Zestaw 4 — Indukcja

Część A

1. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości:

a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$,

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

a) $n^3 + 11n$ jest podzielna przez 6,

b) $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9,

c) $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.

Część B

3. Udowodnij nierówność

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$.

4. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwa jest nierówność

$$2^n > n^2.$$

5. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których prawdziwa jest nierówność

$$3^n \geqslant 2(n+1)^2.$$

6. Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

7. Znajdź zwartą postać sumy

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

8. Znajdź zwartą postać sumy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n!$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

9. Udowodnij nierówność podwójną

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

10. Niech $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Fibonacciego zdefiniowanym przez relację rekurencyjną

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Sprawdź, że

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n \geqslant 0.$$

11. Udowodnij, że

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \qquad m, n \in \mathbb{N}.$$

12. Sprawdź, że

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

13. Wykazać, że liczba przekątnych w n-kącie wypukłym jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

14. Niech liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$, gdzie $n \geqslant 2$ oraz $a_i \neq 0$ dla $i = 1, 2, \dots n$, tworzą ciąg arytmetyczny. Wykaż, że

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}.$$

15. W pewnym państwie każda para miast jest połączona drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że istnieje w tym państwie takie miasto, do którego można dojechać z każdego innego miasta bezpośrednio lub przejeżdżając przez co najwyżej jedno inne miasto.

16. Z szachownicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole (wymiaru 1×1). Wykaż, że pozostałą część można pokryć figurami w kształcie litery L, które złożone są z trzech pól 1×1.

17. W turnieju piłkarskim bierze udział n drużyn. Turniej był rozgrywany metodą „każdy z każdym", a każdy mecz zakończył się wygraną jednej z drużyn. Uzasadnij, że po zakończeniu turnieju wszystkie drużyny można ustawić w kolejności w ten sposób, że pierwsza drużyna wygrała z drugą, druga wygrała z trzecią, trzecia wygrała z czwartą, …, przedostatnia wygrała z ostatnią.

18. Grupa 33 dzieci ustawiła się na zaśnieżonym boisku szkolnym. Każde dziecko stoi w innym miejscu, a odległości między dziećmi są parami różne. W pewnym momencie wszystkie dzieci rzucają kulką śniegu w najbliżej stojące dziecko. Wykaż, że przynajmniej jedno z dzieci nie zostanie trafione.

Część C

19. Wykaż, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić jako sumę liczb Fibonacciego (jednej bądź wielu), przy czym w sumie tej nie mogą wystąpić dwie kolejne liczby Fibonacciego. Innymi słowy, dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki zbiór liczb naturalnych $\{c_1, \dots, c_k\}$, że $c_i + 1 < c_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$ oraz

$$n = \sum_{i=1}^{k} F_{c_i}.$$

20. Udowodnij, że istnieje taki ciąg liczb naturalnych, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić jako różnicę pewnych dwóch elementów tego ciągu.