Задание 1. Аналитическое решение дифференциального уравнения с запаздыванием

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием:

$$y'(t) = y(t-1), \qquad t \geq 0$$

Начальная функция задана на интервале $[-1, 0)$:

$$y(t) = 0, \qquad t \in [-1, 0)$$

И отдельно задано значение в нуле:

$$y(0) = 1$$

Требуется получить полное аналитическое решение на интервале $0 \leq t \leq 5$, используя метод пошагового построения по сегментам.

1. Интервал $[-1, 0)$

По условию:

$$y(t) = 0, \qquad -1 \leq t < 0$$

2. Интервал $[0, 1)$

Здесь аргумент запаздывания лежит в области $[-1, 0)$:

$$y(t-1) = 0$$

Тогда:

$$y'(t) = 0$$

$$y(t) = C_1 = y(0) = 1$$

$$\boxed{y(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1}$$

3. Интервал $[1, 2)$

Теперь:

$$t - 1 \in [0, 1), \quad y(t-1) = 1$$

$$y'(t) = 1$$

$$y(t) = t + C_2$$

Из непрерывности:

$$y(1) = 1 \ \Rightarrow \ C_2 = 0$$

$$\boxed{y(t) = t, \quad 1 \le t < 2}$$

4. Интервал $[2, 3)$

На этом интервале:

$$t - 1 \in [1, 2), \quad y(t-1) = t - 1$$

$$y'(t) = t - 1$$

$$y(t) = \frac{(t-1)^2}{2} + C_3$$

Используем непрерывность в точке $t = 2$:

$$y(2) = 2$$

$$2 = \frac{(2-1)^2}{2} + C_3 = \frac{1}{2} + C_3$$

$$C_3 = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{3}{2}, \quad 2 \le t < 3}$$

5. Интервал $[3, 4)$

Теперь:

$$t - 1 \in [2, 3), \quad y(t-1) = \frac{(t-2)^2}{2} + \frac{3}{2}$$

$$y'(t) = \frac{(t-2)^2}{2} + \frac{3}{2}$$

Интегрируем:

$$y(t) = \frac{(t-2)^3}{6} + \frac{3}{2}t + C_4$$

Используем непрерывность в точке $t = 3$:

$$y(3) = \frac{(3-1)^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} + 1.5 = 3.5$$

Подставим:

$$3.5 = \frac{1}{6} + \frac{9}{2} + C_4$$

$$C_4 = -\frac{7}{6}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{(t-2)^3}{6} + \frac{3}{2}t - \frac{7}{6}, \quad 3 \le t < 4}$$

6. Интервал $[4, 5]$

Теперь аргумент запаздывания лежит в предыдущем сегменте:

$$t - 1 \in [3, 4)$$

Значит:

$$y(t-1) = \frac{(t-3)^3}{6} + \frac{3}{2}(t-1) - \frac{7}{6}$$

Уравнение на интервале:

$$y'(t) = \frac{(t-3)^3}{6} + \frac{3}{2}(t-1) - \frac{7}{6}$$

Интегрируем:

$$y(t) = \frac{(t-3)^4}{24} + \frac{3}{4}(t-1)^2 - \frac{7}{6}t + C_5$$

Вычисляем постоянную по условию непрерывности:

$$y(4) = \frac{(4-2)^3}{6} + \frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{7}{6}$$

$$y(4) = \frac{8}{6} + 6 - \frac{7}{6} = \frac{1}{6} + 6 = \frac{37}{6}$$

Подставляем $t = 4$:

$$\frac{37}{6} = \frac{1}{24} + \frac{27}{4} - \frac{28}{6} + C_5$$

Приводим к общему знаменателю и упрощаем:

$$C_5 = \frac{97}{24}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{(t-3)^4}{24} + \frac{3}{4}(t-1)^2 - \frac{7}{6}t + \frac{97}{24}, \qquad 4 \leq t \leq 5}$$

Итоговое аналитическое решение на интервале $[0, 5]$

$$y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ t, & 1 \le t < 2 \\ \dfrac{(t-1)^2}{2} + \dfrac{3}{2}, & 2 \le t < 3 \\ \dfrac{(t-2)^3}{6} + \dfrac{3}{2}t - \dfrac{7}{6}, & 3 \le t < 4 \\ \dfrac{(t-3)^4}{24} + \dfrac{3}{4}(t-1)^2 - \dfrac{7}{6}t + \dfrac{97}{24}, & 4 \le t \le 5 \end{cases}$$