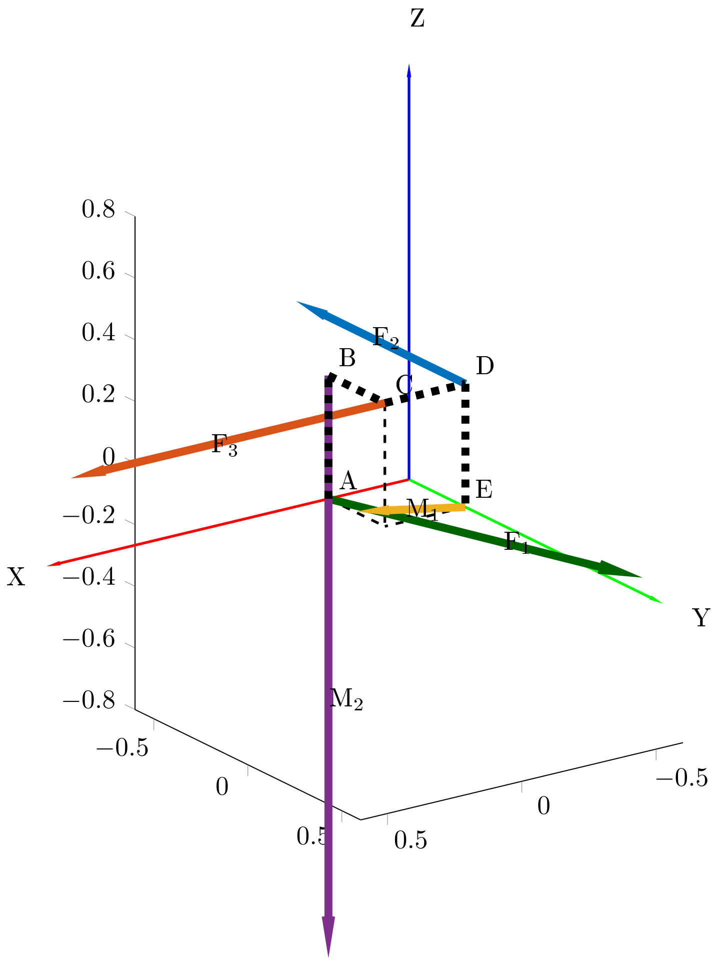
Statika 1. HF

Vári Gergő

2024. szeptember 28.

1. Axonometrikus ábra



M 1:1 [m]
M 1:1 [kN]

2. Redukált vektorkettős

2.1. Általánosan

Az origóba redukált vektorkettőshöz ki kell számolnunk az eredő erőt és az oda eltolt koncentrált erőpárok összegét.

$$([\vec{F}; \vec{M_O}]_O) = \dots$$

Az eredő erőt a statika első alapelve alapján megkapjuk ha összeadjuk a rendszerben megjelenő erőket.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$$

A koncentrált erőpároknál már nem csak az összes forgatónyomaték összegét kell figyelembe vennünk, hanem azt is hogy az adott pontba valo redukálás során a különböző erők milyen módon fejtenek ki nyomatékot.

Tehát erőinket támadáspontjuk helyvektorával kell vektoriálisan megszorozni és ezt hozzáadni a forgatónyomatékok összegéhez.

$$\vec{M_0} = \sum_j \vec{M_j} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i}$$

2.2. Megadott adatainkkal

Az ábra leolvasásához szükséges lesz használnunk az adatokból leolvasható távolságokat.

$$a = 0.3\,[\mathrm{m}] \tag{1}$$
$$b = 0.3\,[\mathrm{m}] \tag{2}$$
$$c = 0.4\,[\mathrm{m}] \tag{3}$$

$\vec{F_1}$ erőnk vektorának nagysága és értelme meghatározható a megadott adatokból, míg $\vec{F_2}$ és $\vec{F_3}$ erő vektorának értelmét az ábráról leolvashatjuk.

$$\vec{F_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} [\mathrm{kN}] \tag{4}$$

$$\vec{F_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{kN}] \tag{5}$$

$$\vec{F_3} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{kN}] \tag{6}$$

...és ezekből az eredő erőt már meg is kaphatjuk.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} [\text{kN}]$$

Az erők támadáspontjának helyvektorát egyszerűen leolvashatjuk az ábráról.

$$\vec{r_1} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}] \tag{7}$$

$$\vec{r_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} [\text{m}] \tag{8}$$

$$\vec{r_3} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} [\text{m}] \tag{9}$$

$\vec{M_1}$ leolvasható a megadott adatokból, míg M_2-nek csak a nagyságát kapjuk meg de értelmét a mellékelt ábra határozta meg és már össze is adhatjuk őket.

$$\vec{M_1} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{10}$$

$$\vec{M_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.1 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{11}$$

$$\sum_j \vec{M_j} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ -1.8 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{12}$$

A fentiekből már meg is kaphatjuk az összes erő adott pontunkra való nyomatékát.

$$\vec{r_1} \times \vec{F_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{13}$$

$$\vec{r_2} \times \vec{F_2} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{14}$$

$$\vec{r_3} \times \vec{F_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -0.39 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{15}$$

$$\sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.82 \\ -0.69 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \tag{16}$$

...és ezekkel a redukált nyomatékvektort ki is számíthatjuk.

$$\vec{M_0} = \sum_j \vec{M_j} + \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ -1.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.82 \\ -0.69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} [\text{kNm}]$$

Így a redukált vektorkettősünk már össze is állítható.

$$\boxed{([\vec{F};\vec{M_O}]_O)=\left(\left[\begin{bmatrix}-0.7\\-2\\-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1.2\\1.32\\-2.49\end{bmatrix}\right]_O\right)[\mathrm{kN};\mathrm{kNm}]}$$

3. Nyomaték bizonyos tengelyre

3.1. Általánosan

Egy nyomaték hatását egy adott tengelyre megkaphatjuk önmaga és a tengely skaláris szorzatával. Ezen nyomaték párhuzamos lesz az $\vec{F}$ erővel.

$$M_f=\vec{M}_o\cdot\vec{f}$$

A legegyszerűbb egy egységvektort készítenünk az adott erőnkből.

$$\vec{F}\to\vec{f}:\vec{f}=\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

$$F=|\vec{F}|=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}$$

3.2. Megadott adatainkkal

Eddigi számolásaink alapján mindent be is tudunk helyettesíteni.

$$|\vec{F}|=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\sqrt{(-0.7)^2+(-2)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{0.49+4+1}=\sqrt{5.49}=\frac{3\sqrt{61}}{10}\approx 2.343\,[\mathrm{N}]$$

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}=\frac{\begin{bmatrix}-0.7\\-2\\-1\end{bmatrix}}{\frac{3\sqrt{61}}{10}}=\begin{bmatrix}-0.298\\-0.853\\-0.426\end{bmatrix}[1]$$

$$\boxed{M_f=\vec{M}_o\cdot\vec{f}=\begin{bmatrix}1.2\\1.32\\-2.49\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0.298\\-0.853\\-0.426\end{bmatrix}=-0.423\,[\mathrm{kNm}]}$$

4. Centrális egyenes pontja és arra redukált vektorkettős

4.1. Általánosan

Az e centrális egyenes origóhoz legközelebbi pontjának helyvektorát az alábbi összefüggéssel tudjuk megtalálni.

$$\vec{r_G} = \frac{\vec{F} \times \vec{M_0}}{|\vec{F}|^2} \Rightarrow G(\vec{r_{Gx}}, \vec{r_{Gy}}, \vec{r_{Gz}})$$

$$([\vec{F}; \vec{M_G}]_G) = \dots$$

Ezután az origóba redukált vektorkettősből megkaphatjuk a feladat által elvárt pontba valót.

$$\vec{M_G} = \vec{M_0} + \vec{r_{GO}} \times \vec{F}$$

...nagy figyelmet fordítva a megfelelő előjelre.

$$\vec{r_{GO}} = -\vec{r_G}$$

Majd ellenőrizzük munkánkat azzal hogy az előzőleg kiszámolt $\vec{M_f}$ nyomatékkal kifejezzük a mostani $\vec{M_G}$-t.

$$\vec{F} \cdot \vec{M_G} = \vec{F} \cdot \vec{M_f}$$
$$\vec{M_f} = M_f \cdot \vec{f}$$

4.2. Megadott adatainkkal

$$\vec{r_G} = \frac{\vec{F} \times \vec{M_0}}{|\vec{F}|^2} = \frac{\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix}}{(\frac{3\sqrt{61}}{10})^2} = \frac{\begin{bmatrix} 6.3 \\ -2.943 \\ 1.476 \end{bmatrix}}{5.49} = \begin{bmatrix} 1.148 \\ -0.536 \\ 0.269 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{G(1.148, -0.536, 0.269)}}$$

$$\vec{r_{GO}} = -\vec{r_G} = \begin{bmatrix} -1.148 \\ 0.536 \\ -0.269 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M_G} = \vec{M_0} + \vec{r_{GO}} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.148 \\ 0.536 \\ -0.269 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ 0.181 \end{bmatrix} \text{[kNm]}$$

$$\boxed{([\vec{F}; \vec{M_G}]_G) = \left(\left[\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ -0.181 \end{bmatrix} \right]_G \right) \text{[kN;kNm]}}$$

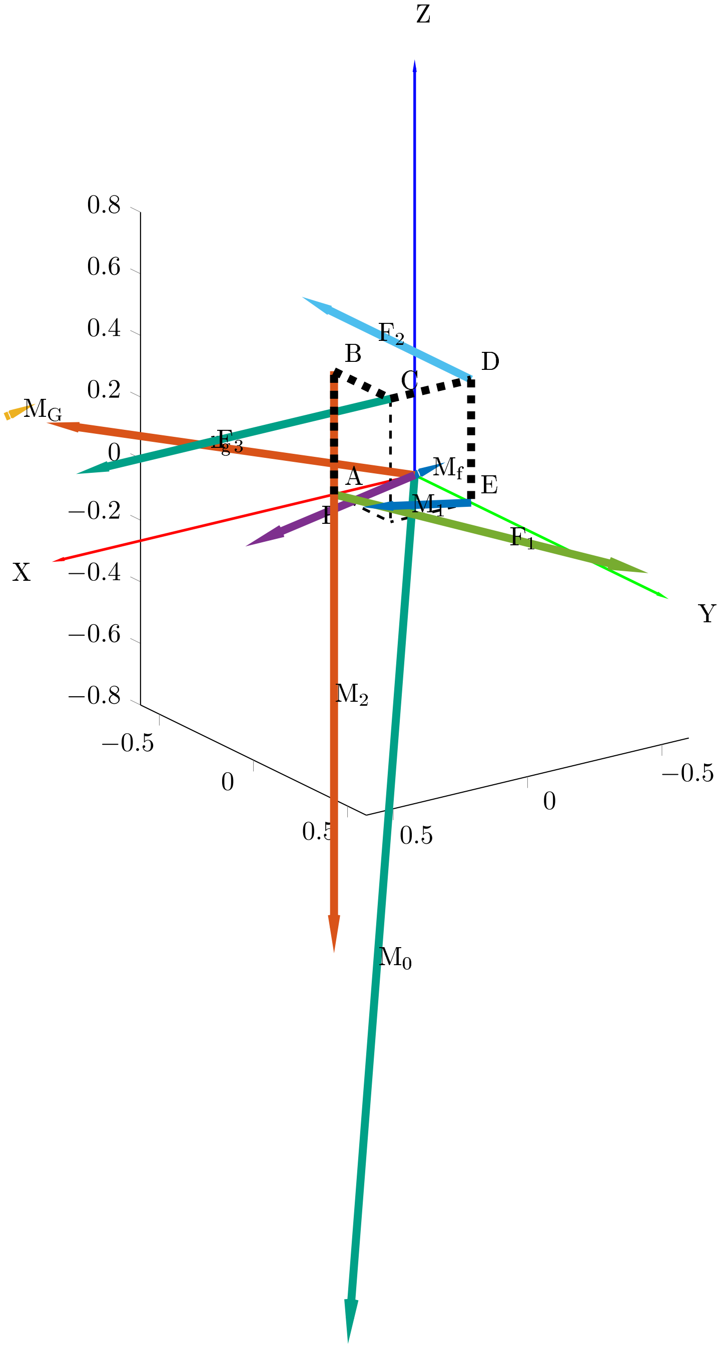
$$\vec{M_f} = M_f \cdot \vec{f} = -0.423 \cdot \begin{bmatrix} -0.298 \\ -0.853 \\ -0.426 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.361 \\ 0.18 \end{bmatrix} \text{[kNm]}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{M_G} = \vec{F} \cdot \vec{M_f} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ 0.181 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.361 \\ 0.18 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boxed{\text{-0.99} = \text{-0.99} \;\; \checkmark} \tag{19}$$

5. Kiegészített axonometrikus ábra



M 1:1 [m]
M 1:1 [kN]