TD 13

IPESUP - PC

7 mars 2024

1 Changement de milieu

On considère deux cordes accrochées à une masse m située en $x = 0$. Une onde se propage sur ces deux cordes selon les x croissants. On note $\underline{\xi_i}(x,t) = \xi_{0i}e^{i(\omega t - k_1 x)}$ l'onde incidente, et $\underline{\xi_r}(x,t) = \xi_{0r}e^{i(\omega t + k_1 x)}$ l'onde réfléchie, et $\underline{\xi_r}(x,t) = \xi_{0t}e^{i(\omega t - k_2 x)}$ l'onde transmise.

On pose $r = \frac{\underline{\xi_{0r}}}{\underline{\xi_{0i}}}$ le coefficient de réflexion complexe et $t = \frac{\underline{\xi_{0t}}}{\underline{\xi_{0i}}}$ le coefficient de transmission complexe.

1. En appliquant la continuité de ξ en 0, trouver une relation entre r et t.
2. En appliquant le PFD à la masse m, trouver une autre relation entre r et t. On précisera les hypothèses faites.
3. En déduire r et t.

2 Déformations longitudinales d'un ressort

On considère un ressort à spires non jointives dont une extrémité est accrochées à 0 fixe, et l'autre extrémité est accrochée à une masse M. On note L, m_0 et k_0 sa longueur à vide, sa masse et sa raideur. Le mouvement se fait le long de l'axe x. On note $\mu = \frac{m_0}{L}$ la masse linéique du ressort. On s'intéresse à la tranche de ressort comprise entre x et $x + dx$ au repos. On note $\xi(x,t)$ l'écart d'un point à sa position initiale.

1. Montrer qualitativement que la raideur de ce ressort infinitésimal est $\frac{k_0 L}{dx}$.
2. Montrer que la force exercée par la partie droite du ressort sur la partie gauche du ressort vaut $\vec{F}(x,t) = R\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\vec{u_x}$. Donner la valeur de R.
3. Etablir l'équation vérifiée par $\xi(x,t)$.
4. On cherche des solutions sous la forme $\xi(x,t) = f(x)cos(\omega t + \phi)$. Déterminer l'équation vérifiée par ω et montrer graphiquement que ω peut tendre vers l'infini.
5. Retrouver la pulsation d'un ressort sans masse.
6. On va maintenant préciser le résultat de la question précédente.
   (a) Ecrire l'équation d'onde avec les variables adimensionnées $x_a = x/L$ et $t_a = t/T$, pù L est la longueur du ressort et T une durée caractéristique de la propagation des ondes.
   (b) On se place dans le cadre $L << cT$. Montrer que l'équation d'onde devient $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \simeq 0$.
   (c) Déterminer entièrement $\xi(x,t)$.
   (d) Justifier la phrase suivante : "Dans le cadre $L << cT$, le ressort a une masse apparente de $m_0/3$".

3 Chaîne de pendules

On considère une chaîne de pendules simples, de masse m et de longueur l. Ceux-ci sont régulièrement espacés sur un fil de torsion horizontal de constante $C = \frac{\Gamma}{a}$. La distance entre deux pendules vaut a. On note $\theta_n(t)$ l'angle que fait le n-ième pendule avec la verticale.

1. Exprimer le couple exercé par le pendule n sur le fil situé à droite de ce dernier.

2. Ecrire l'équation du mouvement du pendule n.
3. Dans la limite $a \to 0$, déterminer l'équation vérifiée par $\theta(x,t)$. Montrer qu'il n'y a propagation que pour des pulsations supérieures à une pulsation de coupure ω_c que l'on précisera.

4 Durée de chute

On considère uen corde de longueur l et de masse linéique μ, suspendue par une de ses extrémités au plafond. A l'instant $t = 0$, on amène l'autre extrémité de la corde au niveau de la première, puis on la lâche. On suppose que le mouvement se fait sans dissipation de chaleur. Calculer la durée de chute de la corde et la comparer avec la chute libre. Indication : $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x(2-x)}}dx \simeq 1.2$

$$D_{KL}(q||p) = \mathbb{E}_{s\sim q_\theta}[log(\frac{q(s)}{p(s)})] \tag{1}$$