

Zestaw 1 — Rachunek różniczkowy

1. Oblicz pochodne funkcji danych wzorem:

a) $f(x) = \sin(\ln x + \sqrt{x})$,

b) $f(x) = \sqrt[3]{\arctg(x^3)}$,

c) $f(x) = e^{\cos^2 \frac{1}{x}}$,

d) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\arccos x}{\ln \frac{x-1}{x+1}}$.

2. Na paraboli $y = x^2$ zaznaczono dwa punkty o odciętych $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli, która jest równoległa do siecznej przechodzącej przez wybrane punkty.

3. Znajdź styczną do krzywej $y = \frac{x+9}{x+5}$, która przechodzi przez początek układu współrzędnych.

4. Znajdź wszystkie styczne do paraboli $y = x^2 - 4x + 1$, przechodzące przez punkty o współrzędnych $(0, 0)$ lub $(1, 1)$.

5. Ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej wyprowadź wzór na pochodną \arctg .

6. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

7. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji danej wzorem

$$f(x) = x^2 e^x.$$

8. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji danej wzorem

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$$

na przedziale $[0, 1]$.

9. Uzasadnij, że

$$\ln x > 2 \frac{x-1}{x+1}, \quad x > 1.$$

10. Prostopadłościenne pudełko mające w podstawie kwadrat, ma mieć objętość 2000 cm^3 . Materiał na dno kosztuje 30 zł za cm^2 , zaś na ściany boczne jest o połowę tańszy. Jakie powinny być wymiary pudełka, aby koszt zużytego materiału był minimalny?

11. Bieżnia lekkoatletyczna ma długość 400 metrów i składa się z dwóch równoległych odcinków oraz dwóch półokręgów je łączących (jak na rysunku). Jakie wymiary powinna mieć bieżnia, aby powierzchnia prostokąta wewnątrz toru biegowego była jak największa?

12. Firma wydobywająca ropę naftową musi ułożyć rurociąg z punktu A leżącego przy brzegu do platformy wiertniczej znajdującej się na morzu w punkcie B . Koszt ułożenia 1 km rurociągu wzdłuż brzegu wynosi $\$ 500\,000$, natomiast na dnie morza $\$ 1\,000\,000$. Jaki jest najmniejszy możliwy koszt ułożenia takiego rurociągu?

13. Wyznacz:

a) e z dokładnością do 10^{-7} ,

b) $\sqrt{3.96}$ z dokładnością do 10^{-5} .

14. Wykorzystując regułę de l'Hospitala, wyznacz granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x},$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^3},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right),$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x) \ln x,$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$