目录

高等代数笔记

陈群

March 31, 2019

1 行列式

1.1 n 元排列

定义 1.1 (n 元排列) $1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的全排列称为一个 n 元排列.

显然,$1, 2, 3, ..., n$（或者 n 个不同的正整数）的 n 元排列有 $n!$ 个.

定义 1.2 (逆序数对和逆序数) 给定一个数对 $(a, b), a \neq b$, 若有 $a>b$, 则称 (a, b) 为逆序数对. 一组数 $1, 2, 3, ..., n$ 中的逆序数对的个数称为该数列的逆序数, 记作 $\tau(1, 2, 3, ..., n)$

对于数列 2431, 其中的逆序数对为 $(2, 1), (4, 3), (4, 1), (3, 1)$, 其逆序数为 4.

定义 1.3 (奇排列与偶排列) 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

定理 1.1 对换排列中的两个数的位置会改变排列的奇偶性.

证明. 1. 对换相邻位置的两个数.
设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_j...a_n$, 则对换之后的排列为：$a_1a_2...a_ja_i...a_n$, 两个排列进行比计较可以知道, 对于前 $i-1$ 个位置而言, 互换前后的逆序数不变, 对于第 $j+1$ 到 n 个位置而言, 互换前后的逆序数也没有改变. 交换前, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_i, a_j) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k)$$

交换后, 第 i, j 位置的逆序数和为：

$$\tau(a_j, a_i) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_j, a_k) + \sum_{k=j+1}^{n} \tau(a_i, a_k)$$

上述两式的差为 $\tau(a_j, a_i) - \tau(a_i, a_j) = \pm 1$, 故两个排列的奇偶性相反.

2. 一般情况下

设对换之前的排列为 $a_1a_2...a_ia_{i+1}...a_{i+s}a_j...a_n$, 则对换之后的排列为:$a_1a_2...a_ja_{i+1}...a_{i+s}a_i...a_n$, 可以看做 $s+1+s$ 次相邻元素之间的对换, 每一次都改变了排列的奇偶性, 由于 $2s+1$ 为奇数, 从而交换前后排列的奇偶性相反. □

定理 1.2 任一 n 元排列 $j_1j_2...j_n$ 与 $123...n$ 可以经过一系列的对换互变且所做的对换的次数与原排列 $j_1j_2...j_n$ 的奇偶性相同.

证明. 设 $j_1j_2...j_n$ 经过 s 次对换变为 $123,...n$, 显然 $123,...n$ 是偶排列. 由于每互换一次改变排列的奇偶性, 所以若 $j_1j_2...j_n$ 为奇排列, 则 s 为奇数; 若 $j_1j_2...j_n$ 为偶排列, 则 s 为偶数 □

1.2 n 阶行列式

定义 1.4 (n 阶行列式) n 阶行列式为 $n!$ 项代数和, 其中每一项是不同行不同列的 n 个元素的乘积. 每一项按照行指标的自然顺序排列, 列指标所成的排列是奇排列时带负号, 偶排列时带正号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j_1j_2...j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2...j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$$

记作 $|A|$ 或者 $\det \quad A$

特别地, 可以写作:

$$|A| := \sum_{i_1i_2...i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2...i_n)} a_{i_11}a_{i_22}...a_{i_nn}$$

由上式可以得出结论:

性质 1.1

$$|A| := |A^T|$$

性质 1.2 A 作行变换, 第 i 行乘以 k, 得到 A

$$A \xrightarrow{①k} B$$

得到

$$|B| = k|A|$$

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

B 的行列式可以表示为:

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots k a_{i, j_i} \dots a_{n j_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots a_{i, j_i} \dots a_{n j_n} \\ &= k|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 设左式为 $|A|$, 则有

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots (b_{j_i} + c_{j_i}) \dots a_{n j_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots b_{j_i} \dots a_{n j_n} + \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \dots c_{j_i} \dots a_{n j_n} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

性质 1.4

$$A \xrightarrow{(i,k)} C \Rightarrow |C| = -|A|$$

证明. 设：

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |C| &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_i \dots j_k \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_i} \dots a_{ij_k} \dots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_k \dots j_i \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_k} \dots a_{kj_i} \dots a_{nj_n} \\ &= (-1)|A| = -|A| \end{aligned}$$

□

性质 1.5 两行或者两列相等的行列式的值为 *0*.

证明. 设 A 的两行相等, 则互换相等的两行, 行列式 $|A|$ 不变, 由上一性质, 即 $|A| = -|A|$, 则 $|A| = 0$. □

性质 1.6 行列式两行或者两列成比例, 则该行列式为 *0*.

证明.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ la_{i1} & la_{i2} & la_{i3} & \dots & la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = l0 = 0$$

□

性质 1.7

$$A \xrightarrow{ⓚ+①l} D \Rightarrow |A| = |D|$$

证明. 设

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+la_{i1} & a_{k2}+la_{i2} & a_{k3}+la_{i3} & \dots & a_{kn}+la_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有

$$\begin{aligned} |D| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + l \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= |A| + l0 = |A| \end{aligned}$$

□

2 线性空间

2.1 线性空间的定义

定义 2.1

$$S \times M := \{(a,b) | A \in S, b \in M\}$$

称为 S 与 M 的笛卡尔积

定义 2.2 非空集合 S 上的一个代数运算定义为 $S \times S$ 到 S 的一个映射.

定义 2.3 设 V 是一个非空集合,K 是一个数域. 若 V 上有一个运算, 称为加法, 即 $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha+\beta$;$K$ 与 V 之间有运算, 称为数量乘法, 即 $k \times V \to V : (k,\alpha) \mapsto k\alpha$, 并且满足如下运算法则：

(1) $\alpha+\beta = \beta+\alpha, \quad \forall \alpha,\beta \in V$

(2) $\alpha+\beta+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma), \quad \forall \alpha,\beta \in V$

(3) V 中有元素 0, 使得：$\alpha+0=\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(4) $\forall \alpha \in V$, 有 $\beta \in V$, 满足 $\alpha+\beta=0$. 称 β 为 α 的负元

(5) $1\alpha=\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

(6) $(kl)\alpha=k(l\alpha), \quad \forall k,l\in K, \alpha\in V$

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha, \quad \forall k,l\in K, \alpha\in V$

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta, \quad \forall k,l\in K, \alpha\in V$

那么称 V 为数域 K 上的一个线性空间.V 中元素可以称为向量,V 可以称作向量空间.

例 2.1 $\mathbb{R}^X$:={非空集合 X 到 R 的映射}, 称为 X 上的实值函数. 规定：

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad \forall x\in X$$
$$(kf)(x) := kf(x), \qquad \forall x\in X, k\in\mathbb{R}$$

零函数为：

$$0(x) := 0, \forall x\in X$$

易证 $\mathbb{R}^X$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个线性空间.

设 V 是数域 K 上的线性空间, 其具有以下性质：

性质 2.1 V 中的零元是唯一的.

证明. 假设零元不唯一, 设 $0_1, 0_2$ 都是 V 的零元, 且有 $0_1 \neq 0_2$. 由 0_2 是零元, 所以 $0_1+0_2=0_1$； 由 0_1 是零元, 所以 $0_2+0_1=0_2$, 所以 $0_1=0_2$, 与假设矛盾, 故假设不成立. □

性质 2.2 对于任意的 $\alpha\in V$,α 的负元是唯一的, 记作 $-\alpha$.

证明. 假设负元不唯一, 设 β_1, β_2 都是 α 的负元, 且有 $\beta_1\neq\beta_2$. 则有

$$\beta_1+\alpha+\beta_2=\beta_1+(\alpha+\beta_2)=\beta_1+0=\beta_1$$
$$\beta_1+\alpha+\beta_2=(\beta_1+\alpha)+\beta_2=0+\beta_2=\beta_2$$

所以 $\beta_1=\beta_2$, 与假设矛盾, 故而假设不成立. □

性质 2.3 $0\alpha=0, \quad \forall\alpha\in V$

证明.

$$0\alpha=(0+0)\alpha=0\alpha+0\alpha$$
$$0\alpha+(-0\alpha)=0\alpha+0\alpha+(-\alpha)$$
$$0=0\alpha$$

□

性质 2.4 $k0=0, \quad \forall k\in K$

证明.

$$k0 = k(0+0) = k0 + k0$$
$$k0 + (-k0) = k0 + k0 + (-k0)$$
$$0 = k0$$

□

性质 2.5 若 $k\alpha = 0$, 则有 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$

证明. 假设 $k \neq 0$

$$\alpha = 1\alpha = (k^{-1}k)\alpha = k^{-1}(k\alpha)$$

由 $k\alpha = 0$, 则有 $\alpha = 0$ □

性质 2.6 $(-1)\alpha = -\alpha, \quad \forall \alpha \in V$

证明.

$$\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0$$

所以 $(-1)\alpha$ 是 α 的负元, 为 $-\alpha$. □

2.2 线性子空间

定义 2.4 V 是数域 K 上的线性空间, 其中的元素为 α,U 是 V 的的一个非空子集. 若 U 对于 V 的加法和数量乘法（以 V 中的加法和数量乘法对 U 中的元素作运算）也是 K 上的线性空间, 则称 U 是 V 的子空间.

定理 2.1 V 的非空子集 U 是子空间

$\Longleftrightarrow$

(1). 若 $\alpha, \beta \in U$, 则 $\alpha + \beta \in U$.*(U 对于 V 的加法封闭)*
(2). 若 $\alpha \in U$, 则 $k\alpha \in U$.*(U 对于 V 的数量乘法封闭)*

证明. "$\Rightarrow$": 有定义可以得到;
"$\Leftarrow$":V 的加法和数量乘法限定到 U 上为 U 的加法和数量乘法, 显然 8 条运算法则中, 1,2,5,6,7,8 是成立的. 对于第 3 和第 4 条
3. 由 $U \neq \varnothing, \exists \beta \in U$, 使得,$0\beta = 0 \in U$, 从而 $0 \in U$, 零元存在.
4. 对于任意的 $\alpha \in U$, 有 $(-1)\alpha \in U$, 即 $-\alpha \in U$, 从而负元存在. □

例 2.2 $\{0\}$ 空间是子空间

定义 2.5 若存在一组向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in W$, 则将 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 的线性组合. 其中 $k_1, k_2, ..., k_s \in K$. 令 $W = \{k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s | k_1, k_2, ..., k_s \in k\}$, 则有 $0 \in W$ 且 W 对于 V 的加法和数量乘法封闭, 从而 W 是 V 的子空间, 将其称作由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 生成的子空间, 记作 $< \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s >$.

定义 2.6 $\beta \in < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s >$
$:\Longleftrightarrow$ 存在 $l_1, l_2, ..., l_s \in K$ 使得 $\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + ... + l_s\alpha_s$.
此时称,β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性表出.

对于方程组:

$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n = \beta$
$\Longleftrightarrow K$ 中有一组 $c_1, c_2, ..., c_n$, 使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = \beta$
$\Longleftrightarrow \beta$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性表出。
$\Longleftrightarrow \beta \in < \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n >$（生成的子空间）。

2.3 线性相关与线性无关

定义 2.7 设 V 是数域 K 上的一个线性空间,对于 V 中的一个向量组:$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s, (s \geq 1)$,若 K 中有不全为 0 的一组数，使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

则称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关，否则，称 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关。即:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = ... = k_s = 0$$

则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关。

对于线性方程组

(1) 若存在不全为 0 的 $c_1, c_2, ...c_n$，使得 $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + ... + c_n\alpha_n = 0 \quad \Longleftrightarrow$ 方程组有非零解。
(2) K^s 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关。 $\Longleftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + ... + x_n\alpha_n$ 只有零解。

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式：$|A| = 0$

K^n 中的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 为列向量的矩阵 A 的行列式：$|A| \neq 0$

行向量的性质与上述情况相同。

2.4 线性相关和线性无关的向量组

(1) α 线性相关 $\iff$ $\exists k \neq 0$, 使得 $k\alpha = 0$ $\iff$ $\alpha = 0$
从而 α 线性无关 $\iff$ $\alpha \neq 0$

(2) 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 中，如果有一部分向量组线性相关，则 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ 线性相关。

(3) 向量组线性无关 $\implies$ 不存在部分向量组线性相关（任何部分向量组线性无关）

(4) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关 $\iff$ 由定义可得，存在 K 中不全为 0 的数 $k_1, k_2, ..., k_s$ 使得：

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

不妨设 $k_i \neq 0$, 则有

$$\alpha_i = -\frac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + k_s\alpha_s)$$

$\iff$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 至少有一个向量可以由其余的向量线性表出。其中第一个条件的必要性（"$\Leftarrow$"）的证明为：

证明. 设 $\alpha_j = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$
$\implies$ $0 = l_1\alpha_1 + ... + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + ... + l_s\alpha_s$ $\implies$ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关。 □

则有逆否命题：
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关 $\iff$ 其中每一个向量都不能由其余的向量线性表出。

命题 2.2 **若 β 可以由向量 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, 其表出方式是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关。**

证明. "$\Leftarrow$":
设

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{1}$$

假设表出不唯一，即 β 还可以表示成:

$$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + ... + b_s\alpha_s \tag{2}$$

其中 $a_i \neq b_i$. (2)-(1)可以得到：

$$0 = (b_1 - a_1)\alpha_1 + (b_2 - a_2)\alpha_2 + ... + (b_s - a_s)\alpha_s$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性无关，可以得到：

$$a_i - b_i = 0, i = 1, 2, ..., s$$

即 $a_i = b_i$, 假设不成立,β 的表出方式是唯一的。
”⇒”:
反证法。假设 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 线性相关，则有 K 中的 $k_1, k_2, ..., k_s$(k_i 不全为零) 使得：

$$0 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + ... + k_s\alpha_s$$

此外，由

$$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_s\alpha_s \tag{3}$$

可以得到：

$$\beta = (a_1 + k_1)\alpha_1 + (a_2 + k_2)\alpha_2 + ... + (a_s + k_s)\alpha_s \tag{4}$$

由 $k_1, k_2, ..., k_s$ 不全为零，不妨设 $k_i \neq 0$，则有 $a_i + k_i \neq a_i$。则(3)式和(4)式相比较，至少有一项是不相等的（第 i 个位置），从而 β 有两种不相同的表出方式，这与已证明的必要性矛盾，故而假设不成立，$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ 是线性无关的。

□