Problem optymalnego nawiasowania

$$\underbrace{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n}$$

$$\{(AB)C = A(BC)$$

A	$m \times k$
B	$k \times n$
AB	mkn mnożeń!

$$ABC$$

$$(AB)C \qquad A(BC)$$

ABCD

((AB)C)D   (AB)(CD)   (A(BC))D   A((BC)D)   A(B(CD))

$A_1 \dots A_n$ Ile jest różnych nawiasowań?

3 : 2
4 : 5
5 : ?
6 : ?
⋮

$(A_1(A_2 A_3) \dots))$ ⇝ ((()())...()))

) (

n↑ n→

✓ ()(()())

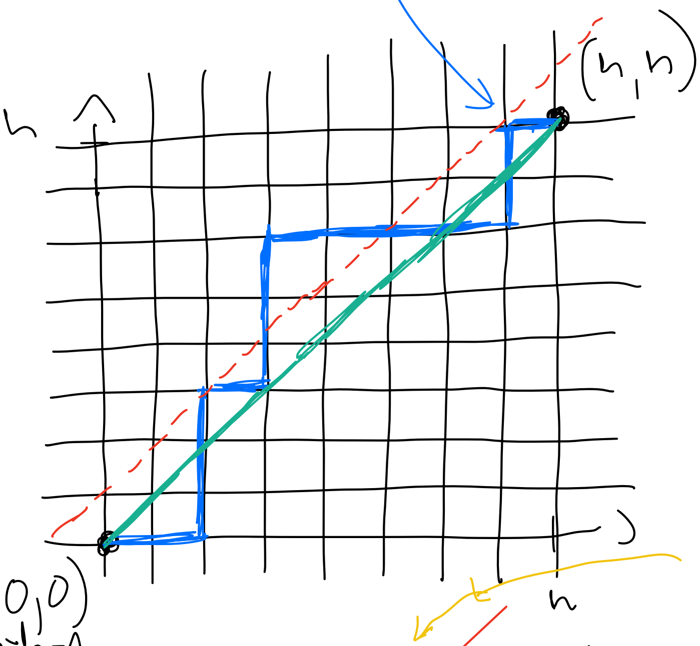
$+1, -1, +1, +1, -1, +1, -1, -1$

$(+)$ 0

× (()))(())

$+--$

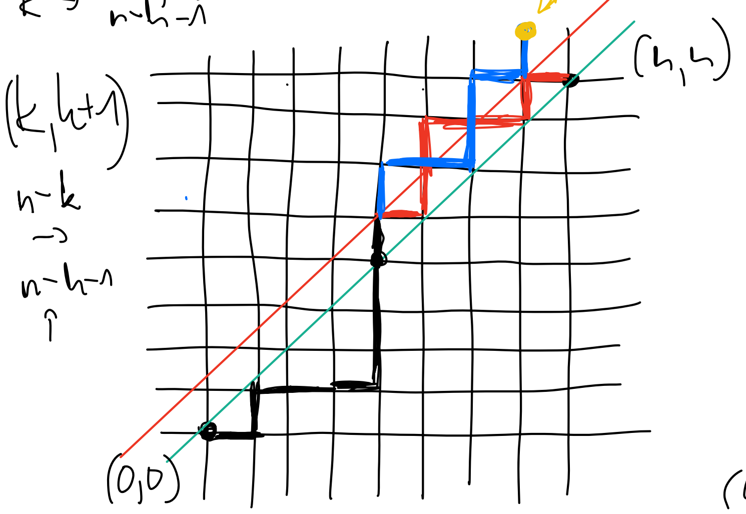
-1

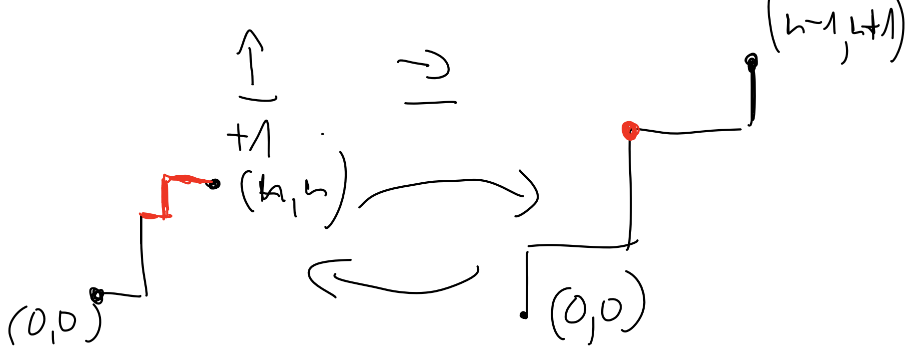


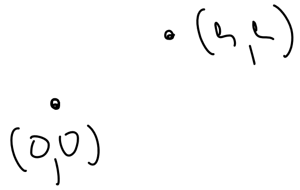
$\binom{2n}{n}$ liczba dróg mon. od (0,0) do (n,n)

(n-1, n+1)   (n-2, n+2)

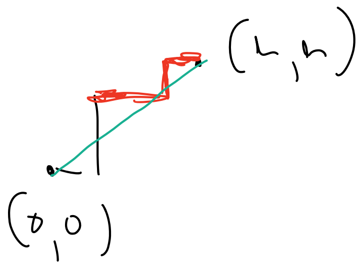
↑ → +1   → ↑ +1





L. 

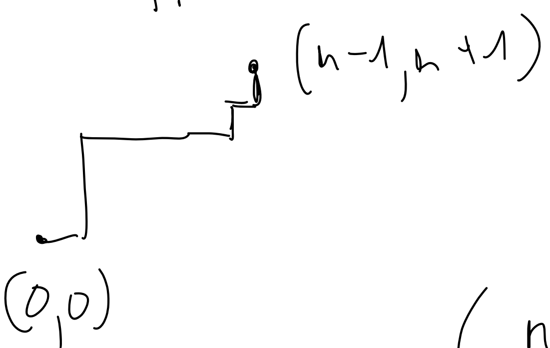
$$\binom{2n}{n}$$

L. 

?

$$\binom{2n}{n+1}$$

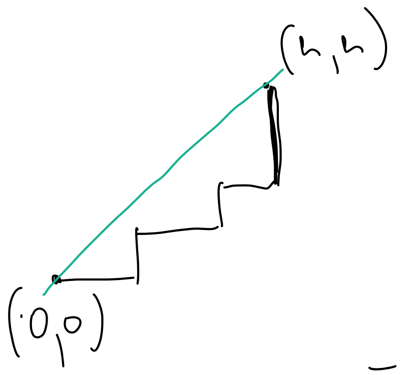
||

L. 

$n-1 \rightarrow$

$n+1 \uparrow$

$$\binom{n+1+n-1}{n+1} = \binom{2n}{n+1}$$

L. 

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} =$$

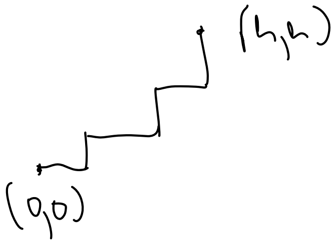
$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!}\left[\frac{1}{n!} - \frac{1\cdot n}{(n+1)(n-1)!\,n}\right] =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!}\left[\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)\,n!}\right] =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\left[1 - \frac{n}{n+1}\right] = \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

liczba Catalana

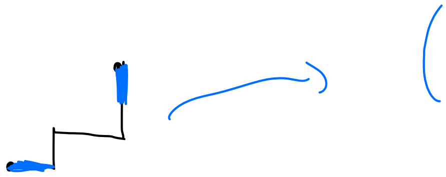


$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$$

n -el. $\quad C_{n-1}$

4

$$C_3 = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot\cancel{4}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 5$$



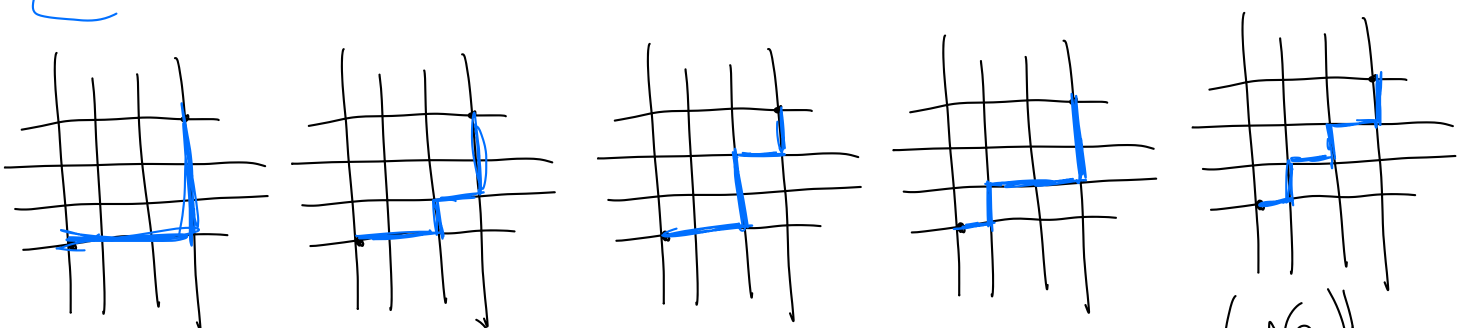
(A(B(CD)))

[(AB)(CD)] $\qquad$ ()()

[((AB)C)D] $\qquad$ (())

[A((BC)D)] $\qquad$ (())

[(((AB)C)D] $\qquad$ ((()))



A(B(CD)) $\qquad$ (AB)(CD) $\qquad$ ABCD $\qquad$ ABCD $\qquad$ (A(BC))D

((AB)C)D $\qquad$ A(B(CD))

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \sim \frac{\boxed{4^n}}{n^{3/2}}$$

$$A_1 A_2 \dots A_n$$

Własność optymalnej podstruktury

W optymalnym nawiasowaniu iloczynu

$$A_1 \ldots A_n$$

każdy blok

$$A_i \ldots A_j$$

powinien być nawiasowany według optymalnego nawiasowania tego bloku.

$$\left(\left(A_1 A_2\right) \ldots \underbrace{\left(A_i \ldots A_j\right)}_{A_i \ldots A_j} \ldots A_n\right.$$

$(A(BC))D \quad A((BC)D) \quad (AB)(CD) \quad A(B(CD)) \quad ABCD$

k_{ij} – liczba mnożeń w optymalnym nawiasowaniu $A_i \cdots A_j$

k_{1n} ?

$k_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, n$

kosz mnożenia

$$k_{ij} = \min_{i \le m < j} \left(k_{im} + k_{m+1,j} + \text{dodat. bloków} \right)$$

$(A_i \cdots A_m)(A_{m+1} \cdots A_j)$

m

k_{ii}

- $k_{12}, k_{23}, k_{34}, \dots$
- $k_{13}, k_{24}, k_{35}, \dots \longleftarrow \binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$
- $k_{14}, k_{25}, \dots$

$\vdots$

- k_{1n}

$[A_i \cdots A_j]$

$\boxed{O(n^3)} \qquad \boxed{O(n \log n)}$

$A + B \qquad A - B \qquad A \cdot B \qquad \checkmark$

$\frac{A}{B}$?

$\frac{a}{b} \overset{\text{def.}}{=} a \cdot b^{-1}$

?

$\boxed{b^{-1}} \cdot b = 1$

b^{-1} ist. $\Leftrightarrow b \neq 0$

$A \quad n \times n$

A^{-1}

$\boxed{A^{-1} \cdot A = I_n}$

$A I_n = I_n A = A$

$I_n \sim 1$

Macierz odwrotna

Niech A będzie macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$. Jeżeli istnieje macierz B, spełniająca warunek

$$AB = BA = I_n,$$

to nazywamy ją **macierzą odwrotną** do macierzy A. Piszemy wtedy

$$B = A^{-1}.$$

1. Czy A^{-1} jest wyznaczone jednoznacznie?
2. Kiedy A^{-1} istnieje?
3. Jak wyznaczyć A^{-1}?

(1) TAK. Załóżmy, że $AB = BA = AC = CA = I$

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

2. A^{-1} istnieje $\iff$ rz $A = n$ $\quad$ $\boxed{A \quad n\times n}$

3. Algorytm Gaussa

$$\left[\overset{n\times n}{A} \;\middle|\; b\right] \xrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{op. el.}} \left[I \;\middle|\; b' \right]$$

$$\left[\overset{n\times n}{A} \;\middle|\; I_n\right] \xrightarrow[\text{na w.}]{\text{op. el.}} \left[I_n \;\middle|\; B \right]$$

$$B = A^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 + w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_3]{w_3 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 5w_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 6 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right] \xrightarrow[w_1 - 2w_3]{w_2 - w_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -\frac{6}{4} & \frac{12}{4} & -\frac{10}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{w_1 - 3w_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -6 & 5 \end{bmatrix}}$$

Wyznaczniki

$A \quad n \times n$

$f: \quad A \longmapsto a \in \mathbb{R}$

$f: \quad \mathbb{R}_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}$

det ← determinant

$\det(A)$

Def. (Przez postać zredukowaną)

Jeżeli macierz A jest zapisana w postaci schodkowej to $\det A$ jest iloczynem elementów na przekątnej.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Op. ← $c \neq 0$

1) $w_i \cdot c$ $\qquad A \xrightarrow{w_i \cdot c} A' \qquad \det(A') = c \det A$

2) $w_i \leftrightarrow w_j$ $\qquad A \xrightarrow{w_i \leftrightarrow w_j} A' \qquad \det(A') = -\det A$

3) $w_i + w_j \cdot c$ $\qquad A \xrightarrow{w_i + c w_j} A' \qquad \det(A') = \det A$

Tym razem możemy wykonywać również operacje elementarne na kolumnach.