TD5

IPESUP - PC

6 Décembre 2023

1 Fusible

Un fusible est constitué par un fil conducteur cylindrique homogène, de section droite d'aire S, de longueur utile L, de masse volumique μ et de capacité thermique massique c. Il possède une conductivité électrique γ et une conductivité thermique K. Il est traversé par un courant électrique continu d'intensité I. Ce fil est enfermé dans une capsule remplie d'une substance assurant une isolation thermique et électrique parfaite. Les températures en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées et égales à la température T_0 du milieu ambiant. Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes, données dans le système international d'unités (SD) : $K = 65$ SI ; γ= 1,2 x 10 SI ; $c = 460$ SI ; μ =$2,7 \times 10^3 kg.m^{-3}$; $T_0 = 290K$; $L = 2,5cm$.

1. Montrer que la résistance d'un conducteur cylindrique de conductivité K de longueur L, de section S, parcouru par un courant I uniformément réparti et parallèle à son axe, est $R = \frac{L}{KS}$ On se place en régime permanent.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T. Donner l'expression littérale de $T(x)$ et représenter graphiquement T en fonction de x.
3. Le matériau constituant le fil fond à $T_f = 390K$. On veut fabriquer un fusible qui admet une intensité maximale $I_{max} = 16A$. Préciser l'endroit de la rupture en cas de dépassement de I_{max}. Déterminer l'expression littérale de l'aire S à prévoir. Faire l'application numérique.
4. On fixe $I = 10A$. Le fil a la section S trouvée à la question précédente. Evaluer littéralement puis numériquement la puissance thermique $P_{th}(0)$ transférée par conduction en $x = 0$. Préciser si cette puissance est reçue ou fournie par le fil. Même question pour la puissance thermique $P_{th}(L)$ transférée en $x = L$. Quelle relation a-t-on entre $P_{th}(0)$, $P_{th}(L)$ et la puissance électrique P fournie à l'ensemble du fil ? Commenter.

2 Durée de survie d'un plongeur

Un plongeur est équipé de sa combinaison. On note T_e, la température de l'eau environnante, uniforme et constante. La température initiale du plongeur est $T_{i0} = 37$°C. Les pertes thermiques ont lieu au niveau de la peau et de la combinaison.

1. Rappeler l'expression de la résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel, en fonction de la section S, de l'épaisseur e et de la conductivité thermique γ.
2. On modélise les pertes par convection par un flux thermique surfacique $\Phi = Sh(T - T_e)$ Quelle résistance R_c peut-on associer aux pertes par convection ?
3. On modélise les pertes par rayonnement par un flux thermique $\Phi_r = \sigma(T^4 - T_e^4)$ où σ est la constante de Stefan. On suppose $|T - T_e| << T_e$,. Montrer que l'on peut associer aux pertes par rayonnement une résistance thermique R_r dont on donnera l'expression en fonction de σ, T_e, et de la surface S du système.
4. Quelle est alors la résistance thermique R_T équivalente à l'ensemble en fonction de R_c, R_r, R_{peau}, et R_{combi} ?
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_i(r)$ sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain est $q = 120W$ et sa capacité thermique massique $c = 3.5kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

6. Pour $T_e = 17$°C, au bout de combien de temps le plongeur est-il en hypothermie, c'est-à- dire que sa température corporelle est descendue à 35°C ? Pour l'application numérique, on prendra la masse du plongeur $m = 75kg$, la surface totale de la combinaison $S = 1,3m^2$, $R_{peau} = 3,0 \times 10^{-2}K.W^{-1}$, σ =$5,7 \times 10^{-8}W.m^{-2}.K^{-4}SI.$, $h = 10W.m^{-2}.K^{-1}$, l'épaisseur e de la combinaison e = 3 mm et la conductivité thermique de la combinaison $\lambda = 4,4 \times 10^{-2}W.m^{-1}.K^{-1}$

3 Datation de l'age de la Terre

La Terre est assimilée à un milieu semi-infini occupant tout le demi-espace z ¿ 0. On admet que la température ne dépend que de la profondeur z (comptée positivement) et du temps t. La planète a une conductivité λ , une masse volumique ρ et une capacité thermique massique c, toutes trois uniformes. On note $j_Q(z, t)$ la densité de courant thermique.

1. Établir rapidement l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $j_Q(z, t)$ (équation (1)). À On notera D la diffusivité thermique, $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.
   Au milieu du XIX° siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre a été formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément sa surface a été soumise à une température T_s. Depuis ce temps là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de formation de la Terre.
2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de courant thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro, et lorsqu'il tend vers l'infini ?
3. On admet que la fonction $f(z, t) = -\frac{1}{\sqrt{Dt}}exp(\frac{-z^2}{4Dt})$ est solution de l'équation (1). Vérifier que la solution proposée par Lord Kelvin, $j_Q(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}}exp(\frac{-z^2}{4Dt})$ où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de courant thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.
4. On suppose que $A = a(T_o - T_s)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c^\delta$, où a, α, β, γ et δ, où sont des exposants éventuellement nuls. Calculer α, β, γ et δ par analyse de l'homogénéité de la formule de Lord Kelvin.
5. On peut montrer que $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Exprimer $\frac{\partial T}{\partial z}$ la valeur du gradient thermique en surface de la Terre . Lord Kelvin a admis que $T_0 - T_s$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de $10^{-6}m^2.s^{-1}$. L'augmentation de température avec la profondeur mesurée dans les mines indiquait un gradient thermique proche de 30 K/km. Quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?
6. Que pensez vous de l'estimation précédente de l'âge de la Terre ? Quel est le ou les ingrédients physiques que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ? Pourquoi l'a-t-il (ou les a-t-il) négligé(s) ?