TD4

IPESUP - PC

29 Novembre 2023

1 Rappels de cours

Loi de Fourier :

$\vec{j} = -\lambda \vec{grad}(T)$

Equation de diffusion thermique avec terme de source :

$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta(T) + \mathcal{P}_v$

Coefficient de diffusivité thermique :

$a = \frac{\lambda}{\rho c}$

Résistance thermique :

$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$

matériau	$a \times 10^6$ en $m^2.s^{-1}$
cuivre	$1,2 \times 10^{-4}$
acier	$\simeq 10^{-5}$
béton	$\simeq 5 \times 10^{-7}$
eau	$1,4 \times 10^{-7}$
air	$\simeq 2 \times 10^{-5}$

(a) Quelques valeurs de diffusivité thermique

matériau	λ à 300 K en $W.m^{-1}.K^{-1}$
cuivre	$4,0 \times 10^2$
acier	$\simeq 50$
béton	$\simeq 1$
eau	$6,0 \times 10^{-1}$
air (sous $P = 10^5$ Pa)	$2,6 \times 10^{-2}$

(b) Quelques valeurs de conductivité thermique

FIGURE 1 – Valeurs utiles

2 Les pingouins

On modélise un pingouin par un parallépipède rectangle de section carrée de côté $a = 10cm$ et de hauteur $l = 50cm$ Le pingouin maintient sa température interne $T = 37°C$ au moyen d'un apport métabolique $\mathcal{P}_1 = 50W$ qui compense les pertes par conduction thermique au travers de son revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1,0\ cm$ et de conductivité thermique λ.

1. Déterminer la valeur de la conductivité thermique λ du revêtement de plume sachant que la température extérieure (y compris au niveau du sol) est $T_e = -20°C$.
2. Pour faire face à des températures extrêmes, neuf pingouins se serrent les uns contre les autres, formant un carré de 3 x 3 pingouins. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques. De combien le métabolisme nécessaire au maintien de la température interne, rapporté à un pingouins, est-il réduit lorsque les neuf pingouins se serrent les uns contre les autres ?

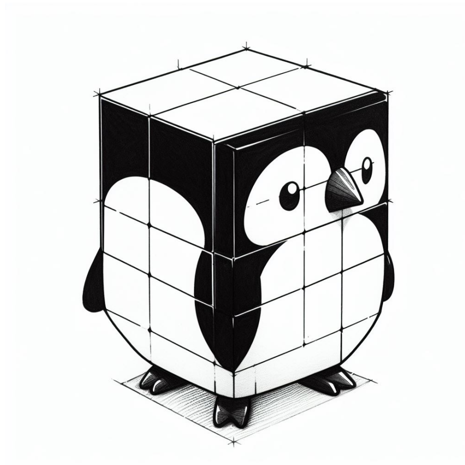

FIGURE 2 – Schéma d'un pingouin parallélépipèdique

3 Puits Canadien

Le puits canadien est un système de préchauffage passif de l'air utilisant les réserves d'énergie du sol entourant la maison. En faisant passer l'air dans une canalisation enterrée dans le sol, celui-ci se réchauffe, ce qui permet de réduire fortement la consommation électrique de chauffage en hiver, ainsi que les émissions de CO_2, qui en résultent. Dans cet exercice, un modèle simple de ce dispositif est étudié. Une entrée d'air est située à une distance L de la maison. Une pompe à l'intérieur de la maison permet de faire circuler l'air dans un tuyau de section S enterré à une profondeur h dans le sol.

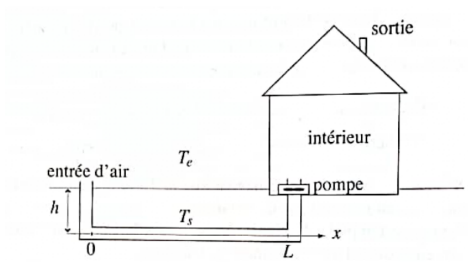

FIGURE 3 – Schéma de fonctionnement d'un puits canadien

On suppose que les échanges thermiques ne se font que dans la partie horizontale de la canalisation (cylindre de rayon R), comprise entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$. L'air est considéré comme un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante c_p, de masse volumique μ et de conductivité thermique λ. On suppose que la température $T(x)$ est uniforme sur une section droite du tube. L'air se déplace à la vitesse v constante et uniforme. il entre dans la canalisation en $x = O$, à la température $T_e = 10$ °C.

Les échanges thermiques le long de la paroi entre l'air et le sol sont décrits par le flux thermique surfacique : $\Phi = h(T(x) - T_s)$, où $h = 6{,}5\ W.m^{-2}.K^{-1}$

(a) En supposant que la température extérieure suit la loi $T(0,t) = T_e + T_1 cos(\omega t)$, déterminer la loi de variation de la température dans le sol $T(z,t)$ en la cherchant de la forme $T(z,t) = T_0 + f(z)cos(\omega t - \phi(z))$, avec z la profondeur, nulle à la surface. A quelle profondeur doit-on enterrer la canalisation pour que les variations de température du sol autour de cette dernière soient inférieures à $2°C$?
Dans la suite, on considérera que la température du sol autour de la canalisation est uniforme et constante et vaut T_s

(b) En appliquante le premier principe de la thermodynamique au système fermé constitué de l'air contenu dans la portion de canalisation comprise entre les plans d'abscisse x et $x + dx$

à l'instant t, montrer que la température $T(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{c_p\mu v}{\lambda}\frac{dT}{dx} - \frac{2h}{\lambda R}(T(x) - T_s) = 0 \qquad (1)$$

(c) À quelle condition sur λ,L,μ, c_p et v peut-on négliger le transfert thermique par diffusion devant le transfert thermique par convection ? Donner un ordre de grandeur de la vitesse de l'air dans le tuyau pour que cette approximation soit valable. Simplifier alors (1)

(d) Résoudre cette équation en faisant apparaitre une longueur caractéristique δ à exprimer en fonction des paramètres du problème.

(e) Établir l'expression littérale de la longueur L de canalisation nécessaire à l'obtention d'une température d'entrée de l'air dans la maison égale à T_L donnée. Pourquoi le puits permet de réduire fortement la consommation électrique de chauffage ? Quelle peut être l'utilité du puits en été (il est appelé également « puits provençal ») ?

(f) Le volume de la maison est $V = 800m^3$, le rayon de la canalisation est $R = 10cm$, l'air extérieur est à la température $T_e = 30°C$. On veut renouveler l'air de la maison en 2 heures. Quelle doit être la valeur de la vitesse v ?

(g) Quelle doit être la longueur de la canalisation pour que la température d'entrée de l'air dans la maison soit de $20°C$?