
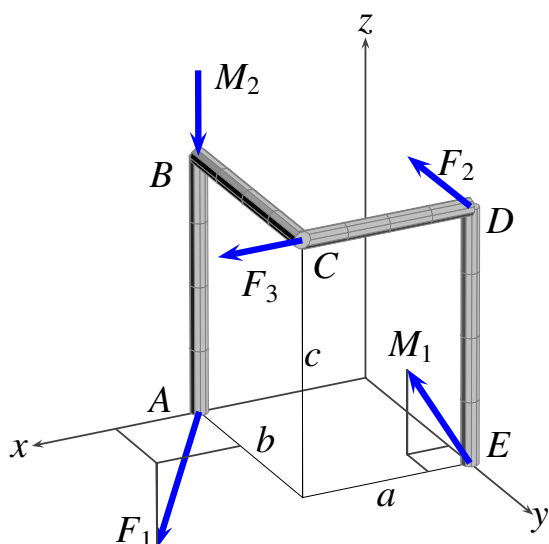


BME Gépészmérnöki Kar	STATIKA	Név: Vári Gergő
Műszaki Mechanikai Tanszék	1. HÁZI FELADAT	Neptun kód: MQHJOH
2024/25 I.	Határidő: lásd Moodle	Késés <input type="checkbox"/> Javítás <input type="checkbox"/>
Nyilatkozat: Aláírással igazolom, hogy a házi feladatot saját magam készítettem el, az abban leírtak saját megértésemet tükrözik.		Aláírás: 

Csak a formai követelményeknek megfelelő feladatokat értékeljük! Javítás vagy pótlás csak a Moodle-ben megadott határidőig lehetséges!

Feladatkitűzés

Az egymáshoz merőlegesen kapcsolódó, a , b és c hosszúságú, egyenes, merev rudak alkotta $ABCDE$ szerkezetet a vázolt — koncentrált erőkből és erőpárokból álló — erőrendszer terheli. Az \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 és \mathbf{M}_2 vektorok értelme az ábra szerinti, hatásvonaluk valamelyik koordináta tengellyel párhuzamos. Az \mathbf{F}_1 és \mathbf{M}_1 vektorok tényleges orientációja a megadott adatokból derül ki.



1. Készítse el a feladat méretarányos axonometrikus ábráját a megadott adatok alapján!
2. Határozza meg az adott erőrendszer origóba redukált vektorkettőst $([\mathbf{F}, \mathbf{M}_O]_O)$!
3. Számítsa ki az erőrendszer M_f nyomatékát az \mathbf{F} erő hatásvonalával azonos irányú f tengelyre!
4. Keresse meg az erőrendszer e centrális egyenesének az O origóhoz legközelebbi $G(x_G, y_G, z_G)$ pontját és határozza meg a G pontra számított redukált vektorkettőt $([\mathbf{F}, \mathbf{M}_G]_G)$! Ellenőrizze az eredményt: fejezze ki \mathbf{M}_G -t az előző pontban kiszámolt M_f nyomaték segítségével is!
5. Az 1. pontban megszerkesztett ábrát egészítse ki a kapott eredményekkel!

Adatok

(az x , y és z indexek a megfelelő koordinátákat jelölik, míg az \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 és \mathbf{M}_2 vektorok értelme az ábra szerinti)

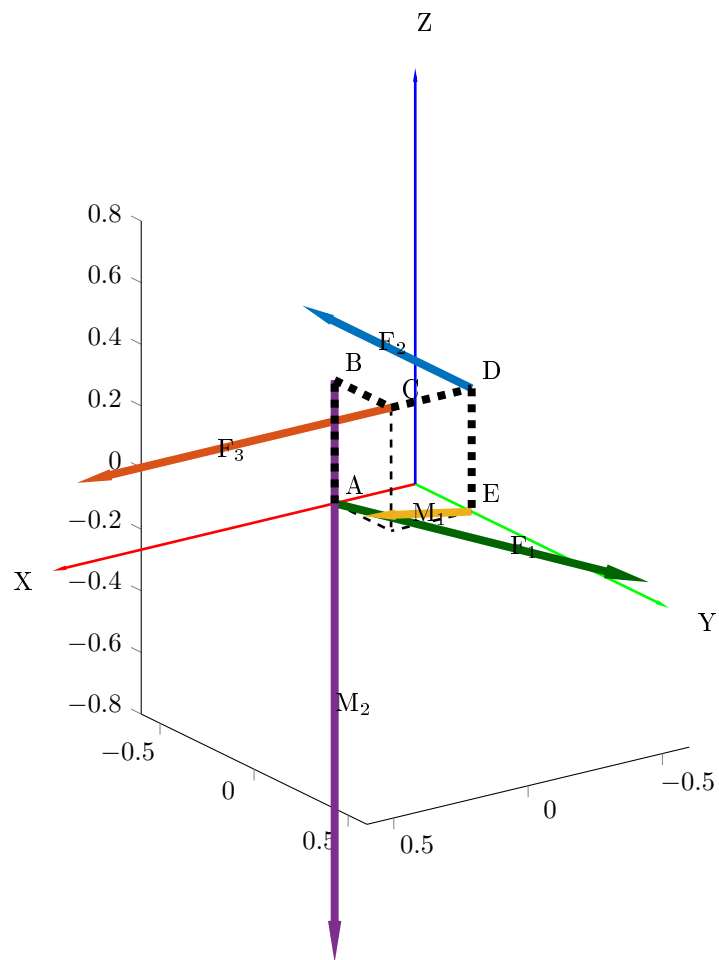
a [m]	b [m]	c [m]	F_{1x} [kN]	F_{1y} [kN]	F_{1z} [kN]	F_2 [kN]	F_3 [kN]	M_{1x} [kNm]	M_{1y} [kNm]	M_{1z} [kNm]	M_2 [kNm]
0.3	0.3	0.4	-2	-1	-1	1	1.3	0.8	0.5	0.3	2.1

(Rész)eredmények

\mathbf{F} [kN]	\mathbf{M}_O [kNm]	M_f [kNm]	\mathbf{r}_G [m]	\mathbf{M}_G [kNm]
$\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix}$	-0.423	$\begin{bmatrix} 1.148 \\ -0.536 \\ 0.269 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ 0.181 \end{bmatrix}$

2024. szeptember 28.

1. Axonometrikus ábra



M	1:1	[m]
M	1:1	[kN]

2. Redukált vektorkettős

2.1. Általánosan

Az origóba redukált vektorkettőshöz ki kell számolnunk az eredő erőt és az oda eltolt koncentrált erőpárok összegét.

$$([\vec{F}; \vec{M}_O]_O) = \dots$$

Az eredő erőt a statika első alapelve alapján megkapjuk ha összeadjuk a rendszerben megjelenő erőket.

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

A koncentrált erőpároknál már nem csak az összes forgatónyomaték összegét kell figyelembe vennünk, hanem azt is hogy az adott pontba való redukálás során a különböző erők milyen módon fejtenek ki nyomatékot.

Tehát erőinket támadáspontjuk helyvektorával kell vektoriálisan megszorozni és ezt hozzáadni a forgatónyomatékok összegéhez.

$$\vec{M}_0 = \sum_j \vec{M}_j + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

2.2. Megadott adatainkkal

Az ábra leolvasásához szükséges lesz használnunk az adatokból leolvasható távolságokat.

$$a = 0.3 \text{ [m]} \quad (1)$$

$$b = 0.3 \text{ [m]} \quad (2)$$

$$c = 0.4 \text{ [m]} \quad (3)$$

\vec{F}_1 erőnk vektorának nagysága és értelme meghatározható a megadott adatokból, míg \vec{F}_2 és \vec{F}_3 erő vektorának értelmét az ábráról leolvashatjuk.

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ [kN]} \quad (4)$$

$$\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [kN]} \quad (5)$$

$$\vec{F}_3 = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [kN]} \quad (6)$$

...és ezekből az eredő erőt már meg is kaphatjuk.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} [\text{kN}]$$

Az erők támadáspontjának helyvektorát egyszerűen leolvashatjuk az ábráról.

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad (7)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad (8)$$

$$\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} [\text{m}] \quad (9)$$

\vec{M}_1 leolvasható a megadott adatokból, míg M_2 -nek csak a nagyságát kapjuk meg de értelmét a mellékelt ábra határozta meg és már össze is adhatjuk őket.

$$\vec{M}_1 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ 0.3 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (10)$$

$$\vec{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.1 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (11)$$

$$\sum_j \vec{M}_j = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ -1.8 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (12)$$

A fentiekből már meg is kaphatjuk az összes erő adott pontunkra való nyomatékát.

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \\ -0.3 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (13)$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (14)$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.52 \\ -0.39 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (15)$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.82 \\ -0.69 \end{bmatrix} [\text{kNm}] \quad (16)$$

...és ezekkel a redukált nyomatékvektort ki is számíthatjuk.

$$\vec{M}_0 = \sum_j \vec{M}_j + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \\ -1.8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.82 \\ -0.69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} [\text{kNm}]$$

Így a redukált vektorkettősünk már össze is állítható.

$$([\vec{F}; \vec{M}_O]_O) = \left(\left[\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} \right]_O \right) [\text{kN}; \text{kNm}]$$

3. Nyomaték bizonyos tengelyre

3.1. Általánosan

Egy nyomaték hatását egy adott tengelyre megkaphatjuk önmaga és a tengely skaláris szorzatával. Ezen nyomaték párhuzamos lesz az \vec{F} erővel.

$$M_f = \vec{M}_o \cdot \vec{f}$$

A legegyszerűbb egy egységvektort készítenünk az adott erőnkből.

$$\vec{F} \rightarrow \vec{f} : \vec{f} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$$

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

3.2. Megadott adatainkkal

Eddigi számolásaink alapján mindent be is tudunk helyettesíteni.

$$\begin{aligned} |\vec{F}| &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(-0.7)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{0.49 + 4 + 1} = \sqrt{5.49} = \frac{3\sqrt{61}}{10} \approx 2.343 [\text{N}] \end{aligned}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}{\frac{3\sqrt{61}}{10}} = \begin{bmatrix} -0.298 \\ -0.853 \\ -0.426 \end{bmatrix} [1]$$

$$M_f = \vec{M}_o \cdot \vec{f} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.298 \\ -0.853 \\ -0.426 \end{bmatrix} = -0.423 [\text{kNm}]$$

4. Centrális egyenes pontja és arra redukált vektorkettős

4.1. Általánosan

Az e centrális egyenes origóhoz legközelebbi pontjának helyvektorát az alábbi összefüggéssel tudjuk megtalálni.

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_0}{|\vec{F}|^2} \Rightarrow G(r_{Gx}, r_{Gy}, r_{Gz})$$

$$([\vec{F}; \vec{M}_G]_G) = \dots$$

Ezután az origóba redukált vektorkettősből megkaphatjuk a feladat által elvárt pontba valót.

$$\vec{M}_G = \vec{M}_0 + r_{GO} \times \vec{F}$$

...nagy figyelmet fordítva a megfelelő előjelre.

$$r_{GO} = -r_G$$

Majd ellenőrizzük munkánkat azzal hogy az előzőleg kiszámolt \vec{M}_f nyomatékkal kifejezzük a mostani \vec{M}_G -t.

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_G = \vec{F} \cdot \vec{M}_f$$

$$\vec{M}_f = M_f \cdot \vec{f}$$

4.2. Megadott adatainkkal

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{F} \times \vec{M}_0}{|\vec{F}|^2} = \frac{\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix}}{\left(\frac{3\sqrt{61}}{10}\right)^2} = \frac{\begin{bmatrix} 6.3 \\ -2.943 \\ 1.476 \end{bmatrix}}{5.49} = \begin{bmatrix} 1.148 \\ -0.536 \\ 0.269 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(1.148, -0.536, 0.269)}$$

$$r_{GO} = -r_G = \begin{bmatrix} -1.148 \\ 0.536 \\ -0.269 \end{bmatrix}$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_0 + r_{GO} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.32 \\ -2.49 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.148 \\ 0.536 \\ -0.269 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ 0.181 \end{bmatrix} \text{ [kNm]}$$

$$([\vec{F}; \vec{M}_G]_G) = \left(\left(\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ -0.181 \end{bmatrix} \right) \right)_G \text{ [kN;kNm]}$$

$$\vec{M}_f = M_f \cdot \vec{f} = -0.423 \cdot \begin{bmatrix} -0.298 \\ -0.853 \\ -0.426 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.361 \\ 0.18 \end{bmatrix} \text{ [kNm]}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{M}_G = \vec{F} \cdot \vec{M}_f \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.36 \\ 0.181 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.126 \\ 0.361 \\ 0.18 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\boxed{-0.99 = -0.99 \quad \checkmark} \quad (19)$$

