

目录

1	行列式	2
1.1	n 元排列	2
1.2	n 阶行列式	3
2	线性空间	6
2.1	线性空间的定义	6
2.2	线性子空间	8
2.3	线性相关与线性无关	9
2.4	线性相关和线性无关的向量组	10
2.5	极大线性无关组	11

高等代数笔记

陈群

May 29, 2019

1 行列式

1.1 n 元排列

定义 1.1 (n 元排列) $1, 2, 3, \dots, n$ (或者 n 个不同的正整数) 的全排列称为一个 n 元排列.

显然, $1, 2, 3, \dots, n$ (或者 n 个不同的正整数) 的 n 元排列有 $n!$ 个.

定义 1.2 (逆序数对和逆序数) 给定一个数对 (a, b) , $a \neq b$, 若有 $a > b$, 则称 (a, b) 为逆序数对. 一组数 $1, 2, 3, \dots, n$ 中的逆序数对的个数称为该数列的逆序数, 记作 $\tau(1, 2, 3, \dots, n)$

对于数列 2431, 其中的逆序数对为 $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$, 其逆序数为 4.

定义 1.3 (奇排列与偶排列) 逆序数为奇数的排列称为奇排列; 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定理 1.1 对换排列中的两个数的位置会改变排列的奇偶性.

证明. 1. 对换相邻位置的两个数.

设对换之前的排列为 $a_1 a_2 \dots a_i a_j \dots a_n$, 则对换之后的排列为: $a_1 a_2 \dots a_j a_i \dots a_n$, 两个排列进行比计较可以知道, 对于前 $i-1$ 个位置而言, 互换前后的逆序数不变, 对于第 $j+1$ 到 n 个位置而言, 互换前后的逆序数也没有改变. 交换前, 第 i, j 位置的逆序数和为:

$$\tau(a_i, a_j) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_i, a_k) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_j, a_k)$$

交换后, 第 i, j 位置的逆序数和为:

$$\tau(a_j, a_i) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_j, a_k) + \sum_{k=j+1}^n \tau(a_i, a_k)$$

上述两式的差为 $\tau(a_j, a_i) - \tau(a_i, a_j) = \pm 1$, 故两个排列的奇偶性相反.

2. 一般情况下

设对换之前的排列为 $a_1 a_2 \dots a_i a_{i+1} \dots a_{i+s} a_j \dots a_n$, 则对换之后的排列为: $a_1 a_2 \dots a_j a_{i+1} \dots a_{i+s} a_i \dots a_n$, 可以看做 $s+1+s$ 次相邻元素之间的对换, 每一次都改变了排列的奇偶性, 由于 $2s+1$ 为奇数, 从而交换前后排列的奇偶性相反. \square

定理 1.2 任一 n 元排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 与 $123 \dots n$ 可以经过一系列的对换互变且所做的对换的次数与原排列 $j_1 j_2 \dots j_n$ 的奇偶性相同.

证明. 设 $j_1 j_2 \dots j_n$ 经过 s 次对换变为 $123 \dots n$, 显然 $123 \dots n$ 是偶排列. 由于每互换一次改变排列的奇偶性, 所以若 $j_1 j_2 \dots j_n$ 为奇排列, 则 s 为奇数; 若 $j_1 j_2 \dots j_n$ 为偶排列, 则 s 为偶数 \square

1.2 n 阶行列式

定义 1.4 (n 阶行列式) n 阶行列式为 $n!$ 项代数和, 其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积. 每一项按照行指标的自然顺序排列, 列指标所成的排列是奇排列时带负号, 偶排列时带正号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

记作 $|A|$ 或者 $\det A$

特别地, 可以写作:

$$|A| := \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n}$$

由上式可以得出结论:

性质 1.1

$$|A| := |A^T|$$

性质 1.2 A 作行变换, 第 i 行乘以 k , 得到 A

$$A \xrightarrow{\textcircled{1}k} B$$

得到

$$|B| = k|A|$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

B 的行列式可以表示为:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots ka_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{i,j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= k|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 设左式为 $|A|$, 则有

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots (b_{j_i} + c_{j_i}) \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots b_{j_i} \dots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots c_{j_i} \dots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

性质 1.4

$$A \xrightarrow{(i,k)} C \Rightarrow |C| = -|A|$$

证明. 设:

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_i} \dots a_{ij_k} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_k} \dots a_{kj_i} \dots a_{nj_n} \\ &= (-1)|A| = -|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.5 两行或者两列相等的行列式的值为 0.

证明. 设 A 的两行相等, 则互换相等的两行, 行列式 $|A|$ 不变, 由上一性质, 即 $|A| = -|A|$, 则 $|A| = 0$. □

性质 1.6 行列式两行或者两列成比例, 则该行列式为 0.

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ la_{i1} & la_{i2} & la_{i3} & \dots & la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = l \cdot 0 = 0$$

□

性质 1.7

$$A \xrightarrow{\textcircled{k} + \textcircled{1}l} D \Rightarrow |A| = |D|$$

证明. 设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} + la_{i1} & a_{k2} + la_{i2} & a_{k3} + la_{i3} & \dots & a_{kn} + la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + l0 = |A| \end{aligned}$$

□

2 线性空间

2.1 线性空间的定义

定义 2.1

$$S \times M := \{(a, b) | a \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的笛卡尔积

定义 2.2 非空集合 S 上的一个代数运算定义为 $S \times S$ 到 S 的一个映射.

定义 2.3 设 V 是一个非空集合, K 是一个数域. 若 V 上有一个运算, 称为加法, 即 $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$; K 与 V 之间有运算, 称为数量乘法, 即 $k \times V \rightarrow V : (k, \alpha) \mapsto k\alpha$, 并且满足如下运算法则:

- (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \forall \alpha, \beta \in V$
- (2) $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad \forall \alpha, \beta \in V$
- (3) V 中有元素 0 , 使得: $\alpha + 0 = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$
- (4) $\forall \alpha \in V$, 有 $\beta \in V$, 满足 $\alpha + \beta = 0$. 称 β 为 α 的负元

- (5) $1\alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in V$
 (6) $(kl)\alpha = k(l\alpha), \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$
 (7) $(k+l)\alpha = k\alpha + l\alpha, \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$
 (8) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta, \quad \forall k, l \in K, \alpha \in V$

那么称 V 为数域 K 上的一个线性空间. V 中元素可以称为向量, V 可以称作向量空间.

例 2.1 $\mathbb{R}^X := \{\text{非空集合 } X \text{ 到 } \mathbb{R} \text{ 的映射}\}$, 称为 X 上的实值函数. 规定:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x), & \forall x \in X \\ (kf)(x) &:= kf(x), & \forall x \in X, k \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

零函数为:

$$0(x) := 0, \forall x \in X$$

易证 \mathbb{R}^X 是 \mathbb{R} 上的一个线性空间.

设 V 为数域 K 上的线性空间, 其具有以下性质:

性质 2.1 V 中的零元是唯一的.

证明. 假设零元不唯一, 设 $0_1, 0_2$ 都是 V 的零元, 且有 $0_1 \neq 0_2$. 由 0_2 是零元, 所以 $0_1 + 0_2 = 0_1$; 由 0_1 是零元, 所以 $0_2 + 0_1 = 0_2$, 所以 $0_1 = 0_2$, 与假设矛盾, 故假设不成立. □

性质 2.2 对于任意的 $\alpha \in V, \alpha$ 的负元是唯一的, 记作 $-\alpha$.

证明. 假设负元不唯一, 设 β_1, β_2 都是 α 的负元, 且有 $\beta_1 \neq \beta_2$. 则有

$$\begin{aligned}\beta_1 + \alpha + \beta_2 &= \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0 = \beta_1 \\ \beta_1 + \alpha + \beta_2 &= (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2\end{aligned}$$

所以 $\beta_1 = \beta_2$, 与假设矛盾, 故而假设不成立. □

性质 2.3 $0\alpha = 0, \quad \forall \alpha \in V$

证明.

$$\begin{aligned}0\alpha &= (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \\ 0\alpha + (-0\alpha) &= 0\alpha + 0\alpha + (-\alpha) \\ 0 &= 0\alpha\end{aligned}$$

□

性质 2.4 $k0 = 0, \quad \forall k \in K$

证明.

$$k0 = k(0 + 0) = k0 + k0$$

$$k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0)$$

$$0 = k0$$

□

性质 2.5 若 $k\alpha = 0$, 则有 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$

证明. 假设 $k \neq 0$

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha)$$

由 $k\alpha = 0$, 则有 $\alpha = 0$

□

性质 2.6 $(-1)\alpha = -\alpha$, $\forall \alpha \in V$

证明.

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1 - 1)\alpha = 0$$

所以 $(-1)\alpha$ 是 α 的负元, 为 $-\alpha$.

□

2.2 线性子空间

定义 2.4 V 是数域 K 上的线性空间, 其中的元素为 α , U 是 V 的一个非空子集. 若 U 对于 V 的加法和数量乘法 (以 V 中的加法和数量乘法对 U 中的元素作运算) 也是 K 上的线性空间, 则称 U 是 V 的子空间.

定理 2.1 V 的非空子集 U 是子空间

\iff

(1). 若 $\alpha, \beta \in U$, 则 $\alpha + \beta \in U$. (U 对于 V 的加法封闭)

(2). 若 $\alpha \in U$, 则 $k\alpha \in U$. (U 对于 V 的数量乘法封闭)

证明. " \Rightarrow ": 有定义可以得到;

" \Leftarrow ": V 的加法和数量乘法限定到 U 上为 U 的加法和数量乘法, 显然 8 条运算法则中, 1, 2, 5, 6, 7, 8 是成立的. 对于第 3 和第 4 条

3. 由 $U \neq \emptyset, \exists \beta \in U$, 使得, $0\beta = 0 \in U$, 从而 $0 \in U$, 零元存在.

4. 对于任意的 $\alpha \in U$, 有 $(-1)\alpha \in U$, 即 $-\alpha \in U$, 从而负元存在.

□

例 2.2 $\{0\}$ 空间是子空间

定义 2.5 若存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in W$, 则将 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的线性组合. 其中 $k_1, k_2, \dots, k_s \in K$. 令 $W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s | k_1, k_2, \dots, k_s \in K\}$, 则有 $0 \in W$ 且 W 对于 V 的加法和数量乘法封闭, 从而 W 是 V 的子空间, 将其称作由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的子空间, 记作 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$.

定义 2.6 $\beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle$

$:\Leftrightarrow$ 存在 $l_1, l_2, \dots, l_s \in K$ 使得 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \dots + l_s\alpha_s$.

此时称 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

对于方程组:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = \beta$$

$$\Leftrightarrow K \text{ 中有一组 } c_1, c_2, \dots, c_n, \text{ 使得 } c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = \beta$$

$$\Leftrightarrow \beta \text{ 可以由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表出.}$$

$$\Leftrightarrow \beta \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \text{ (生成的子空间).}$$

2.3 线性相关与线性无关

定义 2.7 设 V 是数域 K 上的一个线性空间, 对于 V 中的一个向量组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, (s \geq 1)$, 若 K 中有不全为 0 的一组数, 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 否则, 称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关. 即:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0 \implies k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

对于线性方程组

(1) 若存在不全为 0 的 c_1, c_2, \dots, c_n , 使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \dots + c_n\alpha_n = 0 \iff$ 方程组有非零解.

(2) K^s 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关. \iff 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n$ 只有零解.

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关 \iff 以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式: $|A| = 0$

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关 \iff 以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式: $|A| \neq 0$

行向量的性质与上述情况相同.

2.4 线性相关和线性无关的向量组

(1) α 线性相关 $\iff \exists k \neq 0$, 使得 $k\alpha = 0 \iff \alpha = 0$

从而 α 线性无关 $\iff \alpha \neq 0$

(2) 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中, 如果有一部分向量组线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性相关.

(3) 向量组线性无关 \implies 不存在部分向量组线性相关 (任何部分向量组线性无关)

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \iff 由定义可得, 存在 K 中不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_i \neq 0$, 则有

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \dots + k_s\alpha_s)$$

$\iff \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 至少有一个向量可以由其余的向量线性表出. 其中第一个条件的必要性 (“ \Leftarrow ”) 的证明为:

证明. 设 $\alpha_j = l_1\alpha_1 + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + l_s\alpha_s$

$\implies 0 = l_1\alpha_1 + \dots + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \dots + l_s\alpha_s \implies \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关. \square

则有逆否命题:

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关 \iff 其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出.

命题 2.2 若 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$, 其表出方式是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关.

证明. “ \Leftarrow ”:

设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_s\alpha_s \quad (1)$$

假设表出不唯一, 即 β 还可以表示成:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \dots + b_s\alpha_s \quad (2)$$

其中 $a_i \neq b_i$. (2)-(1)可以得到:

$$0 = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + \dots + (b_s - a_s)\alpha_s$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 可以得到:

$$a_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

即 $a_i = b_i$, 假设不成立, β 的表出方式是唯一的.

” \Rightarrow ”:

反证法. 假设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则有 K 中的 k_1, k_2, \dots, k_s (k_i 不全为零) 使得:

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$$

此外, 由

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_s\alpha_s \quad (3)$$

可以得到:

$$\beta = (a_1 + k_1)\alpha_1 + (a_2 + k_2)\alpha_2 + \dots + (a_s + k_s)\alpha_s \quad (4)$$

由 k_1, k_2, \dots, k_s 不全为零, 不妨设 $k_i \neq 0$, 则有 $a_i + k_i \neq a_i$. 则(3)式和(4)式相比较, 至少有一项是不相等的 (第 i 个位置), 从而 β 有两种不相同的表出方式, 这与已证明的必要性矛盾, 故而假设不成立, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是线性无关的. \square

命题 2.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 那么 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

证明. 由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关, 则存在不全为零的一组数 k_1, k_2, \dots, k_s, l , 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s + l\beta = 0$$

若 $l = 0$, 则有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则有 k_1, k_2, \dots, k_s 全为零, 再加上 l , 有 k_1, k_2, \dots, k_s, l 全为零, 与 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性相关矛盾, 假设不成立. 所以 $l \neq 0$. 则有

$$\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \frac{k_2}{l}\alpha_2 - \dots - \frac{k_s}{l}\alpha_s$$

\square

2.5 极大线性无关组

定义 2.8

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle := \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s \mid k_i \in K, i = 1, 2, \dots, s\}$$

称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 生成的向量空间.

定义 2.9 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个部分组若满足:

(a) 该部分组线性无关.

(b) 从 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中其余的向量中 (若有) 任取一个向量添加进来得到的新的部分组都线性相关.

则称它是为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的极大线性无关组.

定义 2.10 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的每一个向量都可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出, 则称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性表出. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以相互线性表出, 则称这两个向量组是等价的, 记作:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$$

命题 2.4 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价.

证明. 不妨设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m (m \leq s)$

$$\alpha_j = 0\alpha_1 + \dots + \alpha_j + \dots + 0\alpha_s, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

故而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的所有的元素都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出.

同时显然 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出. 对于 $\alpha_j (m < j \leq s)$, 将其添加到 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 形成 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_j$, 由极大线性无关组的定义, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_j$ 线性相关, 由前一命题可得, α_j 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

故而, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 可以相互线性表出, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和它的任意一个极大线性无关组等价. \square

性质 2.7 等价具有以下性质:

- (1). 每一个向量与其自身等价 (反身性)
- (2). 若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \Rightarrow \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \cong \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$, 对称性
- (3). $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_t\} \Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\} \cong \{\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_t\}$, 传递性

证明. 第三个性质的证明。

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}\beta_j, i = 1, 2, \dots, s$$

$$\beta_j = \sum_{l=1}^t b_{jl}\gamma_l, j = 1, 2, \dots, r$$

则有

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \sum_{j=1}^r a_{ij} \sum_{l=1}^t b_{jl} \gamma_l = \sum_{j=1}^r \sum_{l=1}^t a_{ij} b_{jl} \gamma_l \\ &= \sum_{l=1}^t \sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jl} \gamma_l = \sum_{l=1}^t \gamma_l \left[\sum_{j=1}^r a_{ij} b_{jl} \right]\end{aligned}$$

所以有 α_i 可以由 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ 线性表出。 □

由以上等价关系的对称性和传递性可以得到：

命题 2.5 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价。

引理 2.6 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出，若 $r > s$ ，那么 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 一定线性相关。

证明. 由已知可以得到

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{s1}\alpha_s$$

$$\beta_2 = a_{12}\alpha_1 + \dots + a_{s2}\alpha_s$$

$$\vdots$$

$$\beta_r = a_{1r}\alpha_1 + \dots + a_{sr}\alpha_s$$

令

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_r\beta_r = 0$$

则有

$$x_1(a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{s1}\alpha_s)$$

$$+ x_2(a_{12}\alpha_1 + \dots + a_{s2}\alpha_s)$$

$$\vdots$$

$$+ x_r(a_{1r}\alpha_1 + \dots + a_{sr}\alpha_s) = 0$$

$$\Rightarrow (a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r)\alpha_1 + \dots + (a_{s1}x_1 + \dots + a_{sr}x_r)\alpha_s = 0$$

取向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中的一个极大线性无关组，不妨设其为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ ，且有 $m \leq s < r$ ，则有方程组：

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = 0$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mr}x_r = 0$$

由 $m \leq s < r$ ，方程组有非零解，设非零解为 k_1, k_2, \dots, k_r ，得到

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_r\beta_r = 0$$

k_1, k_2, \dots, k_r 不全为零，从而 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性相关。 □

推论 2.7 若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关, 那么 $r \leq s$.

推论 2.8 等价的线性无关的两个向量组所含有的向量的个数相等。即

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \cong \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\} \Rightarrow m = s$$

证明. 由前一推论可以得到。 □

推论 2.9 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的任意两个极大线性无关组所含有的向量个数相等。

定义 2.11 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的任意一个极大线性无关组所含有的向量个数称为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩 (*rank*). 只含有 0 的向量组的秩规定为 0. 记作 $\text{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$