SUR “WREATH PRODUCTS OF GROUPS ACTING WITH BOUNDED ORBITS

Chers Paul-Henry et Grégoire,

Globalement, je pense que votre texte a tout ce qu'il faut pour devenir un joli article. Localement, il y plusieurs choses que je vous suggère de reprendre, plus la partie catégorique que je n'ai pas comprise. Voici mes notes.

Sans doute y a-t-il trop de répétitions avec votre “Property FW ....” posté sur arXiv trois semaines plus tôt. Avez-vous pensé à ne faire qu'un article de ces deux textes ?

Ci-dessous, je me réfè à la version arXiv datée du February 16 2021.

A bientôt, Pierre.

Dès l'abstract, et partout. Pourquoi “Property (T)” avec parenthèses, et “Property FH” sans ?

Intro, 1er alinéa.

À propos du produit en couronne “which stands between the direct product and semi-direct product of groups” me semble tiré par les cheveux et à éliminer.

Dès l'intro et partout plus bas, j'ai de la peine avec vos guillemets. Que voulez-vous indiquer ? L'impression que j'ai est mauvaise, comme si vous essayiez d'excuser un usage abusif ou mal défini ; qui serait acceptable s'il y avait une précision plus bas, mais ce n'est en général pas le cas.

Second alinéa, la phrase avec $B\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}$ m'apparaît bien énigmatique à ce stade. Voir le passage en bleu après les références.

Theorem 1.1. Pourquoi voulez-vous que $G \neq \{1\}$? Si $G = \{1\}$, alors $G \wr_X H = H^{(X)}$ a (T) ssi H a (T) et X est fini.

Je vous laisse réfléchir à tous les autres énoncés où il serait possible (et donc souhaitabble) de supprimer l'hypothèse “$G \neq \{1\}$”.

Theorem 1.2. Ce n'est pas exactement la formulation de [8], où Cornulier et Kar écrivent (leur Theorem 1.1) que H (leur A) a un abélianisé fini. Allez-vous écrire quelque chose sur l'équivalence (j'imagine ...) des deux formulations ?

La notation cof $\neq \omega$ pour une propriété de groupe ne me plaît pas. Peut-on fabriquer moins pire : UC ? uncountcov ? uncof ? ou peut-être mieux utiliser systématiquement les termes sans abréviation : “uncountable cofinality” ?

Date: 5 mars 2021 – P. de la Harpe.

Page 3 ligne 2 : Cartesian avec C majuscule et ailleurs cartesian avec c. Probablement : partout Cartesian.

Juste avant Example 2.2. “for the following’ → “for further purpose” ou peut-être “for xxx” où xxx dirait où l’Example 2.2 intervient. Dans ce qui est écrit “the following” semble indiquer justement l’Example 2.2 – ce qui n’est pas le cas.

Un peu plus bas quand vous écrivez $g \cdot \{x_1, \ldots, x_n\} = \{gx_1, \ldots, gx_n\}$, cela semble indiquer que tout élément de $\mathcal{P}(X)$ est fini — ce qui n’est justement pas le cas.

Juste avant le Lemma 2.3. Si ces caractérisations sont well-known, vous devriez pouvoir indiquer une référence.

Example 2.4. L’assertion de l’exemple se vérifie de tête, ou suit du lemme qui précède, plutôt que est une “slight variation of the above lemma”.

Definition 2.5. Il faudrait au moins dire “isometric action” au lieu de “action”, six fois ici et beaucoup d’autres fois plus bas (Lemma 2.11, 2.12, ...). Est-ce que ça suffit à chaque fois ? (voir le bleu ci-dessous). Je suis perturbé par le “In the above, actions are suppsed to preserve the structure”.

C’est l’occasion de définir ici la propriété $(F\mathbf{R})$ d’avoir des points fixes (ou orbites bornées) pour tout action sur les arbres réels, au lieu de cacher plus bas la définition de $(F\mathbf{R})$.

Avez-vous pensé à la propriété $(FHyp\mathbf{C})$ d’avoir des points fixes (ou orbites bornées) pour tout action sur les espaces hyperboliques réels ou complexes ? voir [HaVa–89, Définition 6.22], dont il ne reste qu’une ombre dans le bouquin suivant [BeHV–08, Theorem 2.7.2].

Et à la propriété de point fixe sur les espaces L^p ? [Bour-12].

Après la définition 2.5. “actions on Hilbert spaces” → “affine isometric actions on real HIlbert spaces”, et supprimer “are scalar product preserving isometries”.

D’abord parce que beaucoup de lecteurs comprendront que “action on Hilbert space” sous-entend “espace vectoriel” et “action linéaire”, alors qu’il s’agit bien d’un “espace affine” et d’une “action affine”. Ensuite parce qu’une translation NE PRÉSERVE PAS le produit scalaire, et donc le bout de phrase à supprimer est faux. Note : sur un espace de Hilbert[1] affine réel, une isométrie est nécessairement une transformation affine [MaUl–32].

Definition 2.7, of quasipseudo-metric, et la lourdeur du quasipseudo. D’accord pour le pseudo, qui indique que $d(x, y) = 0$ n’implique pas nécessairement $x = y$. J’imagine que le quasi indique que $d(y, x)$ n’est pas nécessairement égal à $d(x, y)$. Pouvez-vous m’idiquer dans votre histoire un exemple qui justifie la généralité du quasi ?

[Le seul exemple consistant qui me vienne en tête est la quasimétrique de Thurston [Thur–98], mais c’est bien loin de votre sujet.]

[1]Ou plus généralement un espace normé affine réel.

Definition 2.8: “concret” $\rightarrow$ “concrete”.

2e alinéa après la Definition 2.8. Sans doute “Hilbert spaces, Banach spaces” $\rightarrow$ “real Hilbert spaces, real Banach spaces”. En plus il faut comprendre – et donc écrire ! – qu'il s'agit d'espaces affines, pas d'espaces vectoriels.

Sans doute nécessaire d'ajouter “réel” à “espace de Hilbert ou espace de Banach” ailleurs (page 10 ligne 8, ...).

Le passage avec “$\langle f(x) \mid f(y) \rangle \leq \langle x \mid y \rangle$” est faux : penser à $f = 0$ et $\langle x \mid y \rangle < 0$ (par exemple $y = -x \neq 0$). Passage sans doute à supprimer complètement (ou alors, si je n'ai rien compris et qu'il faille garder, mettre au moins des barres de valeur absolue autour des produits scalaires).

Bas page 7. Un graphe N'EST PAS un espace métrique avec distances dans $\mathbf{N}$. Par exemple, $\{0, 1, 3\}$ avec la distance induite de la distance usuelle de $\mathbf{R}$ n'est pas un graphe. Il faut en plus que l'espace métrique soit connexe par pas de longueur 1.

Example 2.10. Ce n'est pas vrai que tout sous-groupe infini de $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}^n)$ se projette sur $\mathbf{Z}$! Par exemple parce que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$ est parfait dès que $n \geq 3$.

4 lignes avant Lemma 2.11 : $\mathbf{R} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$.

4 lignes avant Lemma 2.11 : “only the trivial group has $B\mathbf{S}$” $\rightarrow$ “only finite groupa have $B\mathbf{S}$” ???

Lemma 2.11. L'énoncé est à peu près contenu dans la Remark 2.8 de [Corn–06], qui se contente de “it is easy to observe”. Est-ce qu'il n'apparaît pas plus explicitement ailleurs ? ce serait bizarre ...

Definition 2.13. Encore faut-il sans doute préciser que X^n est un produit au sens catégorique dans $\mathbf{S}$, ce qui ne me semble pas impliqué par votre formulation.

A propos des lignes qui suivent la Remark 2.14. On peut aussi définir la propriété de G d'avoir des orbites bornées pour toute action isométrique en termes de fonctions longueurs. Voir par exemple le début de [TeVa–20].

Référence [11] de Genevois : il conviendrait de citer la version 2, arXiv 20 Jan 2021.

References

[Bour-12] M. Bourdon, *Un théorème de point fixe sur les espaces L^p*. Publ. Mat. **56** (2012), no. 2, 375–392.

[Corn–06] Y. Cornulier, *Strongly bounded groups and infinite powers of finite groups.* Comm. Algebra **36** (2006), 2337–2345..

[CoHa–16] Y. Cornulier and P. de la Harpe, *Metric geometry of locally compact groups.* EMS Tracts in Math. **25**, European Math. Soc. 2016.

[BeHV–08] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's Property (T).* Cambridge Univ. Press, 2008.

[HaVa–89] P. de la Harpe and A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*. Astérisque **175**, Soc. math. France, 1989.

[MaUl–32] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*. C.R. Acad. Sci. Paris **134** (1932), 946–948.
`https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31473/f950.image.langFR`
Voir aussi `https://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/Isometries.pdf`

[TeVa–20] R. Tessera and A. Valette, *Locally compact groups with every isometric action bounded or proper*. J. Topol. Anal. **12** (2020), no 2, 267–292.

[Thur–98] W.F. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*. arXiv:math/9801039v1, 9 Jan 1998.

[Wiki] Wikipedia, *Pseudometric space*.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudometric_space#Topology`

Je m'arrête ici car je ne comprends pas grand chose à votre fourbi sur les catégories **S**. S'il le faut, à discuter une fois, au mieux devant un tableau à la section de maths, au pire par téléphone.

Le fait de dire parfois que **S** est une structure et parfois une catégorie est je pense une première source de confusion.

Cadre moins effrayant ?

Il y a une catégorie **PMet** des espaces pseudométriques et contractions[2] et certaines sous-catégories (graphes connexes, arbres, arbres réels, espaces de Banach réels affines, espaces de Hilbert réels affines, ...) – à voir s'il y a des exemples intéressants de sous-catégories non pleines. Pour chacune de ces sous-catégories, disons **S**, les propriétés ($P\mathbf{S}$) et ($B\mathbf{S}$) ont un sens facile, par exemple : "un groupe G a ($B\mathbf{S}$) ssi toute action isométrique de G sur un objet de **S** a une orbite bornée (équivalent : a toutes ses orbites bornées). Ces deux propriétés sont équivalentes souvent (votre Proposition 2.15), mais pas toujours. Dans chaque cas, on peut avoir envie d'un théorème du genre : *un groupe (parfois supposé dénombrable, parfois non) a la propriété ($B\mathbf{S}$) ssi blablabla.*

Avant d'entrer dans ce que j'appelle votre fourbi catégorique, et donc dans la lecture de votre section 3, j'aimerais être convaincu que le cadre ci-dessus ne vous suffit pas.

[2] Je me suis amusé à chercher d'autre sens de PMet, voici ce que j'ai trouvé :
Acronym Definition
PMET Preparing Mathematicians to Educate Teachers (Mathematical Association of America)
PMET Professional Military Education and Training (Australia)
PMET Punjab Medical Entrance Test (Baba Farid University of Health Sciences; India)
PMET Professionals, Managers, Executives and Technicians

Voir `https://acronyms.thefreedictionary.com/PMET`.