TD 11

IPESUP - PC

31/01/2024

1 L'écoulement du ketchup

On considère l'écoulement laminaire, stationnaire, irrotationnel et incompressible du ketchup assimilé à un fluide visqueux, de masse volumique , dans une conduite verticale et cylindrique sous le seul effet de la pesanteur. On suppose que la pression ne varie pas le long du tube. On note Oz l'axe du tube. Le champ eulérien des vitesses est, en coordonnées cylindriques : $v(\vec{M}) = v(r)\vec{u_z}$, où r est la distance du point M à l'axe du tube, et où le vecteur $\vec{u_z}$ est orienté dans le même sens que l'accélération de la pesanteur $_vecg$. On note $\sigma(r)$ la projection sur $\vec{u_z}$ de la force tangentielle surfacique que le fluide situé à l'intérieur du cylindre de rayon r exerce sur le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon r. Le ketchup est un fluide non newtonien caractérisé par le comportement rhéologique suivant :
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{\sigma_0 - \sigma(r)}{0}$ pour $\sigma(r) \geq \sigma_0$
$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$pour $\sigma(r) \leq \sigma_0$

Les deux paramètres η (homogène à une viscosité dynamique) et σ_0 sont deux caractéristiques du fluide étudié.

1. On considère une particule de fluide, comprise entre z et $z + dz$ et entre r et $r + dr$. Établir l'équation différentielle du mouvement de cette particule de fluide.
2. Intégrer cette équation différentielle et donner l'expression de $\sigma(r)$.
3. En déduire l'expression du champ des vitesses. On sera amené à distinguer deux cas, selon que r est supérieur ou inférieur à un rayon caractéristique r_0. On fera de plus l'hypothèse que $r_0 < R$. Donner l'allure du champ des vitesses en fonction du rayon r. Expliquer pourquoi on parle d'écoulement bouchon.
4. Donner l'expression du champ des vitesses lorsque $r_0 > R$. Déterminer l'ordre de grandeur du rayon minimal d'un tube permettant l'écoulement du ketchup : σ_0 de l'ordre de 50 Pa et η de l'ordre de $10^6\,\mathrm{Pa}.s\,\mathrm{et}\,\mu = 1,4 \times 10^3\,\mathrm{kg.m}^{-3}$.

2 Propagation d'une onde sonore dans un tuyau déformable

Un tube horizontal, de longueur infinie, cylindrique, d'axe Ox, contient un fluide de masse volumique μ et de compressibilité χ_0. Le tube est élastique de section variable : $S(x,t) = S_0 + S_1(x,t)$, où $S_1(x,t) << S_0$. On suppose que l'équation de comportement du tuyau permet de définir sa section comme fonction de la pression uniquement, sous la forme $S = S(P)$. On néglige les effets de la pesanteur et de la viscosité. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

On définit la distensibilité du tube par : $D = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}$.

1. Effectuer un bilan de matière pour le système ouvert contenu entre les plans d'abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$. Linéariser cette équation et en déduire une relation entre $\frac{\partial p_1}{\partial t}(x,t)$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$ faisant intervenir le coefficient de compressibilité au repos χ_0 et la distensibilité $D0$ au repos.
2. En déduire l'équation de propagation des ondes sonores dans le tube et montrer que leur célérité est donnée par :
$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0(\chi_0 + D_0)}}$

3. Application : la masse volumique et la compressibilité du sang et de l'eau sont comparables. Dans les conditions de l'expérience, la célérité du son dans l'eau vaut $c_{eau} = 1,4 \times 10^3 m.s^{-1}$. On donne $D_{0m} = 1.0 \times 10^{-11} P_a^{-1}$ pour un tuyau métallique et $D_{0v} = 4.0 \times 10^{-5} P_a^{-1}$ pour un vaisseau sanguin. Calculer c dans les deux cas. Commenter.
4. On place en $x = 0$ une pompe assurant un débit massique $D_m(t)$. En supposant qu'aucune onde ne provient de l'infini, déterminer l'expression de la vitesse $v(x, t)$ et de la surpression $p_1(x, t)$ du fluide sur le demi-axe $x > 0$ à l'aide de la fonction $D_m(t)$.

3 Mines 2 2022

Questions 16 à 25.