

Prof. dr M. MAZUR Sprzężenie zwrotne w cybernetyce i automatyce

007:621-52

Treść. Omówiono pojęcie sprzężenia jako związku między obiektami polegającym na oddziaływaniach. Podano najogólniejsze wzory na sprzężenie zwrotne dodatnie i ujemne. Wprowadzono rozróżnienie sprzężeń zwrotnych zbieżnych i rozbieżnych.

Teoretycznie każda zmiana zachodząca w jakimkolwiek punkcie przestrzeni wywołuje zmiany we wszystkich innych punktach. Praktycznie wpływ ten jest w wielu punktach znikomo mały i może być pominięty. Dzięki temu, bez szkody dla ścisłości rozważań, można wyodrębnić pewne obiekty i zajmować się ich oddziaływaniem tylko na określone obiekty, z pominięciem pozostałych. W najprostszym przypadku będą wchodzić w grę tylko oddziaływania między dwoma określonymi obiektami.

Związek między obiektami polegający na oddziaływaniach nosi nazwę sprzężenia.

Sprzężenie, w którym jeden obiekt oddziałuje na drugi, jest sprzężeniem prostym. Na rys. 1 występuje tylko oddziaływanie obiektu B na obiekt C, jest to więc sprzężenie proste.

Sprzężenie, w którym jeden obiekt oddziałuje na drugi, a drugi obiekt oddziałuje na pierwszy, jest sprzężeniem zwrotnym. Sprzężenie zwrotne składa się więc z dwóch sprzężeń prostych przeciwnie skierowanych. Na rys. 2 występuje sprzężenie zwrotne między obiektami B i C, gdyż obiekt B oddziałuje na obiekt C, a obiekt C oddziałuje na obiekt B.

Jak widać na rys. 2, sprzężenie zwrotne stanowi zamknięty obieg oddziaływań. W taki najbardziej ogólny sposób ujmując się sprzężenie zwrotne w cybernetyce.

Każde oddziaływanie można określić za pomocą wielkości fizycznych. Postępując się oznaczeniami z rys. 2 można powiedzieć, że oddziaływanie obiektu B na obiekt C polega na tym, że pewna wielkość y jest wielkością wyjściową obiektu B, a zarazem wielkością wejściową układu C. Podobnie można powiedzieć, że oddziaływanie obiektu C na obiekt B polega na tym, że pewna wielkość

x jest wielkością wyjściową obiektu C a zarazem wielkością wejściową obiektu B.

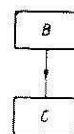
Wynika stąd, że obiekt B jest przetwornikiem przetwarzającym wielkość x w wielkość y , a obiekt C jest przetwornikiem przetwarzającym wielkość y w wielkość x .

Przypuśćmy, że przetwarzanie w obiekcie B odbywa się według pewnej zależności

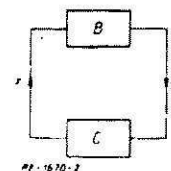
$$(1) \quad y = f_{xy}(x)$$

a przetwarzanie w obiekcie C według pewnej zależności

$$(2) \quad x = f_{yx}(y)$$



Rys. 1. Sprzężenie proste



Rys. 2. Sprzężenie zwrotne

Eliminując x z równań (1) i (2) otrzymuje się zależność

$$(3) \quad y = f_y(y)$$

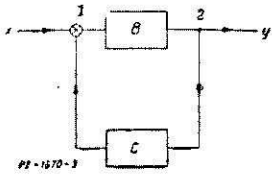
z której wynika, że wielkość y jest zależna od siebie samej.

Podobnie, eliminując y z równań (1) i (2), otrzymuje się zależność

$$(4) \quad x = f_x(x)$$

Ogólnie więc można powiedzieć, że wskutek sprzężenia zwrotnego każda wielkość występująca w oddziaływaniach wywiera wpływ na siebie samą, a więc samorzutnie będzie się zmieniać.

W równaniach (1) i (2) zmiana jednej wielkości może spowodować zwiększenie lub zmniejszenie drugiej wiel-



Rys. 3. Sposób przedstawienia sprzężenia zwrotnego stosowany w automatyce

kości, zależnie od właściwości obiektu przetwarzającego. Działanie obiektu, w którym wzrost wielkości wejściowej powoduje wzrost wielkości wyjściowej, będziemy nazywać afirmacją. Działanie obiektu, w którym wzrost wielkości wejściowej powoduje zmniejszenie wielkości wyjściowej, będziemy nazywać negacją.

W automatyce przedstawia się zwykle sprzężenie zwrotne w sposób podany na rys. 3.

Obiekt B ma tę właściwość, że jego wielkość wyjściowa jest iloczynem wielkości wejściowej przez pewien współczynnik B.

Obiekt C ma tę właściwość, że jego wielkość wyjściowa jest iloczynem wielkości wejściowej przez pewien współczynnik $\pm C$. Współczynniki B i C są liczbami dodatnimi.

Do punktu 1 jest doprowadzana wielkość y , a z punktu 2 jest odprowadzana wielkość z , a z punktu 2 (tj. gdyby tor oddziaływań od punktu 2 poprzez obiekt C do punktu 1 był przerwany), to wielkość z byłaby wielkością wyjściową obiektu B, a wielkość y byłaby wielkością wejściową tego obiektu, przy czym zgodnie ze wspomnianą powyżej właściwością obiektu B otrzymalibyśmy zależność $y = Bz$.

W punkcie 2 odbywa się pomiar wielkości y , a wynik tego pomiaru jest przekazywany do obiektu C. A zatem wielkość y jest wielkością wejściową obiektu C. Zgodnie z właściwością tego obiektu jego wielkość wyjściowa będzie wynosić

$$\pm Cy$$

W punkcie 1 wielkość ta sumuje się z wielkością z , wobec czego suma

$$z \pm Cy$$

staje się wielkością wejściową obiektu B. Zgodnie z właściwością obiektu B jego wielkość wyjściowa będzie iloczynem wielkości wejściowej przez współczynnik B

$$B(z \pm Cy)$$

wobec czego można napisać

$$(5) \quad y = B(z \pm Cy)$$

Przypadek, gdy wchodzi w grę znak plus, określa się jako sprzężenie dodatnie, a znak minus, gdy współczynnik C jest ujemny, jako sprzężenie ujemne.

Ze wzoru (5) otrzymuje się dla sprzężenia dodatniego.

$$(6) \quad y = \frac{Bz}{1 - BC}$$

a dla sprzężenia ujemnego

$$(7) \quad y = \frac{Bz}{1 + BC}$$

Znając wielkość wejściową z oraz współczynniki B i C można ze wzoru (6) bądź ze wzoru (7) określić wielkość wyjściową y .

Przy porównywaniu tego ujęcia z objaśnieniami do rys. 2 nasuwa się pytanie, między czym a czym na rys. 3 występuje sprzężenie zwrotne. Przecież nie między wielko-

ciami z i y , wprowadzicie bowiem wielkość y zależy od wielkości z , ale wielkość z nie zależy od wielkości y , jako że wielkość z jest wprowadzona z zewnątrz i nie ulega zmianie pod wpływem zmian wielkości y . Aby to wyjaśnić, powróćmy do ogólnych rozważań nad sprzężeniem zwrotnym.

Biorąc pod uwagę rozróżnienie między afirmacją i negacją można wyodrębnić następujące trzy rodzaje sprzężeń zwrotnych: 1) afirmacja — afirmacja, 2) negacja — afirmacja, 3) negacja — negacja.

Funkcje (1) i (2) mogą mieć dowolną postać. Dla uproszczenia przyjmijmy, że są to funkcje pierwszego stopnia, wobec czego równanie (1) można przedstawić w postaci

$$(8) \quad y = A \pm Bx$$

a równanie (2) w postaci

$$(9) \quad x = D \pm Cy$$

przy czym współczynniki A, B, C, D są liczbami dodatnimi.

Znak plus oznacza, że przetwarzanie jest afirmacją (ze wzrostem zmiennej niezależnej zmienna zależna wzrasta). Znak minus oznacza, że przetwarzanie jest negacją (ze wzrostem zmiennej zależnej zmienna niezależna maleje).

Dla sprzężenia afirmacja-afirmacja otrzymamy układ równań

$$(10) \quad y = A + Bx$$

$$(11) \quad x = D + Cy$$

Podstawiając x z równania (11) do równania (10) otrzymuje się

$$(12) \quad y = A + BD + BCy$$

Dla sprzężenia negacja-afirmacja otrzymamy układ równań

$$(13) \quad y = A - Bx$$

$$(14) \quad x = D + Cy$$

Podstawiając x z równania (14) do równania (13) otrzymuje się

$$(15) \quad y = A - BD - BCy$$

I wreszcie dla sprzężenia negacja-negacja otrzymamy układ równań

$$(16) \quad y = A - Bx$$

$$(17) \quad x = D - Cy$$

Podstawiając x z równania (17) do równania (16) otrzymuje się

$$(18) \quad y = A - BD + BCy$$

Z porównania równań (12) i (18) wynika, że różnią się one tylko wartościami członów stałych $A + BD$ i $A - BD$. A zatem sprzężenie negacja-negacja nie różni się w sposób istotny od sprzężenia afirmacja-afirmacja, może więc być pominięte w rozważaniach nad rodzajami sprzężeń.

W rezultacie więc mamy tylko dwa rodzaje sprzężeń: afirmacja-afirmacja oraz negacja-afirmacja. Jak to łatwo zauważyć, różnią się one tym, że działaniem wymienionym na pierwszym miejscu może być afirmacja lub negacja, natomiast działanie wymienione na drugim miejscu jest w obu przypadkach afirmacją. W określającym ją równaniu (11) i (14) stały wyraz D nie wpływa na charakter zależności między x i y , może więc być pominięty.

Po tym uproszczeniu sprzężenie afirmacja-afirmacja wyrazi się układem równań:

$$(19) \quad y = A + Bx$$

$$(20) \quad x = Cy$$

a sprzężenie negacja-afirmacja

$$(21) \quad y = A - Bx$$

$$(22) \quad x = Cy$$

Obydwa te rodzaje sprzężeń można zapisać w postaci układu równań

$$(23) \quad y = A \pm Bx$$

$$(24) \quad x = Cy$$

Równanie (23) można przedstawić w postaci

$$(25) \quad y = B \left(\frac{A}{B} \pm x \right)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(26) \quad z = \frac{A}{B}$$

możemy przedstawić układ równań (23) i (24) w postaci

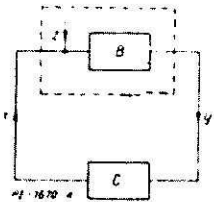
$$(27) \quad y = B(z \pm x)$$

$$(28) \quad x = Cy$$

Po podstawieniu wyrażenia na x z równania (28) do równania (27) otrzymuje się

$$(29) \quad y = B(z \pm Cy)$$

Równanie (29) ma taką samą postać jak równanie (5), a więc schematy przedstawione na rys. 2 i 3 są równoważne. Można się o tym upewnić porównując je ze schematem na rys. 4. Rys. 4 różni się od rys. 3 tylko tym, że



Rys. 4. Schemat uwydatniający identyczność schematów z rys. 2 i 3

opuszczono odgałęzienie poziome od punktu 2 (ponieważ dla rozpatrywania omawianych sprzężeń jest nieistotne, czy wielkość y , oprócz jej oddziaływania na obiekt C , jest wykorzystana jeszcze do jakichś celów), a sumowanie się wielkości z z wielkością x potraktowano jako właściwość obiektu B (który, oczywiście, zachowuje poza tym swoją właściwość mnożenia wielkości wyjściowej, tj. sumy $x+z$, przez współczynnik B), dzięki czemu widoczne jest również podobieństwo rys. 4 do rys. 2.

Na postawione poprzednio pytanie otrzymuje się z rys. 4 odpowiedź, że sprzężenie zwrotne występuje między wielkościami x i y . Wielkość z odgrywa w tym sprzężeniu tylko rolę parametru, podobnie jak współczynniki B i C . Traktowanie wielkości z jako wielkości wejściowej wynika z potrzeb automatyki (w zagadnieniach regulacji z jest wartością, na jaką regulator został nastawiony, y zaś jest wartością, jaką regulator rzeczywiście utrzymuje); w ogólnym przypadku za wielkość wejściową można również dobrze uważać współczynnik B lub współczynnik C .

Z identyczności (29) i (5), otrzymanych na dwóch różnych drogach rozumowania, wynika, że sprzężenie afirmacja-afirmacja jest tym samym co osprężenie dodatnie, a sprzężenie negacja-afirmacja tym samym co sprzężenie ujemne.

Znak plus w równaniu (29) odnosi się do sprzężenia dodatniego, a znak minus do sprzężenia ujemnego.

Ostatecznie więc sprzężenie (afirmacja-afirmacja) dodatnie możemy określić układem równań

$$(30) \quad y = B(z + x)$$

$$(31) \quad x = Cy$$

a sprzężenie ujemne (negacja-afirmacja)

$$(32) \quad y = B(z - x)$$

$$(33) \quad x = Cy$$

Równania (6) i (7) pozwalają określić stan wielkości y , osiągany w wyniku sprzężenia zwrotnego, natomiast układy równań (30) i (31) oraz (32) i (33) pozwalają określić przebiegi, w których się do tego stanu dochodzi.

Jeżeli rozpatrywać przebiegi cyklicznie w taki sposób, że najpierw występuje przetwarzanie oddziaływań w jed-

nym ze sprzężonych obiektów, potem w drugim, potem znów w pierwszym itd., to np. dla sprzężenia dodatniego, wychodząc ze stanu początkowego $y_0 = 0$ i $x_0 = 0$, otrzymuje się ze wzoru (30) $y_1 = Bz$ a ze wzoru (31) $x_1 = BCz$, potem ze wzoru (30) $y_2 = Bz(1 + BC)$ a ze wzoru (31) $x_2 = BCz(1 + BC)$ itd. Na tej podstawie można wyznaczyć przebiegi oddziałujących wielkości w funkcji czasu (wyrażonego liczbą cykli).

Ponieważ wielkości x i y różnią się między sobą tylko współczynnikiem C , więc do uwydatnienia charakteru przebiegów można się ograniczyć tylko do jednej z tych wielkości, np. do wielkości x .

Wówczas otrzymuje się dla sprzężenia zwrotnego dodatniego:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = BCz$$

$$x_2 = BCz(1 + BC)$$

$$x_3 = BCz(1 + BC + B^2C^2)$$

$$x_4 = BCz(1 + BC + B^2C^2 + B^3C^3) \text{ itd.},$$

a dla sprzężenia zwrotnego ujemnego:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = BCz$$

$$x_2 = BCz(1 - BC)$$

$$x_3 = BCz(1 - BC + B^2C^2)$$

$$x_4 = BCz(1 - BC + B^2C^2 - B^3C^3) \text{ itd.}$$

W przebiegach tych można rozróżnić sprzężenie zbieżne, gdy $BC < 1$, oraz sprzężenie rozbieżne, gdy $BC > 1$.

Przy sprzężeniu dodatnim zbieżnym x dąży do granicy określonej wzorem

$$(34) \quad x_g = \frac{BCz}{1 - BC}$$

jaki otrzymuje się eliminując y z równań (30) i (31).

Przy sprzężeniu dodatnim rozbieżnym x dąży coraz szybciej do nieskończoności. Wzór (34) określa granicę, od której x się oddala (x dążyłoby do tej granicy, gdyby czas cofał się do minus nieskończoności).

W szczególnym przypadku sprzężenia dodatniego, gdy $BC = 1$, przyrosty x są jednakowe dla każdego cyklu (na wykresie x wzrastałoby do nieskończoności według linii prostej).

Przy sprzężeniu ujemnym zbieżnym x dąży oscylacyjnie do granicy określonej wzorem

$$(35) \quad x_g = \frac{BCz}{1 + BC}$$

jaki otrzymuje się eliminując y z równań (32) i (33).

Przy sprzężeniu ujemnym rozbieżnym x dąży coraz szybciej na przemian do plus nieskończoności i do minus nieskończoności. Wzór (35) określa granicę, od której x się oscylacyjnie oddala (x dążyłoby oscylacyjnie do tej granicy, gdyby czas cofał się do minus nieskończoności).

W szczególnym przypadku sprzężenia ujemnego, gdy $BC = 1$, przyrosty x są dla każdego cyklu jednakowe co do wartości bezwzględnej, ale na przemian zmieniają znak.

Podział sprzężeń zwrotnych na dodatnie i ujemne oraz na zbieżne i rozbieżne opiera się na niezależnych od siebie kryteriach, w rezultacie więc otrzymuje się cztery podstawowe rodzaje sprzężeń zwrotnych: 1) dodatnie zbieżne, 2) dodatnie rozbieżne, 3) ujemne zbieżne, 4) ujemne rozbieżne.

Обратная связь в кибернетике и автоматике

Резюме

Дается представление в связи между объектами в результате их взаимодействия. Приводятся наиболее обобщенные формулы положительной и отрицательной обратной связи. Введено различие сходящейся и расходящейся обратных связей.

The Feed-Back in Cybernetics and Automation

Summary. The notion of feed-back as a relationship between objects consisting in mutual action is discussed. Most general formulae for negative and positive feed-back are given. Distinction between convergent and divergent feed-back is introduced.