TD 10 - Ondes électromagnétiques dans le vide

IPESUP - PC

27/11/24

1 Rappels de cours

Les champs $\vec{B}$ et $\vec{E}$ vérifient l'équation d'Euler tridimensionnelle :

$\Delta\vec{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}(M,t)}{\partial t^2}$, avec $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$

Définition : Une onde plane est une onde dont les surfaces d'onde sont des plans. Pour rappel, on définit une surface d'onde comme l'ensemble des points M tels que $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0$

Quelques concepts :

1. Relation de dispersion : relation entre ω et le vecteur d'onde.
2. Vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$
3. Vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$
4. Bilan énergétique : $div(\Pi) + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j}\cdot\vec{E}$

Propriétés des OPPH :

1. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux entre eux et à la direction de propagation.
2. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase.
3. $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\wedge\vec{E}$
4. Relation de dispersion : $\omega^2 = c^2k^2$

Capacités exigibles :

1. Relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une OPPH.
2. Retrouver la relation de dispersion pour une OPPH.
3. Calculer la vitesse de phase et de groupe pour une OPPH.

2 Onde électromagnétique dans le vide

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide. On la représentation complexe du champ électrique de cette onde :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_0cos(\frac{\pi y}{a})exp(i(\omega t - k_0z)) \\ \underline{\alpha}E_0sin(\frac{\pi y}{a})exp(i(\omega t - k_0z)) \end{cases}$$

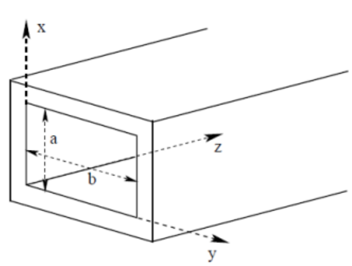
avec $\underline{\alpha}$ un nombre complexe et k_0 positif.

1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde.
3. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.
4. Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité volumique d'énergie.

3 Guide d'ondes rectangulaire

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs (sur la figure ci-dessous x=0, x=a, y=0, y=b) délimitent un guide d'onde de longueur infinie suivant Oz, de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide (permitivité ϵ_0, perméabilité μ_0). On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω, dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = f(x,y)cos(\omega t - k_g z)\vec{u_x}$. Dans cette expression : f désigne une fonction réelle des variables y et x, et k_g est une constante positive. On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$, où λ_g est la "longueur d'onde guidée" et on notera : $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

1. Montrer que f ne dépend que de y puis déterminer l'équation différentielle à laquelle est soumise $f(y)$.
2. Résoudre cette équation et introduire un entier n correspondant à différents modes propres.
3. Déterminer $\vec{B}$.
4. Exprimer k_g en fonction de ω, c, n et b. En déduire λ_g en fonction de λ_0, b et n.
5. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
6. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de l'onde en fonction de c, n et du rapport $\frac{f}{f_c}$, f étant la fréquence de l'onde.
7. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Quelle est la valeur moyenne $< \vec{\Pi} >$ dans le temps de ce vecteur ? En déduire la puissance moyenne transmise par une section droite du guide d'ondes.
8. Calculer la valeur moyenne, dans le temps de la densité d'énergie volumique de l'énergie électromagnétique $< u >$
9. A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. Quelle relation simple peut-on constater entre v_e et v_ϕ ?



4 Pression de radiation

1. Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν se propageant le long des x croissants, dont le champ électrique est $\vec{E}(x,t) = E_0 cos(\omega t - kx)\vec{u_y}$. Soit $\mathcal{E}$ l'éclairement (défini par la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation). Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de ϵ_0, c et E_0.

2. On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant le long des x croissants.
   (a) Exprimer N_0 le nombre de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à Ox en fonction de $\mathcal{E}$ et de ν.
   (b) L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaire à Ox, d'aire S, et parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface.
   Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ?
   Quelle est la force subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$, S et c ? Exprimer la pression p subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$ et c puis en fonction de ϵ_0 et E_0.
   (c) Reprendre la question ci-dessus lorsque la paroi est parfaitement aborbante.
   (d) Calculer $\mathcal{E}$, E_0 et p sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre d=5,00 mm et une puissance moyenne $\mathcal{P}$=100 W (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles).
3. (a) L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon a, bien inférieur au rayon du faisceau. Quelle est, en fonction de $\mathcal{E}$, E_0 et p, la force $\vec{F}$ subie par la sphère ?
   (b) Le soleil donne au voisinage de la Terre l'éclairement $\mathcal{E} = 1{,}4 \times 10^3 W.m^{-2}$. L'émission est isotrope. Sur une surface de dimensions petites devant D, l'onde arrivant du Soleil est quasi plane.
   Quelle est la puissance $\mathcal{P}\prime$ émise par le Soleil ?
   Un objet sphérique de rayon a, de masse volumique μ est situé à une distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire. Evaluer le rapport entre la force due à l'absorbtion du rayonnement solaire et a force gravitationelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :
   - Cas d'une météorite : $\mu = 3,0 \times 10^3 kg.m^{-3}$ et $a = 1,0m$
   - Cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1,0 \times 10^3 kg.m^{-3}$
   Commenter.
   (c) Quelle est la surface minimale de la voile solaire d'un vaisseau spatial pour que celui-ci quitte l'attraction solaire ?