

TD 12

IPESUP - PC

7/02/2024

1 Onde dans un tuyau

1. Avec un instrument à vent, lorsque l'instrumentiste joue des notes montant vers les aigus, le rapport de la longueur d'onde au diamètre du tuyau décroît et des ondes non planes peuvent se propager. Les ondes satisfont à une équation de propagation tridimensionnelle :

$$\Delta p(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(M, t) = 0.$$

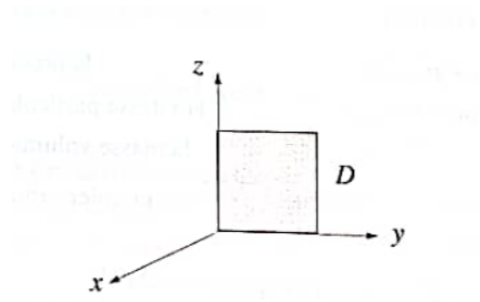


FIGURE 1

Justifier la forme $p(z, y, z, t) = Y(y)Z(z)\exp(i(kx - \omega t))$ sous laquelle on va rechercher des solutions de l'équation d'onde.

2. Quelle est la condition imposée à la vitesse du fluide sur les parois? En déduire les conditions imposées aux fonctions $Y(y)$ et $Z(z)$.
3. Démontrer que la pulsation ω et le nombre d'onde k sont liés à la dimension transversale D du tuyau par :

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \frac{\pi^2 c^2}{D^2} (a^2 + b^2), \quad a \text{ et } b \text{ étant des entiers naturels.}$$

4. Les répartitions de $Y(y)Z(z)$ de l'amplitude de la surpression dans la section droite sont appelées modes transverses du tuyau et caractérisés par le couple a, b . À quel couple correspond la propagation d'une onde plane?
5. Exprimer la relation précédente sous la forme $\frac{f}{f_c} = f(\{a, b\}, kD)$ dans laquelle $f_c = \frac{c}{2D}$. Pourquoi appelle-t-on f_c , fréquence de coupure? Le tracé sur la fig. 2 représente les courbes des premiers modes $\{0, 0\}$, $\{1, 0\}$, $\{0, 1\}$ et $\{1, 1\}$. Associer à chacune de ces courbes le mode correspondant.
6. Les instruments réels à section constante sont cylindriques, de rayon a . L'étude se fait de la même façon que pour un tuyau à section carrée mais le résultat fait intervenir d'autres fonctions. La fréquence de coupure la plus basse est alors : $f_c = \frac{1.84c}{2\pi a}$.

- Effectuer l'application numérique pour un tuyau de rayon $a = 1\text{cm}$. L'hypothèse d'une onde plane seule dans le tuyau est-elle plausible?
- On réalise l'expérience suivante : un émetteur d'ultrasons envoie des trains d'onde de fréquence $f_e = 40,0\text{kHz}$, de durée $\Delta t = 500\mu\text{s}$, dans un tuyau cylindrique de diamètre $35,0\text{mm}$. Un récepteur est placé à l'autre extrémité du tuyau, sur l'axe de celui-ci, face à l'émetteur. La distance entre l'émetteur et le récepteur est $L = 201\text{cm}$. On observe à l'oscilloscope les signaux suivants :

L'émetteur est relié à la voie 1 de l'oscilloscope, le récepteur à la voie 2. Expliquer le signal observé au niveau du récepteur. Mesurer la vitesse de propagation des modes observés.

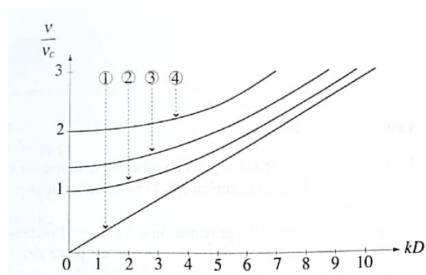


FIGURE 2

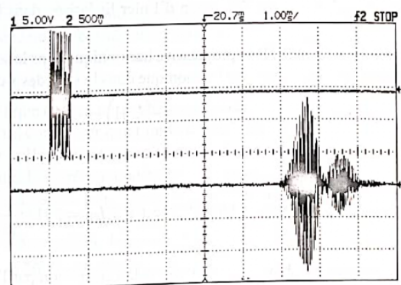


FIGURE 3 – Signal sur l'oscilloscope