Zestaw 6

1. Wykorzystując definicję całki Riemanna, oblicz granice:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)$,

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2. Oblicz całki oznaczone:

a) $\int_0^3 |1-x|\,\mathrm{d}x$,

b) $\int_3^4 \ln|x-\mathrm{e}|\,\mathrm{d}x$.

3. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i parzysta na przedziale $[-a,a]$ dla pewnego $a\in\mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła i nieparzysta na przedziale $[-a,a]$ dla pewnego $a\in\mathbb{R}$. Uzasadnij, że

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

5. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$. Uzasadnij, że

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x.$$

6. Załóżmy, że dla pewnej funkcji ciągłej $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ i dowolnego $a\in\mathbb{R}$ zachodzi

$$\int_{a-1}^{a+1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2025.$$

Uzasadnij, że funkcja f jest okresowa.