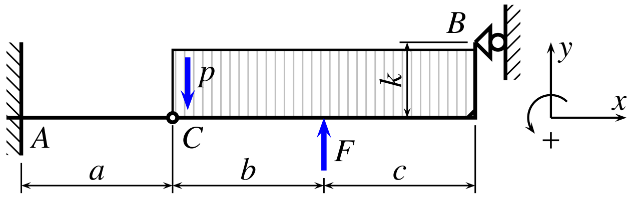
BME Gépészmérnöki Kar	STATIKA	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	4. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJOH
2024/25 I.	Határidő: lásd Moodle	Késés ☐ Javítás ☐
Nyilatkozat: Aláírásommal igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás:

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! Javítás vagy pótlás csak a Moodle-ben megadott határidőig lehetséges!

Feladatkitűzés

A vázolt statikailag határozott megtámasztású rúdszerkezet egy L-alakú rúdból és egy egyenes rúdból áll, melyek a C csuklóban csatlakoznak egymáshoz. A szerkezetet az állandó intenzitású p megoszló erőrendszer és az $\mathbf{F}$ koncentrált erő terheli.

1. Készítsen méretarányos ábrát a szerkezetről és határozza meg a rúdszerkezet reakcióit!
2. Írja fel a vízszintes rudakból álló rész és a függőleges rúd igénybevételi függvényeit! Egyértelműen jelölje mindkét (vízszintes és függőleges) rúd esetén az alkalmazott koordinátarendszer origóját!
3. A jellegzetes értékek feltüntetésével rajzolja meg minden egyes rúdszakasz igénybevételi ábráit! Parabolaív esetén a kezdő és végpontokban *szerkessze meg az érintőket!* Továbbá a parabolaívek esetén számítsa ki a lokális szélsőérték helyét ($x^\star$) és értékét ($M_h(x^\star)$) és jelölje ezeket az igénybevételi ábrán!



Adatok

a [m]	b [m]	c [m]	k [m]	p [kN/m]	F [kN]
0.6	0.6	0.5	0.1	5	4

(Rész)eredmények

A táblázatba a vízszintes helyzetű rúd igénybevételeinek abszolút értelemben vett szélsőértékeit ($V(x_V)$, és $M_h(x_{M_h})$) és azok helyét/tartományát(x_V illetve x_{M_h}) be kell írni az előjelkonvenciónak megfelelően!

A_x [kN]	A_y [kN]	M_A [kNm]	x_V [m]	$V(x_V)$ [kN]	x_{M_h} [m]	$M_h(x_{M_h})$ [kNm]
6.25	1.5	0.9	1.2	2.5	0	0.9

($|V(x_V)| \geq |V(x)|$, $|M_h(x_{M_h})| \geq |M_h(x)|$, $\forall x \in [0, a+b+c]$.)

B_x [kN]	B_y [kN]
-6.25	0

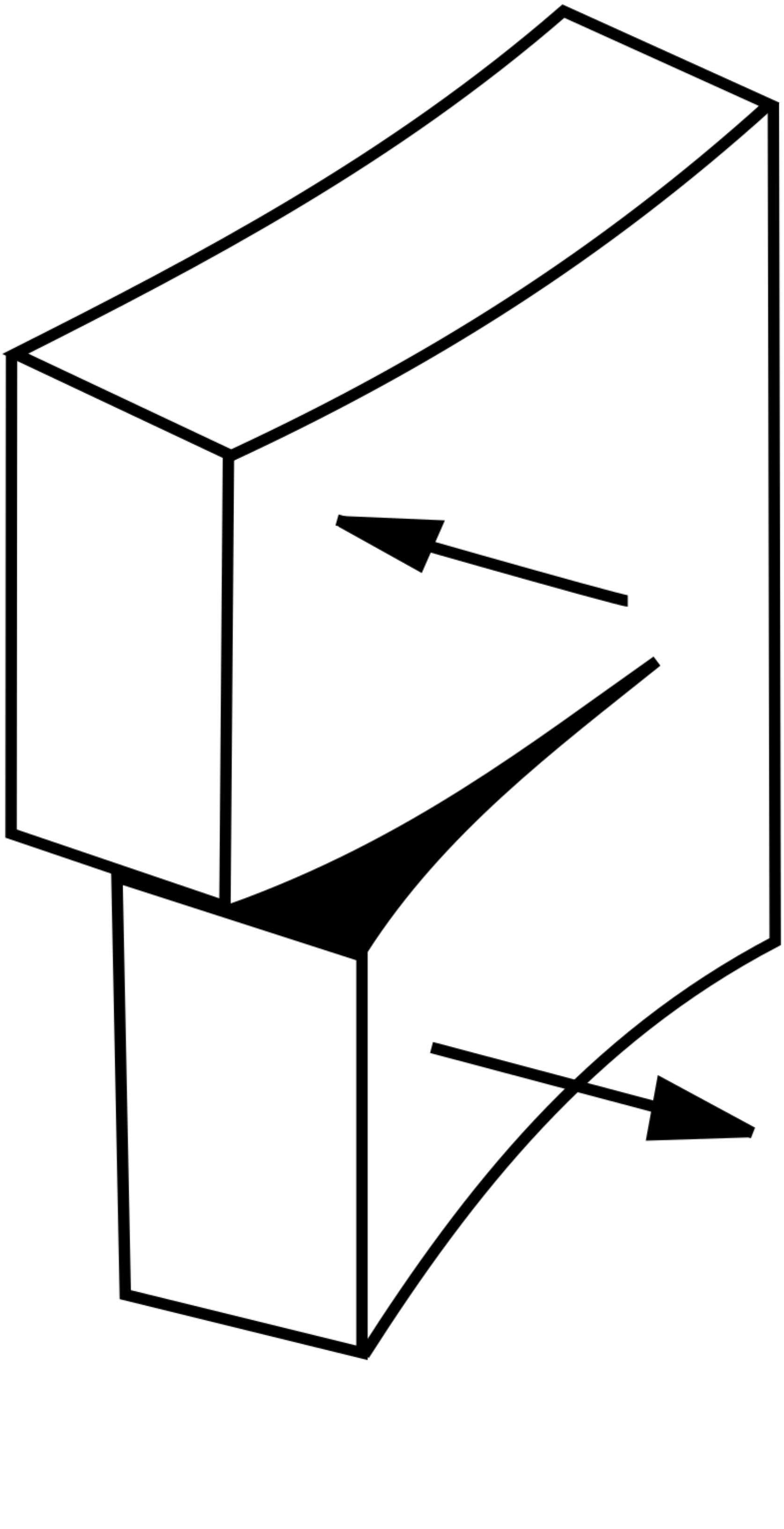
Lokális szélsőérték:

$V(x^\star)$	$x^\star$ [m]	$M_h(x^\star)$ [kNm]
0	0.9	-0.225

Statika 4. HF

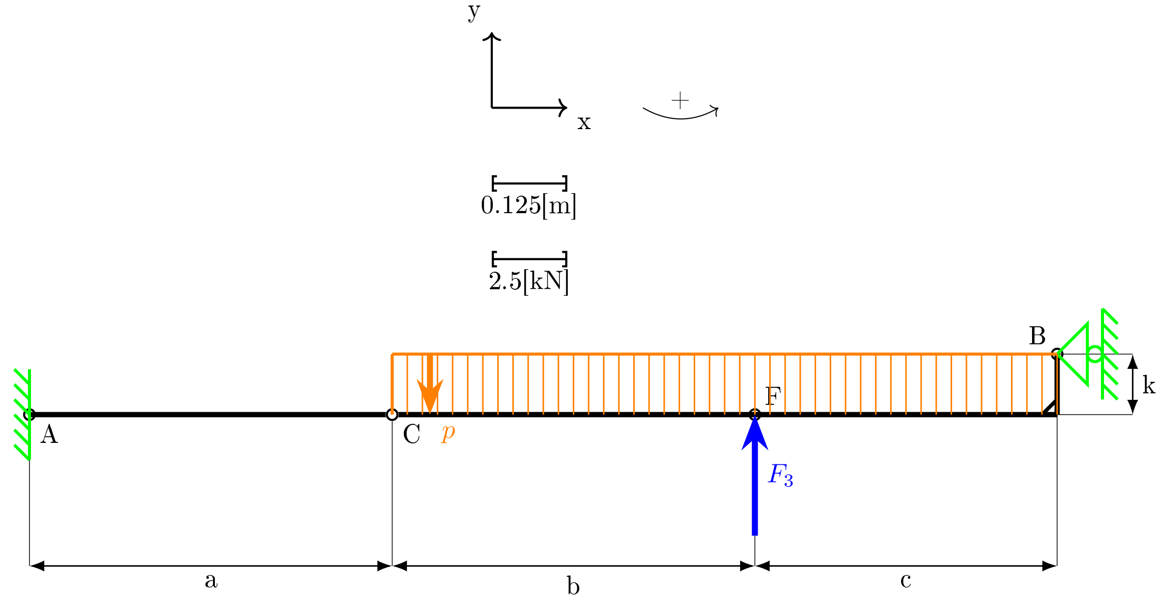
Vári Gergő

2024. november 17.



1. Reakcióerők meghatározása

1.1. Méretarányos ábra

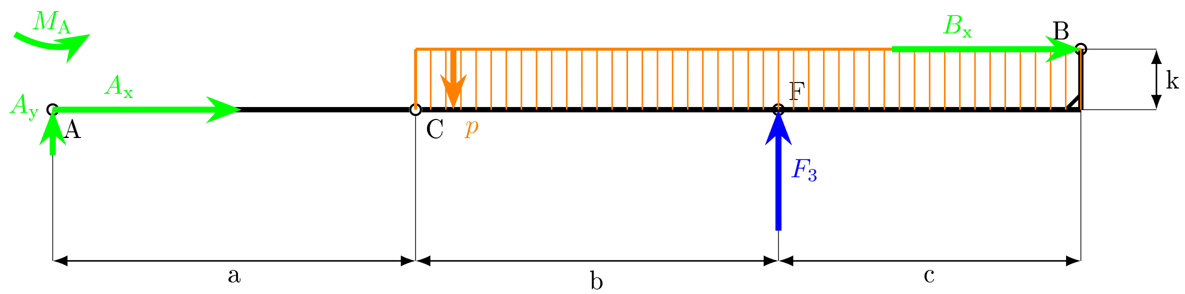


A kényszerek ábrázolásra kerültek az esetleges félreértések elkerülése érdekében. Egy darab külső erő jelenik meg illetve C és B között pedig egy megoszló erő.

$$a = 0.6[\mathrm{m}]$$
$$b = 0.6[\mathrm{m}]$$
$$c = 0.5[\mathrm{m}]$$

$$k = 0.1[\mathrm{kN}]$$
$$p = 5[\mathrm{kN}]$$
$$F = 4[\mathrm{kN}]$$

1.2. SZTÁ



1.3. Egyensúlyi egyenletek

$$F_{\mathrm{p}}(x) = p \times x$$
$$F_{\mathrm{p}_{\max}} = F_{\mathrm{p}}(b+c) = 5.5[\mathrm{kN}]$$

$$\sum F_{\mathrm{x}} := 0 = A_{\mathrm{x}} + B_{\mathrm{x}}$$
$$\sum F_{\mathrm{y}} := 0 = A_{\mathrm{y}} + F - F_{\mathrm{p}_{\max}}$$
$$\sum M_{\mathrm{z}}^{\mathrm{A}} := 0 = M_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{p}}(a + \frac{b+c}{2}) + F \times (a+b) - B_{\mathrm{x}} \times k$$

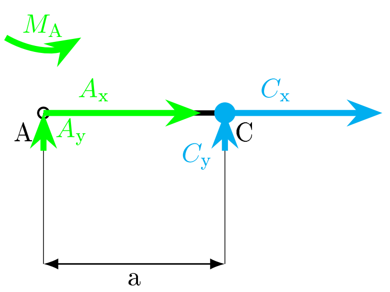
$$A_{\mathrm{y}} = F_{\mathrm{p}_{\max}} - F = 1.5[\mathrm{kN}]$$

3 ismeretlen és 2 egyenlet maradt tehát a szerkezetet részekre kell bontanunk.

1.4. Részek vizsgálata

A **C** pontban kettévágva a rácsszerkezetet részenként vizsgálhatom (így ezen pont mindkét ábrának része). Az ebben a pontban ébredő belső reakcióerőket a két részen ellentétesen veszem fel **Newton III. törvénye** (hatás-ellenhatás) miatt.

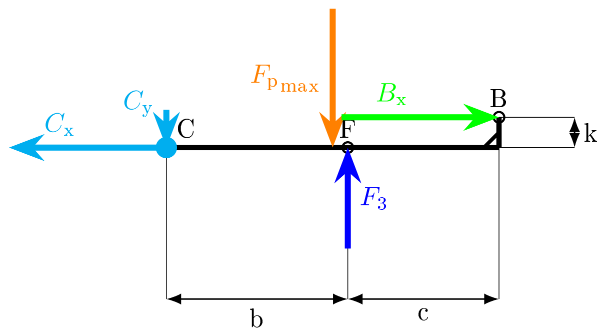
1.4.1.



$$\sum F_{\mathrm{x}} := 0 = A_{\mathrm{x}} + C_{\mathrm{x}}$$
$$\sum F_{\mathrm{y}} := 0 = A_{\mathrm{y}} + C_{\mathrm{y}}$$
$$\sum M_{\mathrm{z}}^{\mathrm{C}} := 0 = -A_{\mathrm{y}} \times a + M_{\mathrm{A}}$$

$$C_{\mathrm{y}} = -A_{\mathrm{y}} = -1.5$$
$$M_{\mathrm{A}} = A_{\mathrm{y}} \times a = 0.9$$
$$A_{\mathrm{x}} = -C_{\mathrm{x}} = 6.25$$

1.4.2.



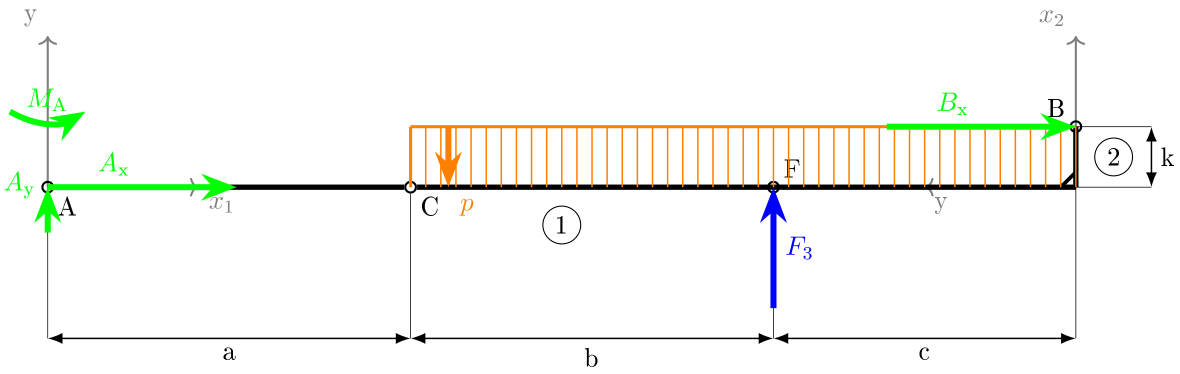
$$\sum F_{\mathrm{x}} := 0 = -C_{\mathrm{x}} + B_{\mathrm{x}}$$
$$\sum F_{\mathrm{y}} := 0 = -C_{\mathrm{y}} - F_{\mathrm{p}} + F$$
$$\sum M_{\mathrm{z}}^{\mathrm{C}} := 0 = -F_{\mathrm{p}_{\max}} \times \frac{b+c}{2} - B_{\mathrm{x}} \times k + F \times b$$

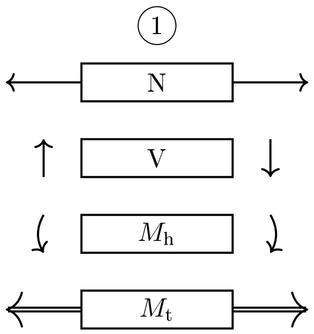
$$B_{\mathrm{x}} = \frac{F \times b - F_{\mathrm{p}_{\max}} \times \frac{b+c}{2}}{k} = -6.25$$
$$C_{\mathrm{x}} = B_{\mathrm{x}} = -6.25$$

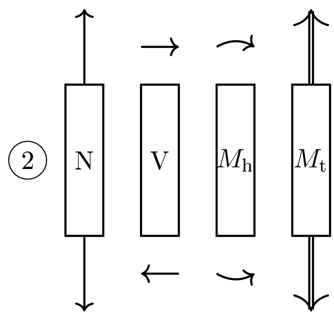
Mivel megfelelő számú ismeretlenünk és egyenletünk van, a reakció-erőrendszer megoldható és a keresett reakcióerők kifejezhetőek.

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 6.25 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad [\mathrm{kN}] \\ B &= \begin{bmatrix} -6.25 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathrm{kN}] \end{aligned}}$$

2. Igénybevételi függvények







Körüljárással meglehet mind a két rúd igénybevételi függvényeit vizsgálni. Megfelelő koordináta-rendszerek és előjelkonvenciók felvétele után az 1-es rudat balról, míg a 2-es rudat jobbról nézhetjük. (Az utóbbinak az az indoka hogy a B_x erővel egyszerűbb lesz számolni.)

2.1. Függvények felírása

	1 $0 \leq x_1 \leq a$	1 $a \leq x_1 \leq a+b$	1 $a+b \leq x_1 \leq a+b+c$	2 $0 \leq x_2 \leq k$
$N(x)$	$-A_x$	$-A_x$	$-A_x$	0
$V(x)$	A_y	$A_y - F_p(x_1)$	$A_y - F_p(x_1)$ $+F$	$-B_x$
$M_h(x)$	$M_A - A_y \times x_1$	$M_A - A_y \times x_1$ $+F_p(x_1 - a) \times \frac{x_1-a}{2}$	$M_A - A_y \times x_1$ $+F_p(x_1 - a) \times \frac{x_1-a}{2}$ $-F \times (x_1 - (a+b))$	$-B_x \times (k - x_2)$
$M_t(x)$	0	0	0	0

2.2. Átrendezés

	1 $0 \leq x_1 \leq 0.6$	1 $a \leq x_1 \leq 1.2$	1 $a+b \leq x_1 \leq 1.7$	2 $0 \leq x_2 \leq 0.1$
$N(x)$	-6.25	-6.25	-6.25	0
$V(x)$	1.5	$-5x_1 + 4.5$	$-5x_1 + 8.5$	6.25
$M_h(x)$	$-1.5x_1 + 0.9$	$2.5x_1^2 - 4.5x_1 + 1.8$	$2.5x_1^2 - 8.5x_1 + 6.6$	$-6.25x_2 + 0.625$
$M_t(x)$	0	0	0	0

3. Igénybevételi ábrák[1]

3.1. Vízszintes rúd

3.1.1. Parabola szerkesztése

A véges differenciák módszere itt abban nyújt segítséget hogy a derivált értékét numerikusan közelíthetjük, különösen ha a függvény nem analitikus hanem diszkrét pontokból áll. Például ha a parabola értékei $f(x)$ egy adott x_0 pont környezetében ismertek akkor a deriváltat közelíthetjük előre (előre differencia), hátra (hátra differencia), vagy közép differenciával.

- **Előre differencia:** $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
- **Hátra differencia:** $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$
- **Közép differencia:** $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$

A közép differencia módszer különösen pontos mert elsőrendű hibákat eliminál és így gyorsabban közelíti az analitikus deriváltat. Ezekkel a módszerekkel a parabola pontjaira és érintőire numerikus módon, a véges differenciák segítségével is jó közelítést adhatunk ami különösen hasznos diszkrét adathalmazok vagy numerikus modellek esetében.

A megfelelő szélsőértékek megállapítása után ezen pontokban kiszámolhatjuk a parabola érintőinek meredekségét (és ezzel egyenletük egyszerűbb ábrázolás érdekében). Ezt az $M'_{\mathrm{h}} = -V$ összefüggéssel egyszerűen megtehejük.

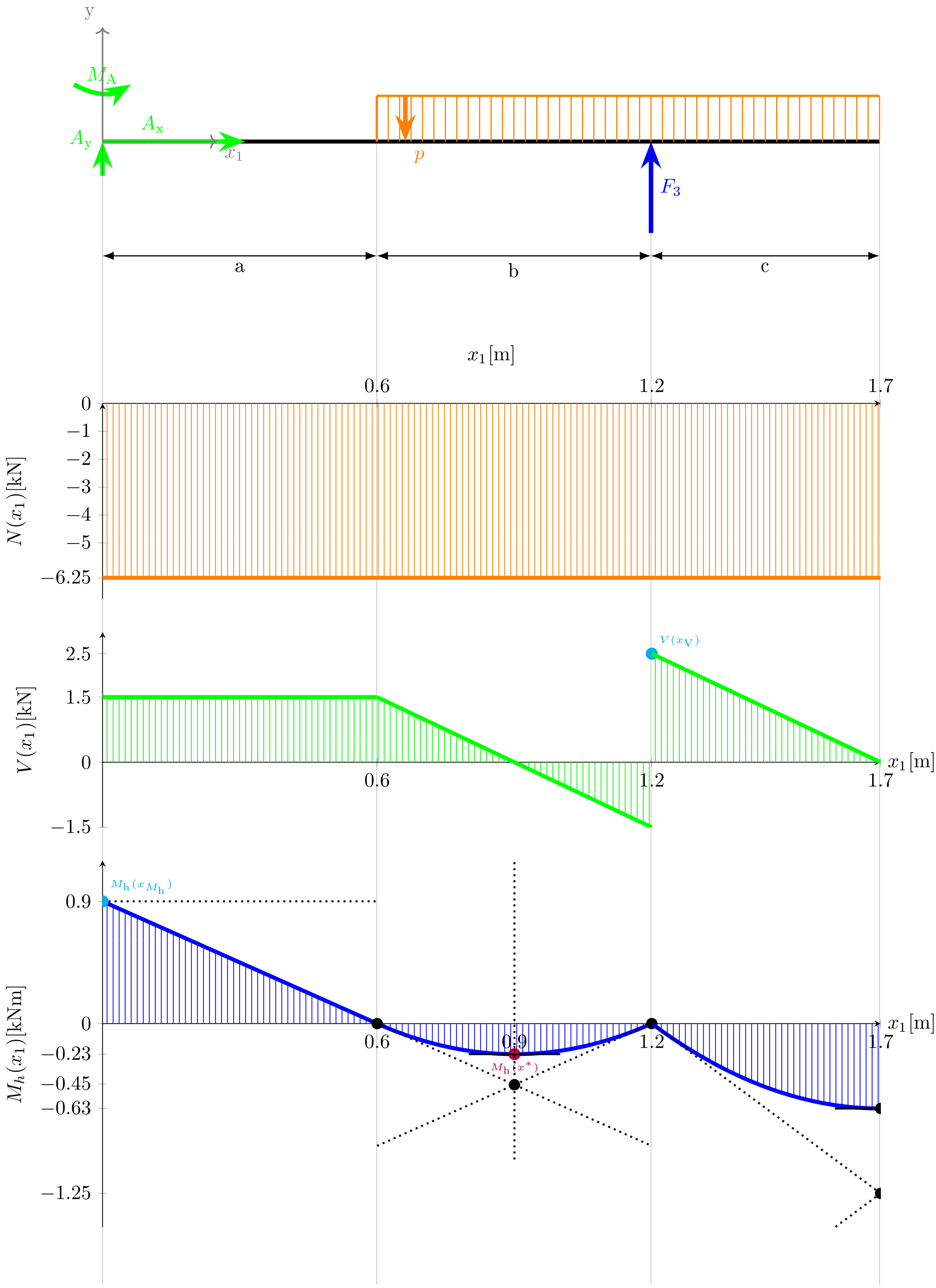
Megnézve hol a derivált zérushelye (parabolánál mindig a középvonalra esik) abban az x_0-ban kiszámítjuk a függvény értékét.

Ezekkel az adatokkal felvértezve már egy egész jó közelítést adhatunk a parabola pontjaira.

$2.5x^2 - 4.5x + 1.8$	$2.5x^2 - 4.5x + 1.8$
$x_1 = 0.6$	$x_1 = 1.2$
$x_2 = 1.2$	$x_2 = 2.2$
$m_1 = M'_{\mathrm{h}}(x)\vert_{x=x_1} = -\frac{3}{2}$	$m_1 = M'_{\mathrm{h}}(x)\vert_{x=x_1} = -\frac{5}{2}$
$\Rightarrow\ m_1 : -\frac{3}{2} \times x + 0.9$	$\Rightarrow\ m_1 : -\frac{5}{2} \times x + 3$
$m_2 = M'_{\mathrm{h}}(x)\vert_{x=x_2} = \frac{3}{2}$	$m_2 = M'_{\mathrm{h}}(x)\vert_{x=x_2} = \frac{5}{2}$
$\Rightarrow\ m_2 : \frac{3}{2} \times x - 1.8$	$\Rightarrow\ m_2 : \frac{5}{2} \times x - 5.5$
$y_0 = M_{\mathrm{h}}(\frac{x_1+x_2}{2}) = -0.225$	$y_0 = M_{\mathrm{h}}(\frac{x_1+x_2}{2}) = -0.46875$
$M'_{\mathrm{h}}(x^*) = 0$	$M'_{\mathrm{h}}(x_0) = 0$
$x^* = 0.9$	$x_0 = 1.7$
$M_{\mathrm{h}}(x^*) = -0.225$	

[1] A konstant 0 függvények nem kerültek ábrázolásra.

3.1.2. Igénybevételi ábrák



3.2. Függőleges rúd

3.2.1. Igénybevételi ábrák