

TD 5 - Electrostatique

IPESUP - PC

09/10/2024

1 Rappels de cours

Soit deux charges (q_1 et q_2) séparées par une distance r , la force électrostatique entre ces deux charges est donnée par la loi de Coulomb :

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F.m^{-1}$$

Champ électrique :

Soit une charge q en 0 et un point M de l'espace, le champ électrique en M est donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_{0 \rightarrow M}$$

Potentiel électrique : On dit que $\vec{E}(M)$ dérive du potentiel $V(M)$ si $\vec{E} \cdot \vec{OM} = -dV$.

Ligne de champ : C'est une courbe tangente en chaque point au vecteur champ électrique.

Propriétés :

1. Les lignes de champ sont orientées selon les potentiels décroissants.
2. Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.

Symétrie de champ :

Soit S une rotation ou une symétrie (une isométrie de \mathbb{R}^3). Si la distribution de charge est invariante par S , alors, $\forall M, \vec{E}(S(M)) = S(\vec{E}(M))$

Théorème de Gauss :

Soit une surface **fermée** S de normale **extérieure** contenant une charge totale q_{int} . Soit \vec{E} le champ électrique, le flux de \vec{E} à travers S est donné par :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

Forme locale du théorème de Gauss :

$$div(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

On utilisera la forme local dans le cas de discontinuité de la répartition de charge(charge linéique ou surfacique). Sinon, on utilisera la forme intégrale.

Equation de Poisson :

Soit un champ électrique \vec{E} , le potentiel électrique V est solution de l'équation de Poisson :

$$\Delta V(M) = -\frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Anecdote :

Pourquoi les passagers d'un avion ne sont pas électrisés lorsqu'un éclair frappe l'avion ? On peut comprendre cela grâce au théorème de Gauss. En effet, lorsque la foudre frappe l'avion, sa surface

(conductrice) se charge fortement, il forme une **cage de Faraday**. Cependant, l'intérieur est en isolant. On pourrait penser que les fortes charges créeraient un champ électrique dangereux, mais le théorème de Gauss nous dit que le champ à l'intérieur de l'avion est nul. Les passagers ne sont donc pas électrisés !

2 Calculs de champs :

1. On considère une boule chargée de rayon a et de densité volumique de charge $\rho(r, \theta, \phi) = \rho_0 \frac{r}{a}$ pour $0 < r < a$. Déterminer le champ dans tout l'espace au moyens du théorème de Gauss et de sa forme locale.
2. On considère un semi-conducteur orienté selon l'axe Ox , de surface S . Sa charge est nulle, sauf entre les plans $x = -a$ et $x = a$, où la densité de charge vaut $\rho(x, y, z) = \rho_0 \sin(\frac{\pi x}{a})$. Déterminer le champ électrique dans tout l'espace. On considérera $a \ll \sqrt{S}$.

On donne la divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div}(\vec{f}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta f_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}$$

3 Potentiel de Yukawa

Soit $\rho(r)$ une distribution de charge à symétrie sphérique créant le potentiel $V(r) = \frac{q^* e^{-\frac{r}{a}}}{4\pi\epsilon_0 r}$.

1. Déterminer le champ électrique dans tout l'espace et en donner un équivalent pour $r \rightarrow 0$. Que pense-t-on de la distribution de charge en 0 ?
2. En utilisant le théorème de Gauss, montrer que $\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 E(r))$. En déduire $\rho(r)$.
3. Calculer la charge totale contenue dans une sphère de rayon R centrée en 0.
4. En déduire la charge au centre.

4 Mer de Lidenbrock :

On considère la Terre (supposée ronde), de rayon R et de centre O . A l'intérieur se trouve une cavité sphérique de centre $O' \neq O$ et de rayon $a < \|O\vec{O}'\|$. Par analogie avec la force électrostatique, déterminer un théorème de Gauss pour la force gravitationnelle puis en déduire le champ gravitationnel créé par une boule homogène dans tout l'espace. En déduire le champ de gravitation à l'intérieur de la cavité.

