TD 9 - Equations de Maxwell et ondes élctromagnétiques dans le vide

IPESUP - PC

20/10/24

1 Rappels de cours

Equations de Maxwell :

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$div(\vec{B}) = 0$$
$$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$rot(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Conductivité d'un milieu :
On définit la conductivité γ d'un milieu par la relation $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Aspect énergétique :

1. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière : $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$
2. Densité volumique d'énergie électromagnétique : $u_{em} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2)$
3. Vecteur densité de courant d'énergie (ou vecteur de Poynting) : $\vec{\pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$
4. Conservation de l'énergie : $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + div(\vec{\pi}) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$

Ondes électromagnétiques dans le vide :
Equation de propagation du champ électromagnétique (équation d'Alembert) : $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$, avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

Capacités exigibles :

1. Savoir énoncer les équations de Maxwell.
2. Lien entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$
3. Puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière, densité volumique d'énergie électromagnétique, vecteur densité de courant d'énergie (ou vecteur de Poynting), conservation de l'énergie.
4. Retrouver l'équation d'Alembert à partir des équations de Maxwell.

2 Bilan énergétique d'un cylindre conducteur

On considère un cylindre conducteur (γ), de rayon a, parcouru par un courant I uniforme.

1. Calculer $\vec{j}$ et en déduire $\vec{E}$.
2. Calculer le champ magnétique dans le conducteur et en déduire la densité volumique d'énergie électromagnétique puis l'énergie électromagnétique totale contenue dans le conducteur.
3. Calculer la puissance cédée par le champ électromagnétique au conducteur par effet joule, et en déduire la résistance du conducteur.

3 Paradoxe de Feynman :

On considère un solénoïde semi-infini de rayon a, posé sur une plaque pouvant pivoter autour de l'axe (Oz) et parcouru par un courant $i(t)$., avec $i(t) = I$, pour $t < 0$. Sur la plaque sont disposées N charges $q > 0$ à une distance b de l'axe. A $t = 0$, on coupe le courant. Que se passe-t-il ?

On donne le rotationnel en coordonnées cylindriques :
$\vec{rot}(\vec{f}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$

4 Onde électromagnétique dans le vide

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide. On la représentation complexe du champ électrique de cette onde :

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_0 cos(\frac{\pi y}{a}) exp(i(\omega t - k_0 z)) \\ \underline{\alpha} E_0 sin(\frac{\pi y}{a}) exp(i(\omega t - k_0 z)) \end{cases}$$

avec $\underline{\alpha}$ un nombre complexe et k_0 positif.

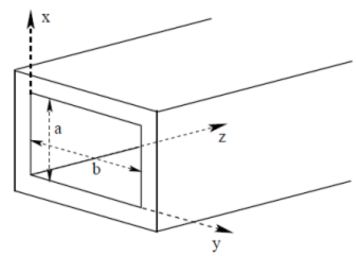
1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde.
3. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.
4. Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité volumique d'énergie.

5 Situation qu'on rencontre dans la vie de tous les jours

On considère un cylindre chargé uniformément en surface et pouvant tourner autour de son axe horizontal. Une masse M est suspendue au bout d'un fil inextensible enroulé autour du cylindre. On lâche la masse, déterminer $\omega(t)$ la vitesse angulaire du cylindre.

6 Guide d'ondes rectangulaire

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs (sur la figure ci-dessous x=0, x=a, y=0, y=b) délimitent un guide d'onde de longueur infinie suivant Oz, de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide (permitivité ϵ_0, perméabilité μ_0). On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω, dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E} = f(x,y)cos(\omega t - k_g z)\vec{u_x}$. Dans cette expression : f désigne une fonction réelle des variables y et x, et k_g est une constante positive. On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$, où λ_g est la "longueur d'onde guidée" et on notera : $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$



1. Montrer que f ne dépend que de y puis déterminer l'équation différentielle à laquelle est soumise $f(y)$.
2. Résoudre cette équation et introduire un entier n correspondant à différents modes propres.
3. Déterminer $\vec{B}$.
4. Exprimer k_g en fonction de ω, c, n et b. En déduire λ_g en fonction de λ_0, b et n.
5. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
6. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ de l'onde en fonction de c, n et du rapport $\frac{f}{f_c}$, f étant la fréquence de l'onde.
7. Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Quelle est la valeur moyenne $< \vec{\Pi} >$ dans le temps de ce vecteur ? En déduire la puissance moyenne transmise par une section droite du guide d'ondes.
8. Calculer la valeur moyenne, dans le temps de la densité d'énergie volumique de l'énergie électromagnétique $< u >$
9. A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. Quelle relation simple peut-on constater entre v_e et v_ϕ ?