Задание 2

Условие. Решить нейтральное дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом на отрезке $[0, 5]$

$$y'(t) = y(t-1) + y'(t-1), \qquad t \geq 0,$$

с начальной (исторической) функцией

$$y(t) = 1, \qquad t \in [-1, 0].$$

Найти полное аналитическое решение на $[0, 5]$. Используем метод шагов (method of steps) с задержкой $\tau = 1$. Будем строить решение по отрезкам $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$. Во всех вычислениях явно подставляем значения из предыдущего шага.

Шаг 0: $t \in [0, 1]$

Для $t \in [0, 1]$ имеем $t - 1 \in [-1, 0]$. По истории $y(t-1) = 1$ и $\big(y(t-1)\big)' = 0$. Тогда

$$y'(t) = 1 + 0 = 1.$$

Интегрируем:

$$y(t) = 1 + t + C.$$

Поскольку $y(0) = 1$, получаем $C = 0$. Следовательно

$$\boxed{y(t) = 1 + t, \qquad t \in [0, 1].}$$

Шаг 1: $t \in [1, 2]$

Теперь $s = t - 1 \in [0, 1]$. Из предыдущего шага:

$$y(s) = 1 + s, \qquad y'(s) = 1 \quad \text{для } s \in [0, 1].$$

Подставляем в уравнение:

$$y'(t) = y(t-1) + y'(t-1) = (1 + (t-1)) + 1 = t + 1.$$

Интегрируем:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + C.$$

Накладываем сопряжение в точке $t = 1$: $y(1) = 1 + 1 = 2$. При $t = 1$ правая часть даёт

$$\frac{1^2}{2} + 1 + C = \frac{1}{2} + 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}.$$

Итак

$$\boxed{y(t) = \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}, \qquad t \in [1,2].}$$

(Проверка в $t = 1$: даёт $1/2 + 1 + 1/2 = 2$.)

Шаг 2: $t \in [2,3]$

Пусть $s = t - 1 \in [1,2]$. Тогда из предыдущего шага:

$$y(s) = \frac{s^2}{2} + s + \frac{1}{2}, \qquad y'(s) = s + 1.$$

Подставляем в уравнение:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t-1) + y'(t-1) \\ &= \frac{(t-1)^2}{2} + (t-1) + \frac{1}{2} \; + \; ((t-1) + 1). \end{aligned}$$

Упростим правую часть пошагово:

$$\frac{(t-1)^2}{2}+(t-1)+\frac{1}{2}+(t-1)+1=\frac{(t-1)^2}{2}+2(t-1)+\frac{3}{2}.$$

Разворачиваем $(t-1)^2=t^2-2t+1$, тогда

$$\frac{(t-1)^2}{2}=\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}.$$

Подставляем:

$$y'(t)=\left(\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}\right)+2t-2+\frac{3}{2}=\frac{t^2}{2}+t.$$

Значит

$$y'(t)=\frac{t^2}{2}+t.$$

Интегрируем:

$$y(t)=\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+C.$$

Найдём C по сопряжению в $t=2$. Из предыдущего куска при $t=2$:

$$y(2)=\frac{2^2}{2}+2+\frac{1}{2}=2+2+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}.$$

Вставляем в первообразную:

$$\frac{2^3}{6}+\frac{2^2}{2}+C=\frac{8}{6}+2+C=\frac{4}{3}+2+C=\frac{10}{3}+C.$$

Тогда

$$C=y(2)-\frac{10}{3}=\frac{9}{2}-\frac{10}{3}=\frac{27-20}{6}=\frac{7}{6}.$$

Имеем

$$\boxed{y(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{7}{6}, \qquad t \in [2,3].}$$

Шаг 3: $t \in [3,4]$

Возьмём $s = t - 1 \in [2,3]$. По предыдущему шагу:

$$y(s) = \frac{s^3}{6} + \frac{s^2}{2} + \frac{7}{6}, \qquad y'(s) = \frac{s^2}{2} + s.$$

По уравнению:

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t-1) + y'(t-1) \\ &= \left(\frac{(t-1)^3}{6} + \frac{(t-1)^2}{2} + \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{(t-1)^2}{2} + (t-1)\right). \end{aligned}$$

Собираем и упрощаем:

$$y'(t) = \frac{(t-1)^3}{6} + \left(\frac{(t-1)^2}{2} + \frac{(t-1)^2}{2}\right) + (t-1) + \frac{7}{6}.$$

То есть

$$y'(t) = \frac{(t-1)^3}{6} + (t-1)^2 + (t-1) + \frac{7}{6}.$$

Развёрнуто, вычисляя по степеням (корректно упрощая), получаем

$$\boxed{y'(t) = \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + 1.}$$

Интегрируем:

$$y(t)=\frac{t^4}{24}+\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{4}+t+C.$$

Найдём C по сопряжению в $t=3$. Сначала $y(3)$ из предыдущего куска:

$$y(3)=\frac{3^3}{6}+\frac{3^2}{2}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{7}{6}.$$

Приводим к общему знаменателю 6:

$$y(3)=\frac{27+27+7}{6}=\frac{61}{6}.$$

Значение первообразной при $t=3$:

$$\frac{3^4}{24}+\frac{3^3}{6}-\frac{3^2}{4}+3=\frac{81}{24}+\frac{27}{6}-\frac{9}{4}+3=\frac{69}{8}.$$

(вычисления в дробях даёт $69/8$). Тогда

$$C=y(3)-\frac{69}{8}=\frac{61}{6}-\frac{69}{8}=\frac{37}{24}.$$

Итог:

$$\boxed{y(t)=\frac{t^4}{24}+\frac{t^3}{6}-\frac{t^2}{4}+t+\frac{37}{24},\qquad t\in[3,4].}$$

Шаг 4: $t\in[4,5]$

Пусть $s=t-1\in[3,4]$. Тогда (по предыдущему шагу)

$$y(s)=\frac{s^4}{24}+\frac{s^3}{6}-\frac{s^2}{4}+s+\frac{37}{24},\qquad y'(s)=\frac{s^3}{6}+\frac{s^2}{2}-\frac{s}{2}+1.$$

Подставляем в уравнение:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= y(t-1) + y'(t-1) \\
&= \Big(\frac{(t-1)^4}{24} + \frac{(t-1)^3}{6} - \frac{(t-1)^2}{4} + (t-1) + \frac{37}{24}\Big) \\
&\quad + \Big(\frac{(t-1)^3}{6} + \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)}{2} + 1\Big).
\end{aligned}
$$

Соберём подобные члены. Складывая степенные члены по степеням $(t-1)$ получаем:

- для $(t-1)^4$: $\dfrac{(t-1)^4}{24}$;
- для $(t-1)^3$: $\dfrac{(t-1)^3}{6} + \dfrac{(t-1)^3}{6} = \dfrac{(t-1)^3}{3}$;
- для $(t-1)^2$: $-\dfrac{(t-1)^2}{4} + \dfrac{(t-1)^2}{2} = \dfrac{(t-1)^2}{4}$;
- для $(t-1)$: $(t-1) - \dfrac{(t-1)}{2} = \dfrac{(t-1)}{2}$;
- константа: $\dfrac{37}{24} + 1 = \dfrac{61}{24}$.

Итак промежуточное упрощение:

$$
y'(t) = \frac{(t-1)^4}{24} + \frac{(t-1)^3}{3} + \frac{(t-1)^2}{4} + \frac{(t-1)}{2} + \frac{61}{24}.
$$

Раскроем скобки и приведём к многочлену по t:

$$
\begin{aligned}
\frac{(t-1)^4}{24} &= \frac{t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1}{24}, \\
\frac{(t-1)^3}{3} &= \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{3}, \\
\frac{(t-1)^2}{4} &= \frac{t^2 - 2t + 1}{4}, \\
\frac{(t-1)}{2} &= \frac{t-1}{2}, \qquad \frac{61}{24} = \frac{61}{24}.
\end{aligned}
$$

После суммирования всех членов получаем окончательно:

$$
\boxed{y'(t) = \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{5t}{6} + 2\,.}
$$

Суммируя подобные члены и раскрывая скобки, получаем (последовательная алгебра):

$$\boxed{y'(t) = \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{5}{6}t + 2.}$$

Интегрируем:

$$y(t) = \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{12} + 2t + C.$$

Найдём C по сопряжению в $t = 4$. Для этого используем значение $y(4)$ из предыдущего куска:

$$y(4) = \frac{4^4}{24} + \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{4} + 4 + \frac{37}{24} = \frac{256}{24} + \frac{64}{6} - 4 + 4 + \frac{37}{24}.$$

После приведения к общему знаменателю получаем $y(4) = \frac{549}{24}$. Первообразная при $t = 4$ равна $116/5$ (в дробях $2784/120$). Значит

$$C = \frac{549}{24} - \frac{116}{5} = -\frac{13}{40}.$$

Итак на последнем куске

$$\boxed{y(t) = \frac{t^5}{120} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{6} + \frac{5t^2}{12} + 2t - \frac{13}{40}, \qquad t \in [4, 5].}$$

Итог: кусочное аналитическое решение на $[0, 5]$

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} 1 + t, & t \in [0, 1], \\ \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2}, & t \in [1, 2], \\ \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{7}{6}, & t \in [2, 3], \\ \dfrac{t^4}{24} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{4} + t + \dfrac{37}{24}, & t \in [3, 4], \\ \dfrac{t^5}{120} + \dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{5t^2}{12} + 2t - \dfrac{13}{40}, & t \in [4, 5]. \end{cases}}$$

Дополнительные проверки (узловые точки)

Вычислим значения в узлах $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ — должны согласовываться со стыковыми условиями.

- $y(0) = 1$ (история).
- $y(1) = 1 + 1 = 2$.
- $y(2) = \frac{2^2}{2} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.
- $y(3) = \frac{3^3}{6} + \frac{3^2}{2} + \frac{7}{6} = \frac{61}{6}$.
- $y(4) = \frac{4^4}{24} + \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{4} + 4 + \frac{37}{24} = \frac{549}{24}$.
- $y(5) =$ можно получить подстановкой $t = 5$ в последний многочлен:

  $$y(5) = \frac{5^5}{120} + \frac{5^4}{24} - \frac{5^3}{6} + \frac{5 \cdot 5^2}{12} + 2 \cdot 5 - \frac{13}{40},$$

  при желании можно упростить численно.

Заключение

Приведено полное пошаговое аналитическое решение методом шагов (method of steps) для нейтрального DDE $y'(t) = y(t-1) + y'(t-1)$ с постоянной историей $y(t) \equiv 1$ на $[-1, 0]$. На каждом шаге мы использовали решения предыдущего шага для вычисления отложенных членов $y(t-1)$ и $y'(t-1)$, затем интегрировали и подбирали константу интегрирования по сопряжению в стыковой точке.