , 由极大线性无关组的定义,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_j$  线性相关, 由前一命题可得,  $\alpha_j$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出.

故而,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  可以相互线性表出,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和它的任意一个极大线性无关组等价. □

**性质 2.7** 等价具有以下性质:

- (1). 每一个向量与其自身等价 (反身性)
- (2). 若  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ , 对称性

(3).  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_t\} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ , 传递性

**证明.** 第三个性质的证明。

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} \beta_j, i = 1, 2, \dots, s$$

$$\beta_j = \sum_{l=1}^t b_{jl} \gamma_l, j = 1, 2, \dots, r$$

则有

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=1}^r a_{ij} \sum_{l=1}^t b_{jl} \gamma_l = \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^t a_{ij} b_{jl} \gamma_l \\ &= \sum_{l=1}^t \sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jl} \gamma_l = \sum_{l=1}^t \gamma_l \left[ \sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jl} \right] \end{aligned}$$

所以有  $\alpha_i$  可以由  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$  线性表出。 □

由以上等价关系的对称性和传递性可以得到：

**命题 2.5** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的任意两个极大线性无关组等价。

**引理 2.6** 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 若  $r > s$ , 那么  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  一定线性相关。

**证明.** 由已知可以得到

$$\begin{aligned} \beta_1 &= a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{s1}\alpha_s \\ \beta_2 &= a_{12}\alpha_1 + \dots + a_{s2}\alpha_s \\ &\vdots \\ \beta_r &= a_{1r}\alpha_1 + \dots + a_{sr}\alpha_s \end{aligned}$$

令

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_r\beta_r = 0$$

则有

$$\begin{aligned} &x_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{s1}\alpha_s) \\ &+ x_2(a_{12}\alpha_1 + \dots + a_{s2}\alpha_s) \\ &\vdots \\ &+ x_r(a_{1r}\alpha_1 + \dots + a_{sr}\alpha_s) = 0 \\ \Rightarrow &(a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{s1}x_1 + \dots + a_{sr}x_r)\alpha_s = 0 \end{aligned}$$

取向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  中的一个极大线性无关组, 不妨设其为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , 且有  $m \leq s < r$ , 则有方程组:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r &= 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r &= 0 \end{aligned}$$

由  $m \leq s < r$ , 方程组有非零解, 设非零解为  $k_1, k_2, \dots, k_r$ , 得到

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0$$

$k_1, k_2, \dots, k_r$  不全为零, 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性相关。 □

**引理 2.7** 若  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 且  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$  线性无关, 那么  $r \leq s$ .

**推论 2.8** 等价的线性无关的两个向量组所含有的向量的个数相等。即

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \cong \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\} \Rightarrow m = s$$

**证明.** 由前一推论可以得到。 □

**推论 2.9**  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的任意两个极大线性无关组所含有的向量个数相等。

**定义 2.11** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的任意一个极大线性无关组所含有的向量个数称为  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩 (*rank*). 只含有 0 的向量组的秩规定为 0. 记作  $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$

**命题 2.10** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性无关

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是其本身的极大线性无关组

$\Leftrightarrow \text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} = s$

**命题 2.11** 向量组 (I) 可以由向量组 (II) 线性表出, 则  $\text{rank}(I) \leq \text{rank}(II)$

**证明.** 取 (I) 中的极大线性无关组 (I)', (II) 中极大线性无关组 (II)',

$$(I) \cong (I)'$$

$$(II) \cong (II)'$$

则有

$$(I)' \cong (I)'$$

即 (I)' 可以由 (II)' 线性表出. 由引理 2.7, (I)' 所含向量的个数  $\leq$  (II)' 所含向量的个数. 即为  $\text{rank}(I) \leq \text{rank}(II)$  □

**推论 2.12** 等价的向量组的秩相等。

## 2.6 基、维数和坐标

**定义 2.12** 设  $V$  是数域  $K$  上任意的线性空间。

$V$  的一个有限子集  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$  线性相 (无) 关  $\Leftrightarrow$  向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性相 (无) 关

$V$  的一个无限子集  $S$  线性相关  $\Leftrightarrow S$  有一个有限子集是线性相关的

从而有,  $V$  的一个无限子集  $S$  线性无关  $\Leftrightarrow S$  任何一个有限子集是线性无关的

**定义 2.13** 设  $V$  是数域  $K$  上任意的线性空间。  $V$  的一个子集  $S$  若满足以下条件:

(1).  $S$  是线性无关的

(2).  $V$  中的任意向量可以由  $S$  中的有限多个向量线性表出

则称  $S$  是  $V$  的一个基.

若  $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ , 则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是  $V$  的一个 (有序) 基 ( $\emptyset$  规定为线性无关)

**命题 2.13** 任何一个线性空间都有一个基。

**定义 2.14** 若  $V$  有一个基是有限维的, 则称  $V$  是有限维的。

若  $V$  有一个基是无限维的, 则称  $V$  是无限维的。

**定理 2.14** 若  $V$  是有限维的, 则  $V$  的任意两个基所含向量的个数相同。

**证明.** 设  $V$  有一个基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 任取另外一个基  $S$ , 假设  $S$  所含有的向量个数  $k > n$ , 则  $S$  中可以取出  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ , 且  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出。由  $n+1 > n$ , 据引理??,  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$  线性相关, 这与  $S$  是一个基矛盾, 假设不成立, 进一步有  $k \leq n$

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

由两个向量组都是线性无关的, 从而由推论??, 等价的线性无关向量组含有相同的个数, 从而  $k = n$   $\square$

**推论 2.15** 若  $V$  是无限维的线性空间, 则  $V$  的任意一个基都是无限子集。

**证明.** 假设  $V$  有一个基是有限子集, 由  $V$  中任何一个基的向量个数相同, 这与  $V$  是无限维矛盾。  $\square$

**定义 2.15** 若  $V$  是有限维的, 则将  $V$  的任何一个基所含有的向量个数称为  $V$  的维数, 记作  $\dim_K V$  或者  $\dim V$ ; 若  $V$  是无限维的, 则将  $V$  的维数记成  $\dim V = \infty$ ;  $\{0\}$  的维度规定为 0。

**命题 2.16** 设  $\dim V = n$ , 则  $V$  任意  $n+1$  个向量都线性相关。

**证明.** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的一个基, 则对于  $V$  中的任意  $n+1$  个向量  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$  都可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出, 由  $n+1 > n$ , 从而  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$  线性相关。  $\square$

**定义 2.16** 设  $\dim V = n$ , 取  $V$  的一个基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 则  $V$  中的任意一个向量可以表示成

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n$$

且表示方式唯一。将  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  称为  $\alpha$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  下的坐标。

**证明.** 由定义??可得。  $\square$

对于

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$  为  $K_n$  的一个基 (标准基)。

**命题 2.17** 设  $\dim V = n$ , 则  $V$  中任意  $n$  个线性无关的向量都是  $V$  的一个基。

**证明.** 从  $V$  中取线性无关的向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 任取  $\beta \in V$ , 由命题??,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$  线性相关, 从而  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是极大线性无关组,  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性表出。由  $\beta$  的任意性可以得出,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $V$  的一个基。  $\square$