

**Análisis Matemático I** — Licenciatura en Ciencias de la Computación  
**Cálculo I** — Licenciatura en Matemática Aplicada  
FAMAF – UNC

**Examen Final - 7 de agosto de 2020**

- Ejercicio 1.**
- a) Diga cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de 2 que de  $-3$ .
- b) Grafique el conjunto de soluciones de la desigualdad  $\frac{x-2}{x+1} < |x-5|$
- c) Dada la función  $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , responda las siguientes preguntas, justificando las respuestas:
- |   |   |
|---|---|
| (i) ¿Es inyectiva?  | (vi) ¿Es necesario restringir el conjunto de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es? |
| (ii) ¿Es subyectiva?  | (vii) Indique el dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.                |
| (iii) ¿Es biyectiva?  |   |
| (iv) ¿Es inversible?  |   |
| (v) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es? |   |

- Ejercicio 2.**
- a) Calcule los siguientes límites SIN usar la regla de L'Hôpital:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$	(ii) $f(x) = \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}$ (Ayuda: Use límites notables).
--	---

- b) Sea  $f(x)$  la siguiente función definida a tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & x \leq 0 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x > 0 \end{cases}$$

- (i) ¿Cuál es el dominio de esta función?
- (ii) ¿Cuáles son los intervalos en que esta función es continua? Mencione la o las propiedades de las funciones continuas que utiliza para demostrar dicha continuidad.
- (iii) ¿Para qué valores de  $x$  esta función es discontinua y qué tipo de discontinuidad tiene? No utilice la regla de L'Hôpital para sus cálculos en este ejercicio.
- c) Usando las herramientas que considere más apropiadas, calcule el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) \operatorname{tg}(x)$ .

- Ejercicio 3.**
- a) Calcule las siguientes derivadas:

(i) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x-x^2}$	(ii) $g(x) = \sin^3(2\pi\sqrt{x})$
-----------------------------------	------------------------------------

- b) (i) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función  $f(x) = \arctg(x)$  en el punto  $(1, \pi/4)$ .
- (ii) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de  $f(1,1)$  con una aproximación lineal.  
(Ayuda: En el caso que necesite el valor numérico de  $\pi/4$ , puede considerar que  $\pi/4 \approx 0,8$ )
- c) ¿Cuándo decimos que una función  $f$  es derivable en un punto  $x_0$ ? Explique con sus palabras qué interpretación geométrica tiene el valor  $f'(x_0)$ .

**Ejercicio 4.** Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

- (i) El dominio de la función NO son todos los reales.
- (ii) La imagen de la función es  $I = [-3, +\infty)$ .
- (iii) Tiene una discontinuidad evitable en  $x = -2$  y una discontinuidad esencial en  $x = 0$ .
- (iv) Tiene una asíntota horizontal en  $y = 1$ .
- (v)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ .
- (vi) Tiene un único punto crítico.
- (vii)  $f'(x)$  cambia de signo en  $x = -3$  y  $f(-3) = -3$ .
- (viii) Tiene un punto de inflexión en  $x = -4$ .
- (ix) Es cóncava hacia abajo en  $(-\infty, -4)$ .
- (x)  $f''(x)$  es positiva en  $(0, +\infty)$ .

**Ejercicio 5.** a) Calcule la siguiente integral:  $\int x^3 e^{-x^2} dx$ .

(Ayuda: Puede resultar más fácil hacer primero una sustitución y después resolver por partes)

b) Grafique y calcule el área delimitada por las curvas:

$$y = |x - 2| ;$$

$$y = 6 - x ;$$

$$y = x^2 .$$

c) Sea  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f(x) > 0$  y  $m, n, a, b \in \mathbf{R}$ . Diga si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando su respuesta:

$$\text{Si } m \leq f(x) \leq M \text{ para } a \leq x \leq b \text{ entonces } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$