

Zestaw 2 — Indukcja

Część A

1. Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzą równości:

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$

b) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$

d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{n}{4n+1}.$

2. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba

a) $n^3 + 11n$ jest podzielna przez 6,

b) $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9,

c) $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3.

3. Wykaż, że liczba przekątnych w n -kącie wypukłym jest równa $\frac{1}{2}n(n-3)$.

Część B

4. Udowodnij, że

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \geq 2.$$

5. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których prawdziwa jest nierówność

a) $2^n > n^2,$

b) $3^n \geq 2(n+1)^2.$

6. Znajdź zwartą postać sumy

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

7. Znajdź zwartą postać sumy

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

8. Udowodnij nierówność

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

9. Niech $(F_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem Fibonacciego zdefiniowanym rekurencyjnie

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Sprawdź, że

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n \geq 0.$$

10. Udowodnij, że

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

11. Sprawdź, że

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

12. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ liczba F_{5n} jest podzielna przez 5.

13. Zdefiniujmy ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ wzorami $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$,

$$a_{n+2} = 3a_n + 2a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Znajdź wzór rekurencyjny na a_n , $n \in \mathbb{N}$, w którym nie występuje żaden wyraz ciągu poza a_{n-1} .

14. Ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ jest zdefiniowany rekurencyjnie przez równości

$$a_1 = 1, \quad a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \quad m \geq n \geq 0.$$

Znajdź wzór jawny na a_n dla $n \geq 0$.

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b oraz dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i, \quad (a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

16. W pewnym państwie każda para miast jest połączona drogą jednokierunkową. Uzasadnij, że istnieje w tym państwie takie miasto, do którego można dojechać z każdego innego miasta bezpośrednio lub przejeżdżając przez co najwyżej jedno inne miasto.

17. Z szachownicy o wymiarach $2^n \times 2^n$ usunięto jedno pole (wymiaru 1×1). Wykaż, że pozostałą część można pokryć figurami w kształcie litery L , które złożone są z trzech pól 1×1 .

18. W turnieju piłkarskim bierze udział n drużyn. Turniej był rozgrywany metodą „każdy z każdym”, a każdy mecz zakończył się wygraną jednej z drużyn. Uzasadnij, że po zakończeniu turnieju wszystkie drużyny można ustawić w kolejności w ten sposób, że pierwsza drużyna wygrała z drugą, druga wygrała z trzecią, trzecia wygrała z czwartą, ..., przedostatnia wygrała z ostatnią.

19. Grupa 33 dzieci ustawiła się na zaśnieżonym boisku szkolnym. Każde dziecko stoi w innym miejscu, a odległości między dziećmi są parami różne. W pewnym momencie każde dziecko rzuca kulką śniegu w dziecko stojące najbliżej. Wykaż, że przynajmniej jedno z dzieci nie zostanie trafione.

20. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ ustawiono pionek w lewym dolnym rogu. Ponadto ułożono na niej pewną liczbę płytek o wymiarach 1×1 lub 2×1 . Żadne dwie płytki nie nachodzą na siebie, nie mają wspólnego boku ani wspólnego wierzchołka, a pole w prawym górnym rogu nie jest zakryte. Uzasadnij, że można dotrzeć do tego pola, wykonując pionkiem ruchy w górę lub w prawo oraz omijając pola, na których leżą płytki.

21. Uzasadnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnego zbioru A o n elementach, wszystkie jego podzbiory A_i , $i = 1, \dots, 2^n$ można ustawić w kolejności

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad \dots, \quad A_{2^n}$$

w ten sposób, że każde dwa sąsiednie zbiory różnią się dokładnie jednym elementem, przy czym zbiory A_1 i A_{2^n} również uznajemy za sąsiednie.

Dla $n = 3$ i zbioru $\{1, 2, 3\}$ kolejność podzbiorów może być następująca:

$$\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{2\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{1, 2, 3\}, \quad \{1, 3\}, \quad \{3\}.$$

22. Bolek i Lolek grają w następującą grę. Na stole leżą dwa niepuste stosy cukierków. Zaczyna Bolek, którego ruch polega na zjedzeniu wszystkich cukierków z wybranego stosu i podzieleniu drugiego stosu na dwie (niekoniecznie równe, ale niepuste) części. Następnie Lolek robi to samo, zjada wybrany stos i dzieli drugi na dwie części. Gracze postępują w ten sposób, aż jeden z nich nie będzie mógł wykonać legalnego ruchu. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

Część C

23. Uzasadnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej liczby naturalnej $n \leq p-2$ suma

$$1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n$$

jest podzielna przez p .

24. Wykaż, że każdą liczbę naturalną można jednoznacznie przedstawić jako sumę liczb Fibonacciego (jednej bądź wielu), przy czym w sumie tej nie mogą wystąpić dwie kolejne liczby Fibonacciego. Innymi słowy, dla każdej liczby naturalnej n istnieje taki zbiór liczb naturalnych $\{c_1, \dots, c_k\}$, że $c_i + 1 < c_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$ oraz

$$n = \sum_{i=1}^k F_{c_i}.$$

Część D

25. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech a_0, a_1, \dots, a_n będzie ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych. Zdefiniujmy wielomian

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

oraz wielomian pomocniczy

$$Q_{n-1}(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Uzasadnij, że znając wartość $Q_{n-1}(x)$, możemy łatwo wyznaczyć $P_n(x)$. Wykorzystując ten fakt, napisz program, który dla zadanego ciągu a_0, a_1, \dots, a_n oraz liczby x obliczy wartość wielomianu $P_n(x)$.

26. Niech a będzie liczbą rzeczywistą, a $n \geq 2$ liczbą całkowitą, która w zapisie dwójkowym ma postać

$$n = (b_k b_{k-1} \dots b_0)_2.$$

Uzasadnij, że znając wartość $a^{(b_k b_{k-1} \dots b_1)_2}$, możemy łatwo wyznaczyć a^n . Wykorzystując ten fakt, napisz program, który dla liczby rzeczywistej a oraz nieujemnej liczby całkowitej n obliczy a^n .