Własności elementów wyróżnionych

$(\langle 0,1), \leqslant)$

el. najmniejszy

Brak el. największego

$0.(9) = 0.999\ldots = 1$

$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\ldots = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \boxed{1}$

$\left(\{2^n\}\cup\{3^n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{5\},\ |\ \right)$

Brak el. najmniejszego i największego.

Tw. Jeżeli w zbiorze $(X, \prec)$ istnieje el. największy (najmniejszy), to jest on jedyny.

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwa el. największe, x i y. Ponieważ x jest el. największym, to w szczególności

$y \prec x$.

Ale y też jest el. największym, więc

$x \prec y$.

Ponieważ relacja $\prec$ jest antysymetryczna, to x musi być równe y.

Tw. Jeżeli X jest niepustym zb. $\boxed{\text{skończonym}}$! uporządkowanym przez relację $\prec$, to istnieje w nim el. $\boxed{\text{maksymalny}}$ i minimalny.

Dowód. Indukcja względem liczebność X.

1. $|X| = 1$. $X = \{x\} \Rightarrow x$ jest el. maks.
2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $|X| = n+1$ i załóżmy, że teza jest prawdziwa dla dowolnego zbioru n-elementowego. (2)

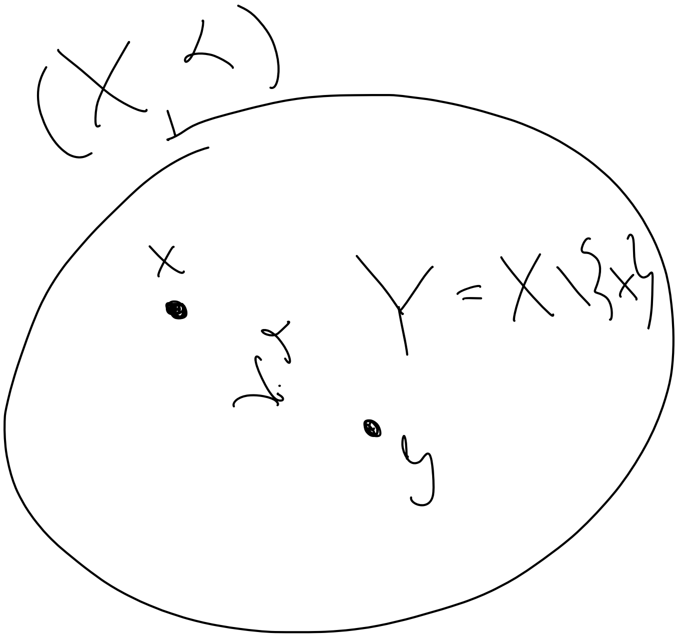
Ustalmy $x \in X$. Istnieje zbiór Y, dla którego $X = Y \cup \{x\}$. Oczywiście $|Y| = n$.

Z założenia (2) wynika, że Y ma el. maks. $y \in Y$.

1) $\underline{x \prec y}$ $\Rightarrow y$ jest el. maks. dla X

2) $\underline{y \prec x}$ $\Rightarrow x$ jest maks. w X

3) $\underline{\neg(x \prec y) \wedge \neg(y \prec x)}$ $\Rightarrow$ y jest el. maks. w X.



Tw. $(X, \prec)$, X niepusty i skończony. !
Jeżeli $x \in X$ jest jedynym el. maks., to jest to el. największy.

Dow. Indukcja względem liczności X.

Ograniczenia i kresy

$(X, \prec)$ $\quad A \subset X$, $\quad (A, \prec)$

Element $x \in X$ jest ograniczeniem górnym

zb. A, jeżeli

$$\bigwedge_{a \in A} a \prec x.$$

—— 〃 —— dolnym

zb. A, jeżeli

$$\bigwedge_{a \in A} x \prec a.$$

• Jeżeli zb. ograniczeń górnych zbioru A ma el. najmniejszy (w sensie relacji ≤), to nazywamy go <u>kresem górnym</u> zb. A.

• Jeżeli zb. ograniczeń dolnych zb. A ma el. największy, to nazywamy go <u>kresem dolnym</u> zb. A.

A: $(\langle 0,1), \leq)$ $\qquad \langle 0,1) \subset \mathbb{R} \qquad (\mathbb{R}, \leq)$

brak el. największego

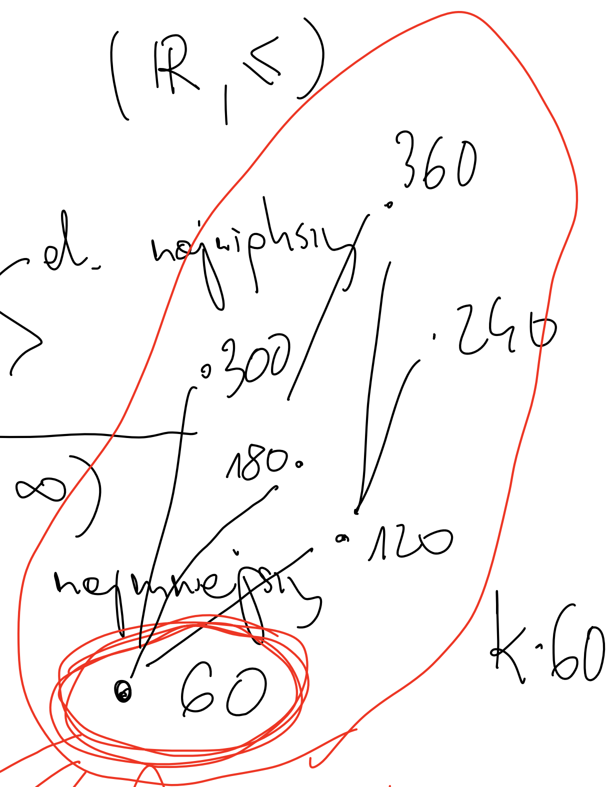
el. najmniejszy i kres dolny

zb. ograniczeń dolnych $= (-\infty, 0\rangle$ el. największy

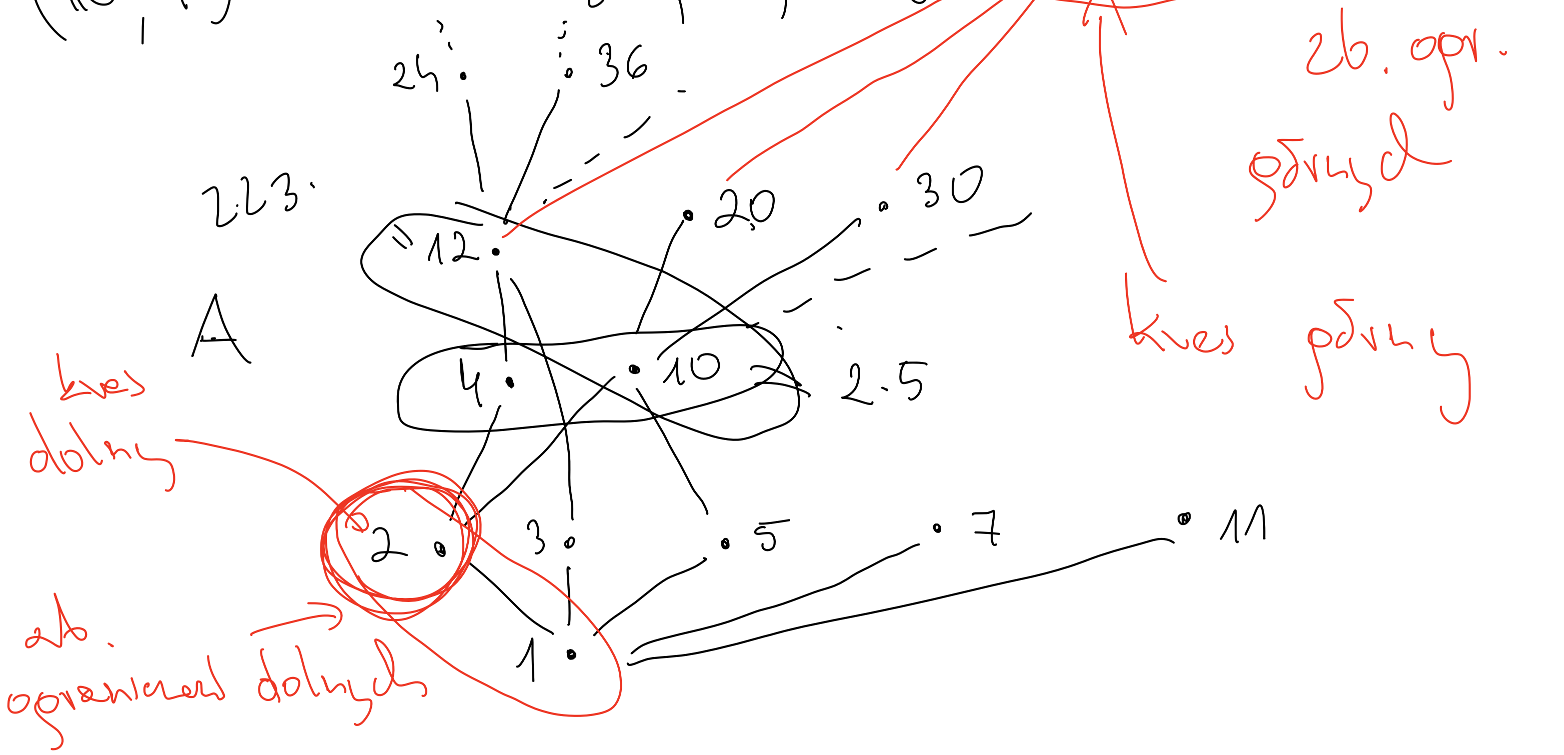
---

zb. ograniczeń górnych $= \langle 1, +\infty)$

el. najmniejszy



• $(\mathbb{N}, |)$ $\qquad A = \{4, 10, 12\}$



Relacje równoważności

(X, R), $R \subset X \times X$

R nazywamy relacją równoważności, jeżeli jest ona:

1) zwrotna,
2) $\boxed{\text{symetryczna,}}$
3) przechodnia.

Zamiast xRy będziemy pisać $x \sim y$.

Klasa abstrakcji el. $x \in X$ to zbiór wszystkich el. $y \in X$, które są w relacji $\sim$ z x.

Klasa abstrakcji x oznaczona jest przez $[x]$

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}$$

Przykład

$X = \mathbb{Z}$, $\quad x \sim y \iff 3 \mid x - y$

$\sim$ jest relacją równoważności.

$$[0] = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$$

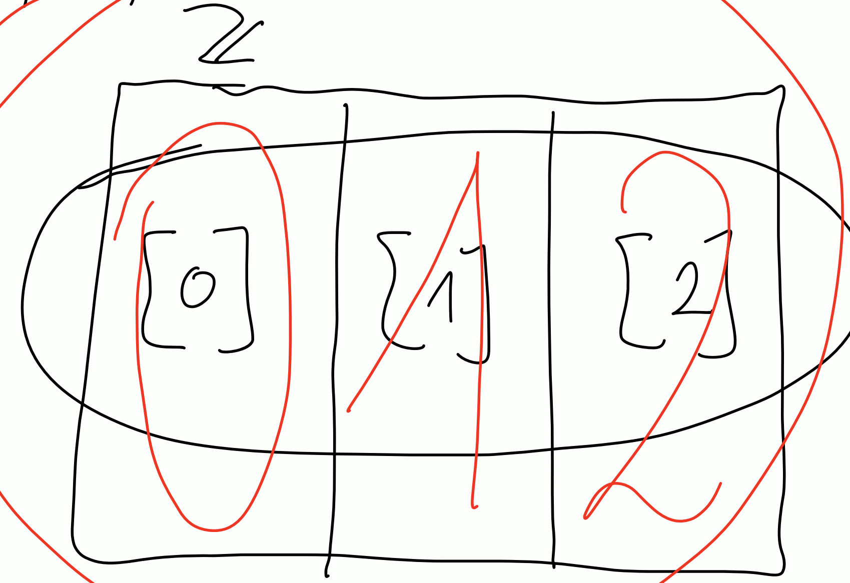
$$[1] = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} = \{3n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[2] = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} = \{3n+2 : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$[3] = [0] = [-3] = [6] = \dots$$

$$[4] = [1] = [-2] = \dots$$

$$[5] = [2] = [-1] = [8] = \dots$$



Zasada abstrakcji

Jeśli $\sim$ jest relacją równoważności w X,

to

1) $\bigwedge_{x \in X} [x] \neq \emptyset$ $\quad \{ x \in [x] \}$

2) $\bigwedge_{x,y \in X} [x] = [y] \vee [x] \cap [y] = \emptyset$

3) $X = \{ [x] \cup [y] \cup [z] \cup \ldots \} =$

$= \bigcup_{x \in X} [x]$ $\quad \left\{ X \text{ jest sumą wszystkich klas abstrakcji} \right\}$