Introducción a los Algoritmos - 1er. cuatrimestre 2022

Guía 3: Semántica y Demostraciones en Cálculo Proposicional

Precedencia y tipado con operaciones booleanas

La lógica proposicional introduce dos constantes que representan los valores de verdad (True y False) y diversos operadores booleanos sobre estos valores ($\wedge$, $\vee$,$\neg$, $\equiv$, $\Rightarrow$). Esta lógica nos permite escribir expresiones que codifican propiedades mas interesantes, como por ejemplo que "si un número a es mayor a b y, además, b es mayor a c, entonces a tiene que ser mayor a c"*:*

$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a > c)$$

*Al complejizarse el lenguaje, es necesario establecer reglas de notación para poder escribir las expresiones con mayor claridad y sin ambigüedades. En particular, es posible eliminar paréntesis cuando los operadores involucrados son asociativos (*i.e.* no importa el orden en que asocien los operandos), y según las reglas de precedencia, tal como hemos visto hasta ahora.*
*Los operadores $\wedge$, $\vee$, $\equiv$, $\not\equiv$ **son asociativos**. Esto nos permite establecer por ejemplo que las expresiones $p \wedge q \wedge r$, junto con $p \wedge (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \wedge r$ son equivalentes.*
A la derecha se listan los nuevos operadores y aquellos vistos anteriormente, en orden de mayor a menor precedencia.
*En los siguientes ejercicios comenzamos trabajando principalmente con los aspectos **sintácticos** del nuevo lenguaje, para asegurar una buena capacidad de lectura y escritura de las nuevas expresiones, y con la **semántica** de los nuevos operadores, es decir, su significado.*

Niveles de Precedencia

1	$\sqrt{\ }, (\cdot)^2$	*raíces y potencias*
2	$*, /$	*producto y división*
3	max , min	*máximo y mínimo*
4	$+, -$	*suma y resta*
5	$=, \leqslant, \geqslant$	*operadores de comparación*
6	$\neg$	*negación*
7	$\vee\ \wedge$	*disyunción y conjunción*
8	$\Rightarrow\ \Leftarrow$	*implicación y consecuencia*
9	$\equiv\ \not\equiv$	*equivalencia y discrepancia*

1. Sacá todos los paréntesis que sean *superfluos* según las reglas de precedencia de los operadores booleanos.

    a) $((((a = b) \wedge (b = c)) \Rightarrow (a = c)) \equiv \mathit{True})$

    b) $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \equiv q))$

    c) $(((p \wedge q) \vee (\neg r)) \Rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$

2. Introducí paréntesis para hacer *explícita* la precedencia.

    a) $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

    b) $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$

    c) $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

3. ¿Están bien escritas las siguientes expresiones? Para evitar errores, introducí paréntesis de acuerdo a las reglas de precedencia, y en caso de ser posible escribí una tabla declarando el tipo de cada variable.

    a) $((\mathit{True} \wedge \mathit{False}) \Rightarrow \mathit{False}) \equiv \mathit{False}$

    b) $2 = 3 \vee 3 = 4 \vee a * a + 2 \leqslant b + 7$

    c) $(x \wedge y \equiv a) \wedge z \leqslant w$

    d) $x + 3 \Rightarrow y$

    e) $(x + 3 = y) \wedge \neg z$

    f) $a \vee b = 3 + y$

    g) $a \geqslant b \wedge 3 + 2 < 4 \ \Rightarrow\ c \equiv b + 1 = 2$

    h) $a + 2 \geqslant c \Rightarrow 3 + 2 < b \ \equiv\ c \equiv b = 2 * a$

    i) $\neg a * b + c = d \vee p \Rightarrow q \equiv r \Leftarrow s \wedge j = k + l * m$

Validez y satisfactibilidad

Dos cualidades asociadas a la semántica de una fórmula, es decir, a la interpretación o significado que le damos, son los conceptos de ***satisfactibilidad*** *y* ***validez****. Estas propiedades ganan relevancia cuando se trata de fórmulas con variables. Decimos que una fórmula es* ***satisfactible*** *cuando es verdadera para algunos valores posibles de las variables. Decimos que es* ***válida*** *cuando es verdadera para todos los valores posibles de las variables.*

Nuestro principal interés es distinguir cuándo una fórmula es válida y cuándo no. Como la validez es independiente de los valores de las variables involucradas, si queremos demostrar la validez de una fórmula no podemos hacer ninguna suposición sobre los valores de las variables. Por el contrario, cuando queremos demostrar que una fórmula es ***no valida*** *es suficiente con encontrar al menos un valor que haga que la fórmula sea falsa: esto es un contraejemplo. Algunas veces además es posible demostrar directamente que la fórmula es falsa para todos los valores de las variables. En este caso decimos que la fórmula es* ***no satisfactible****, porque no existe ningún valor posible que haga que sea verdadera.*

Importante: Cuando una fórmula es siempre verdadera la llamamos **válida**, cuando es verdadera para algunos valores la llamamos **satisfactible**, cuando es falsa para algunos valores la llamamos **no válida** y cuando es falsa para todos los valores la llamamos **no satisfactible**.

4. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales es válida o no. En caso que una fórmula no sea válida, decidí si es satisfactible o no. En todos los casos justificá con una tabla de verdad, un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

    a) p
    b) $p \equiv p$
    c) $p \equiv p \equiv p$
    d) $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$
    e) $p \vee q \Rightarrow p$
    f) $p \wedge q \Rightarrow p$
    g) $p \Rightarrow q \wedge p$
    h) $p \Rightarrow q \vee p$
    i) $p \Rightarrow q$
    j) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
    k) $p \equiv p \equiv \mathit{True}$
    l) $\mathit{True} \vee p$
    m) $\mathit{True} \wedge p$
    n) $\mathit{False} \vee p$
    ñ) $\mathit{False} \wedge p$

5. Da ejemplos y una justificación apropiada de una fórmula:

    a) válida (y por lo tanto satisfactible).
    b) satisfactible pero no válida.
    c) no satisfactible (y por lo tanto no válida).

Cálculo Proposicional

Tomando ideas de E. W. Dijkstra, proponemos el uso de lo que llamamos calculational proofs*. Como resultado, el cálculo que presentamos nos permite demostrar teoremas y propiedades al estilo de un cálculo; como cuando despejamos una x para resolver una ecuación. La expresión de un teorema es en esencia una expresión booleana, y su prueba es en esencia calcular que esa expresión tiene valor verdadero. La forma más directa de "evaluar" una expresión booleana es someterla a una o varias transformaciones que preserven el valor de verdad hasta que alcancemos una formulación simplificada de la expresión, en el caso de un teorema: $True$. Continuando con la analogía de "despejar la x" en cada paso podemos, por ejemplo, sumar miembro a miembro una constante, y finalmente decimos que resolvimos la ecuación cuando llegamos a una expresión, equivalente a la original, que tiene una forma más simple, por ejemplo $x = 5$.*

Si en alguna oportunidad alguien nos pidiera que multipliquemos 179,347 *por* 9,325 *y no contamos con alguna calculadora a mano, no dudaríamos en escribir un número debajo del otro y resolver el problema con el método que aprendimos en la escuela primaria. De la misma manera, contar con una buena notación y una forma ordenada de escritura, sumado a contar con una cálculo de tipo ecuacional que permite expresar las pruebas con una estructura lineal, extiende nuestra capacidad para razonar sobre los problemas.*

- *Una demostración en el Cálculo Proposicional que veremos en este curso consiste en probar la* ***validez*** *de una fórmula mediante una serie de pasos justificados con* ***axiomas*** *y* ***teoremas*** *del Cálculo.*
- *Recordemos que una fórmula es válida si para toda asignación posible de las variables es equivalente a True;*
- *por lo tanto una demostración será una serie de fórmulas, equivalentes entre sí, donde la primera fórmula es la que queremos demostrar válida y la última es True.*

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & P \\ \equiv & \{ \texttt{Razón 1} \} \\ & Q \\ \equiv & \{ \texttt{Razón 2} \} \\ & (\ldots) \\ \equiv & \{ \texttt{Razón n} \} \\ & True \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & (\underline{\neg\neg((p \Rightarrow r) \wedge s)}) \vee ((p \Rightarrow r) \wedge s) \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge s) \\ \equiv & \{ \textit{Doble negación } (\neg\neg P \equiv P),\ P := ((p \Rightarrow r) \wedge s) \ \} \\ & \underline{((p \Rightarrow r) \wedge s) \vee ((p \Rightarrow r) \wedge s) \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge s)} \\ \equiv & \{ \textit{Idempotencia de } \vee\ (P \vee P \equiv P\ ),\ P := ((p \Rightarrow r) \wedge s) \ \} \\ & True \end{array}$$

La regla general de la izquierda, donde se quiere demostrar que la fórmula P es válida, se puede leer de la siguiente manera: Debido a la `Razón 1`*, P es equivalente a Q, y debido a la* `Razón 2`*, Q es equivalente a $True$. Por lo tanto, como el equivalente es transitivo, se concluye que P es equivalente a $True$.*

El ejemplo de la derecha primero aplica el teorema llamado doble negación, y definido como $\neg\neg P \equiv P$, de la siguiente manera.

- *Se sustituye $P := ((p \Rightarrow r) \wedge s)$ en el teorema obteniendo la instanciación $\neg\neg((p \Rightarrow r) \wedge s) \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge s)$ y después reemplaza la parte izquierda del teorema sustituido $(\neg\neg((p \Rightarrow r) \wedge s))$ por la parte derecha $((p \Rightarrow r) \wedge s)$.*
- *Segundo, se aplica el axioma llamado idempotencia de la disyunción, y definido como $P \vee P \equiv P$, de la siguiente manera. Se sustituye $P := ((p \Rightarrow r) \wedge s)$ en el teorema obteniendo $((p \Rightarrow r) \wedge s) \vee ((p \Rightarrow r) \wedge s) \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge s)$. Como obtuve toda la expresión que quería demostar al sustituir el teorema, y todos los teoremas son equivalentes a True, puedo reemplazar toda la expresión por True.*

Cuando aplico substituciones a un teorema obtengo una ***instanciación*** *del teorema. Todas las instanciaciones de teoremas son también teoremas.*

Si la fórmula que se quiere demostrar es de la forma $R \equiv S$, para demostrar la validez de la fórmula podemos seguir la estrategia seguida anteriormente transformando la expresión completa en $True$, o bien partir de la subexpresión R y transformarla en la subexpresión S (o viceversa). En ambos casos, cada paso de "transformación" consiste en "reescribir" la expresión en cuestión (o una subexpresión) en otra equivalente dada por uno de los Axiomas o Teoremas básicos. A continuación escribimos las mismas pruebas explicadas anteriormente siguiendo esta nueva estrategia.

$$
\begin{array}{ll}
\quad R \\
\equiv \{ \texttt{Razón 1} \} \\
\quad T \\
\equiv \{ \texttt{Razón 2} \} \\
\quad (...) \\
\equiv \{ \texttt{Razón n} \} \\
\quad S
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\quad (\underline{\neg\neg((p \Rightarrow r) \wedge s)}) \vee ((p \Rightarrow r) \wedge s) \\
\equiv \{ \textit{Doble negación } (\neg\neg P \equiv P),\ P := ((p \Rightarrow r) \wedge s) \ \} \\
\quad \underline{((p \Rightarrow r) \wedge s) \vee ((p \Rightarrow r) \wedge s)} \\
\equiv \{ \textit{Idempotencia de } \vee\ (P \vee P \equiv P\ ),\ P := ((p \Rightarrow r) \wedge s) \ \} \\
\quad \equiv ((p \Rightarrow r) \wedge s)
\end{array}
$$

Cada axioma o teorema nos habilita a reescribir una expresión de diversas maneras. Por ejemplo la Regla Dorada, cuya formulación es $P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$*, nos permite reescribir la expresión* $P \wedge Q$ *por* $P \equiv Q \equiv P \vee Q$*, pero también:*

$$
\begin{array}{rcl}
P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & \textit{True} \\
P \wedge Q \equiv P & \textit{por} & Q \equiv P \vee Q \\
Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv P \\
P \wedge Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \equiv Q \\
P \wedge Q \equiv Q \equiv P \vee Q & \textit{por} & Q \\
P \equiv P \vee Q & \textit{por} & P \wedge Q \equiv Q \\
\textit{y demás combinaciones} \ldots & &
\end{array}
$$

Gracias a la sustitución el lugar de las variables P, Q *y* R *en un axioma o teorema puede ser ocupado por cualquier expresión booleana (de tipo Bool), ya sean fórmulas proposicionales, como* p, $(p \wedge q)$, $(p \Rightarrow q \vee r)$*, etc, o expresiones aritméticas como* $(2 * 2 = 4)$, $(x \leqslant 0)$*, etc.*

Sustitución y Regla de Leibniz

Las herramientas que venimos usando para hacer demostraciones se llaman: la sustitución y la regla de Leibniz.

Leibniz fue quien introdujo la regla de que es posible reemplazar en una fórmula una expresión por otra expresión equivalente, sin que esto altere el significado de la fórmula. Los sistemas de ecuaciones hacen uso de la regla de Leibniz, por ejemplo

$$
\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & x+3 & (2) \end{array} \right.
\quad \xrightarrow{\textit{Utilizo (1) en (2)}} \quad
\left\{ \begin{array}{lcll} x & = & 5 & (1) \\ y & = & 5+3 & (2) \end{array} \right.
$$

En este ejemplo, ambos sistemas de ecuaciones son tienen el mismo significado porque el de la derecha reemplaza x *por el valor al cual es equivalente en este sistema de ecuaciones, es decir, 5. En las demostraciones por inducción también usabamos la regla de Leibniz para reemplazar un lado de la hipótesis inductiva por el otro.*

En las demostraciones del Cálculo Proposicional se utiliza todo el tiempo la regla de Leibniz para "transformar" fórmulas. Por ejemplo, como $p \vee p \equiv p$ *es una* ***instanciación*** *del axioma* $P \vee P \equiv P$*, se puede transformar la fórmula* $p \wedge q$ *a la fórmula* $(p \vee p) \wedge q$ *donde se reemplazó* p *por otra expresión equivalente,* $p \vee p$*.*

Equivalencia, Discrepancia y Negación

A1 *Asociatividad equivalencia:*

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

A2 *Conmutatividad equivalencia:*

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

A3 *Neutro equivalencia:*

$$P \equiv \textit{True} \equiv P$$

A4 *Definición de Negación:*

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

A5 *Definición de False:*

$$\textit{False} \equiv \neg \textit{True}$$

A6 *Definición de discrepancia:*

$$P \not\equiv Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

6. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas del Cálculo Proposicional, es decir, son fórmulas *válidas* utilizando sólo axiomas (no se pueden usar teoremas). Realizá la demostración justificando cada paso con un axioma y la sustitución utilizada en el mismo. Por ejemplo, demostramos el teorema *Asociatividad de la discrepancia*: $(p \not\equiv (q \not\equiv r)) \equiv ((p \not\equiv q) \not\equiv r)$, partiendo de la parte izquierda:

$$\begin{array}{ll}
 & (p \not\equiv (q \not\equiv r)) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(Q := (q \not\equiv r)) \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := q, r) \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, r) \ \} \\
 & \neg(p \equiv \neg q \equiv r) \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \not\equiv)(P, Q := (p \equiv \neg q), r) \ \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ (Conmutatividad de } \equiv)(Q := \neg q) \ \} \\
 & \underline{(\neg q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ (Definición de } \neg)(P, Q := q, p) \ \} \\
 & \neg\underline{(q \equiv p)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad de } \equiv \ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \not\equiv \ \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}$$

   a) *Reflexividad del equivalente*: $(p \equiv p) \equiv True$

   b) *Doble negación*: $\neg\neg p \equiv p$

   c) *Equivalencia y negación*: $p \equiv False \equiv \neg p$

   d) *Neutro de la discrepancia*: $(p \not\equiv false) \equiv p$

7. Decidí si son válidas o no las siguientes fórmulas. Justificá apropiadamente.

   a) $p \equiv p \equiv p \equiv True$

   b) $((p \not\equiv q) \equiv r) \equiv (p \not\equiv (q \equiv r))$

   c) $(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

   d) $\neg p \equiv False$

   e) $\neg(p \equiv q) \equiv (\neg p \equiv \neg q)$

Disyunción y Conjunción

A7 *Asociatividad disyunción:*

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

A8 *Conmutatividad disyunción:*

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

A9 *Idempotencia disyunción:*

$$P \vee P \equiv P$$

A10 *Distributividad disyunción con equivalencia:*

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

A11 *Tercero excluido:*

$$P \vee \neg P$$

A12 *Regla dorada:*

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

8. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas, justificando cada paso con el axioma aplicado.

   a) *Distributividad de la disyunción con la disyunción*: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

   b) *Elemento absorbente de la disyunción*: $p \vee \mathit{True} \equiv \mathit{True}$

   Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

   $\quad p \vee \mathit{True} \equiv \mathit{True}$
   $\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
   $\quad p \vee (p \equiv p) \equiv \mathit{True}$
   $\equiv$ { Distributividad de disyunción con equivalencia }
   ....

   c) *Elemento neutro de la disyunción*: $p \vee \mathit{False} \equiv p$

   Ayuda: Podés comenzar la demostración de la siguiente manera

   $\quad p \vee \mathit{False} \equiv p$
   $\equiv$ { Definición de False }
   $\quad p \vee \neg\mathit{True} \equiv p$
   $\equiv$ { Reflexividad de la equivalencia }
   $\quad p \vee \neg(p \equiv p) \equiv p$
   $\equiv$ { Definición de negación }
   ....

   d) *Teorema Estrella* : $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$
   Ayuda: Podés utilizar la distributividad del $\vee$ con el $\equiv$.

9. Demostrá que las siguientes fórmulas son teoremas justificando cada paso con el axioma o teorema aplicado.
   Aclaración: Desde ahora en adelante, en cada ejercicio se pueden utilizar los teoremas del listado y los ya demostrados en los ejercicios anteriores.

   a) *Distributividad de la disyunción con la conjunción*: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   b) *Asociatividad de la conjunción*: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

   c) *Idempotencia de la conjunción*: $p \wedge p \equiv p$

   d) *Conmutatividad de la conjunción*: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

   e) *Elemento absorbente de la conjunción*: $p \wedge \mathit{False} \equiv \mathit{False}$

   f) *Elemento neutro de la conjunción*: $p \wedge \mathit{True} \equiv p$

   g) *De Morgan para la conjunción*: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

   h) *Ley de absorción*: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

10. Decidí si cada una de las siguientes fórmulas proposicionales son válidas o no. En todos los casos justificá con una demostración o un contraejemplo, según corresponda.

    a) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r)$

    b) $p \wedge (q \equiv r) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv p$

    c) $p \wedge (q \equiv r \equiv s) \equiv (p \wedge q) \equiv (p \wedge r) \equiv (p \wedge s)$

    d) $\big(a \vee b \vee c \equiv a \vee b \equiv a \vee c \equiv b \vee c \equiv \mathit{False}\big) \equiv \big((a \equiv b \equiv c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)\big)$

Implicación

La implicación es uno de los mecanismos más intuitivos para razonar, ya que de esta forma representamos la **causalidad**. *De la misma forma que la causalidad no es simétrica, tampoco lo es la implicación. Es decir, los dos elementos que componen una implicación no participan de igual forma en la relación. Por ejemplo, cuando como demasiado (causa) me duele la panza (efecto), pero no a la inversa (cuando me duele la panza no necesariamente es porque he comido demasiado, puede ser porque estoy nervioso). El elemento a la izquierda de la implicación se llama* **antecedente**, *y el de la derecha,* **consecuente**. *Esta asimetría también se pone de manifiesto en la tabla de verdad de la implicación:*

p	q	$p \Rightarrow q$
True	*True*	*True*
True	*False*	*False*
False	*True*	*True*
False	*False*	*True*

También las diferentes formas de reescribir la implicación nos muestran como sus dos elementos participan de forma distinta en la relación.

A13 *Definición de implicación:*

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

A14 *Definición de consecuencia:*

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

11. Demuestre los siguientes teoremas del cáclulo proposicional.

    a) *Caracterización de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

    b) *Definición dual de implicación*: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$

    c) *Absurdo*: $p \Rightarrow \mathit{False} \equiv \neg p$.

    d) *Debilitamiento para* $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$.

    e) *Debilitamiento para* $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

    f) *Modus Ponens* $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$.

    g) *Modus Tollens* $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$.

    h) *Contrarreciproca* $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

    Ayuda: Utilizar caracterización de la implicación para demostrar los últimos ejercicios.

Modus Ponens $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$ **y Modus Tollens** $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \equiv \neg p \wedge \neg q$

Tal vez es más común encontrar los teoremas de Modus ponens y Modus Tollens en su forma $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ *y* $\neg q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg p$. *Éstos nos permiten eliminar el símbolo de implicación si se cumple el antecedente, en el caso del Modus Ponens, y si el consecuente es falso, en el caso del Modus Tollens.*

La versión de Modus Ponens con implicación, de alguna manera modela una forma de razonamiento muy utilizado en el lenguaje natural. Por un lado tenemos que "si vale p *entonces vale* q*", es decir, en el caso de que el antecedente sea cierto puedo concluir que el consecuente es cierto. Por otro lado, tenemos que "vale* p*", es decir, tengo información de que el antecedente es cierto. Por lo tanto, "vale* q*", es decir, puedo concluir que el consecuente es cierto.*

De manera similar, el Modus Tollens con implicación, expresa que "si vale p *entonces vale* q*", pero como sé que* q *no es cierto, entonces no puede ser posible de que valga* p*. En otras palabras, si* p *fuera cierto, puedo concluir que* q *también es cierto a causa de la implicación. Pero eso no puede ser posible porque* q *no es cierto. Por lo tanto* p *es falso, o lo que es lo mismo,* $\neg p$ *es verdadero.*

La versión con equivalente de ambos teoremas puede ser más conveniente en algunos casos, cuando trabajamos en nuestro cálculo ecuacional, ya que no nos obliga a debilitar las expresiones.

12. Simplifique las siguientes expresiones eliminando los símbolos de implicación que sean posibles aplicando los teoremas de Modus Ponens y Modus Tollens. (Observe que estas expresiones no son teoremas)

    a) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge p$

    b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg r$

    c) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$

13. Demuestre los siguientes teoremas

    a) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge (p \wedge q) \equiv p \wedge q \wedge r$

    b) $\neg p \wedge (s \vee t \Rightarrow p) \equiv \neg s \wedge \neg p \wedge \neg t$

Currificación $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$

Una interpretación posible del símbolo de implica es considerar al antecedente como una hipótesis; por lo tanto $p \Rightarrow q$ quiere decir que si la hipótesis p es cierta, puedo concluir q. A su vez, si tenemos la expresión $p \wedge q \Rightarrow r$ podemos interpretar que tenemos dos hipótesis, p y q. Entonces, si ambas hipótesis son ciertas, la conclusión r debe ser cierta. En este último caso, el teorema de currificación nos expresa que es posible "anidar" estas hipótesis en el siguiente sentido: si la hipótesis p vale, entonces debería valer $q \Rightarrow r$. Es decir, puedo considerar por separado cada hipótesis obteniendo la expresión $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Por ello a este teorema también le llamamos descarga de hipótesis.

En el otro sentido, si parto de una expresión con implicación con antecedente es h_1 y cuyo consecuente es otra implicación con antecedente h_2 ($h_1 \Rightarrow (h_2 \Rightarrow c)$), utilizando el teorema de currificación puedo "unir" las dos hipótesis involucradas y trasformar la expresión a la forma $h_1 \wedge h_2 \Rightarrow c$.

14. Demuestre currificación. (**Ayuda:** Utilice la caracterización del implica.)

15. Simplifique las siguientes expresiones. Utilice para ello los teoremas de Modus Ponens, Modus Tollens y Currificación.

    a) $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge p$

    b) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

    c) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge \neg r$

16. Demuestre

    a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

    b) $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

17. Demuestre los siguientes teoremas de la implicación:

    a) *Transitividad*: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

    b) *Monotonía de la conjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$.

    c) *Monotonía disjunción*: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$.

Distributividad a derecha de la implicación con la conjunción $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Una propiedad que puede ser de utilidad en las demostraciones es cuando a partir de una hipótesis p se pretende demostrar la conjunción de dos propiedades $q \wedge r$. En este caso, la distributividad a derecha de la implicación con la conjunción nos permite dividir el problema en dos demostraciones diferentes a saber: $p \Rightarrow q$ y $p \Rightarrow r$.

18. Simplifique las siguientes expresiones utilizando los teoremas con implicación conocidos.

    a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow \neg p)$

    b) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \neg s) \Rightarrow q \vee r)$

c) $(p \Rightarrow q \wedge \neg r) \wedge r$

19. Demuestre

    a) $(p \Rightarrow q \wedge \neg r) \wedge r \Rightarrow \neg p$

    b) $(p \Rightarrow q \wedge \neg r) \wedge r \Rightarrow \neg p \wedge r$