

Tautologie

$$\underset{T/F}{p} \Rightarrow (\underset{T/F}{q} \Rightarrow p)$$

Tautologie

Definicja (Tautologia)

Tautologią nazywamy formułę, która dla dowolnego wartościowania zmiennych w niej występujących przyjmuje wartość T.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \models (\neg p \vee \neg q) \quad \text{TAUTOLOGIA}$$

Uwagi

- ϕ ← formula
zależny od p_1, p_2, \dots, p_n

2^n	p_1	p_2	\dots	p_n	ϕ
	T/F	T/F	T/F	T/F	
	\vdots				

wykorzystanie

- Jeśli dla pewnego p_1, p_2, \dots, p_n ϕ ma wartość F, to ϕ nie jest tautologią.

Postać normalna

CNF

$$(\dots \vee \dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \boxed{} \vee \dots) \wedge \dots \wedge (\dots \vee \dots \vee \dots)$$

\uparrow
 $p / \neg p$

DNF

$$(\dots \wedge \dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \boxed{} \wedge \dots) \vee \dots \vee (\dots \wedge \dots \wedge \dots)$$

\uparrow
 $p / \neg p$

Postać normalna

Definicja (Koniunkcyjna postać normalna, CNF)

Powiemy, że formuła logiczna jest zapisana w **koniunkcyjnej postaci normalnej**, jeżeli jest postaci

$$(p_1 \vee \dots \vee p_{n_p}) \wedge (q_1 \vee \dots \vee q_{n_q}) \wedge \dots \wedge (r_1 \vee \dots \vee r_{n_r}),$$

przy czym wszystkie wyrażenia występujące w nawiasach są **literałami** (zmienną logiczną bądź negacją zmiennej logicznej: p lub $\neg p$).

$$(p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4 \vee p_5) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee p_1)$$

Postać normalna

Definicja (Dysjunkcyjna postać normalna, DNF)

$$(p_1 \wedge \dots \wedge p_{n_p}) \vee (q_1 \wedge \dots \wedge q_{n_q}) \vee \dots \vee (r_1 \wedge \dots \wedge r_{n_r}).$$

Postać normalna

Twierdzenie

Każdą formułę można zapisać w równoważnej postaci normalnej (CNF i DNF).

Dowód.

$\phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$

p_1	p_2	\dots	p_n	ϕ
T	T	\dots	T	F
\vdots	\vdots		\vdots	T
				T
				F
				\vdots

$$(p \oplus q) \mid r \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge r$$

p	q	r	$(p \oplus q) \mid r$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

DNF:

$$(p \wedge q \wedge r)$$

$$(p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

CNF

$$(\neg p \vee q \vee \neg r)$$

$$(p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Zupełność

Definicja (Zupełny zbiór funktorów)

Powiemy, że zbiór funktorów A jest **zupełny**, jeżeli każdą formułę można w sposób równoważny zapisać przy wykorzystaniu wyłącznie funktorów ze zbioru A .

Tk. CNF : DNF

Wniosek \Downarrow
 $\{ \neg, \wedge, \vee \}$ jest zupełny.

Zupełność

Zupełność

16

$T \circ T$

$F \circ F$

Twierdzenie

Zbiory

$\{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\text{NAND}\}, \{\text{NOR}\}$

są zupełne.

Dowód,

$\{\wedge, \neg\}$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$p / p \equiv \neg p$$

$$p \wedge q \equiv \neg(\underbrace{\neg(p \wedge q)}_{p / q}) \equiv \neg(p / q) \equiv (p / q) / (p / q)$$

Spełnialność formuł

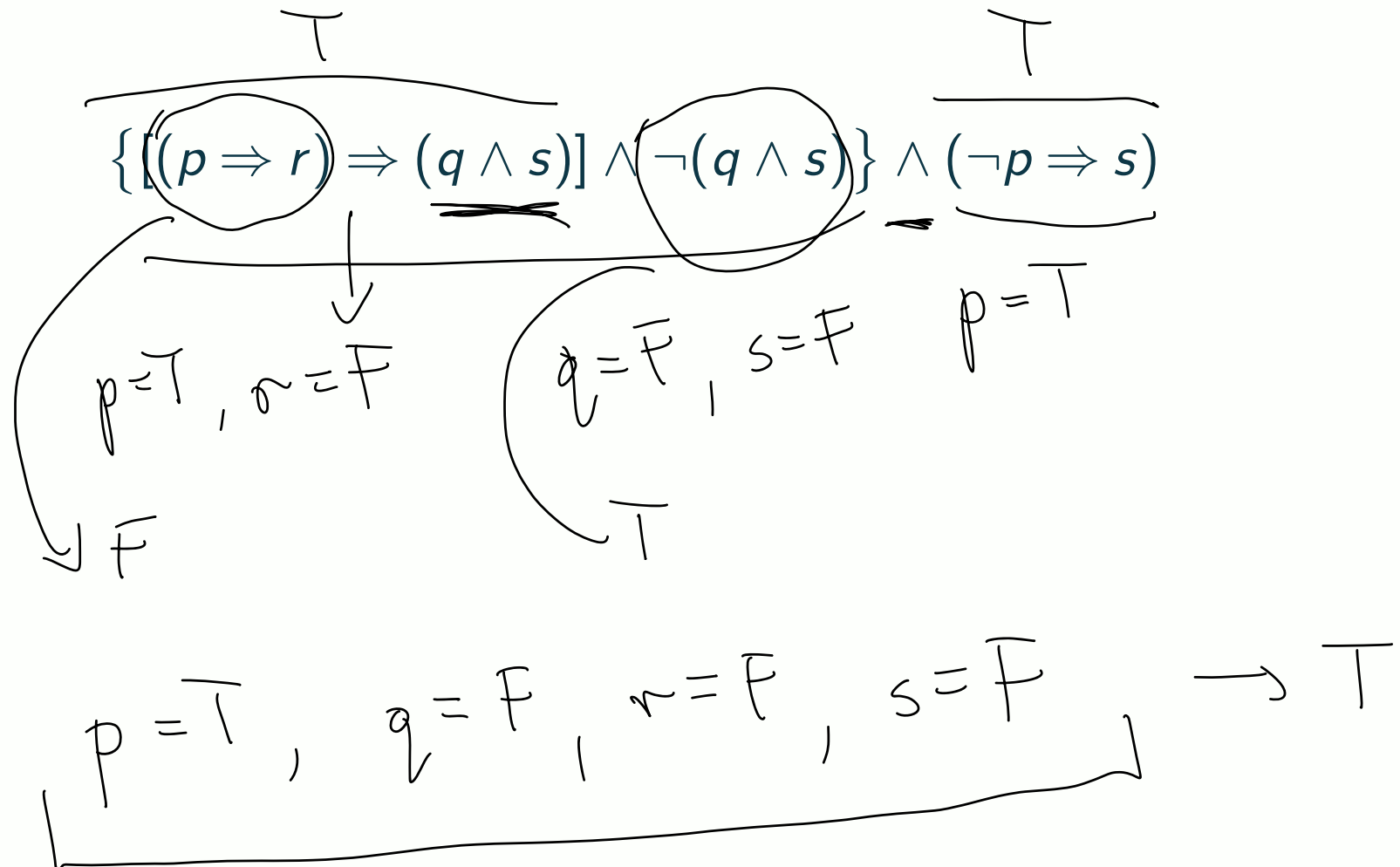
Definicja (Formuła spełnialna)

Powiemy, że formuła jest **spełnialna**, jeżeli **istnieje** takie wartościowanie zmiennych w niej występujących, przy którym przyjmie ona wartość T.

Spełnialność formuł

Definicja (Formuła spełnialna)

Powiemy, że formuła jest **spełnialna**, jeżeli **istnieje** takie wartościowanie zmiennych w niej występujących, przy którym przyjmie ona wartość T.



Funkcje zdaniowe

$$x^2 - 3x + 5 \geq 0$$

$$x = x + 1$$

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa jednej zmiennej)

Funkcją zdaniową jednej zmiennej nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x)$, zależne od zmiennej $\underline{x} \in \textcircled{X}$, które dla dowolnej wartości x staje się zdaniem logicznym.

Zbiór X nazywamy **zakresem zmienności** lub **dziedziną** funkcji zdaniowej Φ .

$$X = \mathbb{R} \quad \phi(x) = (x^2 - 3x - 5 \geq 0)$$
$$= \begin{cases} T, & \text{gdys } x^2 - 3x - 5 \geq 0, \\ F, & \text{gdys } x^2 - 3x - 5 < 0. \end{cases}$$

$$\phi(0) = F, \quad \phi(5) = T.$$

Funkcje zdaniowe

Funkcje zdaniowe

Definicja (Wykres funkcji zdaniowej)

Wykresem funkcji zdaniowej Φ nazywamy zbiór

$$S(\Phi) := \{x \in X : \Phi(x)\},$$

to znaczy zbiór wszystkich elementów $x \in X$, dla których zdanie $\Phi(x)$ ma wartość logiczną T.

$$\phi(x) = (x^2 - 3x - 5 \geq 0)$$

$$\Delta = 9 + 20 = 29$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$$

$$S(\phi) = \left(-\infty, \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$$

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa wielu zmiennych)

Funkcją zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, które dla dowolnych wartości $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ staje się zdaniem logicznym.

Funkcje zdaniowe

Definicja (Funkcja zdaniowa wielu zmiennych)

Funkcją zdaniową n zmiennych nazywamy wyrażenie postaci $\Phi(x_1, \dots, x_n)$, które dla dowolnych wartości $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ staje się zdaniem logicznym.

Definicja (Wykres funkcji zdaniowej wielu zmiennych)

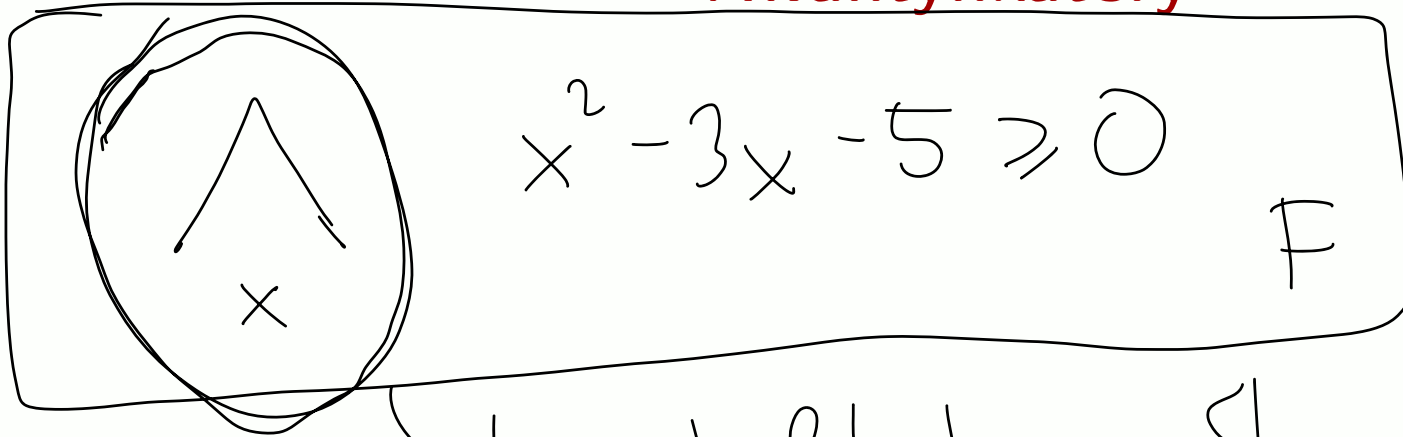
Wykresem funkcji zdaniowej $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ nazywamy zbiór

$$S(\Phi) := \{x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n : \Phi(x_1, \dots, x_n)\}.$$

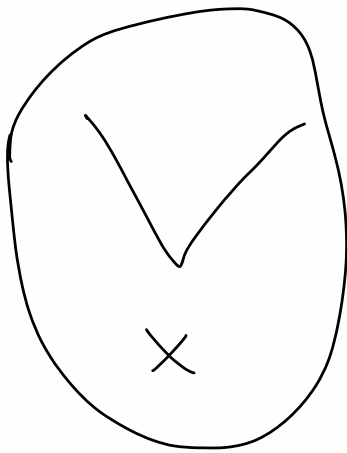
$$\phi(x, y) = (x^2 y + y^2 + 5xy \geq 0).$$

Kwantyfikatory

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}$$



kwantyfikator ogólny
"dla każdego"



$$x^2 - 3x - 5 \geq 0$$

kwantyfikator szczególny
"istnieje"

Kwantyfikatory

Definicja (Kwantyfikator ogólny)

Zdanie

dla każdego x zachodzi $\Phi(x)$

zapisujemy w postaci

$$\bigwedge_x \Phi(x),$$

a symbol \bigwedge nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym**.

Kwantyfikatory

Definicja (Kwantyfikator szczegółowy)

Zdanie

istnieje taki x , że zachodzi $\Phi(x)$

zapisujemy w postaci

$$\bigvee_x \Phi(x),$$

a symbol \bigvee nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym**.