Zestaw 1 — Teoria mnogości

Część A

1. Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)^2 \leqslant 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}\colon |x-3| > 2\}, \quad C = \{-1, 0\}$$

Wyznacz $(A \cup B) \setminus C$, $(B \setminus C) \cap A$ i $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus C) \triangle B$.

2. Wyznacz zbiór potęgowy dla zbiorów:

a) $\{1, 2, 3\}$,
b) $\emptyset$,
c) $\{\emptyset\}$,
d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

3. Wyznacz iloczyn kartezjański $A \times B$ dla zbiorów:

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$,
b) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$,
c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$.

4. Wyznacz zbiory $A \times (B \times C)$, $(A \times B) \times C$, $A \times B \times C$, przy czym $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2, 3\}$.

5. Podaj warunek równoważny równości

$$A \times B = B \times A.$$

Część B

6. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
c) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$,
d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
e) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$,
f) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,
g) $A \triangle B = A^c \triangle B^c$.

7. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D:

a) Jeśli $A \subset B$ oraz $C \subset D$, to $A \setminus D \subset B \setminus C$,
b) Jeśli $A \triangle B$ i $B \triangle C$ są zbiorami skończonymi, to $A \triangle C$ jest zbiorem skończonym.

8. Uzasadnij, że dla dowolnych zbiorów A i B mamy

a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \{C\colon C = A' \cup B'$ dla pewnych zbiorów $A' \in \mathcal{P}(A)$ i $B' \in \mathcal{P}(B)\}$.

9. Naszkicuj na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ i $B \times A$ dla:

a) $A = \{y \in \mathbb{R}\colon -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 0 < x \leqslant 1\}$,
b) $A = \mathbb{Z}$, $B = \langle 1, 2)$,
c) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x^2 + x - 2 \geqslant 0\}$, $B = \{b \in \mathbb{N}\colon 2^b < 11\}$.

10. Sprawdź, czy podane równości są prawdziwe:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

11. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_k \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $k \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeżeli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ również należy do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część C

12. Niech $A_1, \ldots, A_n$ będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujmy $\mathcal{A}$ jako najmniejszy zbiór, dla którego:

a) $A_k \in \mathcal{A}$ dla dowolnego $k \in \{1, \ldots, n\}$,

b) jeśli $X \in \mathcal{A}$ oraz $Y \in \mathcal{A}$, to ich suma $X \cup Y$ oraz różnica $X \setminus Y$ również należą do $\mathcal{A}$.

Ile maksymalnie elementów ma zbiór $\mathcal{A}$? Podaj przykład takiego zbioru.

Część D

13. Napisz program, który dla zadanej liczy naturalnej n wypisze wszystkie podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$.

14. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n oraz liczy $k \in \{1, \ldots, n\}$ wypisze wszystkie podzbiory k-elementowe zbiory $\{1, \ldots, n\}$.

15. Napisz program, który dla zadanej liczby naturalnej n wypisze wszystkie permutacje zbioru $\{1, \ldots, n\}$, to znaczy wszystkie sposoby uporządkowania elementów tego zbioru.