KDR

Classe de MP3

Année 2012 - 2013

Table des matières

1 Approximation décimale d'un réel.

Énoncé Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on pose : $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $y_n = x_n + \dfrac{1}{10^n}$.

- (x_n) est une suite croissante qui converge vers x.
- (y_n) est une suite décroissante qui converge vers x.

Démonstration $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $p_n = \lfloor 10^n x \rfloor$, $x_n = \dfrac{p_n}{10^n}$, $y_n = \dfrac{p_n + 1}{10^n}$.

On a, par définition de la partie entière :

$$\begin{cases} p_n & \leqslant & 10^n x & < & p_n + 1 \\ p_{n+1} & \leqslant & 10^{n+1} x & < & p_{n+1} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10p_n & \leqslant & 10^{n+1} x & < & 10p_n + 10 \\ p_{n+1} & \leqslant & 10^{n+1} x & < & p_{n+1} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10p_n - 10 & < & -10^{n+1} x & \leqslant & -10p_n \\ p_{n+1} & \leqslant & 10^{n+1} x & < & p_{n+1} + 1 \end{cases}$$

En sommant, on obtient :

$$p_{n+1} - 10p_n - 10 < 0 < p_{n+1} + 1 - 10p_n$$

Or $(p_{n+1} - 10p_n - 10) \in \mathbb{Z}$ et $(p_{n+1} + 1 - 10p_n) \in \mathbb{Z}$, alors :

$$p_{n+1} - 10p_n - 9 \leqslant 0 \leqslant p_{n+1} - 10p_n$$

$p_{n+1} - 10p_n \geqslant 0$ alors $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ et (x_n) est croissante.

$y_{n+1} - yn = x_{n+1} + \dfrac{1}{10^{n+1}} - \left(x_n + \dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{1}{10^{n+1}}\left(p_{n+1} - 10p_n - 9\right) \leqslant 0$

Donc (y_n) est décroissante.

On a, d'après la définition de la partie entière :

$$p_n \leqslant 10^n x < p_n + 1$$

$$x_n \leqslant x < x_n + \frac{1}{10^n}$$

$$x - \frac{1}{10^n} < x_n \leqslant x$$

Alors, par encadrement (x_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$

$y_n = x_n + \left(\dfrac{1}{10}\right)^n \to x + 0 = x$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = x$

2 Convergence d'une suite d'entiers et $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^N, Sup(A) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Énoncé Une suite d'entiers relatifs est convergente dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est stationnaire.

Démonstration Soit $(p_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

Supposons que (p_n) converge dans $\mathbb{R}$ vers $a \in \mathbb{R}$

Posons $u_n = |p_{n+1} - p_n|$

$\lim u_n = |a - a| = 0$

On a $0 < \dfrac{1}{12}$ donc $\exists N \in \mathbb{N} | \forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{12}$

$\forall n \geqslant N, \underbrace{|p_{n+1} - p_n|}_{\in \mathbb{N}} \leqslant \dfrac{1}{12}$ donc $|p_{n+1} - p_n| = 0$

Ainsi, $\forall n \geqslant N, p_{n+1} = p_n = p_N$

(p_n) est stationnaire.

Énoncé Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure - resp. une borne inférieure - dans $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers Sup A - resp. vers Inf A.

Démonstration Soit A $\in \mathscr{P}(\mathbb{R})$

Supposons que Sup A existe dans $\mathbb{R}$

A $\neq \varnothing$:

EF : Supposons A $= \varnothing$. Dès lors, $\text{Maj}_{\mathbb{R}}\text{A} = \mathbb{R}$:

> **EF :** Soit $x \in \mathbb{R}$,
>
> > Supposons $\exists a \in \varnothing \mid a > x$.
> >
> > $a \in \varnothing$, c'est absurde.
> >
> > Donc $\forall a \in \varnothing, a \leqslant x$.
> >
> > x est un majorant de $\varnothing$.
> >
> > **FEF**
>
> Comme $\mathbb{R}$ n'admet pas de plus petit élément, Sup A n'existe pas. Ce qui est en désaccord avec le choix de A pour la démonstration. Ainsi A $\neq \varnothing$
>
> **FEF**

Soit $n \in \mathbb{N}$

Sup A $- \dfrac{1}{n+1} < \underbrace{\text{Sup A}}_{\text{PPDM de A}}$ Donc Sup A $- \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de A.

Ainsi, $\exists a_n \in A | \text{Sup A} - \dfrac{1}{n+1} < a_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose du réel a_n

On a donc une suite (a_n) vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A \\ \text{Sup A} - \frac{1}{n+1} < a_n \leqslant \text{Sup A} \end{cases}$$

Par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \text{Sup A}$.

3 L'irrationnel e.

Énoncé Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ les suites définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

1. $\left((u_n)_{n\geqslant 1}, (v_n)_{n\geqslant 1}\right)$ est un couple de suite adjacentes. On pose par définition : $e = \lim u_n$.
2. Le réel e est irrationnel.

Démonstration Soient u_n et v_n les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$.

– $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ donc u_n est strictement croissante.

– $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n\,(n+1)\,(n+1)!} < 0$ donc v_n est strictement décroissante.

– $v_n - u_n = \frac{1}{nn!}$

$lim\,(v_n - u_n) = 0$ donc $((u_n), (v_n))$ est un couple de suites adjacentes.

– $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant e \leqslant v_n$

Supposons $e \in \mathbb{Q}$.

$\exists p \in \mathbb{Z}$ et $\exists q \in \mathbb{N}^* \mid e = \frac{p}{q}$

$u_0 = 1 \leqslant e$ donc $e > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$u_n \leqslant e \leqslant v_n$$

En fait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < e < v_n$:

EF : Supposons $\exists p \in \mathbb{N} \mid u_p \geqslant e$ mais $u_p \leqslant e$.

Donc $u_p = e$ et $e = u_p < u_{p+1}$ car (u_n) est strictement croissante.

$e < u_{p+1}$. C'est donc absurde.

De même avec v_n.

FEF

En particulier pour q :

$$u_q < e < v_q$$

$$u_q < \frac{p}{q} < u_q + \frac{1}{qq!}$$

$$\underbrace{qq!u_q}_{\in\mathbb{N}} < \underbrace{pq!}_{\in\mathbb{N}} < \underbrace{1 + qq!u_q}_{\in\mathbb{N}}$$

C'est absurde.

Ainsi e est irrationnel.

4 Équivalent simple de l'intégrale de Wallis.

Énoncé

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Démonstration Posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt$

Montrons que : $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$

EF : $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \sin^2(t) \, dt$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \left(1 - \cos^2(t)\right) dt$

$= W_n + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin(t))^n \cos(t)] \times (-cos(t)) \, dt$

$= W_n + \left[\dfrac{(\sin(t))^{n+1}}{n+1} (-\cos(t))\right] - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\sin(t))^{n+1}}{n+1} sin(t) \, dt$

$= W_n - \dfrac{1}{n+1} W_{n+2}$

Donc $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) W_{n+2} = W_n$

FEF

W_n est décroissante :

EF : $W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \underbrace{(\sin(t) - 1)}_{\leqslant 0} dt \leqslant 0$

$0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

FEF

$$(n+2) W_{n+2} = (n+1) W_n$$

$$(n+2) W_{n+2} W_{n+1} = (n+1) W_{n+1} W_n$$

$U_{n+1} = U_n$ avec $U_n = (n+1) W_{n+1} W_n$

La suite U_n est constante égale à U_0.

$$U_0 = W_1 W_0 = 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) W_{n+1} Wn = \frac{\pi}{2}$$

On a :

$$W_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \text{ et } (n+1) W_{n+1} W_n$$

$$W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

On voudrait $W_{n+1} \sim W_n$

$W_{n+1} \sim W_n$:

EF :

- $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], (\sin(t))^n > 0$ donc $W_n \geqslant 0$ car $\dfrac{\pi}{2} \geqslant 0$

  Supposons $W_n = 0$

  $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt = 0$

  $t \mapsto (\sin(t))^n$ est continue et positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $(\sin(t))^n = 0$.

  Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. C'est absurde.

  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 0$

- W_p est décroissante, donc $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$

$$\frac{1}{W_n} > 0 \text{ donc } \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

$$\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant \underbrace{1}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$$

  Par passage à la limite : $\lim \dfrac{W_{n+1}}{W_n} = 1$

FEF

$W_{n+1}W_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$ et $W_{n+1}W_n \sim W_nW_n \sim {W_n}^2$

Par transitivité : ${W_n}^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$

On élève à la puissance $\dfrac{1}{2}$: $|W_n| = W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ car $W_n \geqslant 0$

5 Théorème de Cesàro et ses applications.

Théorème Soit $(x_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^*}$ et $L \in \mathbb{K}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = L$.

Démonstration Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$

$y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

Soit $\varepsilon > 0$

$$|y_n - L| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} L\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L)\right|$$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - L)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|(x_k - L)|$$

$\lim x_n = L$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant N, (x_k - L) \leqslant \frac{\varepsilon}{12}$ car $\frac{\varepsilon}{12} > 0$

Pour $n \geqslant N$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|(x_k - L)| \leqslant \frac{K}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|x_k - L| \text{ avec } \underset{\text{indépendant de n}}{\underset{\uparrow}{K}} = \sum_{k=1}^{N}|x_k - L|$$

$$\leqslant \frac{K}{n} + \underbrace{\frac{n-N+1}{n}}_{\leqslant 1}\frac{\varepsilon}{12}$$

$$\leqslant \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon}{12}$$

Or $\lim \frac{K}{n} = 0$ donc $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, \left|\frac{K}{n} - 0\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{12}$

$N_1 = max\,(N, N_0)$

Pour $n \geqslant N_1$, $|y_n - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} \leqslant \varepsilon$

Donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, |y_n - L| \leqslant \varepsilon$$

C'est-à-dire : $\lim y_n = L$

Applications Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = L$
2. Si $(\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = L$

Résolution

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = L$.

   Pour $n \geqslant 1$, $\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n}\left((u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_1 - u_0)\right) + \frac{u_0}{n}$

   Par Cesàro : $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L + 0 = L$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$

   Supposons $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ donc, par passage à la limite : $L \geqslant 0$.

$$u_n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(u_n)} = e^{v_n}$$

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n}\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\ln\left[\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times ... \times \frac{u_1}{u_0}\right) \times u_0\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) + \frac{\ln(u_0)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(L) + 0 \end{aligned}$$

   $\lim v_n = \ln(L)$

   Puis $\lim u_n = e^{\ln(L)} = L$ par continuité de l'exponentielle.

6 Convergence de (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n u_n}$. Convergence de $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ avec $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]0,1]$ et vérifiant $\forall t \in]0,1], |f'(t)| \leqslant 1$.

Énoncé

1. Convergence de (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n u_n}$.
2. Convergence de $\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ avec $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]0,1]$ et vérifiant $\forall t \in]0,1], |f'(t)| \leqslant 1$

Résolution

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n \times u_n}$

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$:

   EF : $u_0 = 1 > 0$

   Supposons $u_n \geqslant 1$; $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n \times u_n}$ existe et $u_{n+1} \geqslant 1$.

   FEF

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^n \times u_n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

   Soit $\varepsilon > 0$,

$$|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} u_{k+1} - u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k|$$

$$\leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2 \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$ (N est indépendant de p).

   Donc (u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}$ est complet donc (u_n) converge dans $\mathbb{K}$.

2. $\forall n \geqslant 1, u_n = f\left(\dfrac{1}{n}\right)$

   $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, dérivable sur $]0,1]$ et vérifiant $\forall t \in]0,1], |f'(t)| \leqslant 1$.

   f est 1-lipschitzienne sur $]0,1]$.

   Pour $n \geqslant 1$, $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}\right) \in]0,1]^2$

$$\left|f\left(\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left|\sum_{k=n}^{n+p-1} u_{k+1} - u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} |u_{k+1} - u_k|$$

$$\leqslant \sum_{n}^{n+p-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$.

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$

Si on suppose $n \geqslant N$ alors $\forall p \in \mathbb{N}, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \, |u_{n+p} - u_n| \leqslant \varepsilon$

(u_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc elle converge dans $\mathbb{R}$.

7 Théorème du point fixe.

Énoncé Soit $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que A est une partie fermée et non vide de $\mathbb{R}$, que A est stable par f et que f est contractante sur A.

L'application f admet un unique point fixe l dans A.

Démonstration f est contractante sur A : $\exists k \in [0,1[\,, \forall (x,y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$

On recherche un l tel que $f(l) = l$

Soit $a \in A$, car $A \neq \varnothing$, soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n)$

Cette suite est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in A$ car A est stable par f - récurrence...

(a_n) converge :

EF :

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leqslant k|a_n - a_{n-1}|$$

$$\leqslant k^2 |a_{n-1} - a_{n-2}|$$

$$...$$

$$\leqslant k^n |a_1 - a_0|$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} a_{i+1} - a_i \right| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |a_{i+1} - a_i|$$

$$\leqslant |a_1 - a_0| k^n (1 + k + ... + k^n) \leqslant |a_1 - a_0| k^n \frac{1-k^p}{1-k}$$

$$\leqslant \frac{|a_1 - a_0|}{1-k} k^n \text{ car } 0 \leqslant k < 1$$

Soit $\varepsilon > 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-k} k^n = 0$

$\exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indépendant de p}}}{N} \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \dfrac{|a_1 - a_0|}{1-k} k^n \leqslant \varepsilon$

Ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, |a_{n+p} - a_n| \leqslant \varepsilon$$

(a_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge dans $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R}$ est complet.

FEF

Posons $l = \lim a_n$, $\lim a_{n+1} = l$

f est continue sur A car lipschitzienne sur A.

A est fermé, (a_n) est une suite d'éléments de A qui tend vers l, donc $l \in A$.

f est continue sur A, donc en l : $\lim a_n = l$, $\lim f(a_n) = f(l)$

$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) = a_{n+1}$

Par passage à la limite : $l = f(l)$ et $l \in A$: l est un point fixe dans A.

Supposons $L \in A$ et $f(L) = L$.

$$\left|\underbrace{f(L)}_{=L} - \underbrace{f(l)}_{=l}\right| \leqslant k\,|L-l|$$

$$|L-l| \leqslant k\,|L-l|$$

$$|L-l|\underbrace{(1-k)}_{>0} \leqslant 0$$

Ainsi $|L-l| \leqslant 0$ puis $L = l$

Alors le point fixe l est unique.

8 (11) Séries de Bertrand.

Énonce Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. $\sum\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration Posons $a_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$. Pour $n \geqslant 2$, $a_n > 0$. On pense que n^α a tendance à imposer son comportement pour $\alpha > 1$.

– **Premier cas :** $\alpha > 1$

On souhaiterai appliquer la règle de Riemann, pour cela prenons $\delta = \frac{1+\alpha}{2}$. On a $1 < \delta < \alpha$.

$$n^\delta a_n = \frac{1}{n^{\alpha-\delta} (\ln(n))^\beta}$$

Or $\alpha - \delta > 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\delta a_n = 0$. D'après la règle de Riemann : $a_n = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$ car $\delta > 1$.
Donc $\sum \frac{1}{n^\delta}$ converge - car $\delta > 1$. Puis $\sum a_n$ converge.

– **Deuxième cas :** $\alpha < 1$

Prenons $\delta = \frac{1+\alpha}{2}$. On a $\alpha < \delta < 1$.

$$n^\delta a_n = \frac{n^{\delta-\alpha}}{(\ln(n))^\beta}$$

Or $\delta - \alpha > 0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\delta a_n = +\infty$.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, n^\delta a_n \geqslant 1$$

Pour $n \geqslant N$, $a_n \geqslant \frac{1}{n^\delta} > 0$.
$\sum \frac{1}{n^\delta}$ diverge - car $\delta < 1$, donc $\sum a_n$ diverge.

– **Troisième cas :** $\alpha = 1$

$$a_n = \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Supposons $\beta \leqslant 0$, on a $-\beta \geqslant 0$.
$a_n = \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geqslant \frac{(\ln(2))^{-\beta}}{n}$ car $t \to (\ln(t))^{-\beta}$ est croissante sur $[2, +\infty[$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum a_n$ diverge.

Supposons $\beta > 0$ $a_n = f(n)$ avec $f(t) = \frac{1}{t (\ln(t))^\beta}$ décroissante, continue et positive sur $[2, +\infty[$. Donc $\sum\limits_{n \geqslant 2} a_n$ est de même nature que la suite $(I_n)_{n \geqslant 2}$ avec

$$I_n = \int_2^n f = \int_2^n \frac{1}{t (\ln(t))^\beta} dt$$

M. Roussel : « Ce théorème est utile si on sait évaluer I_n, ici c'est le cas. »

$$I_n = \int_2^n (\ln(n))^{-\beta} \frac{1}{t} dt$$

$$I_n = \begin{cases} \left[\frac{(\ln(t))^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right]_2^n & si\ \beta \neq 1 \\ [\ln|\ln(t)|]_2^n & si\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left[(\ln(n))^{1-\beta} - (\ln(2))^{1-\beta}\right] & si\ \beta \neq 1 \\ \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) & si\ \beta = 1 \end{cases}$$

$(I_n)_{n\geqslant 2}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

9 (17) Formule de Stirling.

Énoncé

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration Il s'agit de montrer que $n! \sim C \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-n}$

Posons $U_n = n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\dfrac{1}{n!}$ et montrons que $V_n = \ln\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \left(n+\dfrac{1}{2}\right) \times ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1$ est le terme général d'une série convergente.

En faisant un développement limité en 0 a l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ on obtient :

$$V_n = \left(n+\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - 1 = \frac{1}{12 \times n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'ou :

$$\sum_{k=1}^{n} V_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(U_{n+1}) - \ln(U_n)\right) \text{ converge.}$$

Puis $(\ln(U_n))$ converge vers L disons, et (U_n) converge aussi vers $C = exp(L)$. On a donc l'equivalence souhaitée.

Déterminons la constante C :

En posant $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\, dt$, il vient $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times W_n$ et on sait que $W_n \underset{(1)}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

On a alors :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p-2}W_{2p-2} = ... = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p)^2}W_0$$

Or $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p)^2} \times \frac{\pi}{2} \sim \frac{C\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}\sqrt{2p}}{2^{2p}C^2\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}p} \times \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2p} \underset{(2)}{\sim} \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}$$

Des équivalences (1) et (2) on déduit que :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4p}} \sim \frac{\pi}{C\sqrt{2p}}$$

D'où :

$$\frac{\pi}{C\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ puis } C = \sqrt{2\pi}$$

D'où la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

10 (18) **Critère spécial des séries alternées.**

Énoncé Si (α_n) est une suite réelle décroissante qui tend vers 0, alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ est convergente et si on note A_n la somme partielle d'ordre n, R_n le reste d'ordre n et A la somme de cette série alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$, $|R_n| \leqslant \alpha_{n+1}$ et R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$.

Résolution Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k$.

Montrons que $((A_{2p+1}), (A_{2p}))$ est un couple de suites adjacentes :

Posons $u_p = A_{2p+1}$ et $v_p = A_{2p}$.

- $u_{p+1} - u_p = A_{2p+3} - A_{2p+1} = (-1)^{2p+3} \alpha_{2p+3} + (-1)^{2p+2} \alpha_{2p+2} = \alpha_{2p+2} - \alpha_{2p+3} \geqslant 0$
- $v_{p+1} - v_p = A_{2p+2} - A_{2p} = (-1)^{2p+2} \alpha_{2p+2} + (-1)^{2p+1} \alpha_{2p+1} = \alpha_{2p+2} - \alpha_{2p+1} \leqslant 0$
- $u_n - v_n = A_{2n+1} - A_{2n} = -\alpha_{2n+1} \underset{\infty}{\rightarrow} 0$

Ainsi les suites (A_{2n+1}) et (A_{2n}) convergent vers un même réel A et $\forall n \in \mathbb{N}, A_{2n+1} \leqslant A \leqslant A_{2n}$

Soit $R_n = A - A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \alpha_k$

Montrons que $|R_n| \leqslant \alpha_{n+1}$ et $signe\,(R_n) = signe\left((-1)^{n+1}\right)$:

- $A_{2n+1} + (-A_{2n}) \leqslant A + (-A_{2n}) \leqslant A_{2n} + (-A_{2n}) \Rightarrow (-1)^{2n+1} \alpha_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \Rightarrow -\alpha_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \leqslant \alpha_{2n+1}$

  D'où $|R_{2n}| \leqslant \alpha_{2n+1}$ et R_{2n} négatif, i.e. du signe de $(-1)^{2n+1}$.
- $A_{2n+3} + (-A_{2n+1}) \leqslant A + (-A_{2n+1}) \leqslant A_{2n+2} + (-A_{2n+1}) \Rightarrow -\alpha_{2n+3} + \alpha_{2n+2} \leqslant R_{2n+1} \leqslant \alpha_{2n+2} \Rightarrow -\alpha_{2n+2} \leqslant 0 \leqslant R_{2n+1}$

  D'où $|R_{2n+1}| \leqslant \alpha_{2n+2}$ et R_{2n+2} positif, i.e. du signe de $(-1)^{2n+2}$.

11 (23) Si B est une base orthonormale de l'espace euclidien E et si u est un endomorphisme de E alors $u \in O(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a)_{ij} \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant n$.

Énoncé Soit u un endormophisme de E.
$u \in O(E) \Leftrightarrow M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration $A = M_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A^tA = I_n \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (u(e_i)|u(e_j)) = \delta_{ij}$

– Supposons $M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (u(e_i)|u(e_j)) = \delta_{ij} \; (*)$$

$(u(e_1), ..., u(e_n))$ est orthonormale (donc libre dans un espace vectoriel de dimension n), ainsi $B' = (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormale de E.

L'image B' de B par u est une base donc u est bijectif.

Soit (x,y) dans E :

$$\begin{cases} x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k & \text{avec} \quad x_k = e_k^*(x) \\ y = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k & \text{avec} \quad y_k = e_k^*(y) \end{cases}$$

B est une Base OrthoNormale (une B.O.N.) donc $(x|y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k) \text{ car } u \text{ est linéaire}$$

Ainsi $x_k = u(e_k)^*(u(x))$, k-ième coordonnée de $u(x)$ dans B' et de même $y_k = u(e_k)^*(u(x))$.

B' est une B.O.N. donc $(u(x)|u(y)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{B' B.O.N.}}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k = (x|y)$

Ainsi u conserve le produit scalaire, $u \in O(E)$.

– Supposons $u \in O(E)$

Comme u conserve le produit scalaire, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}$$

D'après la définition de $A \in O_n(\mathbb{R})$:

$$A = M_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$$

Énoncé Si $A = (a)_{ij} \in O_n(\mathbb{R})$ alors $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant n$.

Démonstration Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associe à A.

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : M_\varepsilon(u) = A$$

Où $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i^* (u(\varepsilon_j))$$

On muni $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel. Dès lors ε est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (u(\varepsilon_j) | \varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} u(\varepsilon_j) | \varepsilon_i \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} u(\varepsilon_j) | \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right) \\ &= \left(u\left(\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \right) | \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \right) \\ &= (u(x) | x) \end{aligned}$$

avec $x = \varepsilon_1 + ... + \varepsilon_n$

Idée : Penser à Cauchy-Schwartz !

$$S \leqslant |(u(x) | x)| \leqslant \|u(x)\| \, \|x\|$$

$A = M_\varepsilon(u)$, ε est une B.O.N. et $A \in O_n(\mathbb{R})$ donc $u \in O(\mathbb{R}^n)$.

$$\|u(x)\| = \sqrt{(u(x) | u(x))} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|$$

Donc $S \leqslant \|x\|^2$.

De plus $x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$ alors $\|x\| = 1 + ... + 1 = n$.

$$S \leqslant n$$

12 (24) Si a est d'ordre fini alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, a^k est d'ordre fini et $\omega\left(a^k\right) = \frac{\omega(a)}{k \wedge \omega(a)}$

Énoncé Si a est d'ordre fini alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, a^k est d'ordre fini et $\omega\left(a^k\right) = \dfrac{\omega(a)}{k \wedge \omega(a)}$.

Démonstration Supposons a d'ordre fini i.e. $\omega(a) < +\infty$.

On peut donc écrire $a^{\omega(a)} = 1_G$ et $\forall m \in \mathbb{Z}$, $a^m = 1_G \Rightarrow \omega(a) | m$

$$< a^k >= \left\{\left(a^k\right)^q, q \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{a^{kq}, q \in \mathbb{Z}\right\} \subset \{a^p, p \in \mathbb{Z}\} = \underbrace{< a >}_{\text{fini}}$$

Donc a^k est d'ordre fini i.e. $\omega\left(a^k\right) < +\infty$.

Posons : $d = k \wedge \omega(a)$.

$d = 0 \Leftrightarrow k = 0$ et $\omega(a) = 0$ or $\omega(a) \geqslant 1$ donc $d \neq 0$.

On dispose de $k = dk'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$ et de $\omega(a) = d\omega'$ avec $\omega' \in \mathbb{Z}$. Par théorème : $k' \wedge \omega' = 1$.

Montrons que $\omega\left(a^k\right) = \dfrac{\omega(a)}{d} = \omega'$.

Théorème : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, (a|b \text{ et } b|a) \Leftrightarrow |a| = |b|$

Ici : $\omega' \in \mathbb{N}$ et $\omega\left(a^k\right) \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \omega' = \omega\left(a^k\right) & \Leftrightarrow \quad \omega' \mid \omega\left(a^k\right) \\ \omega\left(a^k\right) \mid \omega' & \end{cases}$$

$$\left(a^k\right)^{\omega'} = a^{k\omega'} = a^{d\omega' k'} = a^{\omega(a)k'} = \left(a^{\omega(a)}\right)^{k'} = 1_G^{k'} = 1_G$$

Ainsi : $\omega\left(a^k\right) \mid \omega'$.

$\underbrace{d\omega'}_{=\omega(a)} | d\omega\left(a^k\right)$ (car $d \neq 0$)

$$a^{k' d\omega\left(a^k\right)} = a^{k\omega\left(a^k\right)} = \left(a^k\right)^{\omega\left(a^k\right)} = 1_G$$

Ainsi : $\omega(a) \mid k' d\omega\left(a^k\right)$ i.e. $d\omega' \mid k' d\omega\left(a^k\right)$ et comme $d \neq 0$, $\omega' \mid k'\omega\left(a^k\right)$.

Or $\omega' \wedge k' = 1$ donc d'après Gauss : $\omega' \mid \omega\left(a^k\right)$

On a donc montré : $\omega\left(a^k\right) = \omega'$.

13 (32) Inégalité de convexité.

Théorème Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe sur I.
$\forall (x_1, ..., x_n) \in I^n, \forall (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

Démonstration

$$P(n) : \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n, \forall (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

On a bien $P(1)$ car $\forall x \in I, f(x) \leqslant f(x)$.

Supposons $P(n)$. Soient $(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$.

Supposons que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$.

$$o \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_1 + ...\alpha_n + \alpha_{n+1} \leqslant 1$$

Premier cas : $\alpha_{n+1} = 1$.

Alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!], \alpha_i = 0 \left(0 \leqslant \alpha_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 0\right)$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f(\alpha_{n+1} x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) = \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$$

On a donc bien l'inégalité souhaitée.

Second cas : $\alpha_{n+1} \neq 1$

Comme $\alpha_{n+1} \leqslant 1$ on a $1 - \alpha_{n+1} > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

$$= (1 - \alpha_{n+1}) y_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

En utilisant la définition d'une fonction convexe on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = f((1 - \alpha_{n+1}) y_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leqslant (1 - \alpha_{n+1}) f(y_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

car f est convexe sur I, que $\alpha_{n+1} \in [0, 1]$ et que $(y_n, x_{n+1}) \in I^2$.

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ avec } \lambda_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}}$$

$\lambda_i \geqslant 0$ car $\alpha_i \geqslant 0$ et $1 - \alpha_i > 0$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{1-\alpha_{n+1}} \times (1-\alpha_{n+1}) = 1$$

D'après $P(n)$ on a : $f(y_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leqslant (1-\alpha_{n+1}) f(y_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \leqslant (1-\alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}} f(x_i) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i)$$

Ainsi dans les deux cas $P(n+1)$ est vérifié !

Proposition Si $x_1, ..., x_n$ sont des réels strictement positifs alors $\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.

Démonstration Soit $x_1, ..., x_n$ dans $\mathbb{R}^{*+}$.

$$(x_1 \times ... \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(-\ln(k))$$

$(-\ln)' = -\dfrac{1}{Id_{\mathbb{R}^{*+}}}$ et $(-\ln)'' = \dfrac{1}{(Id_{\mathbb{R}^{*+}})^2} > 0$
Ainsi $-ln$ est convexe sur $\mathbb{R}^{*+}$.
$\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ donc on a bien :

$$-\ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(-\ln(k))$$

Donc on obtiens l'égalité souhaitée : $\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leqslant \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$

14 (34) Une équation fonctionnelle qui se ramène à une équation différentielle - Exercice 4.3.

Énoncé Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifient :
$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = e^x$

Résolution Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = e^x$
Soit $f'' + \widetilde{f} = e_1$ avec $e_1 : x \to e^x$ On a : $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
$\exists! (g, h) \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times I(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f = g + h$

$$g = \frac{1}{2}\left(f + \widetilde{f}\right)$$

g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car f et $\widetilde{f}$ le sont.
De même h est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$(g+h)'' + \widetilde{g+h} = e_1$$

$$g'' + h'' + \widetilde{g} + \widetilde{h} = e_1$$

$\widetilde{g} = g$ et $\widetilde{h} = -h$ car g est paire et h est impaire.

$$g'' + g + h'' - h = ch + sh$$

g est paire donc g' est impaire puis g'' est paire. Alors $g'' + g$ est paire.
De même $h'' - h$ est impaire.

$$\underbrace{(g'' + g)}_{\in P(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \underbrace{(h'' - h)}_{\in I(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \underbrace{ch}_{P(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \underbrace{sh}_{I(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

Par unicité de la décomposition - $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\left\{\begin{array}{cccc} g'' & + & g & = & ch \\ h'' & - & h & = & sh \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} (H_1) & y'' & + & y & = & 0 & \quad (L_1) & y'' & + & y & = & ch \\ (H_2) & y'' & - & y & = & 0 & \quad (L_2) & y'' & - & y & = & sh \end{array}$$

Solution de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de (H_1) :

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H_1) = \left\{\alpha \cos + \beta \sin, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$= \mathbb{R}\cos + \mathbb{R}\sin$$

$$= \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H_2) = \mathrm{Vect}(ch, sh)$$

On constate que $\dfrac{1}{2}ch$ est une solution de (L_1). Ainsi

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_1\right) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}ch}_{\text{point de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}} + \underbrace{\mathbb{R}\cos + \mathbb{R}\sin}_{\text{Sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}}_{\text{Sous espace affine de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$

On remarque que :
$(L_2)\ :\ y'' - y = \dfrac{1}{2}\left(e_1 - e_{-1}\right) = \dfrac{1}{2}e_1 - \dfrac{1}{2}e_{-1}$

$$\begin{array}{lccccc} (L_3) & y'' & - & y & = & \frac{1}{2}e_1 \\ (L_4) & y'' & - & y & = & -\frac{1}{2}e_{-1} \end{array}$$

Rappel du cours de MPSI : Si l'on est en présence d'une équation différentielle de la forme $(L) : y'' + ay' + by = Qe_\alpha$ où Q est une fonction polynôme et e_α est la fonction qui à t associe $e^{\alpha t}$, on s'intéresse au polynôme caractéristique $P = X^2 + aX + b$. Trois cas sont envisageables :

- Si $P(\alpha) \neq 0$ alors on cherche une solution de (L) sous la forme Re_α avec $degR = degQ$
- Si α est racine simple de (L), alors on cherche une solution de (L) de la forme XRe_α avec $degR = degQ$
- Si α est racine double de (L), alors on cherche une solution de (L) de la forme X^2Re_α avec $degR = degQ$

Application pour (L_3) : 1 est racine simple de son polynôme caractéristique et ici $Q = \dfrac{1}{2} \to degQ = 0$.
Donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \lambda Id_{\mathbb{R}}e_1 \\ y' & = & \lambda\left(e_1 - Id_{\mathbb{R}}e_1\right) \\ y'' & = & \lambda\left(2e_1 + Id_{\mathbb{R}}e_1\right) \end{array}\right.$$

On a donc $y'' - y = 2\lambda e_1$. Pour que y soit solution de (L_3) on prend $\lambda = \dfrac{1}{4}$.
Posons $y = \dfrac{1}{4}Id_{\mathbb{R}}e_1$. On constate que $y'' - y = \dfrac{1}{2}e_1$ donc $\dfrac{1}{4}Id_{\mathbb{R}}e_1 \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_3\right)$.

De même pour (L_4), avec -1 racine simple, on pose $y = \dfrac{1}{4}Id_{\mathbb{R}}e_{-1}$.
On constate que $y'' - y = -\dfrac{1}{2}e_{-1} \Rightarrow \dfrac{1}{4}Id_{\mathbb{R}}e_{-1} \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_4\right)$.

Par superposition : $\dfrac{1}{4}Id_{\mathbb{R}}\left(e_1 + e{-1}\right) = \dfrac{1}{2}Id_{\mathbb{R}}ch \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_2\right)$.
Donc $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_2\right) = \dfrac{1}{2}Id_{\mathbb{R}}ch + \left(\mathbb{R}ch + \mathbb{R}sh\right)$

$$g'' + g = ch \to g \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_1\right) \Rightarrow \exists\left(\alpha,\beta\right) \in \mathbb{R}^2 \mid g = \frac{1}{2}ch + \alpha\cos + \beta\sin$$

$$h'' - h = sh \to h \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}\left(L_2\right) \Rightarrow \exists\left(\gamma,\delta\right) \in \mathbb{R}^2 \mid h = \frac{1}{2}Id_{\mathbb{R}}ch + \gamma ch + \delta sh$$

g est paire donc $\beta = 0$. Pour cela, il faut calculer $\widetilde{g}$ en utilisant les parité de ch, cos et sin puis utiliser le fait que $\widetilde{g} - g = 0$. Il vient $-2\beta\sin = 0$ cela pour tout $t \in \mathbb{R}$ en particulier pour $t = \dfrac{\pi}{2}$ on obtient $\beta = 0$.

h est impaire donc $\gamma = 0$ (Même raisonnement)
Au final : $f = g + h = \dfrac{1}{2} ch\,(1 + Id_{\mathbb{R}}) + \alpha \cos + \delta \sin$ avec $(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2$

Réciproquement, supposons $\exists\,(a, b) \in \mathbb{R} \mid f = \underbrace{\dfrac{1}{2} ch\,(1 + Id_{\mathbb{R}})}_{bob} + a \cos + b \sin$

Par parité :

$$f'' + \widetilde{f} = bob'' + a \cos'' + bsh'' + \widetilde{bob} + a\widetilde{\cos} + b\widetilde{sh} = bob'' + \widetilde{bob}$$

Après calcul on obtient $bob'' + \widetilde{bob} = ch + sh = e_1$.
Les applications cherchées sont donc les $\left\{ \dfrac{1}{2} ch\,(1 + Id_{\mathbb{R}}) + a \cos + bsh \mid \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

15 (37) Intégrale et inégalité - Exercices 4.19 et 4.21.

Énoncé - Exercice 4.19 Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ convexe sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi \circ f$.

Résolution $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ donc $\int_0^1 f = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ - Somme de Riemann

Remarque : I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
Si f est convexe sur I alors f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

$\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et φ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) = \varphi\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Et $\varphi\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ par convexité de φ.
$\varphi \circ f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ en tant que composée.
Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varphi\circ f)\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi\circ f$$

Par passage à la limite :

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\circ f$$

Énoncé - Exercice 4.21 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $f(a) = 0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$.
Montrer que : $\int_a^b f^3 \leqslant \left(\int_a^b f\right)^2$

Résolution $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$; $f(a) = 0$ et $0 \leqslant f' \leqslant 1$
Soit $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definie par $F(x) = \int_a^x f^3 - \left(\int_a^x f\right)^2$.
f^3 est continue sur $[a,b]$; donc on peut considérer une primitive F_3 de f^3 sur $[a,b]$.
f est continue sur $[a,b]$; donc on peut considérer une primitive F_1 de f sur $[a,b]$.

$$F(x) = F_3(x) - F_3(a) - (F_1(x) - F_1(a))^2$$

F est dérivable sur $[a,b]$.

$$F'(x) = f^3(x) - 2(F_1(x) - F_1(a))f(x)$$

$$F'(x) = f(x)\left(f(x)^2 - 2(F_1(x) - F_1(a))\right)$$

f est croissante sur $[a,b]$ car $f' \geqslant 0$.

$F'(x) = f(x)\, g(x)$, $g(x) = f(x)^2 - 2(F_1(x) - F_1(a))$

g est dérivable sur $[a,b]$ car f et F_1 le sont.

$$g'(x) = 2f(x)\, f'(x) - 2f(x)$$

$$= \underbrace{2f(x)}_{\geqslant 0} \underbrace{(f'(x) - 1)}_{\leqslant 0}$$

g est décroissante et $g(a) = 0$. Alors $g \leqslant 0$.

Donc $F' = fg \leqslant 0$

$\forall x \in [a,b]$, $F(x) \leqslant 0$ et plus spécialement $F(b) \leqslant 0$.

16 (38) Inégalité de Kolmogorov.

Énoncé

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^{+*}, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{h}\|f\|_\infty + \dfrac{h}{2}\|f''\|_\infty$.
2. Établir que $\|f'\|_\infty^2 \leqslant \|f\|_\infty \|f''\|_\infty$

Résolution Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$.

1. f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et f'' est bornée sur $\mathbb{R}$ donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\begin{cases} |f(x+h) - (f(x) + hf'(x))| & \leqslant & \|f''\|_\infty \frac{h^2}{2} \quad (1) \\ |f(x-h) - (f(x) - hf'(x))| & \leqslant & \|f''\|_\infty \frac{h^2}{2} \quad (2) \end{cases}$$

D'après (1) et (2) :

$$\left| \underbrace{[f(x+h) - (f(x) + hf'(x))]}_{=A} - \underbrace{[f(x-h) - (f(x) - hf'(x))]}_{=B} \right| \leqslant |A| + |B| \leqslant \|f''\|_\infty h^2$$

Ainsi : $|(f(x+h) - f(x-h)) - 2hf'(x)| \leqslant \|f''\|_\infty h^2$

Comme

$$|(f(x+h) - f(x-h)) - 2hf'(x)| \geqslant |f(x+h) - f(x-h)| - |2hf'(x)| \,|$$

$$|(f(x+h) - f(x-h)) - 2hf'(x)| \underbrace{\geqslant}_{\text{car } -t \leqslant |t| \text{ pour } t \in \mathbb{R}} -|f(x+h) - f(x-h)| + |2hf'(x)|$$

Il vient :

$$2|h|\,|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant \|f''\|_\infty h^2$$

$$2h\,|f'(x)| \leqslant \|f''\|_\infty h^2 + |f(x+h) - f(x-h)| \leqslant \|f''\|_\infty h^2 + |f(x+h)| + |f(x-h)|$$

$$2h\,|f'(x)| \leqslant \|f''\|_\infty h^2 + 2\|f\|_\infty$$

17 (44) **Produit mixte et produit vectoriel - Exercice 4.6.**

Énoncé Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois et $(a, b, c) \in E^3$. On note $[a, b, c]$ le produit mixte des trois vecteurs a, b, c.

1. Montrer que $|[a, b, c]| \leqslant \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$.
2. Caractériser la condition $|[a, b, c]| = \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$.

Résolution

1.

$$|[a, b, c]| = |(a \wedge b \mid c)| \leqslant \|a \wedge b\| \, \|c\| \text{ - Cauchy-Schwartz}$$

Remarque :

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \, \|b\|^2 - (a \mid b)$$

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \, \|b\|^2 - (a \mid b) \leqslant \|a\|^2 \, \|b\|^2$$

Donc :

$$\|a \wedge b\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$$

D'où :

$$|[a, b, c]| \leqslant \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$$

2. Supposons que $|[a, b, c]| = \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$

$$|[a, b, c]| = |(a \wedge b \mid c)| \underset{\text{Cauchy-Swartz}}{\leqslant} \|a \wedge b\| \, \|c\| \leqslant \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$$

On a donc :

$$|[a, b, c]| = |(a \wedge b \mid c)| = \|a \wedge b\| \, \|c\| = \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$$

D'après le cas d'égalité de Cauchy Schwartz (a, b, c) est liée.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, a \wedge b = \lambda c \text{ ou } c = 0_E$$

– Supposons $c \neq 0_E$

$$a \wedge b = \lambda c \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|a \wedge b\| \, \|c\| = \|a\| \, \|b\| \, \|c\|$$

$$\|a \wedge b\| = \|a\| \, \|b\|$$

$$\|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \, \|b\|^2$$

Alors :

$$(a \mid b)^2 = 0$$

$$(a \mid b) = 0$$

- Premier cas : $\lambda \neq 0$

$$c = \frac{1}{\lambda} a \wedge b$$

$$(c \mid a) = \frac{1}{\lambda} (a \wedge b \mid a) = 0$$

$$(c \mid b) = \frac{1}{\lambda} (a \wedge b \mid b) = 0$$

  Or :

$$(a \mid b) = 0$$

  Donc (a, b, c) est une famille orthogonale.
- Second cas : $\lambda = 0$

$$a \wedge b = 0$$

$$\underbrace{\|a \wedge b\|^2}_{=0} = \|a\|^2 \|b\|^2 - \underbrace{(a \mid b)^2}_{=0}$$

  Alors :

$$\|a\| = 0 \text{ ou } \|b\| = 0$$

$$a = 0_E \text{ ou } b = 0_E$$

- Supposons $c = 0_E$.
  c est nul.

En conclusion : a, b ou c est nul ou la famille (a, b, c) est orthogonale.

Réciproque Supposons a, b ou c nul ou (a, b, c) orthogonale.
- Si $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$ l'égalité est bien vraie.
- Supposons (a, b, c) orthogonale - $a \neq 0_E$, $b \neq 0_E$ et $c \neq 0_E$.

$$|[a, b, c]| = |(a \wedge b \mid c)|$$

  Dès lors (a, b, c) est libre. $dimE = 3$. Donc (a, b, c) est une base orthogonale.
  Posons $e_1 = \dfrac{a}{\|a\|}$, $e_2 = \dfrac{b}{\|b\|}$, $e_3 = \dfrac{c}{\|c\|}$. $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de E.

$$a \wedge b = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$$

  Avec :

$$\alpha = (a \wedge b \mid e_1) = \frac{1}{\|a\|} (a \wedge b \mid a) = 0$$

  De même :

$$\beta = 0$$

Donc :

$$a \wedge b = \gamma e_3 = \gamma \frac{c}{\|c\|}$$

Alors $(a \wedge b, c)$ est liée.

$$|[a, b, c]| = |(a \wedge b \mid c)| = \|a \wedge b\| \, \|c\|$$

$(a \mid b) = 0$ donc $\|a \wedge b\| = \|a\| \, \|b\|$ et on a bien l'égalité souhaitée.

En conclusion :

$$|[a, b, c]| = \|a\| \, \|b\| \, \|c\| \Leftrightarrow \text{ - } a = 0_E \text{ ou } b = 0_E \text{ ou } c = 0_E \text{ - ou } (a, b, c) \text{ est liée.}$$

18 (45) **Inéquation différentielle et inégalité de Gronwall - Exercices 4.18 et 4.20.**

Énoncé - Exercice 4.18 Soit $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : $f'' + \omega^2 f \geqslant 0$
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) \geqslant 0$.

Résolution Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'' + \omega^2 f \geqslant 0$.
Posons : $g = f'' + \omega^2 f$.
$f \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L)$ avec $(L) : y'' + \omega^2 y = g$

$$(H) : y'' + \omega^2 y = 0$$

$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = Vect(\cos_\omega, \sin_\omega)$
Soient $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^2$ dérivables sur $\mathbb{R}$
On pose $y_0 = \alpha\cos_\omega + \beta\sin_\omega$
Montrons qu'il est possible de choisir α et β de sorte que $y_0 \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L)$
y_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ $y_0' = \alpha'\cos_\omega + \beta'\sin_\omega + \alpha(-\omega\sin_\omega) + \beta(\omega\cos_\omega)$
Supposons $\alpha'\cos_\omega + \beta'\sin_\omega = 0$:

$$\begin{cases} y_0 &= \alpha\cos_\omega + \beta\sin_\omega \\ y_0' &= -\omega\alpha\sin_\omega + \omega\beta\cos_\omega \end{cases}$$

y_0' est dérivable sur $\mathbb{R}$
$y_0'' = -\omega\alpha'\sin_\omega + \omega\beta'\cos_\omega - \omega^2\alpha\cos_\omega - \omega^2\beta\sin_\omega$
$y_0'' = -\omega\alpha'\sin_\omega + \omega\beta'\cos_\omega - \omega^2 y_0$

$$y_0'' + \omega^2 y_0 = -\omega\alpha'\sin_\omega + \omega\beta'\cos_\omega$$

$$y_0 \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'\cos_\omega + \beta'\sin_\omega &= 0 \\ \alpha'(-\omega\sin_\omega) + \beta'(\omega\cos_\omega) &= g \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} \cos_\omega & \sin_\omega \\ -\omega\sin_\omega & \omega\cos_\omega \end{vmatrix} = \omega\left(\cos_\omega^2 + \sin_\omega^2\right) = \omega$. D ne s'annule jamais.
On choisit α et β vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha' &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & \sin_\omega \\ g & \omega\cos_\omega \end{vmatrix} &= \frac{1}{\omega}(-g\sin_\omega) \\ \beta' &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \cos_\omega & 0 \\ -\omega\sin_\omega & g \end{vmatrix} &= \frac{1}{\omega} g\cos_\omega \end{cases}$$

Il suffit de prendre $\alpha(x) = \dfrac{-1}{\omega}\displaystyle\int_0^x g\sin_\omega$ et $\beta(x) = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^x g\cos_\omega$.
Cela existe car $g\sin_\omega$ et $g\cos_\omega$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
Dès lors : $y_0 = \alpha\cos_\omega + \beta\sin_\omega \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L)$

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L) = y_0 + S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = y_0 + Vect(\cos_\omega, \sin_\omega)$$

$f \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L)$ donc $\exists (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ f = y_0 + \lambda \cos_\omega + \mu \sin_\omega$

$$f(x) = \frac{-1}{\omega}\left(\int_0^x g(t)\sin(\omega t)\,dt\right)\cos(\omega x) + \frac{1}{\omega}\left(\int_0^x g(t)\cos(\omega t)\,dt\right)\sin(\omega x) + \lambda\cos_\omega + \mu\sin_\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x g(t)\left(\cos(\omega t)\sin(\omega x) - \sin(\omega t)\cos(\omega x)\right)dt + \lambda\cos_\omega + \mu\sin_\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x g(t)\sin(\omega(x-t))\,dt + \lambda\cos_\omega + \mu\sin_\omega$$

Soit $x\in\mathbb{R}$
$f\left(x+\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\int_0^{x+\frac{\pi}{\omega}} g(t)\underbrace{\sin(\omega(x-t)+\pi)}_{-\sin(\omega(x-t))}dt - \lambda\cos_\omega - \mu\sin_\omega$

$$f(x) + f\left(x+\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\frac{\pi}{\omega}} g(t)\sin(w(x-t))\,dt$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\frac{\pi}{\omega}} \underbrace{g(t)}_{\geqslant 0}\underbrace{\sin(w(t-x))}_{\geqslant 0}dt$$

Énoncé - Exercice 4.20 Soient $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ continues sur $[a,b]$.

On suppose qu'il existe $A\geqslant 0$ tel que :

$$\forall x\in[a,b],\ u(x)\leqslant A + \int_a^x uv$$

Montrer que : $\forall x\in[a,b],\ u(x)\leqslant A\exp\left(\int_a^x v\right)$

Résolution Pour $a\in[a,b]$, posons $w(x) = A + \int_a^x uv$ et $l(x) = A\exp\left(\int_a^x v\right)$

Montrons que $u\leqslant l$.

uv est continue sur $[a,b]$. Alors uv admet une primitive F sur $[a,b]$: $F' = uv$.

$$w(x) = A + [F(t)]_a^x = A + F(x) - F(a)$$

$w' = F' = uv$ et $uv\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ donc $w\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.

De même $l\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $l' = vl$

w et l sont dérivables, alors que u est seulement continue.

Posons $\psi = l - w\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$

$$\psi' = l' - w' = vl - uv = \underbrace{v}_{\geqslant 0}(l-u)$$

Donc $u\leqslant w$ i.e. $-u\geqslant -w$ donc $l-u\geqslant l-w$.

Or $v\geqslant 0$ donc $v(l-u)\geqslant v(l-w)$

$\psi' \geqslant v\,(l-w) \geqslant v\psi$ soit $\psi' - w\psi \geqslant 0$

Soit $V : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $V\,(x) = \displaystyle\int_a^x v$
V est dérivable sur $[a,b]$ et $V' = v$

$$0 \leqslant \psi' - v\psi = \psi' = v'\psi$$

$\psi e^{-v} = e^{-v}\,(\psi' - v\psi)$ d'où ψe^{-v} est croissante.

$\psi\,(a) = l\,(a) - w\,(a) = A - A = 0.$
$\psi e^{-v} \geqslant 0$. Or $e^{-v} > 0$ donc $\psi \geqslant 0$ puis $l - w \geqslant 0$

$$u \leqslant w \leqslant l \text{ et } u \leqslant l$$

19 (46) Périodicité et équations différentielles - Exercices 4.1 et 4.2.

Énoncé - Exercice 4.1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application périodique.

1. On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.
2. On suppose que f est continue et que f admet deux périodes strictement positives T_1 et T_2 telles que $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

Résolution

1. On suppose que $\lim\limits_{+\infty} f = L$ avec $L \in \mathbb{R}$. f est périodique donc elle admet une période $T > 0$.

   Soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que $f(a) = L$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = a + nT$

   $T > 0$ donc $\lim a_n = +\infty$

   $\lim\limits_{+\infty} f = L$ et $\lim a_n = +\infty$ donc $\lim f(a_n) = L$.

   $f(a_n) = f\left(a + \underbrace{nT}_{\in P(f)}\right) = f(a)$ donc $\lim f(a_n) = f(a)$ Par unicité de la limite $f(a) = L$. Cela pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ainsi f est constante.

2. On se place dans les hypothèses du 2.

   $P(f)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

   $P(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$ ou bien $\exists a \in \mathbb{R}^+, P(f) = a\mathbb{Z}$.

   $P(f)$ est dense :

   EF : Supposons que $P(f)$ ne soit pas dense dans $\mathbb{R}$.

   $\exists a \in \mathbb{R}^+, P(f) = a\mathbb{Z}$

   $T_1 \in P(f)$ donc $T_1 = ak_1$ avec $k_1 \in \mathbb{Z}$.

   $T_2 \in P(f)$ donc $T_2 = ak_2$ avec $k_2 \in \mathbb{Z}$.

   $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$. Ce qui n'est pas. Donc $P(f)$ est dense.

   FEF

   Soit $x \in \mathbb{R}, \exists (T_n) \in P(f)^{\mathbb{N}}, x = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n$ ($P(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$).

   $f(x) = f(\lim T_n) = \lim f(T_n)$ car f est continue sur $\mathbb{R}$ donc au point $l = \lim T_n$

   $$f(T_n) = f(0 + T_n) = f(0)$$

   $$\lim f(T_n) = f(0)$$

   $f(x) = f(0)$, cela pour tout x. Donc f est constante.

Énoncé - Exercice 4.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et non constante. On lui associe l'équation différentielle linéraire d'ordre 2 $(L) : y'' + 2y' + 2y = f$.

1. Résoudre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

2. Montrer que (L) ne peut admettre dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux solutions périodiques distinctes.

Résolution $(H) : y'' + 2y' + 2y = 0$

$P = X^2 + 2X + 2 = (X+1)^2 + 1 = (X+1)^2 - i^2 = (X+1-i)(X+1+i)$

Les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont $-1-i$ et $-1+i$.

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \{e_{-1}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)), \alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}\}$$

Prenons $\omega = 1$,

$$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \{e_{-1}(\alpha\cos + \beta\sin), \alpha\in\mathbb{R}, \beta\in\mathbb{R}\}$$

Supposons qu'il existe y_1, y_2 dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solutions et y_1, y_2 sont périodiques.

$$y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = f = y_2'' + 2y_2' + 2y_2$$

Montrons que $y_1 = y_2$

Posons $z = y_1 - y_2$

$$z'' + 2z' + 2z = 0$$

$z \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H)$ donc $\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, z = (\alpha\cos + \beta\sin)$

y_1 est T_1 périodique avec $T_1 > 0$.

y_2 est T_2 périodique avec $T_2 > 0$.

y_1'', y_1' et y_1 sont T_1 périodiques donc $f = y_1'' + 2y_1 + 2y_1$ est T_1 périodique.

De même f est T_2 périodique.

D'après l'exo 1 - ci-dessus, $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \text{ avec } p\in\mathbb{N}^*,\ q\in\mathbb{N}^*$$

$$T = qT_1 = pT_2$$

y_1 est T périodique car T_1 périodique.

y_2 est T périodique car T_2 périodique.

$z = y_1 - y_2$ est T périodique - Exo 4.1, ci-dessus.

$$|z| \leqslant \underbrace{(|\alpha| + |\beta|)\,e_{-1}}_{\underset{+\infty}{\to}0}$$

$\lim\limits_{+\infty} z = 0$

z est T périodique. D'après 4.1, z est constante.

$\lim\limits_{+\infty} z = 0$ donc $z = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}$. Donc $y_1 = y_2$.

20 (47) Limite, continuité - Exercices 5.10, 5.12 et 5.13.

Énoncé - Exercice 5.10 Pour $x \geqslant 1$ on pose : $f(x) = x^x \lfloor x \rfloor^{-\lfloor x \rfloor}$

Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Résolution $f(x) = \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$

$$x^x = e^{x\ln(x)} \text{ et } \lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor} = e^{\lfloor x \rfloor \ln(\lfloor x \rfloor)}$$

f est définie sur $[1, +\infty[$.

Supposons que $\lim\limits_{+\infty} f$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et posons $\lim\limits_{+\infty} f = l$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = 1$$

$x_n = n$ pour $n \geqslant 1$. $\lim x_n = +\infty$ donc $\lim f(x_n) = l$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) = 1$. Donc $l = 1$.

Posons : $y_n = n + \dfrac{1}{2}$ pour $n \geqslant 1$.

$$f(y_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{e^{n\ln(n)}} = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)-n\ln(n)} = e^{u_n}$$

$$u_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left[n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] - n\ln(n)$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - n\ln(n)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(n) + \underbrace{\left(n+\frac{1}{2}\right)}_{\geqslant 0}\underbrace{\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{2n}\right)}_{\geqslant 1}}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{1}{2}\ln(n)$$

$\lim \dfrac{1}{2}\ln(n) = +\infty$ donc $\lim u_n = +\infty$ puis $\lim f(y_n) = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} y_n = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = l$ donc $\lim\limits_{+\infty} f(y_n) = l$

Alors $l = +\infty$.

Or $1 = l = +\infty$

Énoncé - Exercice 5.12 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 et en 1 qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right)$

Résolution Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Supposons f continue en 0 et en 1 et telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(x^2\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R}, f(-t) = f\left((-t)^2\right) f\left(t^2\right) = f(t)$. Donc f est paire.

Soit $t \in \mathbb{R}^+, f(t) = f\left(\left(\sqrt{t}\right)^2\right) = f\left(\sqrt{t}\right)$

Supposons que $x > 0$

$$f(x) = f(\sqrt{x})\, f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(e^{\frac{1}{2}\ln(x)}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = f\left(x^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}\right)$$

En itérant : $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right)$

$$x^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2^n}\ln(x)} \to e^0 = 1$$

f est continue au point 1 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(1)$

Par passage à la limite : $f(x) = f(1)$

Par parité : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1$

$\lim\limits_{t\to 0,\neq} f(t) = \lim\limits_{0} f = f(0)$ par continuité de f en 0

Par passage à la limite : lorsque $x \to 0, x \neq 0$ $f(0) = f(1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1)$. Donc f est constante.

Énoncé - Exercice 5.13 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Résolution Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Supposons que f soit continue sur $\mathbb{R}$, que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

Posons $g = f - Id_{\mathbb{R}}$

$g(\mathbb{R}) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

EF : Soit $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = f(x) - x$

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ puis $f(x) - x = g(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $f(x) \in \mathbb{Q}$ puis $f(x) - x = g(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

FEF

$\mathbb{R}$ est un intervalle et g est continue, donc $g(\mathbb{R})$ est un intervalle.

De surcroît $g(\mathbb{R})$ est non vide car $g(12) \in g(\mathbb{R})$

$\exists \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, g(\mathbb{R}) = \{\xi\}$:

EF : Supposons que $g(\mathbb{R})$ ne soit pas un singleton. Il existe x, y dans $g(R)$ tels que $x < y$.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc $\exists r \in \mathbb{Q}, x < r < y$.

$x \in g(\mathbb{R})$, $x \in g(\mathbb{R})$ et $g(\mathbb{R})$ est un intervalle donc $[x, y] \subset g(\mathbb{R})$ et $r \in g(\mathbb{R})$.

$g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

FEF

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \xi$

$f(\xi) = 2\xi$ et $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ donc $2\xi = f(\xi) \in \mathbb{Q}$

Donc $\xi \in \mathbb{Q}$. Ce qui n'est pas.

D'où il n'existe pas d'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$

21 (48) Topologie matricielle.

Énoncé $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration Soit

$$f : \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^tM \end{array}$$

f est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

EF :

$$f : \begin{array}{lclcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{g} & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{h} & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & (M, {}^tM) & \longmapsto & M^tM \end{array}$$

g est linéaire et $dim\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) < +\infty$ donc g est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

h, qui n'est autre que le produit matriciel, est continue car bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

Donc f est continue en tant que composée.

FEF

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = I_n\} = {}^{-1}f(\{I_n\})$ et $\{I_n\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Soit a l'endomorphisme canoniquement associé à A.
$a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $M_\varepsilon(a) = A$ où ε est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
$dim\ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) < +\infty$ donc toutes les normes sont équivalentes...
On munit donc $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et on note $\|.\|$ sa norme associé.
Dès lors, la base ε est orthonormale.
$A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $a \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.
a conserve donc le produit scalaire et on a $\|a(\varepsilon_j)\| = \sqrt{(a(\varepsilon_j)\,|a(\varepsilon_j))} = \sqrt{(\varepsilon_j|\varepsilon_j)} = \|\varepsilon_j\|$.
Comme $a(\varepsilon_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$, $\|a(\varepsilon_j)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2$ car ε est une Base Orthonormale.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1$$

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, |a_{ij}| \leqslant |a_{ij}|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant 1 \text{ puis } \|A\|_\infty \leqslant 1$$

Ainsi $\forall A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty \leqslant 1$: $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

Comme les compacts dans les espaces vectoriels normés de dimension finie sont les fermés bornés, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.

Énoncé $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid detA \neq 0\} = {}^{-1}det(\mathbb{K} \setminus \{0\})$

$\{0\}$ est un fermé de $(\mathbb{K}, |\ |)$, $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert de $(\mathbb{K}, |\ |)$.

Le déterminant est continu :

EF : Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$det(M) = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} \varepsilon(\sigma) m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)} = \sum\limits_{\sigma \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})} \varepsilon(\sigma) M^*_{1\sigma(1)} \cdots M^*_{n\sigma(n)}$

Or les $E^*_{ij} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ sont continues comme formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Puis pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n, \varepsilon(\sigma) M^*_{1\sigma(1)} \cdots M^*_{n\sigma(n)}$ est continue comme produit de fonctions continues.

Finalement, det est continu comme somme de fonctions continues.

FEF

Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons q'il existe une suite d'élements de $GL_n(\mathbb{K})$ qui converge vers A.

Posons $A_k = A + \frac{1}{k+1}$. On a $\lim A_k = A$.

$$det(A_k) = det\left(\frac{1}{k+1} + A\right)$$

$\chi_A = det(XI_n - A)$. D'où $det(A_k) = \chi_{-A}\left(\frac{1}{k+1}\right)$

Par ailleurs, $\chi_{-A} = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$. Il suffit de considèrer A comme une matrice à valeurs dans $\mathbb{C}$, le polynôme χ_{-A} y est alors scindé de degré n et on appelle λ_i ses n valeurs propres.

Posons $r = \underset{\Lambda \setminus \{0\}}{inf} (|\lambda|)$ où $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.

Éventuellement, si $\Lambda \setminus \{0\} = \varnothing, r = +\infty$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, |t| < r \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!], t \neq \lambda_i \ (*)$$

$\lim \frac{1}{k+1} = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall k \geqslant N, 0 < \frac{1}{k+1} < r$.

D'après $(*)$: $\forall k \geqslant N, \frac{1}{k+1} \neq \lambda_i$ pour tout i dans $|[1, n]|$.

Ainsi $\forall k \geqslant N, det(A_k) = \chi_{-A}\left(\frac{1}{k+1}\right) \neq 0$ i.e. $A_k \in GL_n(\mathbb{K})$

(A_k) est donc une suite d'élements de $GL_n(\mathbb{K})$ qui, de surcroît, converge vers A.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists (A_k) \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \mid \lim A_k = A : GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Énoncé L'application $\left(M \mapsto M^{-1}\right)$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Démonstration $\forall M \in GL_n(\mathbb{K}), M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)} \times {}^t com(M)$

Or pour $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $com(M) = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(M \mapsto M_{ij})$ est linéaire donc continue car $dim\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) < +\infty$. De plus det est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par composée $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (M \mapsto c_{ij})$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$com(M) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} c_{ij}E_{ij}$ d'où $(M \mapsto com(M))$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par produit et somme d'applications continues.

La transposition est linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie donc continu.

Le déterminant est continu et ne s'annule pas sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Par composition et produit, $\left(M \mapsto M^{-1}\right)$ est contiue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Théorème Soient $(E, \| \ \|_E), (F, \| \ \|_F), (G, \| \ \|_G)$, trois espaces vectoriels normés et $B : E \times F \to G$ bilinéaire.
Si $dim(E) < +\infty$ et si $dim(F) < +\infty$ alors B est continue sur $E \times F$.

Démonstration Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire.

Supposons $dim(E) < +\infty$ et $dim(F) < +\infty$, montrons que : $\exists k \in \mathbb{R}^* | \forall (x,y) \in E \times F, \|B(x,y)\|_G \leqslant k\|x\|_E\|y\|_F$.

Dés lors, B étant bilinéaire, l'application est continue sur son ensemble de définition.

Soit $(x,y) \in E \times F$.

$p = dim(E) < +\infty$ donc on peut considèrer une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E.

$q = dim(F) < +\infty$ donc on peut considèrer une base $\mathcal{C} = (f_1, \cdots, f_q)$ est une base de F.

$$x = \sum_{i=1}^{p} e_i^* e_i \text{ et } y = \sum_{j=1}^{q} f_j^* f_j$$

Par bilinéarité :

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} e_i^* f_j^* B(e_i, f_j)$$

$$\|B(x,y)\|_G \leqslant \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \underbrace{|e_i^*|}_{\leqslant N_{\infty,\mathcal{B}}} \underbrace{|f_j^*|}_{\leqslant N_{\infty,\mathcal{C}}} \|B(e_i,f_j)\|_G \leqslant N_{\infty,\mathcal{B}} N_{\infty,\mathcal{C}} \underbrace{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \|B(e_i,f_j)\|_G}_{M}$$

$dim(E) < \infty$ donc toutes les normes y sont équivalentes ; en particulier $N_{\infty,\mathcal{B}} \sim \| \ \|_E$.

C'est-à-dire : $\exists \alpha > 0 | N_{\infty,\mathcal{B}} \leqslant \alpha \| \ \|_E$ et $\exists \beta > 0 | N_{\infty,\mathcal{C}} \leqslant \beta \| \ \|_F$.

Dès lors, $\|B(x,y)\|_G \leqslant k\|x\|_E\|y\|_F$ avec $k = M\alpha\beta$ indépendant de x et y. C.Q.F.D.

22 (49) Réunion de sous espaces vectoriels.

Énoncé Soit E un$K$-espace vectoriel et F et G des sous espaces vectoriels de E.

1. $F \cup G$ est un sous espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Si $F \neq E$ et $G \neq E$ alors $F \cup G \neq E$.

Démonstration

1. Supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E.

   Supposons $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$:

   Alors $\exists a \in F \mid a \notin G$ et $\exists b \in G \mid b \notin F$.

   $a \in F$ donc $a \in F \cup G$ et $b \in G$ donc $b \in F \cup G$.

   Ainsi $a + b \in F \cup G$ i.e. $a + b \in F$ ou $a + b \in G$.

   1 cas : $a + b \in F$.

   $$b = \underbrace{(a+b)}_{\in F} - \underbrace{a}_{\in F} \in F \text{ ce qui n'est pas.}$$

   2 cas : $a + b \in G$.

   $$a = \underbrace{(a+b)}_{\in G} - \underbrace{b}_{\in G} \in G \text{ ce qui n'est pas.}$$

   Dans tous les cas, c'est absurde. Alors $F \subset G$ ou $G \subset F$.

   Réciproquement, supposons $F \subset G$ ou $G \subset F$:

   Alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ et $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E.

2. Supposons $F \neq E$ et $G \neq E$.

   Supposons $F \cup G = E$:

   Alors $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E et $F \subset G$ ou $F \subset G = F$.

   Puis $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ d'où $G = E$ ou $F = E$, ce qui n'est pas.

   D'où $F \cup G \neq E$.

23 (50) **Projecteurs : la situation de la fin du paragraphe 4 du cours.**

Énoncé Soient E un K-espace vectoriel et p, q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p \circ q = q \circ p$ et on pose : $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur puis établir les égalités : $Ker\,(r) = Ker\,(p) \cap Ker\,(q)$ et $Im\,(r) = Im\,(p) + (q)$

Démonstration

1. $p + q \in L\,(E)$ car $L\,(E, +, \circ, .)$ est une K-algèbre

$$(p+q)^2 = (p+q) \circ (p+q) = p^2 + q \circ p + p \circ q + q^2 = p + q \circ p + p \circ q + q$$

$$p + q \text{ est un projecteur} \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0$$

Supposons $p \circ q + q \circ p = 0$.
Alors :

$$p \circ (p \circ q + q \circ p) = p \circ 0 = 0$$

Donc :

$$p \circ q + p \circ q \circ p = 0$$

$$(p \circ q + q \circ p) \circ p = p \circ q \circ p + q \circ p = 0 \circ p = 0$$

Ainsi :

$$p \circ q - q \circ p = 0$$

Il vient :

$$2p \circ q = 0 = 2q \circ p$$

On suppose $2_K \neq 0_K$. Dès lors $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$.
Si $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$ alors $p \circ q + q \circ p = 0$

$$p + q \text{ projecteur de } E \Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow p \circ q = 0 \text{ et } q \circ p = 0$$

2. On suppose $p \circ q = q \circ p$

$$r = p + q - p \circ q \in L\,(E) \;\text{ car } L\,(E)\,\text{est une K-algèbre}$$

$$r^2 = r \circ r = r \circ (p + q - p \circ q) = r \circ p + r \circ q - r \circ (p \circ q)$$

Calculons $r \circ p$:

$$r \circ p = p^2 + q \circ p - p \circ q \circ p = p + q \circ p - p \circ p \circ q$$

$$= p + p \circ q - p \circ q = p$$

De même : $r \circ q = q$.

Calculons $r \circ (p \circ q)$:

$$r \circ (p \circ q) = (r \circ p) \circ q = p \circ q$$

Alors :

$$r^2 = p + q - p \circ q = r$$

Donc r est un projecteur. Calculons $p \circ r$ et $q \circ r$

$$p \circ r = p \circ (p + q - p \circ q) = p + p \circ q - p \circ q = p$$

De même $q \circ r = q$.

Soit $x \in Ker\left(r\right)$.

$$p\left(x\right) = \left(p \circ r\right)\left(x\right) = p\left(r\left(x\right)\right) = p\left(0_E\right) = 0_E$$

Alors $x \in Ker\left(p\right)$.

$$q\left(x\right) = \left(q \circ r\right)\left(x\right) = q\left(r\left(x\right)\right) = q\left(0_E\right) = 0_E$$

Alors $x \in Ker\left(q\right)$. On a donc : $x \in Ker\left(p\right) \cap Ker\left(q\right)$. Ainsi $Ker\left(r\right) \subset Ker\left(p\right) \cap Ker\left(q\right)$.

Soit $x \in Ker\left(p\right) \cap Ker\left(q\right)$

$p\left(x\right) = q\left(x\right) = 0_E$

$$r\left(x\right) = p\left(x\right) + q\left(x\right) - p\left(q\left(x\right)\right) = 0_E + 0_E - 0_E = 0_E$$

$x \in Ker\left(r\right)$

$Ker\left(p\right) \cap Ker\left(q\right) \subset Ker\left(r\right)$

Alors $Ker\left(r\right) = Ker\left(p\right) \cap Ker\left(q\right)$

Soit $y \in Im\left(r\right)$

$$Im\left(r\right) = Ker\left(r - Id_E\right) = \{x \in E \mid r\left(x\right) = x\}$$

$$r\left(y\right) = y = p\left(y\right) + q\left(y\right) - p\left(q\left(y\right)\right) = \underbrace{p\left(y - q\left(y\right)\right)}_{\in Im(p)} + \underbrace{q\left(y\right)}_{\in Im(q)}$$

Ainsi $Im\left(r\right) \subset Im\left(p\right) + Im\left(q\right)$.

Soit $y \in Im\left(p\right) + Im\left(q\right)$

$y = a + b$ avec $a \in Im\left(p\right)$ et $b \in Im\left(q\right)$

$r\left(y\right) = r\left(a\right) + r\left(b\right)$

p est un projecteur donc $Im\left(p\right) = Ker\left(p - Id_E\right)$

$a \in Im(p)$ donc $p(a) = a$. De même $q(b) = b$

$$r(y) = r(p(a)) + r(q(b)) = (r \circ p)(a) + (r \circ q)(b) \underset{\text{car } r\circ p = p \text{ et } r\circ q = q}{\underset{\uparrow}{=}} p(a) + q(b) = a + b = y$$

$y \in Im(r)$.

Alors $Im(p) + Im(q) \subset Im(r)$.

Et enfin : $Im(r) = Im(p) + Im(q)$.

24 (51) **Automorphismes, images et noyaux : les situations de la fin du paragraphe 5 du cours.**

Énoncé

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $u : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = P - P'$.
   Montrer que u est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et déterminer u^{-1}.
2. Soient E un K-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in L(E)$
   (a) Montrer que : $E = Im(u) \oplus Ker(u) \Rightarrow Im(u) = Im(u^2)$
   (b) Montrer que : $Im(u) = Im(u^2) \Leftrightarrow Ker(u) = Ker(u^2)$
   (c) Montrer que : $Im(u) = Im(u^2) \Rightarrow E = Im(u) \oplus Ker(u)$

Résolution

1.

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$$

u est bien une application linéaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$
u est linéaire par linéarité de la dérivation.

$$u \in L(\mathbb{K}_n[X])$$

Montrons que u est bijective, i.e. $\forall Q \in \mathbb{K}_n[X], \exists! P \in \mathbb{K}_n[X], Q = u(P)$
Soit $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
Supposons : $\exists P \in \mathbb{K}_n[X], Q = u(P)$

$$Q = P - P'$$

$$Q^{(k)} = P^{(k)} - P^{(k+1)} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}$$

$P \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $P^{(n+1)} = 0$

$$P = P - P^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} - P^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$$

Si Q admet un antécédent par u, ce ne peut être que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$

$$\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} \in \mathbb{K}_n[X] \text{ car } Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

$$u\left(\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} - \sum_{k=0}^{n} Q^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} - \sum_{k=1}^{n+1} Q^{(k)} = Q^0 - Q^{n+1} = Q - 0 = Q$$

$\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$ est l'unique antécédent de Q par u, cela pour tout $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

$$\forall Q \in \mathbb{K}_n[X], \exists! P \in \mathbb{K}_n[X], Q = u(P)$$

u est donc bijective ; on dispose de $u^{-1} : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$. $u^{-1}(Q)$ est l'unique antécédent de Q par u, à savoir $\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], u^{-1}(P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$$

2. (a) Supposons $E = Im(u) \oplus Ker(u)$

Tout d'abord $Im\left(u^2\right) \subset Im(u)$:

EF : Soit $x \in E$.

$u(x) \in Im(u) \subset E$

Donc $u(u(x)) \in Im(u)$ car $u(x) \in E$

D'où $Im\left(u^2\right) \subset Im(u)$

FEF

Soit $y \in u(x)$, $\exists x \in E \mid y = u(x)$.

$E = Im(u) + Ker(u)$ donc $x = a + b$ avec $a \in Im(u)$ et $b \in Ker(u)$.

$$y = u(a) + \underbrace{u(b)}_{=0_E} = u(a)$$

Or $a \in Im(u)$ donc $\exists c \in E \mid a = u(c)$.

Ainsi $y = u^2(c) \in Im\left(u^2\right)$.

$Im(u) \subset Im\left(u^2\right)$. Donc $Im(u) = Im\left(u^2\right)$.

(b) • Supposons $Im(u) = Im\left(u^2\right)$.

$Ker(u) \subset Ker\left(u^2\right)$:

EF : Soit $x \in Ker(u)$.

$u(x) = 0_E$

Donc $u(u(x)) = 0_E$ et $0_E \in Ker(u)$ car $u \in L(E)$

D'où $Ker(u) \subset Ker\left(u^2\right)$

FEF

Formule du rang :

$$dim(Ker(u)) = dim(E) - dim(Im(u)) = dim(E) - dim\left(Im\left(u^2\right)\right) = dim\left(Ker\left(u^2\right)\right)$$

Ainsi $Ker(u) = Ker\left(u^2\right)$.

- Supposons $Ker\left(u\right) = Ker\left(u^2\right)$

  $Im\left(u^2\right) \subset Im\left(u\right)$

  $$dim\left(Im\left(u^2\right)\right) = dim\left(E\right) - dim\left(Ker\left(u^2\right)\right) = dim\left(E\right) - dim\left(Ker\left(u\right)\right) = dim\left(Im\left(u\right)\right)$$

  Alors $Im\left(u\right) = Im\left(u^2\right)$

In fine : $Ker\left(u\right) = Ker\left(u^2\right) \Leftrightarrow Im\left(u\right) = Im\left(u^2\right)$

(c) Supposons $Im\left(u\right) = Im\left(u^2\right)$

$Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right) = \{0_E\}$:

EF : Soit $x \in Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right)$.

$x \in Im\left(u\right)$ donc $\exists a \in E \mid x = u\left(a\right)$.

$x \in Ker\left(u\right)$ donc $u\left(x\right) = 0_E$.

Alors $a \in Ker\left(u^2\right)$.

$Im\left(u\right) = Im\left(u^2\right)$ donc d'après (b), $Ker\left(u\right) = Ker\left(u^2\right)$.

$a \in Ker\left(u^2\right)$ donc $a \in Ker\left(u\right)$.

$x = u\left(a\right) = 0_E$.

Alors $Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right) \subset \{0_E\}$ puis $Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right) = \{0_E\}$.

FEF

$Im\left(u\right) + Ker\left(u\right) \subset E$

$$dim\left(Im\left(u\right) + Ker\left(u\right)\right) = \underbrace{dim\left(Im\left(u\right)\right) + dim\left(Ker\left(u\right)\right)}_{=dim(E)} - dim\left(\underbrace{Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right)}_{=\{0_E\}}\right) = dim\left(E\right)$$

$E = Im\left(u\right) + Ker\left(u\right)$ et $Im\left(u\right) \cap Ker\left(u\right) = \{0_E\}$.

Donc $E = Im\left(u\right) \oplus Ker\left(u\right)$.

25 (59) Interpolation de Lagrange - Exercices 6.4 et 6.5.

Énoncé - Exercice 6.4 Soient $P \in \mathbb{Z}_n[X]$ et $d \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $d \mid P(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ alors $d \mid P(k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Résolution $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et les coefficients de P sont dans $\mathbb{Z}$.

Remarque :

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \text{ avec } (a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P(k) = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{a_j}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{k^j}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$$

Soit $d \in \mathbb{Z}$

Supposons que $\forall k \in [\![0, n]\!], d \mid P(k)$

$0, 1, ..., n$ sont deux à deux disctints.

Par théorème, il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], Q(k) = P(k) \text{ : On prend } b_k = P(k)$$

Et $Q = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k$ avec L_k étant le $k^{\text{ième}}$ polynôme interpolateur de Lagrange.

En fait $Q = P$ par unicité. On a donc une écriture de P.

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k \text{ où } L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - i}{k - i}$$

Soit $j \in \mathbb{N} \setminus [\![0, n]\!]$

$$P(j) = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k(j)$$

Pour $k \in [\![0, n]\!], d \mid P(k)$ et $P(k) = d\alpha_k,\ \alpha_k \in \mathbb{Z}$

$$P(j) = d \sum_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(j)$$

Montrons que $\forall k \in [\![0, n]\!], L_k(j) \in \mathbb{Z}$.

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$.

$$L_k(j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{j - i}{k - i} = \frac{j - 0}{k - 0} \times \frac{j - 1}{k - 1} \times ... \times \frac{j - (k-1)}{k - (k-1)} \times \frac{j - (k+1)}{k - (k+1)} \times ... \times \frac{j - n}{k - n}$$

$$= \frac{\frac{j!}{(j-k)!}}{k!} \times \frac{(j - n)(j - (n-1)) ... (j - (k+1))}{(-1)(-2) ... (-(n-k))}$$

Tout ceci à un sens car $0 \leqslant k < n \leqslant j$.

$$L_k(j) = \frac{j!}{k!\,(j-k)!} \times \frac{\frac{(j-(k+1))!}{(j-(n+1))!}}{(-1)^{n-k}\,(n-k)!}$$

$$= \binom{j}{k}(-1)^{n-k}\frac{(j-(k+1))!}{(j-(n+1))!\,\underbrace{([j-(k+1)]-[j-(n+1)])!}_{(n-k)!}}$$

$$= (-1)^{n-k}\binom{j}{k}\binom{j-(k+1)}{j-(n+1)} \in \mathbb{Z}$$

Donc $L_k(j) \in \mathbb{Z}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k(j) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $\forall k \in \mathbb{N}, d \mid P(k)$.

Énoncé - Exercice 6.5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$

Résolution Supposons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|P(k)| \leqslant \dfrac{n!}{2^n}$

$$P(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,L_k \text{ où } L_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{X-i}{k-i}$$

EF : $(L_0, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\exists(\alpha_0, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k L_k$

$P(j) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k \underbrace{L_k(j)}_{\delta_{jk}} = \alpha_j L_j j = \alpha_j$

$P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)\,L_k$

FEF

$$P(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,L_k \text{ où } L_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{X-i}{k-i}$$

$Cd(L_k) = \prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \dfrac{1}{k-i}$

$L_k = Cd(L_k)\,X^n + R_k$ avec $deg(R_k) \leqslant n-1$

$$P = \left(\sum_{k=0}^{n} P(k)\,Cd(L_k)\right)X^n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(k)\,R_k}_{=R}$$

$deg(R) \leqslant n-1$ et $Cd(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)\,Cd(L_k) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{car unitaire}}}{=} 1$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(k) \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{k-i}$$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{k-i} = \frac{1}{k} \times \frac{1}{k-1} \times ... \times \frac{1}{k-(k-1)} \times \frac{1}{k-(k+1)} \times ... \times \frac{1}{k-n}$$

$$= \frac{1}{k!} \times \left(\frac{-1}{1} \times \frac{-1}{2} \times ... \times \frac{-1}{n-k}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{n!}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(k) \binom{k}{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{n!}$$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} P(k) \binom{k}{n} (-1)^{n-k} \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} P(k) \binom{k}{n} (-1)^{n-k}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} |P(k)| \binom{k}{n}$$

$$\text{Inégalité stricte dans l'énoncé : } < \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{2^n} \binom{k}{n}$$

$$n! < \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 1^k 1^{n-k}$$

$$n! < \frac{n!}{2^n} 2^n$$

$$n! < n!$$

C'est absurde.

26 (61) Calcul de A^n.

Énoncé Calcul de A^n pour $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Résolution Cayley-Hamilton : $\chi_A(A) = 0$

On effectue la division euclidienne de X^n par χ_A.

$X^n = \chi_A Q + R$ avec $deg(R) \leqslant 2$

$$A^n = \chi_A(A)\, Q(A) + R(A) = R(A)$$

$R = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

De même $(-1)^n = \underbrace{\chi_A(-1)}_{=0 \text{ car } -1 \text{ racine}} Q(-1) + R(-1)$

$$\chi_A(-1) = \alpha - \beta + \gamma$$

-1 est racine triple : $\chi_A(-1) = \chi_A'(-1) = \chi_A''(-1) = 0$ et $\chi_A^{(3)}(-1) \neq 0$

Pour $n \geqslant 2$:

$nX^{n-1} = \chi_A' Q + \chi_A Q' + R'$

$$n(-1)^{n-1} = -2\alpha + \beta$$

$n(n-1)X^{n-2} = \chi_A'' Q + \chi_A' Q' + \chi_A' Q' + \chi_A Q'' + R''$

$$n(n-1)(-1)^{n-2} = 2\alpha$$

Alors :

$$\alpha = \frac{(-1)^n}{2} n(n-1)$$

$$\beta = (-1)^n n(n-2)$$

$$\gamma = \frac{(-1)^n}{2}(n-1)(n-2)$$

$$A^n = \frac{(-1)^n}{2} n(n-1) A^2 + (-1)^n n(n-2) A + \frac{(-1)^n}{2}(n-1)(n-2) I \text{ pour } n \geqslant 2$$

On verifie que la formule marche également pour tout $n \in \mathbb{N}$.

27 (68) **Étude locale d'une fonction : les situations de de la fin des paragraphes 2 et 3.**

Énoncé Préciser la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \ln\left(3\tan^2\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)$.

Résolution

$$u_n = \ln\left(3\tan^2\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)$$

On veut un équivalent de u_n.

On pose $u_n = \ln(v_n)$, $\lim v_n = 1$ or $\ln(v_n) \underset{1}{\sim} v_n - 1$

Donc :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n - 1 = 3\tan^2\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1$$

$$= \left(\sqrt{3}\times\tan\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)+1\right)\left(\sqrt{3}\times\tan\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)-1\right)$$

$$\underset{+\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)-1\right)$$

$$\sqrt{3}\times\tan\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) - 1 = \sqrt{3}\times\frac{\sin(\theta_n)-\cos(\theta_n)}{\cos(\theta_n)} \text{ avec } \theta_n = \frac{n\pi}{6n+1}$$

$$2\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)-1\right) = 2\times\frac{\left[\sin(\theta_n)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\theta_n)\right]}{\cos(\theta_n)}$$

$$= 2\times\frac{\sin(\theta_n)-\frac{\pi}{6}}{\cos(\theta_n)}$$

$$\sim 2\times\frac{\left(\theta_n-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sim \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\theta_n-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\times\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\theta_n-\frac{\pi}{6}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\theta_n-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\theta_n-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{n\pi}{6n+1}-\frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{6(6n+1)} \sim \frac{-\pi}{36n}$$

$$u_n \sim \frac{-2\pi}{9\sqrt{3}}\times\frac{1}{n}$$

On a donc : $u_n \sim \frac{K}{n}$ avec $K < 0$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

Énoncé Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ch\left(\sqrt{x+1}\right)-ch\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

Résolution

$$f(x) = \left(ch\left(\sqrt{x+1}\right)-ch\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left(ch\left(\sqrt{x+1}\right)-ch\left(\sqrt{x}\right)\right)}$$

f est définie (au moins) sur $[1, 2, ..., +\infty[$. $f(x) = e^{g}(x)$. On s'intèresse à la limite de g.
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ln(h(x))$ et $h(x) = ch\left(\sqrt{x+1}\right) - ch\left(\sqrt{x}\right)$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \to ch(p) - ch(q) = +2 \times sh\left(\frac{p-q}{2}\right) sh\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Ainsi on obtiens :

$$h(x) = 2 \times sh\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right) \times sh\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right)$$

$$sh(u) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{u}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} = +\infty$ donc :

$$sh\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right) \sim \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$sh(u) \underset{0}{\sim} u$ donc $sh\left(\dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$

$$h(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} \times e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

Mais $\overset{+\infty}{\lim\limits_{x}} h(x) \neq 1$ donc :

$$\ln(h(x)) \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right]}_{k(x)}$$

Or $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = o(k(x))$ et $\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = o(k(x))$

$$ln(h(x)) \sim \frac{1}{2} \times \left[\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right]$$

$g(x) \sim \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} + 1\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$$

Énoncé Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$. Déterminer me développement limité à l'ordre 5 de f en 0 et en déduire la valeur de $f^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, 5]\!]$.

Résolution f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc au voisinage de 0.

Développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \times \cos(x) = \left[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o\left(x^5\right)\right] \times \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right) + x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} + o\left(x^5\right) + x^2 - \frac{x^4}{2!} + o\left(x^5\right) + x^3 - \frac{x^5}{2!} + o\left(x^5\right) + x^4 + o\left(x^5\right) + x^5 + o\left(x^5\right)$$

$$f(x) = 1 + x + \left(-\frac{1}{2!} + 1\right) x^2 + \left(-\frac{1}{2!} + 1\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} + 1\right) x^4 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} + 1\right) x^5 + o\left(x^5\right)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{13}{24} x^4 + \frac{13}{24} x^5 + o\left(x^5\right)$$

f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, d'après Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f^{(3)}(0) \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + o\left(x^5\right)$$

Par unicité du développement limité d'ordre 5 en 0 :

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = 1$
- $f''(0) = 1$
- $f^{(3)}(0) = 3$
- $f^{(4)}(0) = 13$
- $f^{(5)}(0) = 65$

Énoncé Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x e^{x^2}$. Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, établir que f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 5 au voisinage de 0.

Résolution f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = [1 + x(2x)] \times e^{x^2} > 0$$

f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ ainsi f induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

On dispose donc de $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Théorème :

- Si f est un homéomorphisme de I sur J.
- Si f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

Alors f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ si est seulement si f^{-1} ne s'annule pas sur I.

f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ et f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc f^{-1} admet un développement limité d'ordre 5 en 0.

$$f_{-1}\left(0\right)=a_0+a_1u+a_2u^2+a_3u^3+a_4u^4+a_5u^5+o\left(u^5\right)$$

$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x$ et $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=0$

$$f\left(t\right)=te^{t^2}=t\times\left(1+t^2+\frac{{t^2}^2}{2!}+o\left(t^4\right)\right)=t+t^3+\frac{t^5}{2}+o\left(t^5\right)$$

f est impaire donc f^{-1} l'est aussi :

EF :

$$f^{-1}\left(-x\right)=f^{-1}\left(-f\left(f^{-1}\left(x\right)\right)\right)=f^{-1}\left(f\left(-f^{-1}\left(x\right)\right)\right)=-f^{-1}\left(x\right)$$

FEF

et donc $a_0=a_2=a_4=0$

$$f^{-1}\left(0\right)=a_1u+a_3u^3+a_5u^5+o\left(u^5\right)$$

$$x=f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=a_1f\left(x\right)+a_3f\left(x\right)^3+a_5f\left(x\right)^5+o\left(f\left(x\right)^5\right)$$

$$f\left(x\right)=x+x^3+\frac{x^5}{2}+o\left(x^5\right)$$

Or $f\left(x\right)\underset{0}{\sim}x$, $f\left(x\right)\underset{+\infty}{\sim}x^5$ et $o\left(f\left(x\right)^5\right)=o\left(x^5\right)$

$$f\left(x\right)^2=x^2-2x^4+o\left(x^5\right)$$

$$f\left(x\right)^3=x^3+2x^5+o\left(x^5\right)+x^5+o\left(x^5\right)=x^3+3x^5+o\left(x^5\right)$$

$f\left(x\right)^5\sim x^5$ donc $f\left(x\right)^5=x^5+o\left(f\left(x\right)^5\right)$

$$x=a_1\left(x+x^3+\frac{x^5}{2}+o\left(x^5\right)\right)+a_3\left(x^3+3x^5+o\left(x^5\right)\right)+a_5\left(x^5+o\left(f\left(x\right)^5\right)\right)+o\left(f\left(x\right)^5\right)$$

$$x=a_1x+\left(a_1x^3\right)x^3+\left(\frac{1}{2}a_1+3a_3+a_5\right)x_5+o\left(x^5\right)$$

Par unicité du développement limité d'ordre 5 en 0 :

- $a_1=1$
- $a_3=-1$
- $a_5=\dfrac{5}{2}$

$$f^{-1}=x-x_3+\frac{5}{2}x^5+o\left(x^5\right)$$

28 (71) **Intégrabilité d'une fonction - Exercice 7.1.**

Énoncé Dans chacun des cas étudier l'intégrabilité de f sur I.

Résolution

1. $f(t) = \dfrac{1}{t^4 + \cos^2(t)}$, $I = [0, +\infty[$
   $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $t^4 + \cos^2(t) > 0$ car t^4 et $\cos^2(t)$ sont positives et ne s'annulent pas en même temps.
   $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[)$ et $f \geqslant 0$
   $$|f(t)| = f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$$
   $4 > 1$ donc $f \in L^1([1, +\infty[)$ puis $f \in L^1([0, +\infty[)$

2. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t + (\ln(t))^2}$, $I =]0, +\infty[$
   $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$ car $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^t + (\ln(t))^2 > 0$ et $f \geqslant 0$
   - $|f(t)| = f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{e^t}$ car $(\ln(t))^2 = \underset{+\infty}{o}(e^t)$
     $$\frac{\sqrt{t}}{e^t} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{12}}\right) \text{ car } \lim_{t \to +\infty} t^{12}\frac{\sqrt{t}}{e^t} = 0$$
     $12 > 1$ donc $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t}$ est intégrable puis $f \in L^1([1, +\infty[)$
   - $|f(t)| = f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^2}$ car $e^t = \underset{0^+}{o}\left((\ln(t))^2\right)$
     $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{-\frac{1}{2}}(\ln(t))^2}$ c'est Bertrand, mais on le montre.
     $$\frac{\sqrt{t}}{(ln(t))^2} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{12}}}\right) \text{ et } \frac{1}{12} < 1$$
     $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{(\ln(t))^2} \in L^1(]0, 1])$, $f \in L^1(]0, 1])$

   D'où $f \in L^1(]0, +\infty[)$

3. $f(t) = \dfrac{1}{t^{\lfloor t \rfloor}}$, $I = [1, +\infty[$
   $f(t) = \dfrac{1}{e^{\lfloor t \rfloor \ln(t)}}$ $f \in M^0([1, +\infty[)$ et $f \geqslant 0$
   Ici on ne peut pas montrer l'intégrabilité en trouvant un équivalent.
   $\forall t \in [12, +\infty[$:
   $$\lfloor t \rfloor \geqslant 12$$
   $$\lfloor t \rfloor \ln(t) \geqslant 12 \ln(t)$$
   $$e^{\lfloor t \rfloor \ln(t)} \geqslant e^{12 \ln(t)}$$

$$0 \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{t^{12}}$$

$12 > 1$ donc $f \in L^1([12, +\infty[)$ d'où $f \in L^1([1, +\infty[)$

4. $f(t) = \dfrac{1}{t^2} e^{\frac{1}{t}}$, $I = [1, +\infty[$

   $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$, $f \geqslant 0$

$$|f(t)| = f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \text{ car } \lim_{+\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1$$

   $2 > 1$ donc $f \in L^1([1, +\infty[)$

5. $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^3}$, $I =]0, 1]$

   $f \in \mathcal{C}^0(]0, 1])$ et $|f(t)| = \dfrac{|\ln(t)|}{t^3}$ - Bertrand

$$t^2 |f(t)| = \frac{|\ln(t)|}{t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   donc $\exists \varepsilon > 0, \forall t \in]0, \varepsilon], t^2 |f(t)| \geqslant 1$

$$\forall t \in]0, \varepsilon], |f(t)| \geqslant \frac{1}{t^2} > 0$$

   $2 > 1$ donc $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\right) \notin L^1(]0, 1])$

   d'où $f \notin L^1(]0, 1])$

6. $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2 + 1}$, I $= [1, +\infty[$

   $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$

$$|f(t)| = \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2}$$

$$\frac{\ln(t)}{t^2} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

   $\dfrac{3}{2} > 1$ donc $\left(t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}\right) \in L^1([1, +\infty[)$

   d'où $f \in L^1([1, +\infty[)$

7. $f(t) = \dfrac{1}{Arccos(1 - t)}$, $I =]0, 1]$

   $Arccos$ est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $]-1, 1[$ avec $Arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

   $\forall t \in]0, 1], 1 - t \in [0, 1[$

   $Arccos(1 - t)$ est défini et n'est pas nul : $f \in \mathcal{C}^0(]0, 1])$, $f \geqslant 0$

$$|f(t)| = \frac{1}{Arccos\,(1-t)} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\,(1-(1-t))}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

car $Arccos\,(u) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2\,(1-u)}$ et $\frac{1}{2} < 1$.
d'où $f \in L^1\,(]0,1])$

8. $f(t) = e^{-t\cos(t)}$, $I = [0, +\infty[$
   $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^+\right)$, $f \geqslant 0$
   $|f(t)| = e^{-t\cos(t)}$ L'équivalent est impossible...
   $\cos(t)$ n'est pas de signe fixe : on peut passer par les séries - comme pour $\dfrac{\sin(t)}{t}$

   PAEA : Pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 0$$

$$0 \leqslant -\cos(t) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant -t\cos(t) \leqslant t$$

$$1 \leqslant e^{-t\cos(t)}$$

   $f \notin L^1\,([0, +\infty[)$
   FPAEA

   Posons $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. (x_n) est croissante et $\lim\limits_{+\infty} x_n = +\infty$. De plus $f \geqslant 0$

$$f \in L^1\left(\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\right) \Leftrightarrow \sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f \text{ converge}$$

   Posons $a_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f \geqslant 0$

$$a_n = \int_{\frac{\pi}{2}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi+2\pi} f \geqslant \int_{\frac{\pi}{2}+2n\pi}^{\frac{\pi}{2}+2n\pi+\pi} f \text{ car } f \geqslant 0$$

   Soit $t \in \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi + \pi\right]$

$$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 0$$

$$0 \leqslant -\cos(t) \leqslant 1$$

$$f(t) \geqslant 1$$

$$a_n \geqslant \int_{x_n}^{x_n+\pi} f \geqslant \int_{x_n}^{x_n+\pi} 1 \geqslant \pi > 0$$

   $\sum \pi$ diverge donc $\sum a_n$ diverge.

On a donc $f \notin L^1\left(\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[\right)$
d'où $f \notin L^1\left([0, +\infty[\right)$

9. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\ln(1+t)}$, $I =]0, +\infty[$ $f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$
   - $|f(t)| = \dfrac{\sqrt{t}\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|}{\ln(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}\left|\frac{1}{t^2}\right|}{\ln(t)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}\left(\ln(t)\right)^1}$

$$\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln(t)} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{12}}}\right)$$

   $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{12} > 1$ donc$\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}\ln(t)}\right) \in L^1\left([1, +\infty[\right)$
   $f \in L^1\left([1, +\infty[\right)$

   - $|f(t)| \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|}{t} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|}{\sqrt{t}}$

$$0 \leqslant \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$$

   $\dfrac{1}{2} < 1$ donc $\left(t \mapsto \dfrac{\left|\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\right|}{\sqrt{t}}\right) \in L^1\left(]0, 1]\right)$ et $f \in L^1\left(]0, 1]\right)$

   D'où $f \in L^1\left(]0, +\infty[\right)$

10. $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2 - 1}$, $I =]0, +\infty[$
   f est continue sur $]0, 1[\bigcup]1, +\infty[$.
   f est-elle continue par morceaux sur $]0, +\infty[$?

$$f(t) = \frac{\ln(t)}{(t-1)(t+1)} \underset{1}{\sim} \frac{t-1}{(t-1)(t-2)} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t+1} \underset{1}{\sim} \frac{1}{2}$$

   $\lim\limits_{1,\neq} f = \dfrac{1}{2}$. Posons $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
   $\lim\limits_{1} f = \dfrac{1}{2} = f(1)$. f est continue au point 1. $f \in \mathcal{C}^0\left(]0, +\infty[\right)$.
   $|f(t)| \underset{0^+}{\sim} |\ln(t)|$. Or $|\ln| \in L^1\left(]0, 1]\right)$. Donc $f \in L^1\left(]0, 1]\right)$.
   $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ et $\dfrac{3}{2} > 1$. Donc $f \in L^1\left([1, +\infty[\right)$

11. $f(t) = \dfrac{e^{-\alpha t}}{t}$, $I =]0, +\infty[$
   $f \in \mathcal{C}^0\left(]0, +\infty[\right)$.

- $|f(t)| \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}\left|\ln\left(\dfrac{t}{1-e^{-t}}\right)\right| \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}\left|\ln\left(\dfrac{te^t}{e^t-1}\right)\right|$

$$\frac{te^t}{e^t-1} \underset{0^+}{\sim} \frac{t\times 1}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \text{ et } \ln(u) \underset{1}{\sim} u-1$$

C'est-à-dire :

$$\ln\left(\frac{te^t}{e^t-1}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{te^t}{e^t-1} - 1 = \frac{te^t-e^t+1}{e^t-1} \underset{0^+}{\sim} \frac{te^t-e^t+1}{t} = \frac{N(t)}{t}$$

$N(t) = t(1+t+o(t)) - \left(1+t+\dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)+1 = \dfrac{t^2}{2}+o\left(t^2\right) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$

$$\ln\left(\frac{te^t}{e^t-1}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2}{2t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{2}$$

$|f(t)| \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Or $\left(t\mapsto \dfrac{1}{2}\right) \in L^1(]0,1])$
$f\in L^1(]0,1])$

- $|f(t)| = \dfrac{e^{-\alpha t}}{t}\left|\ln\left(\dfrac{te^t}{e^t-1}\right)\right|$

$$\frac{te^t}{e^t-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{te^t}{e^t} \underset{+\infty}{\sim} t$$

Or $+\infty \neq 1$: $\ln\left(\dfrac{te^t}{e^t-1}\right) \underset{0^+}{\sim} \ln(t)$ donc $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|\ln(t)|}{t}e^{-\alpha t}$.

– Si $\alpha>0$, alors $|f(t)| = o\left(\dfrac{1}{t^{12}}\right)$ et $12>1$.
  $f\in L^1([1,+\infty[)$.

– Si $\alpha<0$, alors $\lim\limits_{+\infty}|f(t)| = +\infty$
  Et $\exists A>0 \mid \forall t\in[A,+\infty[\,, |f(t)|\geqslant 1$.
  $(t\mapsto 1)\notin L^1([1,+\infty[)$, alors $f\notin L^1([1,+\infty[)$

– Si $\alpha=0$ alors $|f(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t(\ln(t))^{-1}}$ Par Bertrand : $f\notin L^1([1,+\infty[)$

$$f\in L^1(]0,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha>0$$

12. $f(t) = \left(\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}\right)^{\sqrt{t}}$, $I=[0,+\infty[$ $f(t) = e^{\sqrt{t}\ln\left(\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t}\right)}$. $f\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.
On veut un équivalent : développement asymptotique !

$$\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{t}\left(\sqrt[3]{\frac{t+1}{t}}-1\right) \text{ pour } t>0$$

$$= \sqrt[3]{t}\left(\left(\frac{t+1}{t}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right) = \sqrt[3]{t}\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)-1\right)$$

$$= \frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$\ln\left(\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}\right) = \ln\left(\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}\right)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}\left(1 + o\left(1\right)\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{3t^{\frac{2}{3}}}\right) + \ln\left(1 + o\left(1\right)\right)$$

$$= -\ln\left(3\right) - \frac{2}{3}\ln\left(t\right) + o\left(1\right)$$

$$\sqrt{t}\ln\left(\sqrt[3]{t+1} - \sqrt[3]{t}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{t}\ln\left(t\right) - \sqrt{t}\ln\left(3\right) + o\left(\sqrt{t}\right)$$

$$f\left(t\right) = e^{-\frac{2}{3}\sqrt{t}\ln(t) - \sqrt{t}\ln(3) + o\left(\sqrt{t}\right)}$$

$$t^{12}f\left(t\right) = e^{12\ln(t)}f\left(t\right) = e^{-\frac{2}{3}\sqrt{t}\ln(t) - \sqrt{t}\ln(3) + 12\ln(t) + o\left(\sqrt{t}\right)}$$

$$= e^{-\frac{2}{3}\sqrt{t}\ln(t) + o\left(\sqrt{t}\ln(t)\right)} = e^{u(t)}$$

$u\left(t\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{3}\sqrt{t}\ln\left(t\right)$. Et $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{12}f\left(t\right) = 0$.
$\left|f\left(t\right)\right| = f\left(t\right) = o\left(\dfrac{1}{t^{12}}\right)$ et $12 > 1$.
Donc $f \in L^1\left[0, +\infty\right[$.

29 (72) Calculs d'intégrales - Exercices 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6.

Énoncé - Exercice 7.2 Pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln(t))^q \, dt$.

Résolution Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln(t))^q$.
$f_{p,q} = t^p (\ln(t))^q,\ f_{p,q} \in \mathcal{C}^0(]0,1])$
$|f_{p,q}| = t^p (\ln(t))^q$.
$t^{\frac{1}{2}} |f_{p,q}| = t^{p+\frac{1}{2}} |\ln(t)|^q \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$

$$|f_{p,q}(t)| = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Or $\dfrac{1}{2} < 1$ donc $f_{p,q} \in L^1(]0,1])$
$I_{p,q}$ existe.

$I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (\ln(t))^q \, dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 t^p (\ln(t))^q \, dt$. Pour $\varepsilon \in]0,1]$, on fait des IPP.

$$\int_\varepsilon^1 t^p (\ln(t))^q \, dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} (\ln(t))^q\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1} q (\ln(t))^{q-1} \frac{1}{t} dt \text{ pour } q \geqslant 1$$

Par passage à la limite (toutes les limites existent) : $I_{p,q} = 0 - 0 - \dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1} = -\frac{q}{p+1} \times \left(-\frac{q-1}{p+1} I_{p,q-2}\right)$$

$$= \frac{-q}{p+1} \times \frac{-(q-1)}{p+1} \times ... \times \frac{1}{p+1} I_{p,0}$$

$$= \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^q} \times \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

Énoncé - Exercice 7.3 Pour $a > 0$, calculer $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + a^2} dt$

Résolution $f_a(t) = \dfrac{\ln(t)}{t^2 + a^2},\ f_a \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[)$ car $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ t^2 + a^2 > 0$.

$$|f_a(t)| = \frac{|\ln(t)|}{t^2 + a^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|\ln(t)|}{t^2} = \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$\dfrac{3}{2} > 1$ donc $f_a \in L^1([1,+\infty[)$

$$|f_a(t)| = \frac{|\ln(t)|}{t^2 + a^2} \underset{0^+}{\sim} \frac{|\ln(t)|}{a^2}$$

$|\ln(t)| \in L^1(]0,1])$, donc $f_a \in L^1(]0,1])$

I_a existe donc.

$I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2} dt$ Changement de variable : $t = \dfrac{1}{u}$

$\left(u \mapsto \dfrac{1}{u}\right)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

$dt = \dfrac{-1}{u^2} du$

$$I(a) = \int_{]0,+\infty[} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{a^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \left|\frac{-1}{u^2}\right| du = -\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln(u)}{1+(au)^2} du$$

$u = \dfrac{v}{a}$, $\left(v \mapsto \dfrac{v}{a}\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ et $du = \dfrac{1}{a} dv$.

$$I(a) = -\int_{]0,+\infty[} \frac{\ln\left(\frac{v}{a}\right)}{1+v^2} \left|\frac{1}{a}\right| dv = -\frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln(v)}{1+v^2} dv$$

$$I(a) = -\frac{\ln(a)}{a} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv - \frac{1}{a} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(v)}{1+v^2} dv}_{=0 \text{ avec } v=\frac{1}{w}}$$

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln(a)}{a}$$

Énoncé - Exercice 7.4 Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) dx$

Résolution $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt\right) dx = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ où $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

$\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

$e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(t^{-12}\right)$ et $12 > 1$ donc $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in L^1([x,+\infty[)$

donc $f(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geqslant 0$.

$$f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Soit F la primitive de $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. $\left(\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)$

$f(x) = K - F(x)$ où $K \in \mathbb{R}$. $F'(x) = e^{-x^2}$

$f \in M^0\left(\mathbb{R}^+\right)$ et $f \geqslant 0$.

$f \in L^1\left(\mathbb{R}^+\right) \Leftrightarrow (I_n)$ est convergente, avec $I_n = \displaystyle\int_{[0,n]} f$

Nota bene : $([0,n])_{n\geqslant 1}$ est une suite exhaustive de $\mathbb{R}^+$.

$$I_n = \int_0^n f(x)\, dx = [xf(x)]_0^n - \int_0^x xf'(x)\, dx$$

$$I_n = nf(n) + \int_0^x xe^{-x^2}dx$$

$$I_n = nf(n) - \frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^n = nf(n) - \underbrace{\frac{1}{2}e^{-n^2}}_{\underset{+\infty}{\to} 0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\underset{+\infty}{\to} \frac{1}{2}}$$

$$|nf(n)| = nf(n) = n\int_n^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_n^{+\infty} ne^{-x^2}dx$$

$$n \leqslant \int_n^{+\infty} xe^{-x^2}dx \text{ car } x \in [n, +\infty[$$

$$nf(n) \leqslant 0 + \frac{e^{-n^2}}{2} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} nf(n) = 0$

$\lim\limits_{+\infty} I_n = \dfrac{1}{2}$ puis $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \lim I_n = \frac{1}{2}$

Énoncé - Exercice 7.5 Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor\right)dt = 1 - \gamma$

Résolution $f(t) = \dfrac{1}{t} - \left\lfloor\dfrac{1}{t}\right\rfloor$

$\left(t \mapsto \dfrac{1}{t}\right)$ est continue sur $]0,1]$. $\lfloor\ \rfloor$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

f est continue par morceaux sur $]0,1]$ en tant que composée et différence.

$\forall t \in]0,1], 0 \leqslant f(t) < 1$ alors $|f(t)| \leqslant 1$

$(t \longrightarrow 1) \in L^1([0,1])$ donc $(t \longrightarrow 1) \in L^1(]0,1])$

Ainsi $f \in L^1(]0,1])$.

$\displaystyle\int_{]0,1]} f = \lim \int_{\left[\frac{1}{n+1},1\right]} f$ car $f \in L^1(]0,1])$ et $\left(\left[\dfrac{1}{n+1},1\right]\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite exhaustive de $]0,1]$.

$$\int_{\left[\frac{1}{n+1},1\right]} = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f$$

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f = \int_{\left[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]} f = \int_{\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[} f = \int_{\left]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right[}\left(\frac{1}{t} - k\right)dt$$

$$= [\ln(t)]_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} - k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) - \ln\left(\frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1}$$

$\forall t \in \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right[, k < \dfrac{1}{t} < k+1$ et $\left\lfloor\dfrac{1}{t}\right\rfloor = k$ avec $k \in [\![0,n]\!]$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^1 f = \sum_{k=1}^n\left(\ln\left(\frac{1}{k}\right) - \ln\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

$$= \ln(1) - \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) - (H_{n+1} - 1)$$

$$= 1 - (H_{n+1} - \ln(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \gamma$$

On a : $\displaystyle\int_{]0,1]} \left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) dt = 1 - \gamma$

Énoncé - Exercice 7.6 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{th\,(12x) - th\,(x)}{x} dx$

Résolution $f\,(x) = \dfrac{th\,(12x) - th\,(x)}{x}$

$f \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^{+*}\right)$, th est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\delta_n = \left[\dfrac{1}{n}, n\right]$, $\delta_n \subset \delta_{n+1}$ et $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \delta_n =]0, +\infty[$

$(S_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite exhaustive de $]0, +\infty[$.

$$\int_{S_n} f = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(12x) - th\,(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(12x)}{x} dx - \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(x)}{x} dx$$

Changement de variable : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{12}t \\ dx & = & \frac{1}{12}dt \end{array}\right.$

$$\int_{S_n} f = \int_{\frac{12}{n}}^{12n} \frac{th\,(t)}{\frac{1}{12}t} \frac{1}{12} dt - \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\frac{12}{n}}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt + \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(t)}{t} dt + \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt - \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{th\,(x)}{x} dx$$

$$= \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt - \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{12}{n}} \frac{th\,(t)}{t} dt$$

$\forall t \in [n, 2n]\,, th\,(n) \leqslant th\,(t) \leqslant th\,(12n)$

$$th\,(n) \int_{n}^{12n} \frac{1}{t} dt \leqslant \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt \leqslant th\,(12n) \int_{n}^{12n} \frac{1}{t} dt$$

$$\underbrace{th\,(n) \ln(12)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(12)} \leqslant \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt \leqslant \underbrace{th\,(12n) \ln(12)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(12)}$$

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt = \ln(12)$

$\forall t \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{12}{n}\right], \dfrac{th\left(\frac{1}{n}\right)}{t} \leqslant \dfrac{\ln(t)}{t} \leqslant \dfrac{th\left(\frac{12}{n}\right)}{t}$

$$\underbrace{th\left(\frac{1}{n}\right) \ln(12)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{12}{n}} \frac{th\,(t)}{t} dt \leqslant \underbrace{th\left(\frac{12}{n}\right) \ln(12)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{12}{n}} \frac{th\,(t)}{t} dt = 0$

$$I_n = \int_{S_n} f = \int_{n}^{12n} \frac{th\,(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{12}{n}} \frac{th\,(t)}{t} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(12)$$

Comme (δ_n) est une suite exhaustive de $]0,+\infty[$ et que $f \geqslant 0$ il vient $f \in L^1\left(]0,+\infty[\right)$ et $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f = \ln(12)$

30 (73) Série numérique dont le terme général est une intégrale - Exercice 7.7.

Énoncé Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$.

1. Justifier l'existence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ et déterminer sa limite.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
3. Préciser la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^\alpha I_n$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n}$.

Résolution

1. $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$, $f_n \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$ et $f_n \geqslant 0$.

$$|f_n(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3n}}$$

$3n > 1$, donc $f_n \in L^1([1,+\infty[)$ et $f_n \in L^1([0,1])$ donc $f_n \in [0,+\infty[$
$I_n = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$
Soit $t \in [0,+\infty[$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t = 0 \\ 0 & si \quad t \in]0,+\infty[\end{cases}$$

$f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t = 0 \\ 0 & si \quad t \in]0,+\infty[\end{cases}$
$(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers f.

$$\forall n \geqslant 1, \forall t \in [0,+\infty[\,, |f_n(t)| = \frac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{1+t^3}}_{=f_1(t)}$$

$f_1 \in L^1([0,+\infty[)$ et f_1 est indépendante de n.

Par convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{[0,+\infty[} f = \int_{]0,+\infty[} f = 0$$

2. $I_n = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^n} dt$, car $f_n \in L^1([0,+\infty[)$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^n} dt = \left[t \frac{1}{(1+t^3)^n}\right]_0^A - \int_0^A t(-n)\left(1+t^3\right)^{-n-1} 3t^2 dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{(1+t^3)-1}{(1+t^3)^{n+1}}dt$$

$$= \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\left(\int_0^A \frac{dt}{(1+t^3)^n} - \int_0^A \frac{1}{(1+t^3)^{n+1}}dt\right)$$

Par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ (toutes les limites existent) :

$I_n = 0 + 3n\left(I_n - I_{n+1}\right)$

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n \text{ pour } n \geqslant 1$$

3. • $I_n > 0$:

   EF : $f_n \geqslant 0$, $f_n \neq 0$ et f_n est $\mathcal{C}^0$

   Donc $I_n \neq 0$.

   FEF

   $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

   $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{\frac{1}{3}}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{12}}\right)$. Alors $\exists k > 0 \mid I_n \sim \dfrac{k}{n^{\frac{1}{3}}}$

   Or $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge car $\dfrac{1}{3} < 1$, donc :

$$\sum I_n \text{ diverge.}$$

   • $0 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{3n} < 1$, $\left(I_n\right)_{n\geqslant 1}$ décroît.

   et $\lim I_n = 0$ donc d'après le critère des séries alternées :

$$\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n \text{ converge.}$$

   • $n^\alpha I_n \sim \dfrac{K}{n^{\frac{1}{3}-\alpha}}$ avec $K > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}-\alpha}} \text{ converge } \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{-2}{3}$$

4. • $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (-1)^n I_n = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^3}\right)^n dt$

$$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n I_n = \int_{[0,+\infty[} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^n dt$$

$$= \int_{[0,+\infty[} \left(\frac{-1}{1+t^3}\right) \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^n dt = \int_{[0,+\infty[} \frac{-1}{1+t^3} \frac{1-\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^N}{1-\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)} dt$$

$$= \int_{[0,+\infty[} \frac{\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^N - 1}{2+t^3} dt = \underbrace{-\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{2+t^3} dt}_{=J} + \underbrace{\int_{[0,+\infty[} \frac{\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)^N}{2+t^3} dt}_{=J_N} \text{ (tout est intégrable)}$$

$J_N = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} g_N(t)\, dt, \ \lim_{N\to+\infty} g_N(t) = 0$ pour $t \in]0,+\infty[$

$$|g_N(t)| = \frac{1}{(1+t^3)^N (2+t^3)} \leqslant \underbrace{\frac{1}{2+t^3}}_{=\varphi(t)\geqslant 0} \text{ pour } t \in]0,+\infty[$$

$\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$ et $3 > 1$ donc $\varphi \in L^1([1,+\infty[)$.

Or $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$ donc $\varphi \in L^1([0,1])$ puis $\varphi \in L^1(]0,1])$.

Ainsi $\varphi \in L^1(]0,+\infty[)$ et φ est indépendante de n.

Par convergence dominée : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} J_N = 0$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n I_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n I_n = \lim_{N\to+\infty} (-J + J_N)$$

$J = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{2+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} dt$

Changement de variable : $t = \sqrt[3]{2}u$. $\left(u \mapsto \sqrt[3]{2}u\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

$$J = \frac{1}{2} \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+u^3} \sqrt[3]{2} du = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+u^3} du$$

Il faut retrouver la KDR où l'on évalue : $I_1 = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+t^3} dt$. Quelqu'un sait ?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = -J$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{I_n}{n} \underset{\underset{I_n = 3(I_n - I_{n+1})}{\uparrow}}{=} 3 \sum_{n=1}^{N} (I_n - I_{n+1}) = 3n(I_1 - I_{n+1}) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 3I_1$

31 (79) Intégrale de Gauss - Exercices 7.12, 7.13 et 7.26.

Énoncé - Exercice 7.12 L'objectif de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. On adopte les notations suivantes : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$, $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt$ et $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$.

1. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ I_n \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$.
2. Relier les intégrales I_n et J_{n+1} à la suite (W_p).
3. Montrer que : $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Résolution $(t \mapsto \sin^n(t))$ est continue sur le segment $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc W_n existe.
$\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$, $\left|e^{-t^2}\right| = e^{-t^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{12}}\right)$ donc $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in L^1([1, +\infty[)$.
$\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in L^1([0, \infty[)$: I existe.
$\left(t \mapsto \left(1-t^2\right)^n\right)$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc I_n existe.
Soit $f_n = \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n}$, $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ et $|f_n(t)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$.
Pour $n \geqslant 1$, $2n > 1$ et $f_n \in L^1([1, +\infty[)$. De plus f_n est continue sur $[0,1]$, donc $f_n \in L^1([0,1])$.
$f_n \in L^1([0, +\infty[)$, ainsi J_n existe pour $n \geqslant 1$.

1. $I = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2} dt$
   $\forall u \in \mathbb{R},\ e^u \geqslant 1 + u$ (Inégalité de convexité)
   $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$. $\forall t \in [0,1],\ e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2 \geqslant 0$.
   $\forall t \in [0,1],\ \left(1-t^2\right)^n \leqslant e^{-nt^2}$ car $(x \mapsto x^n)$ croît sur $\mathbb{R}^+$.

$$I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2} dt \underset{\substack{\uparrow \\ t=\frac{1}{\sqrt{n}}u \\ dt=\frac{1}{\sqrt{n}}du}}{=} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-n\frac{1}{n}u^2} \frac{1}{\sqrt{n}} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du$$

   Donc $I_n \leqslant \dfrac{I}{\sqrt{n}}$ car $\displaystyle\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \geqslant 0$.

$$J_n = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt$$

   $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t^2} \geqslant 1 + t^2 > 0$
   $\forall t \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1+t^2} \geqslant e^{-t^2} > 0$
   $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1}{\left(1+t^2\right)^n} \geqslant e^{-nt^2} > 0$

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt \geqslant \int_{[0,+\infty[} e^{-nt^2} dt \text{ (Tout est intégrable)}$$

$\left(u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}} u\right)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-nt^2} dt \underset{t=\frac{1}{\sqrt{n}}u}{\underset{\uparrow}{=}} \int_{[0,+\infty[} e^{n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}u\right)^2} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{[0,+\infty[} e^{-u^2} du = \frac{I}{\sqrt{n}}$$

Donc $\dfrac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$.
En conclusion :

$$\forall n \geqslant 1, I_n \leqslant \frac{I}{\sqrt{n}} \leqslant J_n$$

2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \left(1 - t^2\right)^n dt$.
   Changement de variable : $t = \cos(u)$, $dt = -\sin(u)\, du$.

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 - \cos^2(u)\right)^n (-(\sin(u)))\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(u)\, du$$

$$I_n = W_{2n+1}$$

$$J_n = \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n} dt \underset{\substack{t=\tan(u) \\ dt=\left(1+\tan^2(u)\right)du}}{\underset{\uparrow}{=}} \int_{[0,\frac{\pi}{2}[} \frac{1}{\left(1+\tan^2(u)\right)^n} \left(1+\tan^2(u)\right) du$$

car $(u \mapsto \tan(u))$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$J_n = \int_{[0,\frac{\pi}{2}[} \left(\frac{1}{1+\tan^2(u)}\right)^{n-1} du = \int_{[0,\frac{\pi}{2}[} \left(\cos^2(u)\right)^{n-1} du$$

Changement de variable : $u = \dfrac{\pi}{2} - v$ et $du = -dv$.
$\left(v \mapsto \dfrac{\pi}{2} v\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$J_n = \int_{]0,\frac{\pi}{2}]} \left(\sin^2(v)\right)^{n-1} |-1|\, dv \int_{[0,\frac{\pi}{2}]} \sin^{2n-2}(v)\, dv = W_{2n-2}$$

Ainsi :

$$J_n = W_{2n-2}$$

3. $\sqrt{n} I_n \leqslant I \leqslant \sqrt{n} J_n$
   $\underbrace{\sqrt{n} W_{2n+1}}_{u_n} \leqslant I \leqslant \underbrace{\sqrt{n} W_{2n-2}}_{v_n}$ On sait que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Alors $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2\left(2n-2\right)}} \sim \sqrt{n}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Alors $\lim v_n \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Donc, par encadrement : $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Énoncé - Exercice 7.13 Étudier l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f\left(x\right) = e^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Résolution Soit $x \in \mathbb{R}$.
$\left(t \mapsto e^{-t^2}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x, +\infty[$.
$e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^{12}}\right)$ et $12 > 1$ donc $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in L^1\left([x, +\infty[\right)$.
Alors $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ existe bien.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et $f\left(x\right) = e^{x^2}g\left(x\right)$ avec :

$$g\left(x\right) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} - \int_0^x e^{-t^2}dt = K - F\left(x\right)$$

$\left(t \mapsto e{-}t^2\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est l'unique primitive de $\left(t \mapsto e^{-t^2}\right)$ qui s'annule en 0. F est continue sur $\mathbb{R}$ et $F'\left(x\right) = e^{-x^2}$.
g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'\left(x\right) = -e^{-x^2}$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'\left(x\right) = 2xe^{x^2}g\left(x\right) + e^{x^2}g'\left(x\right) = 2xe^{x^2}\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt - 1$.
$f'\left(x\right) = 2xf\left(x\right) - 1$

$$f'\left(x\right) = 2e^{x^2}\int_x^{+\infty} xe^{-t^2}dt - 1 \leqslant 2e^{x^2}\int_x^{+\infty} te^{-t^2}dt - 1 \leqslant 2e^{x^2}\left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_x^{+\infty} - 1$$

$$f'\left(x\right) \leqslant 2e^{x^2}\left(0 + \frac{e^{-x^2}}{2}\right) - 1 \leqslant 1 - 1 \leqslant 0$$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Soit φ définie telle que $\varphi\left(t\right) = \dfrac{e^{-t^2}}{-2t}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\varphi'\left(t\right) = \frac{1}{2t^2}e^{-t^2} + \frac{1}{-2t}\left(-2te^{-t^2}\right)$$

$$\varphi'\left(t\right) = \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right)e^{-t^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t^2}$$

$\left(t \mapsto e^{-t^2}\right) \in L^1\left([0, +\infty[\right)$ et φ est positive.
Ainsi :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \varphi'\left(t\right)dt$$

$$\int_x^{+\infty} \varphi' = [\varphi]_x^{+\infty} = \lim_{+\infty} \varphi - \varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

Ainsi $\lim_{+\infty} f = 0$.

$\left(t \longmapsto e^{-t^2}\right) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\sqrt{\pi} = \int_{mR} e^{-t^2} dt$

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt$$

Or $\left(t \longmapsto e^{-t^2}\right) \in L^1(]-\infty, 0])$ alors $\int_{]-\infty,0]} e^{-t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_x^0 e^{-t^2} dt$ Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt - \int_x^0 e^{-t^2} dt \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

f est décroissante sur $\mathbb{R}$. $f'(0) = -1$.

Alors $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Énoncé - Exercice 7.26 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose : $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer $\lim_{+\infty} F$.
2. Donner les valeurs des intégrales : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Résolution

1. $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt$

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(x, \cdot)$ est continue sur le segment $[0,1]$. $f(x, \cdot) \in L^1([0,1])$.

$F(x)$ existe. F est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$.

- $f(x, \cdot)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f(\cdot, t)'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 2xe^{-x^2\left(1+t^2\right)}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \in M^0([0,1], \mathbb{R})$.

- Soit $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x| \underbrace{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}_{\leqslant 1} \leqslant 2|x|$$

Fixons A dans $\mathbb{R}^{*+}$.

$$\forall x \in [-A,A], \forall t \in [0,1], \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2A$$

$t \mapsto 2A$ est indépendante de x et est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur le segment $[0,1]$.

Par théorème : F est dérivable sur $[-A,A]$, cela pour tout $A > 0$. Comme la dérivabilité est une propriété locale, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt = -2x \int_0^1 e^{-x^2\left(1+t^2\right)} dt$$

Montrons que $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.

$$|F(x)| = \left|\int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2}\right| dt \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt$$

$\forall x \in [0,1]$:

$$1 + t^2 \geqslant 1$$

$$-x^2\left(1+t^2\right) \leqslant -x^2$$

$$e^{-x^2\left(1+t^2\right)} \leqslant e^{-x^2}$$

$$\frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} \leqslant \frac{e^{-x^2}}{1+t^2} \leqslant e^{-x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x^2\left(1+t^2\right)}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 e^{-x^2} dt \leqslant e^{-x^2}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -2xe^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2t^2} dt$

$$F'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2} dt \underset{\substack{u=xt\\du=xdt}}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} dt$$

Pour x dans $\mathbb{R}$, posons $G(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2$.

$\left(x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du\right)$ est l'unique primitive de $\left(u \mapsto e^{-u^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $\left(x \mapsto e^{-x^2}\right)$.

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $G'(x) = 2\left(\displaystyle\int_0^x e^{-u^2} du\right) e^{-x^2}$.

$F'(x) + G'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$(F+G)'(x)=0$ et $\mathbb{R}$ est un intervalle donc $F+G$ est constante égale à $(F+G)(0)$.

$$(F+G)(0)=F(0)+G(0)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)+G(x)=\dfrac{\pi}{4}$.
$\left(t\mapsto e^{-t^2}\right)\in L^1\left(\mathbb{R}^+\right)$ donc $I=\displaystyle\int_{[0,+\infty[} e^{-t^2}dt=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

$$I^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2=\lim_{x\to+\infty}G(x)$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$: $I^2=\dfrac{\pi}{2}$. $|I|=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ puis :

$$I=\frac{\pi}{2}$$

32 (83) Théorème de la double limite.

Énoncé Si f_n admet une limite en a suivant A pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si (f_n) converge uniformément sur A vers f alors f admet une limite en a suivant A et on a : $\lim\limits_{a,A} f = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\lim\limits_{a,A} f_n \right)$

Démonstration Soit $f : A \subset E \to \mathbb{K}$, $f_n : D \subset E \to \mathbb{K}$, $A \subset D$ et $a \in \overline{A}$

On suppose que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = \lim\limits_{a,A} f_n$ existe dans $\mathbb{K}$
- (f_n) converge uniformément sur A vers f.

Première étape : Montrer que la suite (l_n) converge dans $\mathbb{K}$.

Montrons que (l_n) est de Cauchy.

(f_n) converge uniformément sur A vers f, donc d'après le critère de Cauchy uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in A, |l_{n+p} - l_n| \leqslant \varepsilon$$

Par Passage à la limite lorsque $x \to a$, $a \in A$, (l_n) est de Cauchy.

$\mathbb{K}$ complet donc (l_n) converge dans $\mathbb{K}$.

Posons $l = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n$.

Deuxième étape :

$$|f(x) - l| = |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - l_n) + (l_n - l)|$$

$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l|$$

$$\leqslant \underbrace{\|f_n - f\|_\infty^A + |l_n - l|}_{=u_n} + |f(x) - l_n|$$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

On revient à la caractérisation des limites avec les ε.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{12}$$

Supposons $n \geqslant N$.

$$\lim_{t \to 0} f_n(t) = l_n$$

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in A, \|t - a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f_n(t) - l_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{12}$$

Supposons $\|x - a\| \leqslant \alpha$.

Comme $x \in A$, il vient $|f_n(x) - l_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{12}$.

Notons que α est indépendant de x.

$$\begin{aligned} |f(x)-l| &\leqslant \frac{\varepsilon}{12}+|f_n(x)-l_n| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{12}+\frac{\varepsilon}{12} \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon, \exists \alpha>0, \forall x \in A, \|x-a\| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$$

$$\lim_{a,A} f = l$$

$$\lim_{x\to a, x\in A}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } (f_n) \text{ converge} \\ \text{simplement sur } A \text{ vers } f}}{=} \lim_{x\to a, x\in A} f = \lim_{a,A} f = \lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a, x\in A} f_n(x)\right)$$

33 (90) Détermination de l'ensemble de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ où (a_n) est la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n)$. Détermination de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} H_n t^n$ où $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.

Énoncé

1. Détermination de l'ensemble de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ où (a_n) est la suite définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n)$.
2. Détermination de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} H_n t^n$ où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$.

Résolution

1. On a déjà d'après la KDR 9 : $\lim a_n = 0$, $a_n > 0$, (a_n) décroissante et $a_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\sin(a_n)|}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \sim 1$$

Donc $R_a = \dfrac{1}{1} = 1$.

$]-1,1[\subset E_a \subset [-1,1]$
D'après le C.S.A. comme $\lim a_n = 0$ et (a_n) décroissante, $\sum a_n (-1)^n$ converge.
$\sum a_n 1^n$ diverge - car $a_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{1/2}}$ diverge comme $\dfrac{1}{2} < 1$.
Donc $E_a = [-1,1[$.

2.

$$\left|\frac{H_{n+1}}{H_n}\right| = \frac{H_n + \frac{1}{n+1}}{H_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)H_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ car } H_n \geqslant 1$$

Donc $R_H = \dfrac{1}{1} = 1$ et $]-1,1[\subset E_H \subset [-1,1]$.

$\sum H_n 1^n$ diverge (car $\lim H_n = +\infty \neq 0$)
$\sum H_n (-1)^n$ diverge - car $\lim |H_n (-1)^n| = +\infty \neq 0$

Donc $E_H = [-1,1[$
Posons, $\forall t \in E_H,\ S(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$

or, $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \times 1 = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$

avec $a_0 = 0$ et $\forall k \geqslant 1, a_k = \dfrac{1}{k}$

et $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = 1$

Donc $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n}_{=0 \text{ pour } n=0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{=c_n} t^n$

On applique la formule du produit de Cauchy comme $|t| < min\left(Ra, Rb\right) = 1$.

$S(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) = \left(-ln\left(1-t\right)\right)\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{-ln\left(1-t\right)}{1-t}$

34 (94) Séries de Fourier - les deux exemples de la fin du paragraphe 3 et les trois exemples de la fin du paragraphe 4.

Énoncé Coefficient de Fourier de f définie par $f(x) = |sin(x)|$.

Résolution $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

f est paire donc $b_n = 0$.

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{|sin(t)|}_{=sin(t)\ (\text{car } t\in[0,\pi])} cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,dt$$

Pour $n \neq 1$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{cos(n+1)t}{n+1} + \frac{cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^\pi$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right)((-1)^n + 1)$$

$$\begin{cases} a_{2p} & = & \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1}\right) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4p^2} \\ a_{2p+1} & = & 0 \end{cases}$$

Énoncé Coefficient de Fourier de g définie par $g(x) = e^{ie^{ix}}$.

Résolution $f \in \mathcal{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ie^{it}}e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(ie^{it}\right)^k}{k!}e^{-int} = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{i^k}{k!}e^{i(k-n)t}}_{f_k(t)}$$

$$|f_k(t)| = \frac{1}{k!} \Rightarrow \int_{[-\pi,\pi]}|f_k| = \frac{2\pi}{k!}$$

Ainsi $\sum\int_{[-\pi,\pi]}|f_k|$ converge et on a, par théorème d'intégration terme à terme (version convergence dominée) :

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{[-\pi,\pi]} f_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} i^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_n)t}dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_n)t}dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{i(k-n)t}}{i(k-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 2\pi & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Si $n \leqslant -1$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, k \neq n$ et $c_n(f) = 0$.
Si $n \in \mathbb{N}$ alors $c_n(f) = \frac{i^n}{n!}$.

Énoncé Détermination du développement en série de Fourier de l'unique application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique vérifiant $f(x) = x^2$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$. Obtention des sommes de séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Résolution f est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; donc par théorème de la convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
f est paire donc les b_n sont nuls.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \left(\left[t^2 \frac{sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2t \frac{\sin(nt)}{n} dt \right) \\
&= \frac{-4}{n\pi} \int_0^{\pi} t \sin(nt)\, dt = \frac{-4}{n\pi} \left(\left[t \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0 \pi \frac{-\cos(nt)}{n} dt \right) \\
&= \frac{-4}{n\pi} \left(\frac{(-1)^n}{n} \pi + \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2} \text{ pour } n \geqslant 1
\end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

Puis $f(0) = 0 = \dfrac{2\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

De même, $f(\pi) = \pi^2 = \dfrac{2\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n$ i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$.

Comme $f \in \mathcal{M}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a par Parseval :

$$|f|_2 2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1} +\infty \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{4\pi^4}{4 \times 9} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$$

$$8 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t^4 dt - \frac{\pi^4}{9} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^4}{9} = \frac{4\pi^4}{45}$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Énoncé Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, détermination du développement en série de Fourier de $(x \to \cos(\alpha x))$.
Obtention des développements eulériens des fonctions $\dfrac{1}{\sin}$ et cotan sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:
$\dfrac{1}{\sin(x)} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$ et $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \pi^2 n^2}$.

Résolution Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{N}$.

Soit h 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi[\,, h(x) = \cos(\alpha x)$.

h coïncide avec $(x \mapsto \cos(\alpha x))$ sur $[-\pi, \pi[$.

$h(\pi) = h(-\pi + 2\pi) = h(-\pi) = \cos(\alpha(-\pi)) = \cos(\alpha\pi)$:

Ainsi $\forall x \in [-\pi, \pi]\,, h(x) = \cos(\alpha x)$

h est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux ; donc par théorème de la convergence normale, la série de Fourier de h converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers h.

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(h)\cos(nx) + b_n(h)\sin(nx))$ avec $b_n(h) = 0$ car h est paire.

$$a_n(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi h(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha+n)t + \cos(\alpha-n)t dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\alpha+n)t}{\alpha+n} + \frac{\sin(\alpha-n)t}{\alpha-n}\right]_0^\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha+n} + \frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)}{\alpha-n}\right) = (-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx)$.

$$1 = h(0) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-n^2}$$

$$\cos(\alpha\pi) = h(\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-n^2}$$

Et cela pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ alors $\alpha = \dfrac{t}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$1 = \frac{\sin(t)}{t}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t^2}{t^2-n^2\pi^2}\right)$$

$$\cos(t) = \frac{\sin(t)}{t}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t^2}{t^2-n^2\pi^2}\right)$$

On obtient alors les développements eulériens suivant :

$$\frac{1}{\sin(t)} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$$

$$\operatorname{cotan}(t) = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$$

Énoncé Détermination d'une suite réelle vérifiant $|\sin(x)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos^2(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Obtention de la somme de la série $\sum (-1)^n \frac{\alpha_{2n+1}}{2n+1}$.

Résolution Soit $g = |\sin|$, g est 2π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de convergence normale, g est somme de sa série de Fourier i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \cos(nx)$.
Or $a_{2p} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4p^2}$, $a_{2p+1} = 0$ et $b_n = 0$ (cf plus haut, classique)
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4p^2} \cos(2px)$

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4p^2} \left(2\cos^2(px) - 1\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi} \frac{\cos^2(px)}{1-4p^2} - \underbrace{\frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4p^2}}_{=g(0)-\frac{2}{\pi}} = \frac{4}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi} \frac{\cos^2(px)}{1-4p^2}$$

Finalement, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos^2(nx)$, avec $\alpha_0 = \frac{4}{\pi}$ et pour $n \geqslant 1, \alpha_n = \frac{8}{\pi(1-4n^2)}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos^2(nt)\right) dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t)\,dt$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |g_n(t)| \leqslant |\alpha_n| \text{ i.e. } \forall n \in \mathbb{N}, \|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant |\alpha_n|$$

Comme $\alpha_n \sim \frac{1}{4n^2}$, $\sum \|g_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge donc $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc sur $[min(0,x), max(0,x)]$.
Ainsi $\int_0^x g = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \int_0^x \cos^2(nt)\,dt$
Or :

$$\int_0^x \cos^2(nt)\,dt = \int_0^x \frac{1+2\cos(2nt)}{2} = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2nt)}{2n}\right]_0^x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2nx)}{2n}, n \geqslant 1$$

Et $\int_0^x \cos^2(0 \times t)\,dt = x$
On a donc $\int_0^x g = \alpha_0 x + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{x}{2} + \frac{\sin(2nx)}{2n} = \left(\alpha_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\right) x + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n} \sin(2nx)$
Prenons $x = \frac{\pi}{4}$.

$$0 = g(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \text{ d'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = -\alpha_0$$

$$\sin(2p)\frac{\pi}{2} = 0 \text{ et } \sin(2p+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^p$$

Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{4}} g = \frac{\alpha_0}{2}\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^p \frac{\alpha_{2p+1}}{2p+1}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} g = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^p\,\frac{\alpha_{2p+1}}{2p+1}=4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1-\frac{\alpha_0}{2}\,\frac{\pi}{4}\right)=4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+1-\frac{4}{2\pi}\,\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}$

35 (95) Égalité d'applications et coefficients de Fourier - Exercice 9.20.

Énoncé Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Si la série de Fourier de f converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors elle converge vers f.

Démonstration $f_0 = c_0(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = c_{-n}(f)\, e_{-in} + c_n(f)\, e_{in}$.

$\sum f_n$ est la série de Fourier de f.

On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Alors $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on peut parler de $g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

$g \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est 2π-périodique et $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g donc g est 2π-périodique.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers g donc par théorème g est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme $(f, g) \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})^2$, on a :

$$f = g \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = c_p(g)$$

$$c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, e^{-ipx}\right) dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right) dx \text{ avec } g_n(x) = f_n(x)\, e^{-ipx}$$

$\sum g_n$ converge uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty$$

$$0 \leqslant \left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k\right\|_\infty \leqslant \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|$$

Or $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right\|_\infty = 0$

Par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k\right\|_\infty = 0$ et $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Par théorème d'intégration termes à termes, $c_p(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right) dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g_n(x)\, dx$

or $\int_{-\pi}^{\pi} g_n = \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)\, e^{-ipx} dx$

Pour $n \geqslant 1$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(c_{-n}(f)\, e^{-inx} + c_n(f)\, e^{inx}\right) e^{-ipx} dx$$

$$= c_{-n}(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} e^{-ipx} dx + c_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} e^{+inx} e^{-ipx} dx$$

Et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x)\, e^{-ipx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0(f)\, e^{-ipx} dx$
Du coup,

$$c_p(g) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ipx} dx}_{(e_{in}|e_{ip})=\delta_{np}} = c_p(f)$$

Énoncé Montrer que si $c_{2n+1}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ alors l'application f est 2π-périodique.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_{2n+1}(f) = 0$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = f(x + \pi)$.

Montrons que $g = f$ i.e. comme $(f, g) \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})^2$, que $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = c_n(g)$:

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + \pi)\, e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-in(x-\pi)} dx$$

$(x \mapsto x - \pi)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$c_n(g) = e^{in\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dt = e^{in\pi} c_n(f)$$

$$c_{2p+1}(g) = e^{i(2p+1)\pi} \underbrace{c_{2p+1}(f)}_{=0} = 0 = c_{2p+1}(f)$$

$$c_{2p}(g) = \underbrace{e^{i2p\pi}}_{=1} c_{2p}(f) = c_{2p}(f)$$

36 (96) **Calcul de la fonction somme d'une série d'applications - Exercice 9.28.**

Énoncé Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+1)} \cos(nx)$

Montrer que : $\forall x \in [\pi, \pi]$, $f'(x) - f(x) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}$. En déduire le calcul de $f(x)$.

Démonstration

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+1)} \cos(nx) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

$f_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2+1)} \sin(nx)$$

$$f_n''(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \cos(nx)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2(n^2+1)}$ puis $0 \leqslant \|f_n\|_{+\infty}^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n^2(n^2+1)} \sim \dfrac{1}{n^4}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_{+\infty}^{\mathbb{R}}$ converge i.e $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n(n^2+1)}$ puis $0 \leqslant \|f_n'\|_{+\infty}^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n(n^2+1)} \sim \dfrac{1}{n^3}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n'\|_{+\infty}^{\mathbb{R}}$ converge i.e $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n''(x)| \leqslant \dfrac{1}{(n^2+1)}$ puis $0 \leqslant \|f_n''\|_{+\infty}^{\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^2}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \|f_n''\|_{+\infty}^{\mathbb{R}}$ converge i.e $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n''$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n''$ converge normalement sur $\mathbb{R}$

Par théorème, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \cos(nx) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+1)} \cos(nx)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) \cos(nx)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx)$$

Soit $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4}$

$g(-\pi) = g(\pi)$ donc on peut considérer l'application $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π - périodique qui vérifie : $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $\widetilde{g}(x) = g(x)$.

$\widetilde{g} \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$

D'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de $\widetilde{g}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\widetilde{g}$ et $\widetilde{g}$ est paire donc $b_n\left(\widetilde{g}\right) = 0$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widetilde{g}(x) = \frac{a_0\left(\widetilde{g}\right)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\widetilde{g}\right)\cos(nx)$$

$$a_0\left(\widetilde{g}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \widetilde{g} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[\frac{x\pi^2}{12} - \frac{x^3}{12}\right]_0^\pi = 0$$

Pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
a_n\left(\widetilde{g}\right) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \widetilde{g}\cos_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(nx)}{n}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}\frac{x}{2}dx\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n}x\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}dx\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n}\right)\pi + \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}
\end{aligned}$$

Dès lors, $\forall x \in [-\pi, \pi], \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4} = \widetilde{g}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx) = f'(x) - f(x)$

$$\begin{cases} (H) & : & y' - y & = & 0 \\ (L) & : & y' - y & = & \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(H) = \mathbb{R}ch + \mathbb{R}sh$

Soit $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^0\left(ax^2 + bx + c\right)$

$$y_0'(x) - y_0(x) = 2a - \left(ax^2 + bx + c\right) = -ax^2 - bx + (2a - c)$$

Prenons $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 0$ et $c = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi^2}{12}$. Dès lors $y_0 \in S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L)$ et $S_{\mathbb{R}\to\mathbb{R}}(L) = y_0 + \mathbb{R}ch + \mathbb{R}sh$

$f \in S_{[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}}(L)$ donc $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in [-\pi,\pi], f(x) = \alpha ch(x) + \beta sh(x) + \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi^2}{12}$

f est paire donc $\beta = 0$:

En effet, $f = \underbrace{\alpha ch + y_0}_{\in P(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \underbrace{\beta sh}_{I(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \underbrace{f}_{P(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \underbrace{0}_{I(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ Comme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R},\mathbb{R})$, par unicité $\beta sh = 0$ puis $\beta = 0$

$f = \alpha ch + y_0$

Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos_n = \left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi = 0$

$\displaystyle\int_0^\pi f = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\int_0^\pi f_n}_{=0} = 0$ car $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0,\pi]$.

$0 = \displaystyle\int_0^\pi f = \int_0^\pi \left(\alpha ch(x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{12}\right)dx = \left[\alpha sh(x) + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{\pi^2}{12}x\right]_0^\pi = \alpha sh(\pi) + \frac{\pi}{2}$ d'où $\alpha = -\dfrac{\pi}{2sh(\pi)}$

37 (97) Espace de Banach.

Énoncé $\left(\ell^2(\mathbb{K}), \|\ \|_2\right)$ est un espace de Banach, $\mathbb{K}[X], \|\ \|_\infty$ n'est pas un espace de Banach.

Démonstration $\ell^2(\mathbb{K}) = (u_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum |u_n|^2$ converge.

$\ell^2(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans $\ell^2(\mathbb{K})$, on pose $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ et on note $\|\ \|_2$ sa norme associée.

Dès lors, $\left(\ell^2(\mathbb{K}), \|\ \|_2\right)$ est un espace vectoriel normé.

Montrons que $\left(\ell^2(\mathbb{K}), \|\ \|_2\right)$ est complet :

Soit (X_n) une suite d'éléments de $\ell^2(\mathbb{K})$, supposons que (X_n) soit de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{K})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \ell^2(\mathbb{K})$ donc $X_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \|X_{n+p} - X_n\|_2 \leqslant \varepsilon$$

Car (X_n) est de Cauchy .

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} \left|x_k^{(n+p)} - x_k^{(n)}\right|^2 = \|X_{n+p} - X_n\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2$$

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{m} \left|x_k^{(n+p)} - x_k^{(n)}\right|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

Car si $a_k \geqslant 0$ et $\sum a_k$ converge alors $\sum_{k=0}^{m} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \left|x_k^{(n+p)} - x_k^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon$$

Car $0 \leqslant a_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$.

Fixons k dans $\mathbb{N}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \left|x_k^{(n+p)} - x_k^{(n)}\right| \leqslant \varepsilon$ donc $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{K}, |\ |)$, qui est un espace de Banach, donc $\left(x_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathbb{K}, |\ |)$.

Posons x_k sa limite : $x_k = \underset{n\to+\infty}{lim} a_k^{(n)}$

On dispose donc de $X = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

Faisons tendre p vers $+\infty$ dans $(*)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall m \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{m} \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

Puis en faisant tendre m vers $+\infty$ - la série $\sum \left|x_k - x_k^{(n)}\right|^2$ est à termes positifs majorée donc converge :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \|X - X_n\|_2^2 \leqslant \varepsilon$ $(**)$

Vérifions que $X \in \ell^2(\mathbb{K})$:

D'après $(**)$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, \|X - X_n\|_2 \leqslant 12$

$$\|X\|_2 = \|(X - X_{N_0}) + X_{N_0}\|_2 \leqslant \|X - X_{N_0}\|_2 + \|X_{N_0}\|_2 \leqslant 12 + \underbrace{\|X_{N_0}\|_2}_{<+\infty \text{ car } X_{N_0} \in \ell^2(\mathbb{K})} < +\infty$$

donc $X \in \ell^2(\mathbb{K})$ puis d'après $(**)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|X - X_n\|_2 = 0$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\ell^2(\mathbb{K})$. Toute suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{K})$ converge dans $\ell^2(\mathbb{K})$.

Soit $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!}$

$\|P_{n+p} - P_n\|_\infty = \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{X^k}{k!} \right\|_\infty = max\left(\dfrac{1}{(n+1)!}, \dfrac{1}{(n+2)!}, ..., \dfrac{1}{(n+p)!}\right) = \dfrac{1}{(n+1)!}$ indépendant de p.

Soit $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N} | \forall n \geqslant N, \dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant \varepsilon$

Ainsi $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \|P_{n+p} - P_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$

(P_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{K}[X], \| \, \|_\infty)$

Supposons que (P_n) converge dans $(\mathbb{K}[X], \| \, \|_\infty)$, i.e. $\exists P \in \mathbb{K}[X] | \lim\limits_{n \to +\infty} \|P_n - P\|_\infty = 0$

$P \neq 0$: En effet, si $P = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|P_n\|_\infty = \left\| \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} \right\|_\infty = 1 \neq 0$

Absurde car $1 \neq 0$.

$d = \deg P \in \mathbb{N}$

$P = a_d X^d + ... + a_1 X + a_0$ avec $a_k \in \mathbb{K}$ et $a_d \neq 0$

$$\|P_n - P\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \right\|_\infty = \left\| \sum_{k=0}^{d} \left(\frac{1}{k!} - a_k\right) X^k + \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k!} X^k \right\|_\infty, \text{ pour n } \geqslant d+1$$

Supposons $n \geqslant d+1$:

$$\forall k \in [\![0, d]\!], \left|\frac{1}{k!} - a_k\right| \leqslant \|P_n - P\|_\infty$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$,

$$\forall k \in [\![0, d]\!], \left|\frac{1}{k!} - a_k\right| \leqslant 0$$

$$\forall k \in [\![0, d]\!], \frac{1}{k!} = a_k$$

Ainsi

$$\|P_n - P\|_\infty = \left\| \sum_{k=d+1}^{n} \frac{1}{k!} X^k \right\|_\infty = \frac{1}{(d+1)!} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{(d+1)!} \neq 0, \text{ Absurde}$$

(P_n) n'est pas convergente dans $(\mathbb{K}[X], \| \ \|_\infty)$.

38 (98) Connexité par arcs.

Énoncé L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 est connexe par arc mais non convexe.

Démonstration $\mathbb{U} = \{e^{it}, t \in \mathbb{R}\} = f(\mathbb{R})$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ qui est connexe par arc donc $\mathbb{U} = f(\mathbb{R})$ est connexe par arc.

$-1 \in \mathbb{U}$, $1 \in \mathbb{U}$ et $[-1, 1] \notin \mathbb{U}$ car $0 \in [-1, 1]$ et $0 \notin \mathbb{U}$

$\mathbb{U}$ n'est pas convexe.

Énoncé Si I est un intervale de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective sur I alors f est strictement monotone.

Démonstration Posons $A = \{(x, y) \in I^2 | x < y\}$

A est connexe par arc :

EF : Soient $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ dans A ; montrons que $[X_1, X_2] \subset A$:

Soit $X \in [X_1, X_2]$, $X = (1 - \lambda) X_1 + \lambda X_2, \lambda \in [0, 1]$

$X = (1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda (x_2, y_2) = ((1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2, (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2)$

$$\begin{cases} x &= (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2 \in [x_1, x_2] \subset I \\ y &= (1 - \lambda) y_1 + \lambda y_2 \in [y_1, y_2] \subset I \end{cases}$$

car $(x_1, x_2) \in I^2$, $(y_1, y_2) \in I^2$ et I convexe.

$y - x = \underbrace{(1 - \lambda)}_{\geqslant 0} \underbrace{(y_1 - x_1)}_{>0} + \underbrace{\lambda}_{\geqslant 0} \underbrace{(y_2 - x_2)}_{>0} > 0$ car $\lambda \in [0, 1]$ et $0 \neq 1$

Ainsi $X = (x, y) \in A$, d'où $[X_1, X_2] \subset A$

A est convexe donc connexe par arc.

FEF

Posons

$$T : \begin{array}{ccc} A \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & T(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{array}$$

t est continue sur A :

EF : Si $(x, y) \in A$, alors $x \neq y$ et T est bien définie.

$((x, y) \mapsto x)$ et $((x, y) \mapsto y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car linéaire en dimension finie.

$((x, y) \mapsto f(x))$ et $((x, y) \mapsto f(y))$ sont donc continues comme composée car f est continue sur I.

$\left((x, y) \mapsto \dfrac{1}{y - x}\right)$ est continue sur A.

Donc T est donc continue sur A en tant que produit.

FEF

T ne s'annule pas sur A :

EF : Soit $(x, y) \in A$, on a alors $x \neq y$ et comme f est injective, $f(x) \neq f(y)$ d'où $T(x, y) \neq 0$.

FEF

Ainsi f est continue sur A, connexe par arc, et ne s'y annule pas donc T est strictement de signe fixe sur A.

Premier cas : $T > 0$ sur A

$$\forall (x, y) \in A, T(x, y) > 0$$

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

f est strictement croissante sur I.

Second cas : $T < 0$ sur A

$$\forall (x, y) \in A, T(x, y) < 0$$

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

f est strictement décroissante sur I.

Énoncé

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et si f' change strictement de signe sur I, alors f' s'annule sur I.
2. Théorème de Darboux : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Démonstration

1. f n'est pas strictement monotone :

   EF : Supposons f strictement monotone sur I, alors f' est de signe fixe sur I, ce qui n'est pas !

   FEF

   f n'est pas injective :

   EF : Supposons f injective, alors comme f est continue (car f dérivable) sur l'intervalle I, f est strictement monotone sur I, ce qui n'est pas !

   FEF

   $\exists (a, b) \in I^2 | a \neq b$ et $f(a) = f(b)$

   f est continue sur $[a, b] \subset I$ car I intervalle de $\mathbb{R}$ donc convexe.

   f est dérivable sur $]a, b[\subset I$

   Par Rolle, $\exists c \in]a, b[\ | \ f'(c) = 0$

2. Remarque : Si l'on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors f' est continue sur l'intervalle I et par théorème, $f'(I)$ est un intervalle.

Soit $(x, y) \in f'(I)^2$; montrons que $[x, y] \subset f'(I)$:

$$\begin{cases} x \in f'(I) \text{ donc } x = f'(a) \text{ avec } a \in I \\ y \in f'(I) \text{ donc } y = f'(b) \text{ avec } b \in I \end{cases}$$

Soit $z \in [x, y]$, on a alors $x \leqslant z \leqslant y$.

Si $z = x$ ou $z = y$ alors $z \in f'(I)$.

Supposons $z \neq x$ et $z \neq y$: $x < z < y$ i.e. $f'(a) < z < f'(b)$.

Soit $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t) - zt$

g est dérivable sur I car f l'est et $g'(t) = f'(t) - z$

$$g'(a) = f'(a) - z < 0 \text{ et } g'(b) = f'(b) - z > 0$$

Ainsi g est dérivable sur l'intervalle I et g' change strictment de signe sur I donc g' s'annule sur I :

$\exists c \in I \mid g'(c) = 0 = f'(c) - z$.

On a alors $z = f'(c)$ avec $c \in I$, d'où $z \in f'(I)$.

$[x, y] \subset f'(I)$, cela pour tout $(x, y) \in f'(I)^2$

$f'(I)$ est donc un convexe de $\mathbb{R}$ i.e. $f'(I)$ est donc un intervalle.

Application Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application telle que $f(I)$ ne soit pas un intervalle.

Par exemple, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, $f(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$.

Déterminons les primitives de f sur I.

Supposons que f admette une primitive F sur I, alors F est dérivable sur I et $F' = f$.

Ainsi F est dérivable sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$ donc d'après Darboux, $f(I) = F'(I)$ est un intervalle, ce qui n'est pas !

39 (99) Applications linéaires continues.

Énoncé On se place dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $\left(\ell^2(\mathbb{K}), \| \|_2\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $\pi_n : \ell^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $\pi_n(u) = u_n$, avec $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

π_n est une application continue de $\left(\ell^2(\mathbb{K}), \| \|_2\right)$ dans $(\mathbb{K}, \| \|)$ dont la norme subordonnée vaut 1.

Démonstration Fixons $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n : \underset{u\mapsto u_n}{\ell^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}}$

π_n est linéaire :

EF : $\pi_n(\alpha u + \beta v) = (\alpha u + \beta v)_n = \alpha u_n + \beta v_n = \alpha \pi_n(u) + \beta \pi_n(v)$

Soit $u = (u_k) \in \ell^2(\mathbb{K}) : |\pi_n(u)| = |u_n| = \sqrt{|u_n|^2}$

or $|u_n|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2$

$|\pi_n(u)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2} = \|u\|_2 \ \forall u \in \ell^2(\mathbb{K}), |\pi_n(u)| \leqslant 1 \|u\|_2$

FEF

Comme π_n est linéaire, π_n est continue et $|||\pi_n||| \leqslant 1$

Posons $u = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\delta_{kn}|^2 = |\delta_{nn}|^2 = 1$$

$u \in \ell^2(\mathbb{K})$ et $\|u\|_2 = 1$

$|\pi_n(u)| = |\delta_{nn}| = 1$

$\pi_n \in \ell_c\left(\ell^2(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$, $\forall v \in \ell^2(\mathbb{K}), |\pi_n(v)| \leqslant |||\pi_n||| \, \|v\|_2$

Soit pour u, $1 \leqslant |||\pi_n|||$

Donc $|||\pi_n||| = 1$

Énoncé Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ on dispose des normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ définies par : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{Sup} |f(t)|$. Soit $T : E \to E$ défine par $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in E$, $T(f)(x) = \int_0^x tf(t)\,dt$.

T est une application linéaire continue de $(E, \| \|_\infty)$ dans $(E, \| \|_1)$ dont la norme subordonnée vaut $\frac{1}{6}$.

T est une application linéaire continue de $(E, \| \|_1)$ dans $(E, \| \|_\infty)$ dont la norme subordonnée vaut 1.

Démonstration $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$

$T(f)$ est l'unique primitive de $Id_{[0,1]} \times f$ qui s'annule en 0, car $Id_{[0,1]} \times f$ est continue sur $[0,1]$.

$T(f)$ est alors dérivable sur $[0,1]$ et $T(f)' = Id \times f$.

$T(f)$ est donc continue sur $[0,1]$.

T est donc bien une application de E dans E.

Par linéarité de l'intégrale, T est linéaire.

Ainsi, on a bien $T \in \ell(E)$.

On considère T de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(E, \| \ \|_1)$.

Soit $f \in E$.

$$\|T(f)(x)\|_1 = \int_0^1 |T(f)(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 \left| \int_0^x t f(t)\, dt \right| dx$$

$$\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x t\, |f(t)|\, dt \right) dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x t\, \|f\|_\infty\, dt \right) dx$$

$$\leqslant \|f\|_\infty \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leqslant \frac{1}{6}$$

Comme T est linéaire, T est continue de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans $(E, \| \ \|_1)$ et $|||T|||_{\infty,1} \leqslant \dfrac{1}{6}$.

Cherchons une application g de E telle que $\|T(f)(g)\|_1 = \dfrac{1}{6}$ et $\|g\|_\infty = 1$.

Dès lors, on aurait : $\underbrace{\|T(g)\|_1}_{\frac{1}{6}} \leqslant |||T|||_{\infty,1} \underbrace{\|g\|_\infty}_{1}$ puis $|||T|||_{\infty,1} = \dfrac{1}{6}$.

Prenons l'application constante égale à 1 : $\|1\|_\infty = 1$

$T(1) = \displaystyle\int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$ puis $\|T(1)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{6}$

On considère T de $(E, \| \ \|_1)$ dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

Soit $f \in E$.

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^x t f(t)\, dt \right| \leqslant \int_0^x \underbrace{t\, |f(t)|}_{\geqslant 0}\, dt \underset{\substack{\uparrow \\ x \leqslant 1}}{\leqslant} \int_0^1 t\, |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 |f| \leqslant 1 \times \|f\|_1$$

Cela pour tout $x \in [0,1]$, d'où $\|T(f)\|_\infty \leqslant 1 \times \|f\|_1$

Comme T est linéaire, T est continue de $(E, \| \ \|_1)$ dans $(E, \| \ \|_\infty)$ et $|||T|||_{1,\infty} \leqslant 1$

Cherchons une suite (g_n) d'applications de E telle que $\|T(f)(g_n)\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\|g_n\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

Dès lors, on aurait $\underbrace{\|T(g_n)\|_\infty}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1} \leqslant |||T|||_{1,\infty} \underbrace{\|g_n\|_1}_{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$ soit par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $1 \leqslant |||T|||_{1,\infty}$ puis $|||T||| = 1$.

Prenons $g_n = (t \mapsto n t^n)$:

$\|g_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 n t^n dt = \frac{n}{n+1} \to 1$

$T(g_n) = \displaystyle\int_0^x n t^{n+1} dt = n \frac{x^{n+2}}{n+2}$ puis $\|T(g_n)\|_\infty = \dfrac{n}{n+2} \to 1$

40 (100) Calcul de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une application.

Énoncé Pour $n \geqslant 1$, déterminer $f_n^{(n)}$ où $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est définie par : $f_n(x) = x^{n-1}\ln(x)$.

Démonstration Posons $\forall k \in \mathbb{Z}, p_k : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$

Alors $f_n = p_{n-1}\ln \in \mathcal{C}^\infty$ comme produit de fonction $\mathcal{C}^\infty$.

$$f_n^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-1}^{(k)} \ln^{(n-k)}$$

$$\begin{cases} p_{n-1}(x) & = & x^{n-1} \\ p'_{n-1}(x) & = & (n-1)x^{n-2} & = & (n-1)p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}"(x) & = & (n-1)(n-2)x^{n-3} & = & (n-1)(n-2)p_{n-3}(x) \end{cases}$$

Donc pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $p_{n-1}^{(k)} = (n-1)(n-2)\cdots(n-k)p_{n-(k+1)} = \dfrac{(n-1)!}{(n-(k+1))!}p_{(n-(k+1))}$ et $p_{n-1}^{(n)} = 0$

$$\begin{cases} ln'(x) & = & x^{-1} & = & p_{-1}(x) \\ ln''(x) & = & -x^{-2} & = & -p_{-2}(x) \\ ln^{(3)}(x) & = & (-1)(-2)x^{-3} & = & (-1)(-2)p_{-3}(x) \end{cases}$$

Donc pour $k \geqslant 1$, $ln^{(k)} = (-1)(-2)\cdots(-(k-1))p_{-k} = (-1)^{k-1}(n-k-1)!p_{-k}$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f_n^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!}p_{n-(k+1)}\right)\left((-1)^{n-k-1}(n-(k+1))!x^{-(n-k)}\right) + \binom{0}{n} 0 \ln \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!}(n-(k+1))!p_{(n-(k+1))+(-n+k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n_k} (n-1)!p_{-1} \\ &= (n-1)!p_{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{n-k-1} \\ &= -(n-1)!p_{-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (-1)^{n-k}}_{=(1+(-1))^n} - \binom{n}{n} 1^n (-1)^{n-n} \\ &= 0^n + (n-1)!p_{-1} \end{aligned}$$

Dès lors, $\forall x > 0, \forall n \geqslant 1, f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$

Crédits

Pierre-Alexandre : KDR 18, 48, 49, 94, 95, 96, 97, 98, 99 et 100.

Jimmy : KDR 23, 32, 68 et 83.

Rémi : KDR 17.

David : KDR 38.

Julien Descorps : KDR 90.

Aurélien : KDR 03 et 06.

Guillaume : KDR 24 et 34.

Sylvain : KDR 02.

Grégoire : KDR 01, 04, 05, 07, 11, 34, 37, 44, 45, 46, 47, 50, 51, 59, 61, 71, 72, 73 et 79.