TD 10

IPESUP - PC

24/01/2024

1 Naufrage d'un bateau

On étudie un bateau qui coule dans la mer considérée comme un fluide parfait incompressible. de masse volumique u. On note $H = 20m$ la hauteur du bateau, $M = 50000$ tonnes sa masse 2 et $S = 8500m^2$ sa surface de base :

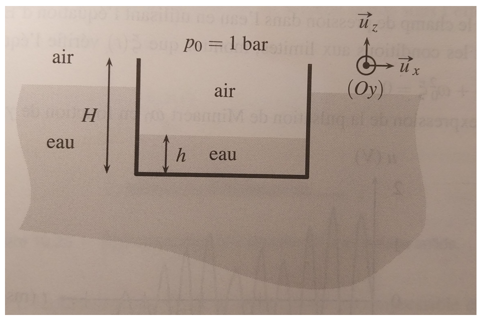

Figure 1 – Schéma du naufrage

1. On considère que le bateau est rempli d'eau sur une hauteur h. Quelle est la hauteur h_m, à partir de laquelle le bateau coule ?
2. On considère maintenant que le bateau est initialement vide et qu'il se remplit par un petit trou de surface $s << S$ situé dans la coque à une hauteur $l = 4m$ du fond.
   (a) Décrire les différentes étapes du remplissage.
   (b) Déterminer $h(t)$ pendant la première phase et caleuler sa durée t_1 .
   (c) Déterminer $h(t)$ pour $t > t_1$.
   (d) Quelle est la durée totale du naufrage ?

2 Le chant des bulles :

On considère une bulle d'air, assimilé à un gaz parfait de masse volumique μ_a, sphérique, de rayon R_0 et immergée dans un volume d'eau infini, homogène de masse volumique μ_0. À l'état de repos, la pression est uniforme et stationnaire ; sa valeur est notée p_0. À un instant $t = 0$, la bulle d'air commence à « pulser » avec une amplitude faible. Son rayon à un instant t ultérieur est noté $R(t) = R_0 + \xi(t)$, avec $\xi << R_0$. On limitera tous les calculs au premier ordre en ξ/R_0 . L'écoulement induit dans l'eau par les pulsations de la bulle est supposé parfait et incompressible. On négligera tout écoulement d'air dans la bulle. On admet que la symétrie sphérique de la bulle persiste au cours de son mouvement. En raison du mouvement de la bulle, la pression $p(t)$ s'écarte de sa valeur de repos P_0. On supposera que la pression dans la bulle est uniforme.

1. On suppose que l'évolution de l'air contenu dans la bulle est adiabatique et réversible, On note $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ le coefficient isentropique de l'air, que l'on suppose indépendant de la température. Établir l'expression de la pression $p(t)$ en fonction deP_0, γ, R_0 et $\xi(t)$.
2. Justifier, grâce à des arguments de symétrie, que le champ de vitesse dans l'eau est de la forme : $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\,\vec{u}_r$.

3. En utilisant la propriété d'incompressibilité de l'écoulement, déterminer le champ de vitesse dans l'eau.
4. Déterminer le champ de pression dans l'eau en utilisant l'équation d'Euler.
5. En écrivant les conditions aux limites, montrer que $\xi(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante : : $\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\xi = 0$. On donnera l'expression de la pulsation de Minnaert ω_0 en fonction de γ, p_0, μ_0 et R_0

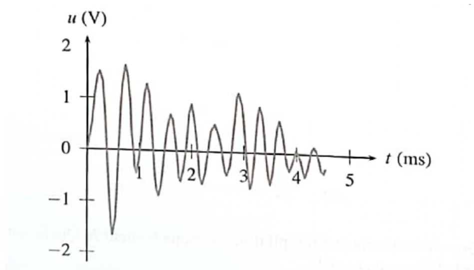

FIGURE 2 – Signal délivré par le microphone immergé

6. À l'aide d'un bulleur d'aquarium, on produit des bulles d'air dans un récipient rempli d'eau. Un microphone immergé « écoute » les vibrations des bulles formées. Le signal délivré par le microphone est représenté sur la figure 2. En déduire une estimation du rayon des bulles formées.

3 Eolienne

On cherche à déterminer la puissance prélevée au vent par le rotor d'une éolienne. En amont, loin de l'éolienne, le vent est uniforme et permanent de vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u_x}$, et la pression est uniforme et vaut P_0. On néglige les effets de la pesanteur. L'éolienne est formée d'un mât, dont on négligera l'influence, portant un rotor d'axe horizontal que l'on assimilera à un disque de diamètre D et de surface S_0. L'écoulement de l'air est unidimensionnel, stationnaire, incompressible et parfait. La masse volumique de l'air est notée μ . La figure suivante représente l'allure du tube de courant s'appuyant sur le pourtour du rotor, les valeurs de la pression et de la vitesse sont précisées sur la figure 3.

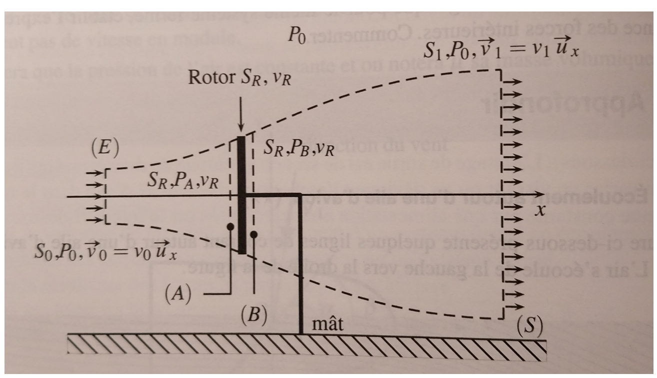

FIGURE 3 – Eolienne

Les surfaces (A) et (B) sont situées de part et d'autre du rotor à proximité immédiate et on prend donc : $S_A = S_B = S_R$ et $\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v_R} = v_R\vec{u}_x$. On désigne par $\vec{F} = F\vec{u_x}$ la force totale exercée par l'hélice sur le fluide.

1. Étant donné l'allure du tube de courant, que peut-on dire de v et de v_0 ?
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système que l'on précisera, établir une relation liant $v_0, v_1, S_0, \mu et F$.

3. En faisant un bilan de quantité de mouvement, établir une relation liant P_A,P_B, S_R et F. En déduire l'expression de la vitesse de l'air au niveau du rotor v_r en fonction de v_0 et v_1.
4. Déterminer, à partir d'un bilan énergétique, l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ des actions mécaniques que le vent exerce sur le rotor en fonction de μ, S_R, v_0 et du rapport $\alpha = v_1/v_0$. Pour quelle valeur de α cette puissance est-elle maximale ? Exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de μ, S_r et v_0.

4 Le mascaret de Gironde

Lorsque la marée commence à monter, l'eau de l'océan s'engouffre dans l'estuaire de la Gironde. Le flux de la marée se heurte alors au courant du fleuve et une série de vagues se forment. Elles constituent ce qu'on appelle un mascaret, qui grossit au fur et à mesure de sa progression et sa hauteur peut atteindre jusqu'à deux mètres de haut. Cette série de 5 à 10 vagues rapprochées se déplace à une vitesse de 15 à 30 km/h ,et remonte ainsi le fleuve sur près de 200 km à l'intérieur des terres. On modélise le fleuve par un canal horizontal d'axe (Ox), de profondeur constante L selon (Oy). En amont de la vague, le fleuve s'écoule à la vitesse $\vec{v_1} = u\vec{u_x}$ et de hauteur h_1. Le mascaret est modélisé par une marche : en aval du front de la vague, la hauteur d"eau est $h_2 > h_1$. La hauteur du mascaret est donc $H = h_2 - h_1 > 0$. On admet que le mascaret se déplace à vitesse constante $-c\vec{u_x}$ dans le sens des x décroissants. Partout, l'écoulement ests upposé incompressible et le fluide homogène, de masse volumique μ. On note $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les champs de pression dans les écoulements en amont et en aval du mascaret. On suppose la pression dans l'air uniforme égale à p_0.On se place dans le référentiel du mascaret, galiléen, dans lequel l'écoulement est stationnaire avec des vitesses $\vec{v_1'} = (c+u)\vec{u_x}$ et $\vec{v_2'}$ en amont et en aval du mascaret.

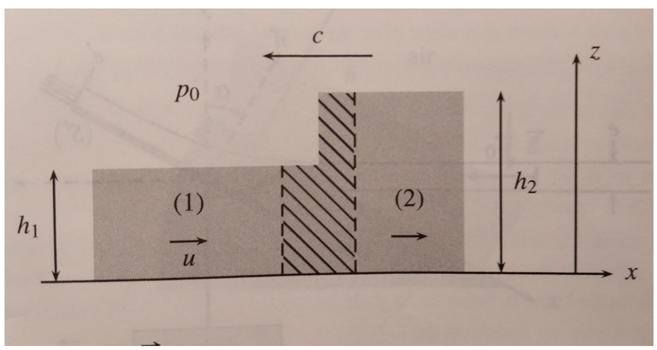

FIGURE 4 – Mascaret

1. Justifier l'expression de $\vec{v_1'}$.
2. En faisant un bilan de masse, déterminer la vitesse $\vec{v_2'}$.
3. Justifier que dans chacun des écoulements en amont et en aval du mascaret, la distribution de pression est hydrostatique.
4. On considère le système ouvert constitué de l'eau contenue à l'instant t dans le volume hachuré sur la figure. Montrer que la résultante des forces de pression exercées par l'eau sur ce système est la somme de la résultante des forces de pression $\vec{F_{p1}}$ s'exerçant sur la hauteur h_1,et $\vec{F_{p2}}$ s'exerçant sur la hauteur h_2 :

   $\vec{F_{p1}} = \left(p_0 L h_1 + \frac{1}{2}\mu g L h_1^2\right)\vec{u}_x$ et $\vec{F}_{p2} = -\left(p_0 L h_2 + \frac{1}{2}\mu g L h_2^2\right)\vec{u}_x$.
5. En admettant qu'on peut négliger la viscosité et en faisant un bilan de quantité de mouvement, montrer que :
   $(c+u)^2 = \frac{1}{2}g\frac{h_2}{h_1}(h_1 + h_2)$
6. On se place dans la situation où $h_1 = 10,0m$ et $h_2 = 12,0m$. À quelle condition sur la valeur de u, le mascaret parvient-il à remonter le fleuve ?