


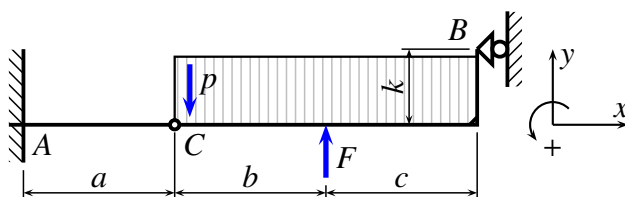
BME Gépészmérnöki Kar	STATIKA	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	4. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJ0H
2024/25 I.	Határidő: lásd Moodle	Késés <input type="checkbox"/> Javítás <input type="checkbox"/>
Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: 

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! Javítás vagy pótlás csak a Moodle-ben megadott határidőig lehetséges!

## Feladatkitűzés

A vázolt statikailag határozott megtámasztású rúdszerkezet egy L-alakú rúdból és egy egyenes rúdból áll, melyek a C csuklóban csatlakoznak egymáshoz. A szerkezetet az állandó intenzitású  $p$  megoszló erőrendszer és az  $F$  koncentrált erő terheli.

1. Készítsen méretarányos ábrát a szerkezetről és határozza meg a rúdszerkezet reakcióit!
2. Írja fel a vízszintes rudakból álló rész és a függőleges rúd igénybevételi függvényeit! Egyértelműen jelölje mindkét (vízszintes és függőleges) rúd esetén az alkalmazott koordinátarendszer origóját!
3. A jellegzetes értékek feltüntetésével rajzolja meg minden egyes rúdszakasz igénybevételi ábráit! Parabolaív esetén a kezdő és végpontokban *szekessze meg az érintőket!* Továbbá a parabolaívek esetén számítsa ki a lokális szélsőérték helyét ( $x^*$ ) és értékét ( $M_h(x^*)$ ) és jelölje ezeket az igénybevételi ábrán!



## Adatok

$a$ [m]	$b$ [m]	$c$ [m]	$k$ [m]	$p$ [kN/m]	$F$ [kN]
0.6	0.6	0.5	0.1	5	4

## (Rész)eredmények

A táblázatba a vízszintes helyzetű rúd igénybevételeinek abszolút értelemben vett szélsőértékeit ( $V(x_V)$ , és  $M_h(x_{M_h})$ ) és azok helyét/tartományát ( $x_V$  illetve  $x_{M_h}$ ) be kell írni az előjelkonvenciónak megfelelően!

$A_x$ [kN]	$A_y$ [kN]	$M_A$ [kNm]	$x_V$ [m]	$V(x_V)$ [kN]	$x_{M_h}$ [m]	$M_h(x_{M_h})$ [kNm]
6.25	1.5	0.9	1.2	2.5	0	0.9

(  $|V(x_V)| \geq |V(x)|$ ,  $|M_h(x_{M_h})| \geq |M_h(x)|$ ,  $\forall x \in [0, a + b + c]$ . )

$B_x$ [kN]	$B_y$ [kN]
-6.25	0

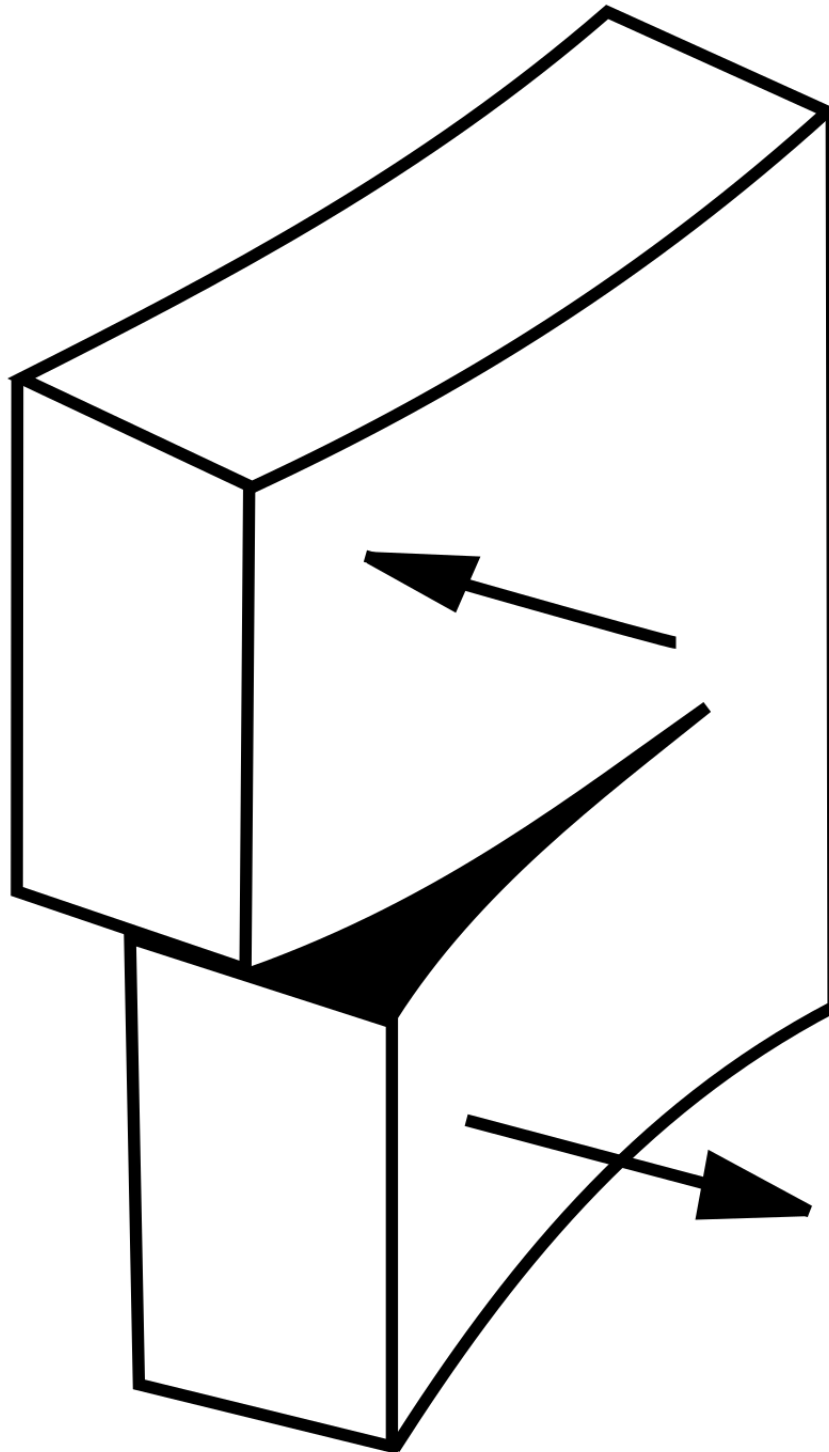
Lokális szélsőérték:

$V(x^*)$	$x^*$ [m]	$M_h(x^*)$ [kNm]
0	0.9	-0.225

## Statika 4. HF

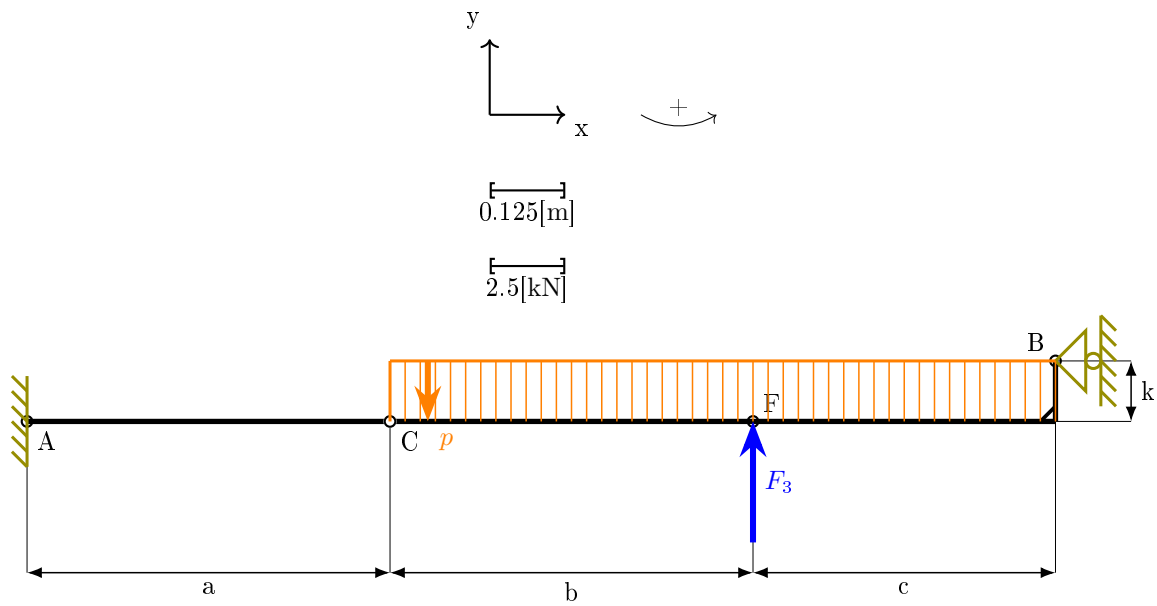
Vári Gergő

2024. november 22.



# 1. Reakcióerők meghatározása

## 1.1. Méretarányos ábra



A **kényszerek** ábrázolásra kerültek az esetleges félreértések elkerülése érdekében. Egy darab külső **erő** jelenik meg illetve  $C$  és  $B$  között pedig egy **megoszló erő**.

$$a = 0.6[\text{m}]$$

$$b = 0.6[\text{m}]$$

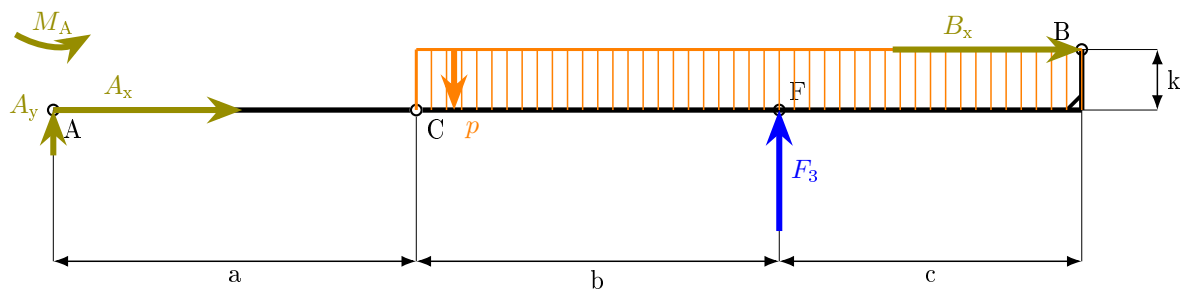
$$c = 0.5[\text{m}]$$

$$k = 0.1[\text{kN}]$$

$$p = 5[\text{kN}]$$

$$F = 4[\text{kN}]$$

## 1.2. SZTÁ



### 1.3. Egyensúlyi egyenletek

$$F_p(x) = p \times x$$

$$F_{p\max} = F_p(b+c) = 5.5[\text{kN}]$$

$$\sum F_x := 0 = A_x + B_x$$

$$\sum F_y := 0 = A_y + F - F_{p\max}$$

$$\sum M_z^A := 0 = M_A - F_p(a + \frac{b+c}{2}) + F \times (a+b) - B_x \times k$$

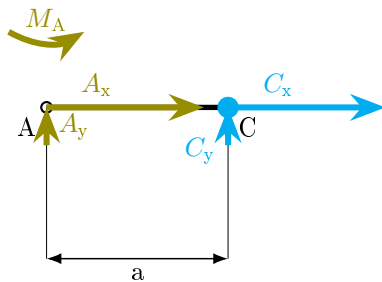
$$A_y = F_{p\max} - F = 1.5[\text{kN}]$$

3 ismeretlen és 2 egyenlet maradt tehát a szerkezetet részekre kell bontanunk.

### 1.4. Részek vizsgálata

A **C** pontban kettévágva a rácsszerkezetet részenként vizsgálhatom (így ezen pont mindkét ábrának része). Az ebben a pontban ébredő belső reakcióerőket a két részen ellentétesen veszem fel **Newton III. törvénye** (hatás-ellenhatás) miatt.

1.4.1.



$$\sum F_x := 0 = A_x + C_x$$

$$\sum F_y := 0 = A_y + C_y$$

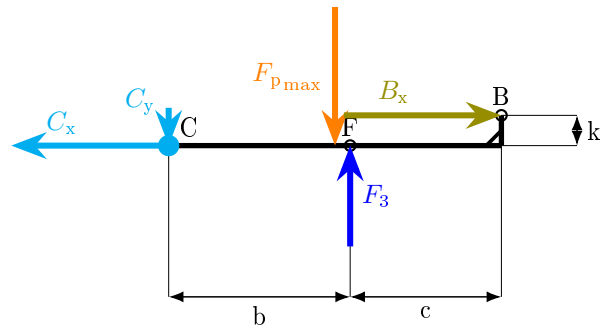
$$\sum M_z^C := 0 = -A_y \times a + M_A$$

$$C_y = -A_y = -1.5$$

$$M_A = A_y \times a = 0.9$$

$$A_x = -C_x = 6.25$$

1.4.2.



$$\sum F_x := 0 = -C_x + B_x$$

$$\sum F_y := 0 = -C_y - F_p + F$$

$$\sum M_z^C := 0 = -F_{p\max} \times \frac{b+c}{2} - B_x \times k + F \times b$$

$$B_x = \frac{F \times b - F_{p\max} \times \frac{b+c}{2}}{k} = -6.25$$

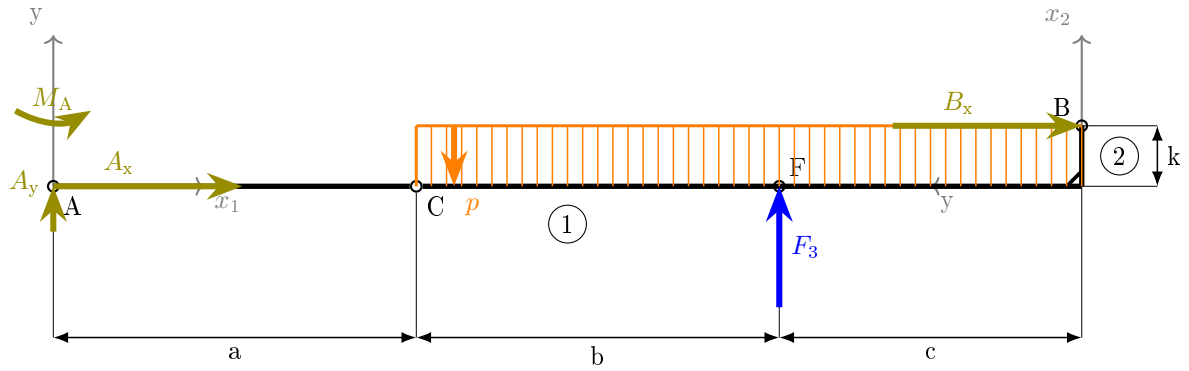
$$C_x = B_x = -6.25$$

Mivel megfelelő számú ismeretlenünk és egyenletünk van, a reakció-erőrendszer megoldható és a keresett reakcióerők kifejezhetők.

$$A = \begin{bmatrix} 6.25 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad [\text{kN}]$$

$$B = \begin{bmatrix} -6.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\text{kN}]$$

## 2. Igénybevételi függvények



Körüljárással meglehet mind a két rúd igénybevételi függvényeit vizsgálni. Megfelelő koordináta-rendszerek és előjelkonvenciók felvétele után az ①-es rúd balról, míg a ②-es rúd jobbról nézhetjük. (Az utóbbinak az az indoka hogy a  $B_x$  erővel egyszerűbb lesz számolni.)

### 2.1. Függvények felírása

	① $0 \leq x_1 \leq a$	① $a \leq x_1 \leq a+b$	① $a+b \leq x_1 \leq a+b+c$	② $0 \leq x_2 \leq k$
$N(x)$	$-A_x$	$-A_x$	$-A_x$	0
$V(x)$	$A_y$	$A_y - F_p(x_1)$	$A_y - F_p(x_1) + F$	$-B_x$
$M_h(x)$	$M_A - A_y \times x_1$	$M_A - A_y \times x_1 + F_p(x_1 - a) \times \frac{x_1 - a}{2}$	$M_A - A_y \times x_1 + F_p(x_1 - a) \times \frac{x_1 - a}{2} - F \times (x_1 - (a+b))$	$-B_x \times (k - x_2)$
$M_t(x)$	0	0	0	0

### 2.2. Átrendezés

	① $0 \leq x_1 \leq 0.6$	① $a \leq x_1 \leq 1.2$	① $a+b \leq x_1 \leq 1.7$	② $0 \leq x_2 \leq 0.1$
$N(x)$	-6.25	-6.25	-6.25	0
$V(x)$	1.5	$-5x_1 + 4.5$	$-5x_1 + 8.5$	6.25
$M_h(x)$	$-1.5x_1 + 0.9$	$2.5x_1^2 - 4.5x_1 + 1.8$	$2.5x_1^2 - 8.5x_1 + 6.6$	$-6.25x_2 + 0.625$
$M_t(x)$	0	0	0	0

### 3. Igénybevételi ábrák<sup>1</sup>

#### 3.1. Vízszintes rúd

##### 3.1.1. Parabola szerkesztése

A véges differenciák módszere itt abban nyújt segítséget hogy a derivált értékét numerikusan közelíthetjük, különösen ha a függvény nem analitikus hanem diszkrét pontokból áll. Például ha a parabola értékei  $f(x)$  egy adott  $x_0$  pont környezetében ismertek akkor a deriváltat közelíthetjük előre (előre differencia), hátra (hátra differencia), vagy közép differenciával.

- **Előre differencia:**  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Hátra differencia:**  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$
- **Közép differencia:**  $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

A közép differencia módszer különösen pontos mert elsőrendű hibákat eliminál és így gyorsabban közelíti az analitikus deriváltat. Ezekkel a módszerekkel a parabola pontjaira és érintőire numerikus módon, a véges differenciák segítségével is jó közelítést adhatunk ami különösen hasznos diszkrét adathalmazok vagy numerikus modellek esetében.

A megfelelő szélsőértékek megállapítása után ezen pontokban kiszámolhatjuk a parabola érintőinek meredekségét (egyenletük egyszerűbb ábrázolás érdekében). Ezt az  $M'_h = -V$  összefüggéssel egyszerűen megtehetjük.

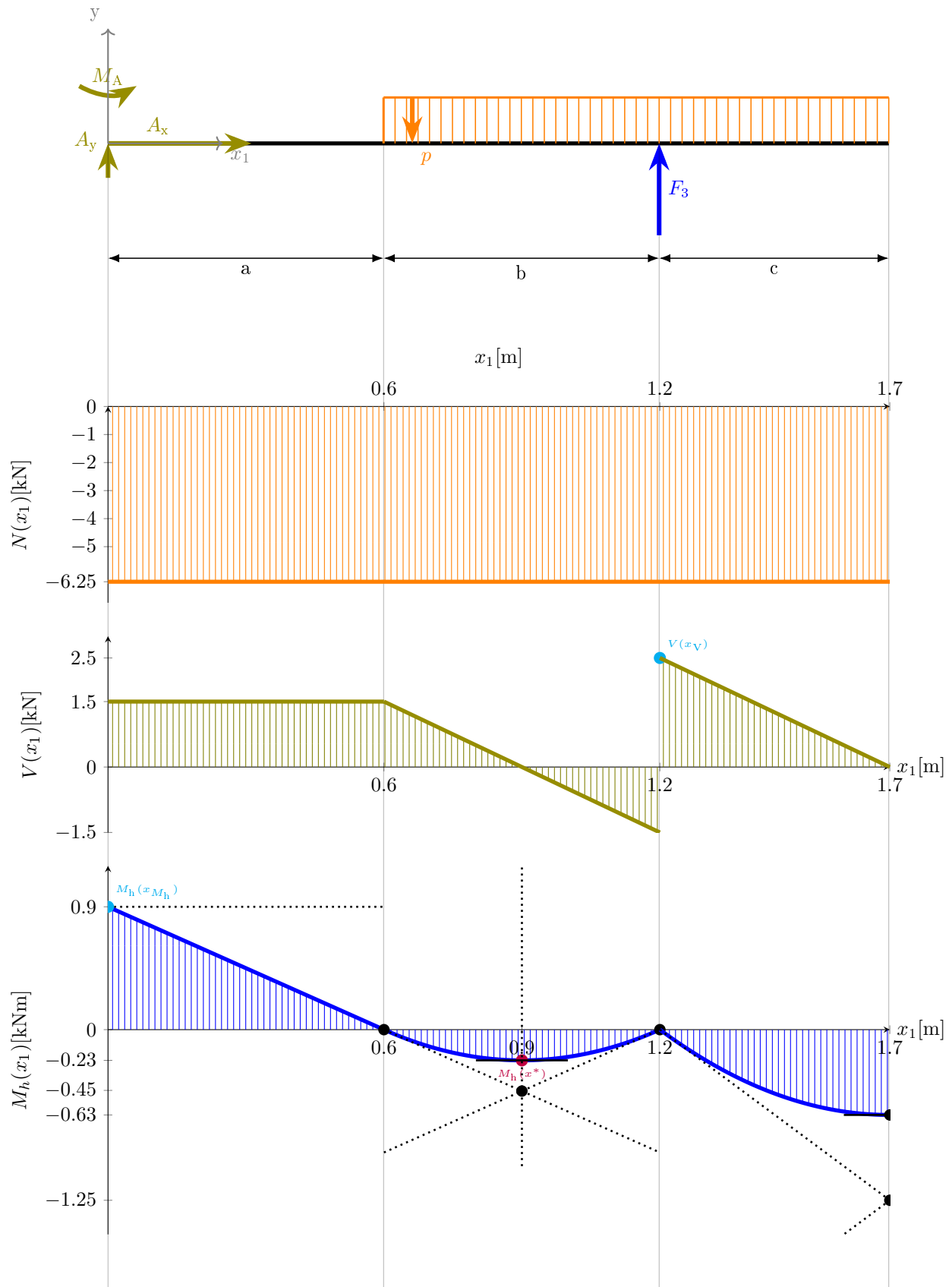
Megnézve hol a derivált zérushelye (parabolánál mindig a középvonalra esik) abban az  $x_0$ -ban kiszámítjuk a függvény értékét.

Ezekkel az adatokkal felvértézve már egy egész jó közelítést adhatunk a parabola pontjaira.

$2.5x^2 - 4.5x + 1.8$	$2.5x^2 - 4.5x + 1.8$
$x_1 = 0.6$ $x_2 = 1.2$ <hr/> $m_1 = M'_h(x) _{x=x_1} = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow m_1 : -\frac{3}{2} \times x + 0.9$ $m_2 = M'_h(x) _{x=x_2} = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow m_2 : \frac{3}{2} \times x - 1.8$ $y_0 = M_h(\frac{x_1+x_2}{2}) = -0.225$ <hr/> $M'_h(x^*) = 0$ $x^* = 0.9$ $M_h(x^*) = -0.225$	$x_1 = 1.2$ $x_2 = 2.2$ <hr/> $m_1 = M'_h(x) _{x=x_1} = -\frac{5}{2}$ $\Rightarrow m_1 : -\frac{5}{2} \times x + 3$ $m_2 = M'_h(x) _{x=x_2} = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow m_2 : \frac{5}{2} \times x - 5.5$ $y_0 = M_h(\frac{x_1+x_2}{2}) = -0.46875$ <hr/> $M'_h(x_0) = 0$ $x_0 = 1.7$

<sup>1</sup> A konstant 0 függvények nem kerültek ábrázolásra.

### 3.1.2. Igénybevételi ábrák



## 3.2. Függőleges rúd

### 3.2.1. Igénybevételi ábrák

