UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

SERIE “ C ”

TRABAJOS DE MATEMATICA

Nº 36/07

Un segundo curso de Cálculo

Carina Boyallian, Elida Ferreyra, Marta Urciuolo, Cynthia Will

Editores: Jorge R. Lauret– Jorge G. Adrover

CIUDAD UNIVERSITARIA – 5000 CÓRDOBA

REPÚBLICA ARGENTINA

UN SEGUNDO CURSO DE CÁLCULO

AUTORES

Carina Boyallian
Elida Ferreyra
Marta Urciuolo
Cynthia Will

Introducción

Desde el año 1991, la Facultad de Matemática, Astronomía y Física tomó a su cargo el dictado de las materias Matemática I y Matemática II del Ciclo Básico de la Facultad de Ciencias Químicas.

Estas notas surgen de la experiencia adquirida en todos estos años por los distintos docentes involucrados en el dictado de Matemática II.

Asumimos que los lectores de este trabajo están familiarizados con el cálculo diferencial de funciones de una variable y nociones elementales de álgebra lineal.

Las notas están organizadas de la siguiente manera. Contienen tres capítulos: Integración de funciones de una variable, tópicos de ecuaciones diferenciales y por último cálculo vectorial. Los conceptos y resultados están enunciados con precisión, pero decidimos omitir algunas demostraciones, ya que esta presentación tiene un enfoque práctico dirigido a "usuarios" de la matemática.

Queremos agradecer muy especialmente a los doctores A. Andrada, A. García y J. Liberati por sus valiosas contribuciones y sugerencias. También agradecemos a la Sra. Luisa Gallardo por el tipeado de parte de estas notas.

En esta tercera edición hemos efectuado unas pocas correcciones y también hemos incorporado algunas modificaciones de estilo.

Córdoba, Agosto de 2010

CONTENIDOS

CAPíTULO 1

Integración

1. Antiderivada o primitiva

Como es usual en matemática, una vez establecido un concepto, se plantea la pregunta de si es factible encontrar, en algún sentido, un concepto inverso. Como por ejemplo, la suma y la resta, las potencias y las raíces, etc. En esta ocasión nos interesa estudiar el caso de la derivación. Esto es

Problema: Dada una función f encuentre una función F tal que $F' = f$.

Por ejemplo, si tomamos $f(x) = 2x$, entonces $F(x) = x^2$ cumple que $F'(x) = 2x$.

O sea, al calcular derivadas nuestro problema era

$$\text{dada} \quad F \quad \text{encontrar} \quad F',$$

ahora nuestro problema es

$$\text{dada} \quad F' = f \quad \text{encontrar} \quad F.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1. Sea I un intervalo y $f : I \mapsto \mathbb{R}$ una función. Decimos que $F : I \mapsto \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Observación. Si $I = [a, b]$ o $I = [a, b)$ denotamos por

$$F'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a + h) - F(a)}{h},$$

llamada *derivada por la derecha de F en a*, y similarmente si $I = [a, b]$ o $I = (a, b]$ denotamos por

$$F'(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(b + h) - F(b)}{h},$$

llamada *derivada por la izquierda F en a.*

Antes de abordar el problema que planteamos, comencemos recordando algunas propiedades básicas de la derivada.

Como ya sabemos, dada una función derivable o diferenciable F le asignamos otra función F', llamada su derivada o diferencial, que cumple:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \text{Si } F(x) = c, \text{entonces } F'(x) = 0\\
&2)\ (aF)'(x) = aF'(x)\\
&3)\ (F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)\\
&4)\ (F \circ G)'(x) = F'(G(x))G'(x).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Notemos que, usando las propiedades de la derivada que mencionamos, se tiene que si $F(x) = x^2 + 3$ o más generalmente $F(x) = x^2 + c$, se cumple que $F'(x) = 2x$. Es claro que esto es una situación general, pues si $F'(x) = f(x)$, entonces $(F(x) + c)' = f(x)$ para cualquier constante c. Por lo tanto, si F es una antiderivada de f, $F(x) + c$ también lo es. Veremos más adelante que esas son todas.

Cambiemos entonces nuestro problema por el siguiente:

Problema: Dada f encuentre todas las funciones F que cumplen $F' = f$.

Empecemos probando el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Si h es una función diferenciable en un intervalo I tal que $h'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces $h(x) = c \ \forall x \in I$, para algún $c \in \mathbb{R}$.*

Prueba. Sea $x_1 \in I$ y sea $c = h(x_1)$. Mostraremos que $h(x_2) = h(x_1) = c$ para cualquier otro punto x_2 del intervalo I.

Tomemos entonces $x_2 \in I$ y como h es diferenciable en I, aplicando el Teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$ (si $x_1 < x_2$ ó $[x_2, x_1]$ si $x_1 > x_2$) sabemos que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ (o (x_2, x_1) según corresponda) tal que

$$h'(x_0) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por hipótesis sabemos que $h'(x_0) = 0$, de modo que

$$0 = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1},$$

y en consecuencia $h(x_2) = h(x_1)$, como queríamos demostrar. □

Con este resultado podemos ahora probar el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces toda antiderivada de f en I es de la forma $F(x) + c$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.*

Prueba. Sea G una antiderivada de f en el intervalo I, o sea $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Queremos demostrar que $G(x) = F(x) + c$ para alguna constante c.

Como F es antiderivada de f, se cumple que $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$. Tomemos entonces una nueva función definida en I por

$$H(x) = G(x) - F(x),$$

por las reglas de derivación (1.1) se cumple que para todo $x \in I$

$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando ahora a H el teorema anterior, se tiene que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$H(x) = c \qquad \forall\, x \in I,$$

o equivalentemente, por la definición de H,

$$G(x) = F(x) + c \qquad \forall\, x \in I,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Ejemplo 1.4. Siguiendo con nuestro ejemplo, si $f(x) = 2x$, una antiderivada de f es $F(x) = x^2$, y todas las antiderivadas de f son de la forma $G(x) = x^2 + c$, para algún $c \in \mathbb{R}$ ($F(x) = x^2$ corresponde a $c = 0$).

Definición 1.5. Dado un intervalo I y una función $f : I \mapsto \mathbb{R}$, definimos la *integral indefinida de* f, que denotamos por $\int f(x)\, dx$ como el conjunto de todas las antiderivadas o primitivas de f en I. O sea que si F es tal que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, entonces

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

El símbolo $\int$ se llama *integral* y dx se llama *diferencial de* x.

Además, denotamos por *diferencial de una función* F a

$$d(F(x)) = F'(x)\, dx.$$

Propiedades.

Daremos ahora algunas propiedades básicas de la antiderivación, que nos facilitarán el cálculo en general.

1. $\displaystyle\int dx = \int 1dx = x + c.$

Recordemos que de la definición de integral indefinida de una función f, se tiene que para demostrar esta propiedad basta verificar que el lado derecho de la igualdad es realmente una primitiva de $f(x) = 1$. Esto es, **1.** vale si

$$\frac{d}{dx}(x + c) = 1,$$

lo cual se deduce fácilmente aplicando las propiedades (1.1) y recordando que $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$.

De la misma forma, como

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

y en general, si $n \in \mathbb{Q}$ y $n \neq -1$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right) = (n+1)x^n,$$

entonces

2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, para $n \in \mathbb{Q},\ n \neq -1.$

Si $n = -1$, se cumple que

3. $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c.$

Para demostrar esta afirmación, como $Dom(\ln(|x|)) = (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$, analizaremos por separado.

Si $x > 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln(|x|) = \frac{d}{dx}(\ln\, x) = \frac{1}{x}.$$

Si $x < 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x},$$

como queríamos ver.

4. Si $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int a\ f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx.$

Esta propiedad es equivalente a la propiedad de la derivación,

$$(a\,F)' = a\,F'.$$

Finalmente, usando que $(f \pm g)' = f' \pm g'$ tenemos que

5. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Veamos ahora algunos ejemplos:

Ejemplos 1.6.

1. $\displaystyle\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c.$

2.
$$\begin{aligned}\int x^{1/2}\,dx &= \frac{x^{3/2}}{3/2} + c\\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} + c.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\int (x^3+2x-5)dx &= \int x^3\,dx + \int 2x\,dx - \int 5\,dx\\ &= \frac{1}{4}x^4 + 2\int x\,dx - 5\int 1dx\\ &= \frac{1}{4}x^4 + 2\frac{1}{2}x^2 - 5x + c\\ &= \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 5x + c.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} x + \cos\, x)\; dx &= \int \operatorname{sen} x\; dx + \int \cos\, x\,dx\\ &= -\cos\, x + \operatorname{sen} x + c\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\int \frac{5t^2+2}{t^{4/3}}\,dt &= \int \frac{5t^2}{t^{4/3}}\,dt + \int \frac{2}{t^{4/3}}dt\\ &= 5\int t^{2/3}\,dt + 2\int t^{-4/3}\,dt\\ &= 5\frac{t^{(2/3+1)}}{(2/3+1)} + 2\,\frac{t^{(-4/3+1)}}{(-4/3+1)} + c\\ &= 5\,\frac{t^{5/3}}{5/3} + 2\frac{t^{-1/3}}{-1/3} + c\\ &= 3\,t^{5/3} - 6\,t^{-1/3} + c.\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + c.$

7. Determinar todas las funciones g tales que

$$g'(x) = x^{1/3} + \frac{1}{x^2} \qquad \text{y} \quad g(1) = -4.$$

Solución. Las funciones que cumplen $g'(x) = x^{1/3} + \dfrac{1}{x^2}$, serían las antiderivadas o primitivas de $f(x) = x^{1/3} + \dfrac{1}{x^2}$. Luego el primer paso es calcular

$$\begin{aligned}\int (x^{1/3} + \frac{1}{x^2})\,dx &= \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + \frac{x^{(-2+1)}}{(-2+1)} + c.\\ &= \frac{3}{4}x^{4/3} - x^{-1} + c.\end{aligned}$$

De todas estas primitivas (una para cada c) queremos encontrar la que cumple $g(1) = -4$. Planteamos entonces

$$\frac{3}{4}\,1^{4/3} - \frac{1}{1} + c = -4$$

lo cual se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} - 1 + c &= -4 \\ -\frac{1}{4} + c &= -4 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$c = -4 + \frac{1}{4} = -\frac{15}{4}.$$

Tenemos entonces que hay una sola función que cumple las condiciones enunciadas; esta es

$$g(x) = \frac{3}{4}\,x^{4/3} + \frac{1}{x} - \frac{15}{4}.$$

Hasta ahora, usando propiedades de la derivación, hemos deducido propiedades de la antiderivación. Del mismo modo, de la propiedad (1.1) 4) se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.7. *(Regla de la cadena para integración indefinida) Sea $g : (a, b) \mapsto (d, e)$ una función diferenciable, y $f : (d, e) \mapsto \mathbb{R}$. Si F es una antiderivada de f en (d, e) entonces*

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \qquad \forall x \in (a, b),\ c \in \mathbb{R}.$$

Prueba. Como $F : (d, e) \mapsto \mathbb{R}$, podemos hacer la composición $F \circ g : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$. Luego, por la definición de integral indefinida, basta verificar que

$$\frac{d}{dx}\Big[F(g(x))\Big] = f(g(x))g'(x).$$

Pero esto se deduce de la propiedad (1.1) 4) pues

$$\frac{d}{dx}\Big[F(g(x))\Big] = F'(g(x))g'(x)$$

y como F es una antiderivada de f, se tiene que $F' = f$ y por lo tanto se cumple

$$\frac{d}{dx}\Big[F(g(x))\Big] = f(g(x))g'(x)$$

como queríamos ver. □

Este teorema es muy útil pues nos provee un método para calcular antiderivadas para funciones de la forma $f(g(x))g'(x)$. En efecto, este método se basa en hacer la siguiente "sustitución":

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ du &= g'(x)dx. \end{aligned}$$

Obtenemos entonces que

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)du. \tag{1.2}$$

Luego, si F es una antiderivada de f (esto es $F'(u) = f(u)$), podemos concluir que

$$\int f(u)\,du = F(u) + c. \tag{1.3}$$

De (1.2) y (1.3) resulta

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c,$$

donde hemos vuelto a reemplazar $u = g(x)$.

A este método se lo llama: *Método de Sustitución*. Veamos ahora algunos ejemplos de cómo usarlo.

Ejemplos 1.8.

1. $\int 3\sqrt{3x+4}\ dx$

En este caso tomemos $u = 3x+4$, por lo tanto $du = 3\,dx$. Con este cambio se tiene que

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3x+4}\ 3\,dx &= \int \sqrt{u}\,du\\ &= \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}u^{3/2} + c\\ &= \frac{2}{3}(3x+4)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

Tomemos $u = \operatorname{sen} x$, entonces $du = \cos\ x\ dx$, luego

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x\ \cos\ x\,dx &= \int u^2\,du\\ &= \frac{1}{3}u^3 + c\\ &= \frac{1}{3}\cos^3\ x + c.\end{aligned}$$

Como ayuda para aplicar este método, daremos el siguiente cuadro, donde resumimos los pasos a seguir para encontrar

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx.$$

1. Hacer el cambio

$$\begin{aligned} u &= g(x), \\ du &= g'(x)\,dx. \end{aligned}$$

(Notar que después del cambio, solamente debe haber letras u y ninguna letra x).

2. Hallar todas las primitivas o antiderivadas de f (como expresión de u).

3. Sustituir nuevamente u por $g(x)$.

Uno de los contextos donde más frecuentemente se usa la antiderivada es en la resolución de ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra a una función y a sus derivadas. Este es un tema que desarrollaremos más adelante, pero en este punto, estamos en condiciones de resolver una de las más simples:

$$y' = ky \tag{1.4}$$

donde k es una constante.

Una solución es una función $y = y(x)$ que satisface la ecuación. Esta ecuación tiene muchas aplicaciones, por ejemplo a la biología, pues en cualquier instante t, la rapidez $y'(t)$ con que se reproducen ciertas bacterias en un cultivo es proporcional al número de bacterias $y(t)$ presentes en ese instante t, y por lo tanto el modelo cumple la ecuación (1.4).

Esta es también la ecuación que cumplen algunas poblaciones de animales en lapsos cortos de tiempo. Finalmente podemos mencionar una aplicación a la física, pues esta ecuación proporciona un modelo para aproximar la cantidad $y(t)$ de sustancia que va quedando en el instante t cuando ésta se desintegra por radioactividad.

Para resolver (1.4), notemos que

> Para $k = 1$ la ecuación es $y' = y$, y ya sabemos que $y = y(x) = e^x$ la satisface, puesto que $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$.
>
> Para $k = 2$, tenemos $y'(x) = 2y(x)$, y en este caso también es fácil ver que e^{2x} satisface la ecuación.

En general, podemos comprobar que $y(x) = c\,e^{kx}$, con $c \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación (1.4) para todo $x \in \mathbb{R}$ pues

$$\frac{d}{dx}\,(c\,e^{kx}) = k\,c\,e^{kx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora que éstas son todas las soluciones. Para ello, tomemos una solución de (1.4), esto es una y que satisface $y'(x) = ky(x)$ para todo x en un intervalo I.
Como $e^{kx} \neq 0$, podemos definir

$$g(x) = \frac{y(x)}{e^{kx},} \qquad x \in I.$$

Para esta nueva función tenemos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{y(x)}{e^{kx}}\right)' \\ &= \frac{y'(x)e^{kx} - y(x)ke^{kx}}{(e^{kx})^2} \\ &= \frac{y'(x) - k\,y(x)}{e^{kx}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como y cumple la ecuación (1.4) se tiene que $g'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Por el Teorema 1.2, si $g'(x) = 0$ en un intervalo I, entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = c \;\; \forall\, x \in I$. Es decir

$$y(x) = c\,e^{kx} \quad \forall x \in I,$$

como queríamos demostrar. Notemos que en particular se puede tomar
$I = \mathbb{R}$, y tenemos que

Teorema 1.9. *Sea $k \in \mathbb{R}$ una constante. La función $y = y(x)$ satisface la ecuación $y'(x) = ky(x) \;\;\forall\, x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $y(x) = c\,e^{kx}$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 1.10. *Encuentre la función que satisface $y'(x) = 3y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $y(0) = 2$.*

Aplicando el teorema anterior, si

$$y'(x) = 3\,y(x), \quad \text{entonces } \; y(x) = ce^{3x},$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Como además $y(0) = 2$, se cumple que $c\,e^{3.0} = 2$ y por lo tanto $c = 2$.

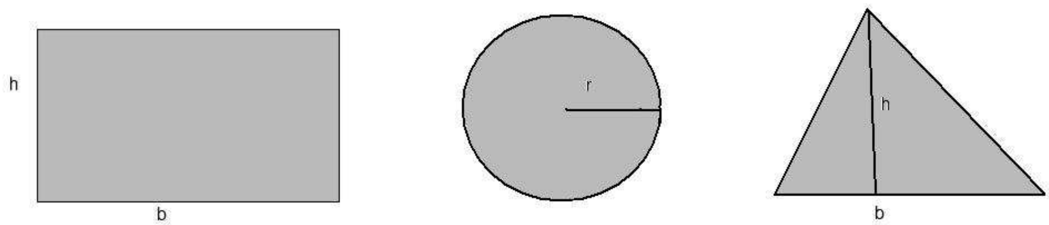
La respuesta es entonces $y(x) = 2e^{3x}$.

Es importante rescatar del ejemplo la siguiente situación general:

Soluciones de $y'(x) = 3y(x)$ hay muchas: $y(x) = c\,e^{3x}$, (una por cada $c \in \mathbb{R}$), pero una vez fijado un punto por el que pasa: $y(0) = 2$, hay una sola: $y(x) = 2e^{3x}$.

2. Integrales definidas

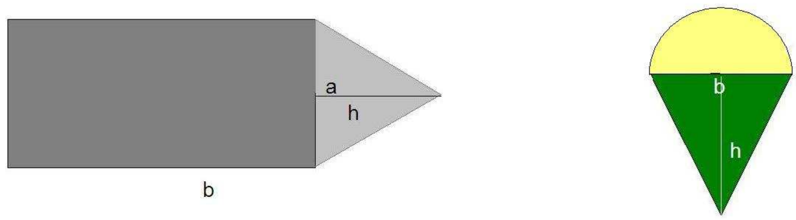
Dada una figura geométrica, tenemos asociada la noción de área. Como ya sabemos, el área de una tal figura mide en algún sentido la región encerrada por dicha figura. Como ejemplos podemos recordar:



Area del Rectángulo= b h   Area del Círculo= π r^2 Area del Triángulo= (1/2) b h

Una propiedad del área que se puede ver intuitivamente, es que si partimos una figura en figuras más pequeñas, el área total será igual a la suma de las áreas más pequeñas.

Esta propiedad resulta muy útil, por ejemplo para calcular áreas de polígonos, o de figuras que no son regulares.



Area = (1/2) a h + b a   Area = (1/2) b h + (1/2) π ((1/2)b)^2

Es claro entonces que al trabajar con áreas pueden aparecer (y en efecto aparecerán) sumas de muchos términos, y por lo tanto, para facilitar el manejo de dichas sumas introduciremos la notación de *sumatoria*.

Definición 2.1. Si m y n son números enteros tales que $m < n$, y $a_m, a_{m+1}, ..., a_n$ son números reales, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + ... + a_n.$$

Es decir que el lado izquierdo es una notación (o forma abreviada) de escribir el lado derecho.

A la letra griega Σ se la llama *sumatoria* y a la letra i, *índice de sumación.* Notemos que i toma los valores enteros entre m y n, o sea que se usa para indicar desde dónde hasta dónde hay que sumar los a_i.

Ejemplo 2.2.

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$$

También se pueden usar otras letras como índice

$$\sum_{j=-2}^{1} 2j = 2(-2) + 2(-1) + 2(0) + 2(1) = -4.$$

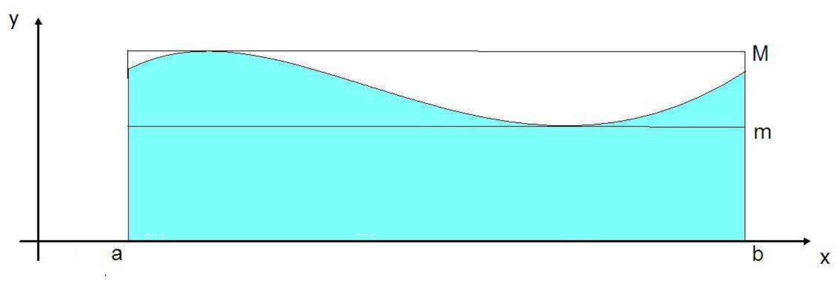
Algunas propiedades, de fácil verificación, que serán útiles a la hora de trabajar son:

1) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} c\, a_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

2) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$.

Área bajo una curva

En el punto anterior, vimos algunas regiones cuya área sabemos calcular. Bastante más complicado es calcular el área de la siguiente región.



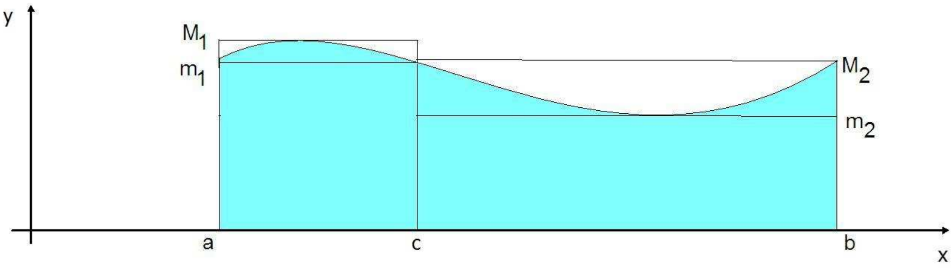
Para empezar, notemos que si A es el área de la región que nos interesa, es claro que A es mayor que el área del rectángulo de base $\overline{ab}$ y altura m, que llamaremos s y es menor que la correspondiente al rectángulo de base $\overline{ab}$ y altura M, que llamaremos S. Esto es

$$\mathsf{s} \leq A \leq \mathsf{S}. \tag{2.1}$$

Es decir que estos valores nos dan aproximaciones del área que nos interesa calcular.

Más aún, como sabemos calcular áreas de rectángulos, a partir de (2.1) obtenemos que $(b-a)m \leq A \leq (b-a)M$.

Observemos también que si partimos el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos, $[a, c]$ y $[c, b]$, el área A es igual a la suma de las áreas A_1 y A_2 obtenidas en cada nueva región.



En este caso

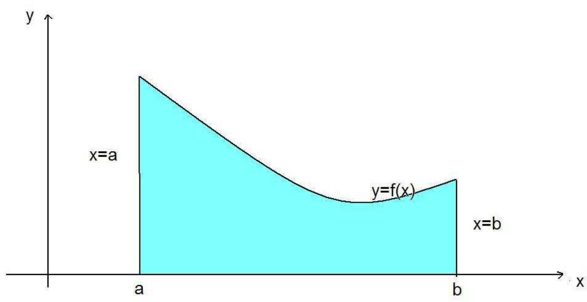
$$\mathsf{s} \leq \mathsf{s}_1 + \mathsf{s}_2 \leq A_1 + A_2 = A \leq \mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2 \leq \mathsf{S},$$

donde $\mathsf{s}_1 = (c-a)m_1$, $\mathsf{S}_1 = (c-a)M_1$, y $\mathsf{s}_2 = (b-c)m_2$, $\mathsf{S}_2 = (b-c)M_2$. Notemos que al partir el intervalo, las aproximaciones mejoran.

La idea es entonces usar esto para definir el valor del área, con un proceso análogo al que se usa para definir la pendiente de la recta tangente, ya que en ese caso se aproxima ese valor (desconocido) calculando las pendientes de las rectas secantes, que se pueden calcular, y luego se toma el límite. En este caso, aproximamos el valor del área A (desconocida) con sumas de áreas de rectángulos, que se pueden calcular, y luego tomamos límite.

Procedemos entonces de la siguiente manera:

Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [a, b]$. Sea A el área comprendida entre la curvas $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

donde $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ son números distintos pertenecientes al intervalo $[a, b]$. Al conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ lo llamamos una *partición* del intervalo $[a, b]$. Denotamos por $\Delta_k(P)$ la longitud del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, o sea $\Delta_k(P) = x_k - x_{k-1}$, y por $\Delta(P)$ la *longitud de la partición* P definida como el mayor de todos los $\Delta_k(P)$. Finalmente, tomamos

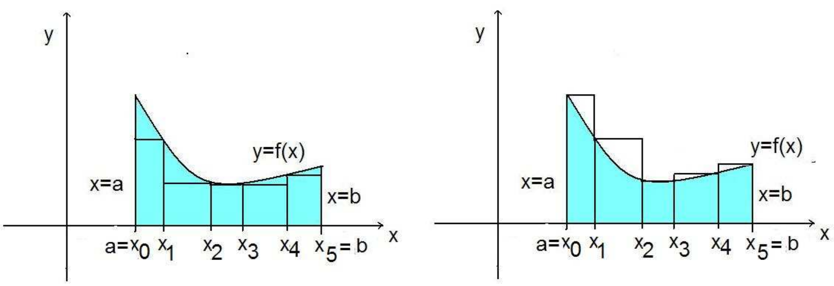
m_k el valor mínimo de $f(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$
M_k el valor máximo de $f(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Con todo esto, para cada partición P, como generalización de (2.1), definimos la *suma inferior* y la *suma superior*, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(P) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta_k(P) = m_1\, \Delta_1(P) + \ldots + m_n\, \Delta_n(P), \\ \mathsf{S}(P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta_k(P) = M_1\, \Delta_1(P) + \ldots + M_n\, \Delta_n(P). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Es claro que $\mathsf{s}(P)$ representa el área correspondiente a la unión de los rectángulos que se encuentran por debajo del gráfico de f y $\mathsf{S}(P)$ representa el área correspondiente a la unión de los rectángulos que se encuentran por arriba del gráfico de f. Más aún,

$$\mathsf{s}(P) \leq A \leq \mathsf{S}(P), \quad \text{para cualquier partición } \; P. \tag{2.3}$$



Definición 2.3. Si $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, se define el *área encerrada por la curva* $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ por

$$A = \lim_{\Delta(P)\to 0} \Big(\sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta_k(P) \Big). \tag{2.4}$$

Notemos que esta definición nos dice que dicha área es el límite de las sumas inferiores y por lo tanto de las áreas de las uniones de los rectángulos que se encuentran por debajo del gráfico de f, cuando tomamos particiones de longitud cada vez más chica, o sea con mayor cantidad de puntos.

Observación. El significado preciso del límite (2.4) es:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$ con $\Delta(P) < \delta$, entonces

$$|A - \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta_k(P)| < \varepsilon.$$

Se puede probar que tomar el límite de las sumas inferiores coincide con tomar el límite de las sumas superiores, es decir $A = \lim\limits_{\Delta(P)\to 0} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\, \Delta_k(P) \Big)$.

Llamaremos a este número, *integral definida de* f *en* $[a, b]$ y lo denotaremos por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Observemos que esta definición la hemos dado para funciones continuas y positivas en un intervalo cerrado. Para generalizar un poco esta definición, necesitamos introducir primero algunas nociones:

Decimos que f es *acotada superiormente* en un intervalo I si existe un número B, que llamaremos *cota superior de* f *en* I, tal que

$$f(x) \leq B \qquad \forall\, x \in I.$$

Además, decimos que f es *acotada inferiormente* en I si existe un número C, que llamaremos *cota inferior de* f *en* I, tal que

$$C \leq f(x) \qquad \forall\, x \in I.$$

Finalmente, si f es acotada superior e inferiormente en I, decimos que f es *acotada* en I.

Notemos que en este caso, si $M = max\{|B|, |C|\}$,

$$-M \leq f(x) \leq M \qquad \forall\, x \in I.$$

Observaciones.

1. Las cotas superiores e inferiores no son únicas. Esto se ve fácilmente, pues si $f(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in I$, entonces $f(x) \leq 2 \quad \forall\, x \in I$. Es decir que en general si B es una cota superior de f en I, $\widetilde{B}$ también es una cota superior para todo $\widetilde{B} \geq B$.

2. También es claro que no toda función es acotada. En efecto, basta considerar $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo $(0,1)$. La función f está acotada inferiormente pues $\dfrac{1}{x} \geq 1 \;\; \forall\, x \in (0,1)$, y no está acotada superiormente.

3. Para tener ejemplos de funciones acotadas, basta tomar una función continua f en un intervalo cerrado I, pues recordemos que allí estas funciones alcanzan el máximo, y_M, y el mínimo, y_m, y por lo tanto

$$y_m \leq f(x) \leq y_M \quad \text{para todo} \;\; x \in I.$$

Es decir que si f es una función continua en $[a,b]$, entonces es acotada en $[a,b]$.

4. Notemos además que el hecho de que una función sea acotada superiormente por B, es equivalente a decir que su gráfico se encuentra por debajo de la recta $y = B$ y que sea acotada inferiormente por C, equivale a decir que su gráfico se encuentra por arriba de la recta $y = C$. Luego, el hecho de que una función sea acotada es equivalente a decir que su gráfico se encuentra en una franja $[-M, M]$.

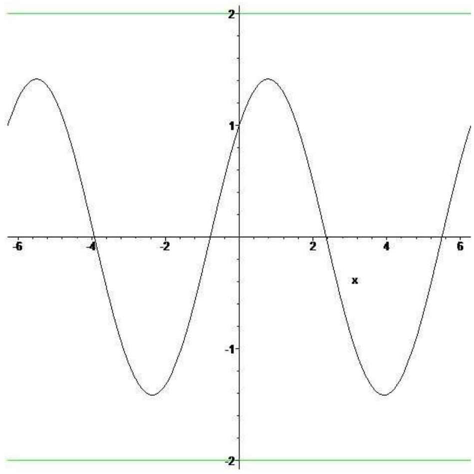


Figura 1. La función $f(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$ tiene su gráfico en la franja $-2 < y < 2$.

Siguiendo con la idea de acotar funciones en un intervalo, notemos que si una función es acotada superiormente, entonces tiene una cota superior. Como ya dijimos, dicha cota no es única pues cualquier número más grande también es una cota superior. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.4. Llamaremos *supremo de f en un intervalo I* a la menor de las cotas superiores de f en I e *ínfimo de f en I* a la mayor de las cotas inferiores de f en I.

Por una importante propiedad de los números reales sabemos que toda función acotada superiormente (inferiormente) tiene supremo (ínfimo).

Una observación que sirve a modo de ejemplo es que si f alcanza el máximo en $[a, b]$ en $x = x_0$ y $f(x_0) = y_0$, entonces y_0 es también supremo de $f(x)$ para $x \in [a, b]$, y análogamente el mínimo es también ínfimo.

Para flexibilizar la condición de continuidad requerida en la definición de área bajo una curva, veamos la siguiente

DEFINICIÓN 2.5. Decimos que f tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ si existen una cantidad finita de puntos $t_1, ..., t_j \in [a, b]$,

$$t_0 = a < t_1 < ... < t_j < b = t_{j+1}$$

tal que f es continua en cada subintervalo (t_{k-1}, t_k), $1 \leq k \leq j + 1$.

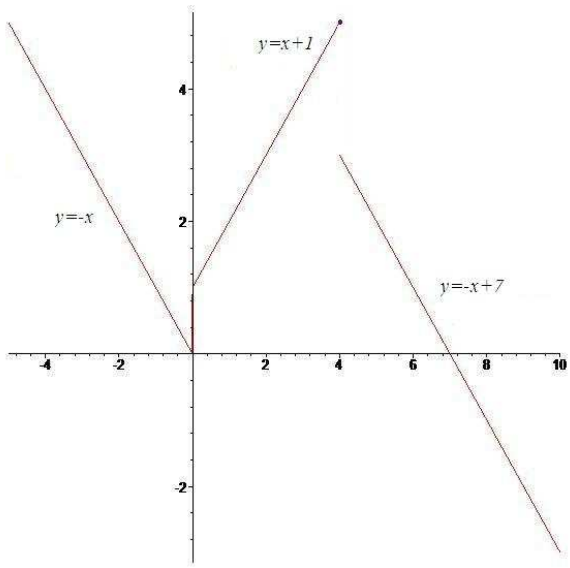


FIGURA 2. La función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -4 < x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ -x + 7 & \text{si } 4 < x < 8 \end{cases}$$

en el intervalo $[-4, 8]$ tiene dos discontinuidades, una en $x = 0$ y otra en $x = 4$.

Tomemos entonces una función f acotada en $[a, b]$, con un número finito de discontinuidades. En este caso una generalización de la definición de suma inferior asociada a una partición P es

$$\mathsf{s}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \, \Delta_k(P), \tag{2.5}$$

donde ahora m_k es el ínfimo de los valores de $f(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Es decir que estamos tomando la suma inferior asociada a los ínfimos. Sabemos que si f es continua en $[x_{k-1}, x_k]$ entonces alcanza el mínimo, que coincide con el ínfimo de $f(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

Análogamente, si tomamos M_k como el supremo de los valores de $f(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$, podríamos generalizar la noción de suma superior como $\mathsf{S}(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta_k(P)$, y se puede probar que

$$\lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta_k(P) = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta_k(P).$$

Definición 2.6. La *integral definida* de una función f acotada, con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta_k(P).$$

Notemos que esta definición es una generalización de la Definición 2.3 pues ambas definiciones coinciden en el caso en que f es continua y positiva.

Observaciones.

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es un número, en cambio $\displaystyle\int f(x)\, dx$ es un conjunto de funciones.

2. Si f es acotada con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ representa el área de la región comprendida entre el gráfico de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. En cambio, si f toma valores negativos en algunos $x \in [a, b]$, entonces $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ **no** representa el área comprendida entre el gráfico de f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 2.7. Tomemos $f(x) = -1$ y calculemos $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$.

Para la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ tenemos que

$$\mathsf{s}(P) = (-1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2} = -1$$

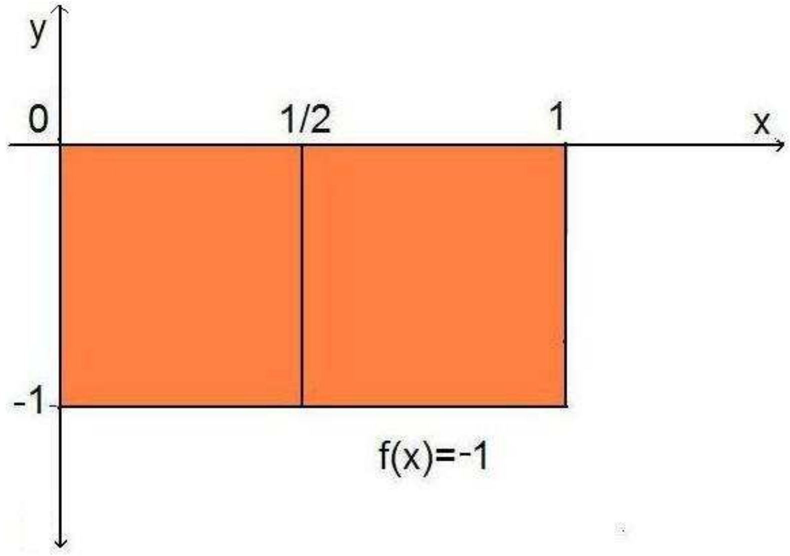
$$\mathsf{S}(P) = (-1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2} = -1.$$

Pero como

$$\mathsf{s}(P) \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \mathsf{S}(P),$$

obtenemos

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -1.$$



Queda claro entonces que esta integral **no** corresponde al área sombreada pues las áreas son siempre positivas.

Sea f una función acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. Es conveniente para futuros usos, introducir las siguientes definiciones.

Definición 2.8.

$$1) \int_a^a f(x)\, dx = 0, \qquad\qquad 2) \int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Propiedades.

Sea f, g y h funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ entonces:

1. Si $h(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b h(x)\, dx \geq 0$.

2. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$, para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$.

4. Si $d \in \mathbb{R}$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$.

5. Si $f(x) \leq g(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$.

Estas propiedades son intuitivamente más claras en el caso de $f \geq 0$ y continua y la demostración se basa en aplicar las propiedades del límite. Por ejemplo, veamos cómo demostrar la propiedad **1**.

Por definición tenemos que

$$\int_a^b h(x)\,dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta_k(P)$$

donde m_k es el ínfimo de $h(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Es claro que como $h(x) \geq 0$, $C = 0$ es una cota inferior de $h(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$ para todo k. Por lo tanto el ínfimo, que es por definición la mayor de las cotas inferiores, satisface $m_k \geq 0$. Así, como además $\Delta_k(P) \geq 0$ para todo k, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta_k(P) \geq 0, \qquad \text{para toda partición } P,$$

con lo cual

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta_k(P) \geq 0$$

como queríamos demostrar.

Notemos finalmente que la propiedad 4, en el caso en que f es una función continua y positiva, y $d \in (a, b)$, equivale al hecho que ya mencionamos de que al partir la región, el área total es la suma de las áreas.

A la hora de calcular una integral, salvo algunas excepciones (constante, rectas, etc.), no es fácil hacerlo usando la definición. Por ello, daremos a continuación algunos teoremas con el objeto de proporcionar herramientas para el cálculo de una integral definida.

Observemos primero que, si f es una función acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, entonces para cualquier $x \in (a, b)$ está definida $\int_a^x f(t)\,dt$ pues f sigue siendo acotada y con un número finito de discontinuidades en el intervalo $[a, x] \subset [a, b]$. Más aún, este valor depende de x, por lo que podemos definir la función $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Observemos que $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Teorema 2.9. *(Primer Teorema Fundamental del Cálculo)*
Sea f una función continua en $[a, b]$, y $c \in [a, b]$. Sea F la función definida por

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Si $x = a$ ó $x = b$, $F'(x)$ denota la derivada de F por la derecha y por la izquierda respectivamente. Notemos también que en la definición de F, puede ser $x \leq c$ ó $x \geq c$.

Ejemplo 2.10. Sea $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^4+1}\, dt$.

Entonces $F'(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$. En particular

$$F'(2) = \frac{1}{2^4+1} = \frac{1}{17} \quad \text{y} \quad F'(-1) = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.11. Sea $G(x) = \displaystyle\int_x^2 \cos^2(2t)\, dt$.

Entonces $G(x) = -\displaystyle\int_2^x \cos^2(2t)\, dt$. Luego, por el teorema anterior $G'(x) = -\cos^2(2x)$.

Un problema un poco más complicado sería derivar $F(x) = \displaystyle\int_2^{x^2} \sqrt{2+t^4}\, dt$, o más en general

$$F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)\, dt,$$

donde h es una función diferenciable. Observemos que si tomamos

$$G(y) = \int_a^y f(t)\, dt$$

entonces $F(x) = G(h(x))$. Luego, usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(h(x))h'(x) \\ &= f(h(x))h'(x). \end{aligned}$$

Finalmente esto nos dice, aplicado al problema anterior, que la derivada que queríamos calcular está dada por

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_2^{x^2} \sqrt{2+t^4}\, dt\right) = \sqrt{2+(x^2)^4}\, 2x = \sqrt{2+x^8}\, 2x.$$

Siguiendo con nuestra generalización, veamos qué pasa si tomamos g y h dos funciones diferenciables en un intervalo $[a,b]$ y consideramos

$$H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt.$$

¿Cuál será su derivada? Para calcularla, observemos primero que

$$\begin{aligned} H(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt &= \int_{g(x)}^{d} f(t)\,dt + \int_{d}^{h(x)} f(t)\,dt \\ &= \int_{d}^{h(x)} f(t)\,dt - \int_{d}^{g(x)} f(t)\,dt, \end{aligned}$$

y por lo que ya vimos, tenemos que

$$H'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Ejemplo 2.12. Sea $F(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{x^3} \text{sen}(4t)dt$, entonces

$$\begin{aligned} F'(x) &= \text{sen}(4x^3)(3x^2) - \text{sen}(4(-2x))(-2) \\ &= \text{sen}(4x^3)(3x^2) + 2\text{sen}(-8x). \end{aligned}$$

Teorema 2.13. *(Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o Regla de Barrow).*

Sea f continua en $[a,b]$ y G una primitiva de f en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

En adelante denotaremos

$$G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a).$$

Prueba. Por el teorema anterior se cumple que $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f en I. Es decir que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces como G es otra primitiva de f en $[a,b]$, por el Teorema 1.3 existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $G(x) = F(x) + c$. para todo $x \in [a,b]$. Esto es,

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= \left(\int_a^b f(t)\,dt + c\right) - \left(\int_a^a f(t)\,dt + c\right) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Notemos que este teorema nos da un método para calcular integrales definidas, si de alguna forma conocemos una primitiva de la función a integrar.

Ejemplo 2.14.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (2x^3 - 7x^2 + 1)\, dx &= 2\int_{-1}^{1} x^3 dx - 7\int_{-1}^{1} x^2\, dx + \int_{-1}^{1} 1dx \\
&= 2\,\frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{1} - 7\Big(\frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_{-1}^{1} + x\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2\,(\frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{4}(-1)^4) - 7(\frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}(-1)^3) + (1-(-1)) \\
&= 2(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) - 7(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + 2 \\
&= -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.15. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx$

A diferencia del ejemplo anterior, no es claro cuál sería una primitiva de la función $f(x) = x\sqrt{2x^2+1}$, pero podemos tratar de encontrar una, usando el método de sustitución.

Sea

$$u = 2x^2 + 1, \ \text{ entonces } \ du = 4x\,dx,$$

luego,

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+1}\,4x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2} + c \\
&= \frac{2}{12}(2x^2+1)^{3/2} + c \\
&= \frac{1}{6}(2x^2+1)^{3/2} + c.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos una primitiva de f y aplicamos el Teorema 2.13; concluimos que:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\,dx &= \frac{1}{6}\,(2x^2+1)^{3/2}\Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{6}\Big[\Big(2.4+1\Big)^{3/2} - 1^{3/2}\Big] \\ &= \frac{1}{6}(9^{3/2}-1) = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Otra forma de resolver esta integral, una vez que usamos el método de sustitución, sería calcular directamente con u, sin volver a x. En este caso hay que tener en cuenta que los límites de integración (o sea el intervalo en el cual se integra) son otros:

$$\int_0^2 x\,\sqrt{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\int_{u(0)}^{u(2)} \sqrt{u}\;du.$$

Recordemos que habíamos tomado $u = 2x^2+1$, que en realidad es una función de x, $u(x) = 2x^2+1$, y por lo tanto los límites de integración son $u(0) = 1$ y $u(2) = 9$.

Verifiquemos entonces que llegamos al mismo resultado:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\,\sqrt{2x^2+1}\,dx &= \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{u}\;du = \frac{1}{4}\Big(\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big)\Big|_1^9 \\ &= \frac{2}{12}\Big[9^{3/2}-1^{3/2}\Big] = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Notemos que para aplicar el Segundo Teorema Fundamental al cálculo de

$$\int_a^b f(x)\;dx,$$

se necesita que f sea continua. Luego, para tener algo similar en el caso de una función con un número finito de discontinuidades, comencemos con el siguiente resultado.

Lema 2.16. *Si $h(x)$ es la función en $[a,b]$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \neq b \\ d, & si\ x = b \end{cases} \qquad entonces \qquad \int_a^b h(x)\;dx = 0.$$

Prueba. Es claro que podemos suponer que $d \geq 0$, pues si $d < 0$ consideramos $-h$. Sea $P = \{x_0, \cdots\ x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Si m_k es el ínfimo de los valores de h en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, entonces es fácil ver que $m_k = 0$ para todo k. Luego, toda suma inferior es cero, y por lo tanto aplicando la definición de integral tenemos que

$$\int_a^b h(x)\;dx = \lim_{\Delta(P)\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} m_k\;\Delta_k(P) = 0.$$

□

Observemos que en esta prueba del lema, no se usó el hecho de que la discontinuidad de h ocurre en $x = b$, por lo que el lema sigue valiendo si cambiamos b por cualquier $x_0 \in [a, b]$.

Teorema 2.17. *Sea* $x_0 \in [a, b]$. *Si* $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ *es una función continua y* $g(x) = f(x)$ *para todo* $x \neq x_0$, *entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Prueba. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq x_0$, consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, por lo tanto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq x_0 \\ f(x_0) - g(x_0) = d_1, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

El lema anterior implica que

$$\int_a^b h(x)\;dx = 0,$$

y como

$$\int_a^b (f - g)(x)\;dx = \int_a^b h(x)\;dx = 0,$$

tenemos que

$$\int_a^b f(x)\;dx = \int_a^b g(x)\;dx,$$

como queríamos demostrar.

□

Supongamos ahora que f es acotada en $[a, b]$ y es discontinua solamente en una cantidad finita de puntos del intervalo $[a, b]$. Elegimos un conjunto $\{x_0, ..., x_N\}$ con $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ que contenga dichos puntos. Supongamos además que para cada $1 \leq k \leq N$, en cada intervalo abierto (x_{k-1}, x_k), f coincide con una función f_k que es continua en el intervalo cerrado $[x_{k-1}, x_k]$. Por la propiedad de aditividad de la integral definida y por el teorema anterior, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{N-1}}^b f(x)dx \\ &= \int_a^{x_1} f_1(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx + ... + \int_{x_{N-1}}^b f_N(x)dx. \end{aligned}$$

Ahora, como f_k es continua para cada $1 \leq k \leq N$, podemos aplicar la regla de Barrow a cada una de las integrales de arriba. Por lo tanto, si G_k es una primitiva de f_k,

$$\int_a^b f(x)dx = G_1(x)\Big|_a^{x_1} + G_2(x)\Big|_{x_1}^{x_2} + ... + G_N(x)\Big|_{x_{N-1}}^{b}.$$

Ejemplo 2.18. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 1, \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

entonces

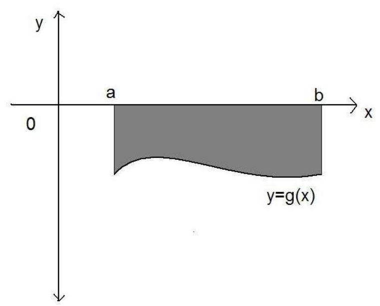
$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 (x+2)\,dx + \int_1^2 \left(x^3 - 1\right) dx \\ &= \left(\tfrac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 + \left(\tfrac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 \\ &= \tfrac{5}{2} + \left(2 + \tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{21}{4} \end{aligned}$$

3. Área de una región comprendida entre dos gráficos

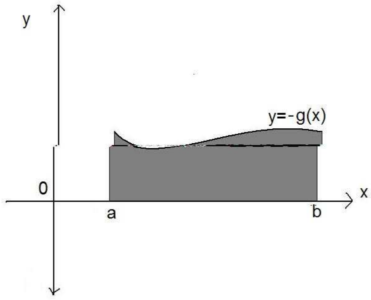
Sea f una función acotada, con un número finito de discontinuidades y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Hemos definido el área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ como

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Si ahora tomamos una función $g \leq 0$, acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, no hemos definido el área encerrada por el gráfico de g, pues sólo sabemos cómo calcular áreas bajo el gráfico de funciones no negativas.



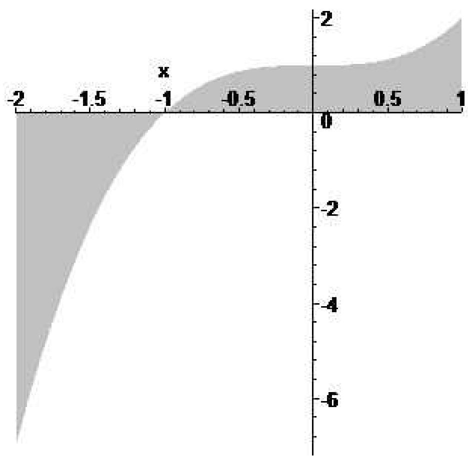
Consideremos entonces la función $-g$. Notemos que $-g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$ y más aún, se puede ver que el área encerrada por la curva $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, es la misma que el área encerrada por dichas rectas y la curva $y = -g(x)$.



Si A_1 es el área asociada a g y A_2 es el área asociada a $-g$, tenemos que

$$A_1 = A_2 = \int_a^b -g(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx.$$

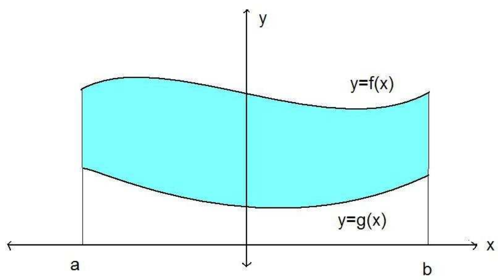
Ejemplo 3.1. Si $f(x) = x^3 + 1$, calculemos el área sombreada A :



Si A_1 es el área correspondiente a f restringida al intervalo $[-1, 1]$, donde $f \geq 0$, y A_2 es el área correspondiente a f restringida al intervalo $[-2, -1]$, donde $f \leq 0$, resulta

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_{-1}^{1} (x^3+1)\,dx - \int_{-2}^{-1} (x^3+1)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 + x\right)\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{1}{4}x^4 + x\right)\Big|_{-2}^{-1} \\ &= \left[(\frac{1}{4}+1) - (\frac{1}{4}-1)\right] - \left[(\frac{1}{4}-1) - (\frac{1}{4}(-2)^4 - 2)\right] \\ &= 2 - (-\frac{3}{4} - 2) \\ &= \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que tenemos dos funciones f y g. Queremos calcular el área A de la región sombreada:



Es fácil ver que esta área es la diferencia entre el área asociada al gráfico de f y el área asociada al gráfico de g. Esto es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

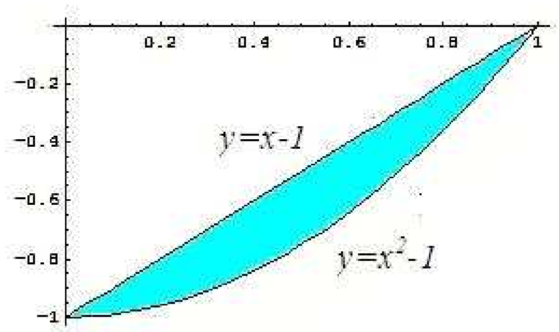
Observemos que aquí hemos usado que $0 \leq g(x) \leq f(x) \;\; \forall\, x \in [a,b]$, pero esto se puede generalizar:

TEOREMA 3.2. *Si f y g son dos funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, tales que $g(x) \leq f(x) \;\; \forall\, x \in [a,b]$, entonces el área de la región comprendida entre sus gráficos y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por*

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Notemos que aunque f y g tomen valores negativos, se cumple siempre que $f(x) - g(x) \geq 0$.

Ejemplo 3.3. Halle el área de la región sombreada, comprendida entre los gráficos de $y = x^2 - 1$ e $y = x - 1$.



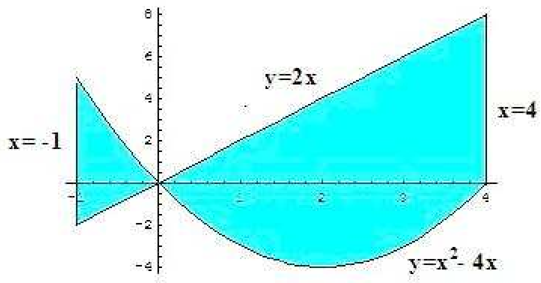
Por el teorema anterior aplicado a $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^2 - 1$, tenemos que

$$A = \int_0^1 [(x-1) - (x^2-1)]\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Si ahora tomamos f y g continuas en $[a,b]$, pero $g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq c$ y $g(x) \geq f(x)$ para $c \leq x \leq b$, entonces, para calcular el área encerrada entre sus gráficos en el primer caso debemos considerar $f(x) - g(x)$ y en el segundo $g(x) - f(x)$.

Ejemplo 3.4. Halle el área comprendida entre los gráficos de
$f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 2x$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$.

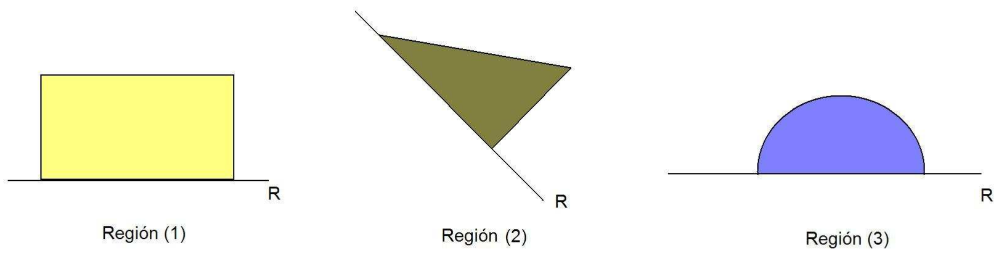


Por lo dicho anteriormente, como $g(x) \leq f(x)$ para $x \in [-1, 0]$ y $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [0, 4]$, tenemos que

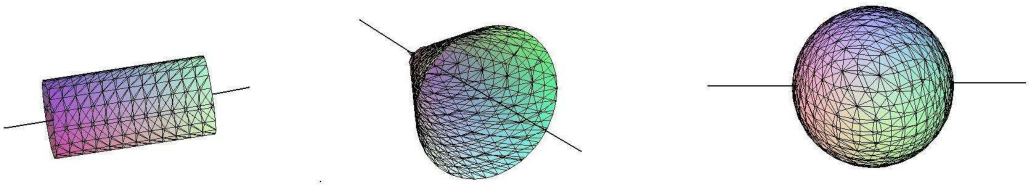
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} x^2 - 4x - 2x \, dx + \int_{0}^{4} 2x - (x^2 - 4x) \, dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x^2 - 6x) dx - \int_{0}^{4} (x^2 - 6x) \, dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right)\Big|_{0}^{4} \\ &= -(\frac{1}{3}(-1) - 3) - \frac{64}{3} + 48 = 30. \end{aligned}$$

4. Volumen de revolución

Consideremos una porción del plano (región acotada) y una recta que no la corta, aunque sí puede llegar a tocarla.



Si hacemos girar esta región alrededor de dicha recta obtenemos un cuerpo. Por ejemplo



Cilindro obtenido al girar la región (1) alrededor de la recta R

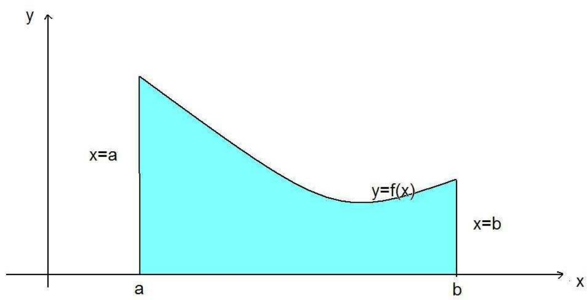
Cono obtenido al girar la región (2) alrededor de la recta R

Esfera obtenida al girar la región (3) alrededor de la recta R

de la región (1) obtenemos un cilindro, de la (2) un cono, y de la tercera región, una esfera.

¿Cuál será el volumen de este cuerpo? De la construcción podemos intuir que tendrá mucho que ver con el área de la región de la cual partimos.

Para calcular un volumen como éste, empecemos por el caso más sencillo. Sea f continua en $[a, b], f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, y consideremos la región delimitada por el gráfico de f, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Sean C el sólido que obtenemos al hacer girar esta región alrededor del eje x y V su volumen.



Recordemos que al área bajo el gráfico de f la podemos aproximar con sumas inferiores (y superiores). Tomemos entonces $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y consideremos la suma inferior correspondiente a P. Esto es,

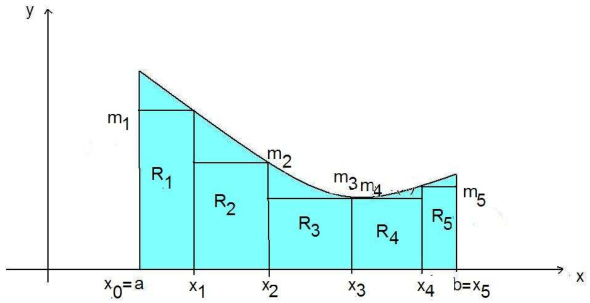
$$\mathsf{s}(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \; \Delta_k(P),$$

donde $m_k \, \Delta_k(P)$ es el área del rectángulo R_k.

Si hacemos girar el rectángulo R_k, obtenemos un cilindro de radio m_k y altura $\Delta_k(P)$, por lo tanto su volumen está dado por

$$V_k(P) = \pi \, m_k^2 \Delta_k(P).$$

Notemos que al hacer girar todos los rectángulos R_k con $1 \leq k \leq n$ correspondientes a P, obtenemos un cuerpo, cuyo volumen es menor que el de C.



Como ya dijimos, al tomar particiones de longitud cada vez más pequeña (o sea $\Delta(P)$ tiende a 0), las sumas inferiores aproximan cada vez mejor al área bajo el gráfico de f y por lo tanto, el cuerpo que obtenemos al hacer girar esos rectángulos aproxima cada vez más a C. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} V = \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} V_k(P) &= \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \pi\, m_k^2\, \Delta_k(P) \\ &= \pi \lim_{\Delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k^2\, \Delta_k(P) \\ &= \pi \int_a^b f^2(x)\, dx, \end{aligned}$$

pues m_k^2 es el mínimo de $f^2(x)$ para $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Es decir que el volumen del sólido generado por una función f, continua en $[a,b]$, está dado por:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{4.1}$$

Llamaremos al sólido así obtenido, *sólido de revolución generado por f.*

Observación. Notemos que (4.1) vale para una función $f \leq 0$ acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$.

Ejemplo 4.1. Halle el volumen del sólido obtenido al girar alrededor del eje x, la curva $y = x^2$ entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

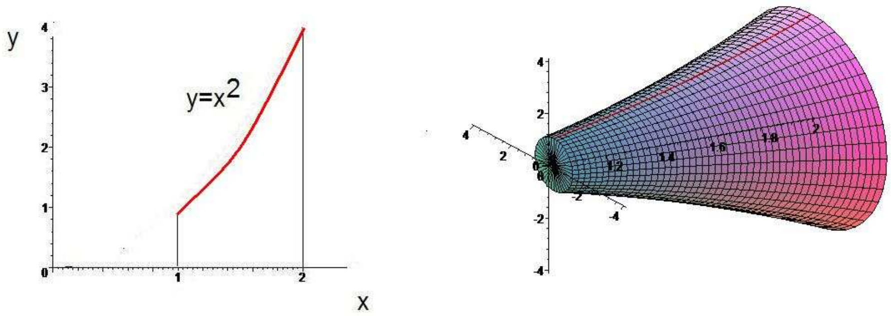


FIGURA 3. La función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 2]$ y su correspondiente sólido de revolución.

$$V = \pi \int_1^2 x^4\, dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{31}{5}\pi.$$

En general se cumple:

TEOREMA 4.2. *Sean f y g funciones acotadas, con un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ y tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Sea V el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x, la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$. Entonces*

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\, dx.$$

EJEMPLO 4.3. Sean $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 + 1$. Calcule el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región sombreada, comprendida entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

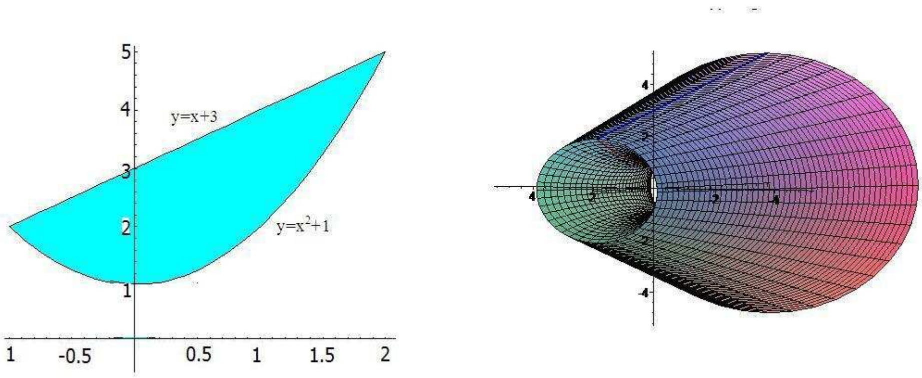


FIGURA 4. La región comprendida entre $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$ y su correspondiente sólido de revolución.

Solución. Por el teorema anterior tenemos que

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} \left(f^2(x) - g^2(x)\right) dx.$$

Necesitamos conocer entonces x_0 y x_1. Como en estos puntos se cumple que las funciones coinciden, entonces $x + 3 = x^2 + 1$ y por lo tanto $x^2 - x - 2 = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos $x_0 = -1$ y $x_1 = 2$.

Luego,

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left((x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2\right) dx = \frac{117}{5}\,\pi.$$

5. Integrales impropias

Hemos definido la integral definida de una función f en el intervalo $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx$$

cuando se cumplen las siguientes condiciones:

(i) límites de integración finitos (es decir: a y b finitos).

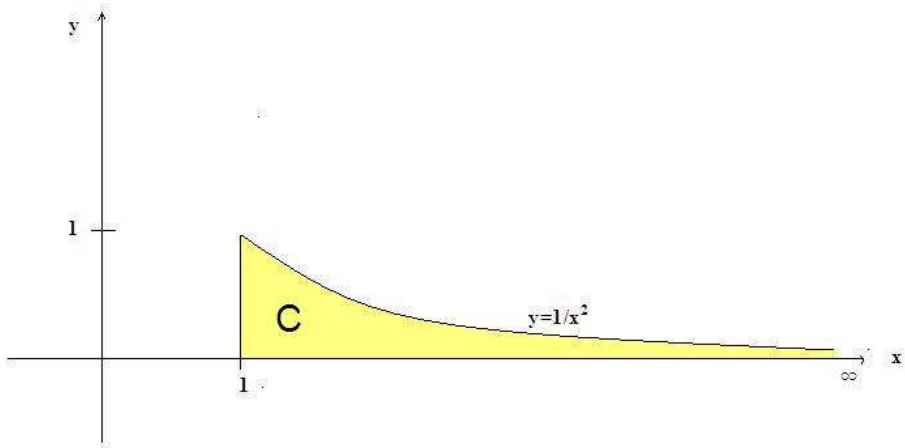
(ii) f continua en $[a, b]$, o bien f acotada en $[a, b]$ con un número finito de discontinuidades.

Ahora extenderemos el concepto de integral definida al de *Integral Impropia*, en algunos casos en que las condiciones (i) y/o (ii) no se cumplen.

6. Integrales impropias de tipo I

Este tipo de integrales surgen cuando consideramos funciones continuas y al menos uno de los límites de integración es infinito.

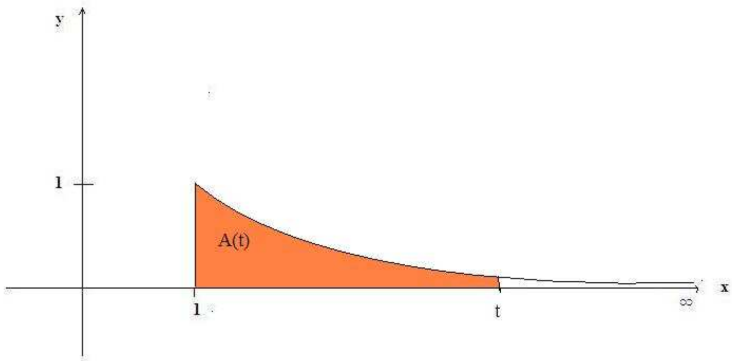
Comencemos con un ejemplo: tomemos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ para x en $[1, \infty)$ y llamemos C a la región "infinita" comprendida entre el gráfico de f y el eje x. Pensemos ahora en el área de C.



Tal vez nuestra intuición nos diga que dicha área debería ser infinita, pero analicemos esta situación con más detalle.

Empecemos notando que para cualquier número real $t > 1$, el área $A(t)$ de la porción de C comprendida entre las rectas $x = 1$ y $x = t$, está dada por

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\bigg|_1^t \\ &= 1 - \frac{1}{t}. \end{aligned}$$



Si ahora elegimos t cada vez más grande, los valores $A(t)$ irán aproximando cada vez mejor al área de C y como

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1,$$

diremos que el área A de la región C es 1. Escribiremos entonces

$$A = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = 1.$$

Usando este ejemplo como guía, damos las siguientes definiciones, donde la función f no necesariamente es positiva.

Definición 6.1.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a, \infty)$ definimos

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx,$$

si este límite existe y es finito.

ii) Sea $b \in \mathbb{R}$. Si f es continua en $(-\infty, b]$ definimos

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\, dx,$$

si este límite existe y es finito.

iii) Sea $c \in \mathbb{R}$. Si f es continua en $(-\infty, \infty)$ y las integrales

$$\int_{-\infty}^c f(x)\, dx \qquad \text{y} \qquad \int_c^\infty f(x)\, dx$$

existen, definimos

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx.$$

Nota: Se puede demostrar que en (iii), el segundo miembro es independiente de la elección de c.

Cuando los límites que aparecen en la Definición 6.1 i) y ii) existen y son finitos (o sea: dan como resultado un número real) decimos que las integrales impropias allí definidas **convergen**. En caso contrario decimos que **divergen**.

La integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, de la Definición 6.1 iii) **converge**, si ambas integrales impropias $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ y $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\, dx$ convergen. Si alguna de estas dos últimas integrales impropias diverge decimos que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ **diverge**.

Ejemplo 6.2. Evalúe las siguientes integrales, si convergen.

(a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$, (b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\, dx$.

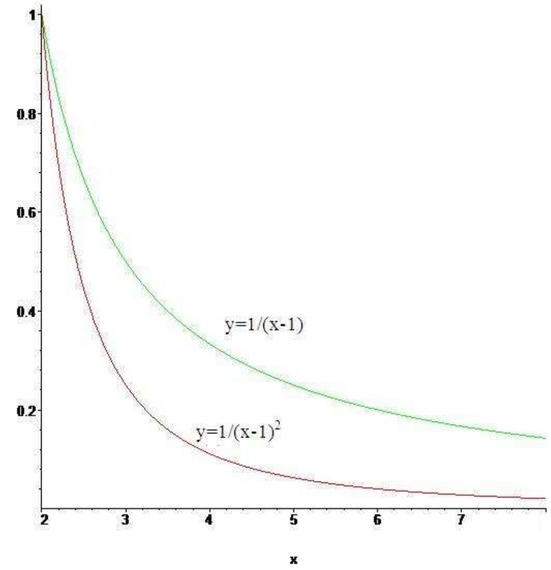


FIGURA 5. Gráficos de $y = \frac{1}{x-1}$ y $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ en el intervalo $[2, \infty)$.

Solución. (a) Por la Definición 6.1 i), tenemos

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{-1}{x-1}\Big|_2^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{2-1}\right) = 1,\end{aligned}$$

luego esta integral impropia converge y su valor es 1.
(b) Usando la Definición 6.1 i) resulta

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} \frac{1}{x-1}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x-1}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \ln|x-1|\Big|_2^t \\ &= \lim_{t\to\infty} \Big(\ln(t-1) - \ln(2-1)\Big) \\ &= \lim_{t\to\infty} \ln(t-1) = \infty,\end{aligned}$$

y por lo tanto esta integral impropia diverge.

EJEMPLO 6.3. Evalúe la siguiente integral, si converge

$$\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx.$$

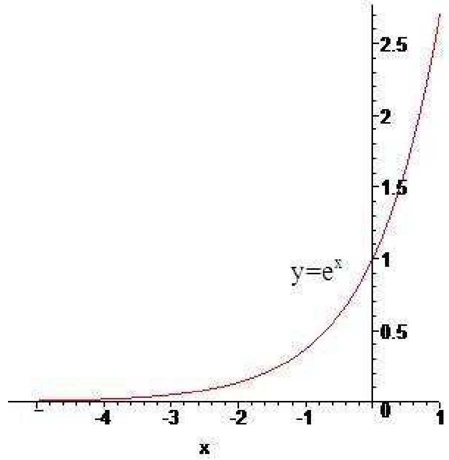


FIGURA 6. La función $y = e^x$ en el intervalo $(-\infty, 1]$.

Solución. Por la Definición 6.1 ii) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 e^x dx\\ &= \lim_{t\to-\infty} e^x\Big|_t^1\\ &= \lim_{t\to-\infty}\Big(e-e^t\Big) = e,\end{aligned}$$

y por lo tanto esta integral impropia converge.

EJEMPLO 6.4. Evalúe las siguientes integrales, si convergen,

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx,$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^x\,dx.$

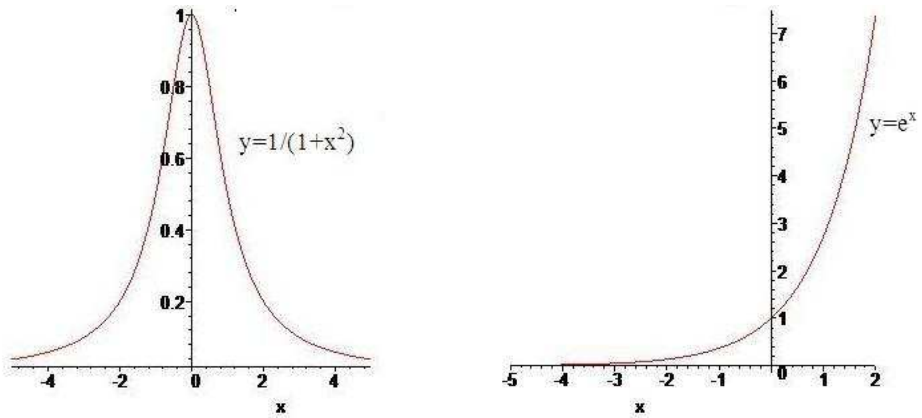


FIGURA 7. Las funciones $y = \frac{1}{1+x^2}$ e $y = e^x$ en $(-\infty, \infty)$.

Solución. (a) Usamos la Definición 6.1 iii) con $c = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Ahora aplicamos la Definición 6.1 i)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \arctan\, x \Big|_{0}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} (\arctan\, t - \arctan\, 0\,) = \pi/2.
\end{aligned}$$

Similarmente usando la Definición 6.1 ii) podemos probar que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \pi/2.$$

Por lo tanto, la integral impropia dada en (a) converge y su valor es $\pi/2 + \pi/2 = \pi$.
(b) Usamos la Definición 6.1 iii) con $c = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\, dx = \int_{-\infty}^{1} e^x\, dx + \int_{1}^{\infty} e^x\, dx.$$

En el Ejemplo 6.3 mostramos que la $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x\, dx$ es convegente y su valor es e, analicemos entonces la segunda integral impropia del miembro de la derecha:

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{\infty} e^x\, dx &= \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} e^x\, dx \\
&= \lim_{t\to\infty} e^x \Big|_{1}^{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} (e^t - e) = \infty,
\end{aligned}$$

luego esta integral impropia diverge y entonces también diverge la integral impropia dada en (b).

Ejemplo 6.5. Determine para qué valores de p la siguiente integral es convergente

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx.$$

Solución. Consideremos primero $p = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty,
\end{aligned}$$

por lo tanto, la integral diverge si $p = 1$.

Supongamos $p \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_1^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\Big(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\Big).
\end{aligned}$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$ y así $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^{p-1}} = 0$, por lo tanto,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si} \quad p > 1.$$

Si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$ y así $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^{p-1}} = \lim\limits_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$, en consecuencia la integral diverge.

Entonces, hemos obtenido:

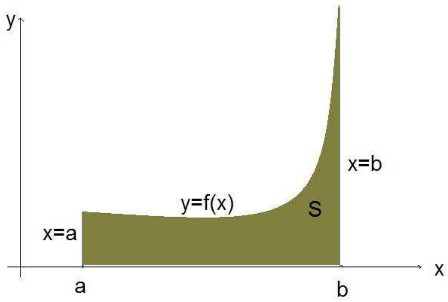
$$\boxed{\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx \ \text{ es convergente si } p > 1 \text{ y divergente si } \ p \leq 1.}$$

Geométricamente, esto dice que aunque las curvas $y = \dfrac{1}{x^p}$ para $x > 1$ y $p > 0$ son muy parecidas, la región comprendida entre la curva $y = \dfrac{1}{x^p}$ y el eje x para $x \geq 1$, tiene área finita si $p > 1$ e infinita si $0 < p \leq 1$.

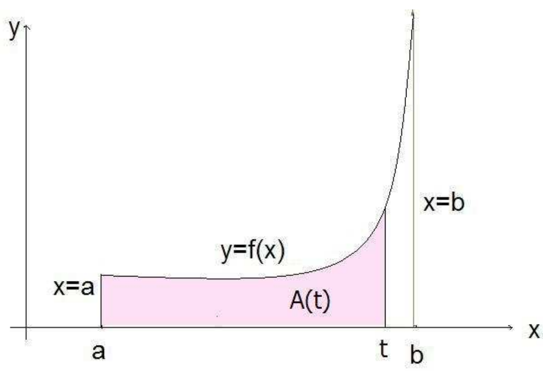
7. Integrales impropias de tipo II

En las integrales de tipo I las regiones consideradas se extienden indefinidamente en sentido horizontal. Estudiaremos ahora regiones que se extienden en sentido vertical, es decir que este tipo de integrales corresponde a considerar límites de integración a, b, finitos y funciones continuas en $[a, b]$ salvo en un punto en el cual tienen una asíntota vertical.

Tomemos entonces una función f continua, positiva, definida en $[a, b)$ y tal que $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$. Sea S la región no acotada comprendida entre el gráfico de f, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$.



Si $t < b$ es claro que el área de la porción de S comprendida entre las rectas $x = a$ y $x = t$



está dada por

$$A(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Como en el caso anterior, estas áreas aproximan cada vez más al área de S cuando t se aproxima a b. Luego, si $A(t)$ tiende a un número real A cuando $t \mapsto b^-$, se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{t \mapsto b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

Usaremos estas ideas para dar la siguiente definición, donde f no necesariamente es positiva.

Definición 7.1.

i) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si f es continua en $[a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx,$$

si este límite existe y es finito.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$. Si f es continua en $(a, b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

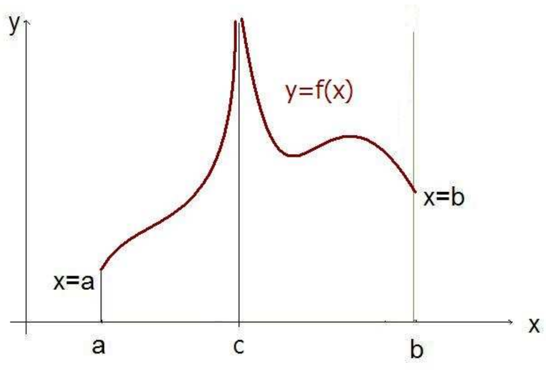
si este límite existe y es finito.

iii) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < c < b$. Si f es continua en $[a, c) \bigcup (c, b]$ (ver figura abajo), y las integrales

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

existen, definimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Cuando los límites que aparecen en la Definición 7.1 i) y ii) existen y son finitos, decimos que las integrales impropias allí definidas **convergen**. En caso contrario decimos que **divergen**.

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ de la Definición 7.1 iii) **converge**, si ambas integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen. Si alguna de estas dos últimas integrales impropias diverge, decimos que $\int_a^b f(x)\,dx$ **diverge**.

EJEMPLO 7.2. Evalúe, si converge, la siguiente integral impropia:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\, dx.$$

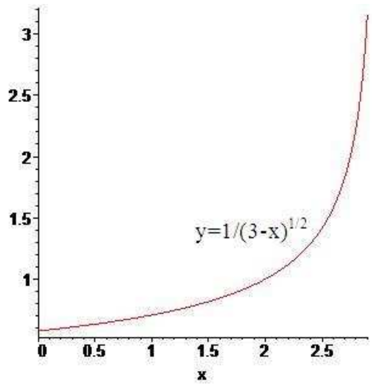


FIGURA 8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ en el intervalo $[0, 3)$.

Solución. Como la función $f(x)= \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ es continua en $[0, 3)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = \infty$, entonces aplicamos la Definición 7.1 i) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\, dx &= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{3-x}}\, dx \\
&= \lim_{t\to 3^-} -2\sqrt{3-x}\Big|_0^t \\
&= \lim_{t\to 3^-} \Big(-2\sqrt{3-t} + 2\sqrt{3}\Big) = 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto esta integral impropia converge y su valor es $2\sqrt{3}$.

EJEMPLO 7.3. Determine si la siguiente integral impropia converge o diverge

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx.$$

Solución. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $(0,1]$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Aplicando la definición 7.1 ii) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx \\ &= \lim_{t\to 0^+} \ln|x|\Big|_t^1 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \Big(0 - \ln t\Big) = \infty.\end{aligned}$$

Como el límite no es finito la integral impropia es divergente.

Ejemplo 7.4. Determine la convergencia o divergencia de

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx.$$

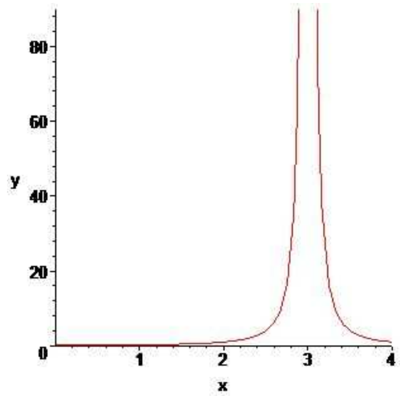


Figura 9. $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ en el intervalo $[0,4]$.

Solución. El integrando $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ no está definido en $x = 3$, es continuo en $[0,3)\bigcup(3,4]$, y además $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty$. Aplicamos entonces la Definición 7.1 iii) con $c = 3$ y obtenemos

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx.$$

Para estudiar la primera integral del lado derecho usamos la Definición 7.1 i):

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx &= \lim_{t\to 3^-}\int_0^t \frac{1}{(x-3)^2}\,dx\\ &= \lim_{t\to 3^-} \frac{-1}{x-3}\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to 3^-}\Big(\frac{-1}{t-3}-\frac{1}{3}\Big)=\infty,\end{aligned}$$

como el límite no es finito esta integral impropia diverge y por lo tanto la integral impropia planteada al comienzo también es divergente.

Ejemplo 7.5. Determine para qué valores positivos de p la siguiente integral es convergente

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}.$$

Solución. En el Ejemplo 8.3 vimos que si $p=1$ la integral es divergente, así que supongamos $p>0$ y $p\neq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1-p}\Big(1-\frac{1}{t^{p-1}}\Big).\end{aligned}$$

Si $p>1$, entonces $p-1>0$ y así $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{p-1}}=\infty$, en consecuencia la integral diverge.

Si $0<p<1$, entonces $p-1<0$ y así $\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{p-1}}=0$, por lo tanto

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{1-p} \qquad \text{si } 0<p<1.$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \;\text{ es convergente si } 0<p<1 \text{ y divergente si } \; p\geq 1.}$$

Finalmente, es posible combinar integrales impropias de tipo I y II. En este caso partimos la integral en suma de integrales de tipo I o II, y decimos que la integral original es **convergente** si todas las integrales impropias involucradas lo son.

Ejemplo 7.6. Analice si es convergente la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx.$$

Solución. Aquí, un límite de integración es infinito, además la función $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/3}}$ no está definida en $x = 0$ y cumple $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{1/3}} = -\infty$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx + \int_{1}^{0} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx, \tag{7.1}$$

donde la primera integral impropia del lado derecho es de tipo I y la segunda es de tipo II. Si estas dos integrales convergen, entonces la integral del miembro de la izquierda de (7.1) será convergente.

Usando la Definición 6.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx &= \lim_{s\to-\infty} \int_{s}^{1} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx \\
&= \lim_{s\to-\infty} \frac{3}{2}\, x^{2/3}\Big|_{s}^{1} \\
&= \lim_{s\to-\infty} \frac{3}{2}\left(1 - s^{2/3}\right) = -\infty,
\end{aligned}$$

luego esta integral diverge, y por lo tanto, la integral impropia del miembro de la izquierda de (7.1) también es divergente.

Ejemplo 7.7. Analice la convergencia de la siguiente integral:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

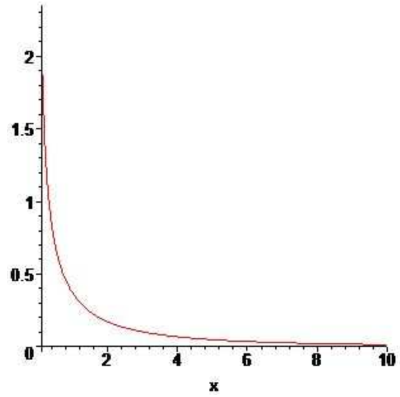


Figura 10. $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[0, \infty)$.

Solución. El integrando no está definido en $x = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty$, además un límite de integración es infinito. Entonces

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \tag{7.2}$$

donde en el miembro de la derecha, la primera integral impropia es de tipo II y la segunda es de tipo I. Como ya dijimos, si estas dos integrales convergen entonces la integral del miembro de la izquierda será convergente.

Observemos que usando la sustitución $u = \sqrt{x}$ obtenemos que $-2e^{-\sqrt{x}}$ es una primitiva del integrando.

Ahora aplicamos la Definición 7.1 ii),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{s \to 0^+} \int_s^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{s \to 0^+} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_s^1 \\
&= \lim_{s \to 0^+} (-2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{s}}) \\
&= -2\,e^{-1} + 2,
\end{aligned}$$

luego esta integral converge. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty} (-2e^{-\sqrt{t}} + 2e^{-1}) \\ &= 2e^{-1},\end{aligned}$$

y por lo tanto esta integral también converge.

Como las dos integrales del miembro de la derecha de (7.2) convergen, entonces la del miembro de la izquierda también converge.

8. Criterio de comparación para integrales impropias

A veces resulta difícil y hasta imposible encontrar el valor exacto de una integral impropia y sin embargo es importante saber si es convergente o divergente. En tales casos son útiles los teoremas que enunciaremos a continuación.

Teoremas de comparación para integrales de tipo I

Teorema 8.1. *Supongamos que f y g son funciones continuas que satisfacen $|f(x)| \leq g(x)\ \ \forall\, x \in [a, \infty)$.*

Si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ es convergente, o equivalentemente,

si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ es divergente.

Teorema 8.2. *Supongamos que f y g son funciones continuas que satisfacen $|f(x)| \leq g(x)\ \ \forall\, x \in (-\infty, a]$.*

Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ es convergente, o equivalentemente,

si $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} g(x)dx$ es divergente.

Teoremas de comparación para integrales de tipo II.

Teorema 8.3. *Supongamos que f y g son funciones continuas en $[a,b)$ que satisfacen $|f(x)| \leq g(x)\ \ \forall\, x \in\ [a,b)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$.*

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente, o equivalentemente,

si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ es divergente.

Teorema 8.4. *Supongamos que f y g son funciones continuas en $(a,b]$ que satisfacen $|f(x)| \leq g(x)\ \ \forall\, x \in\ (a,b]$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.*

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es convergente, o equivalentemente,

si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ es divergente.

Observemos que si en estos teoremas la función f cumple $f(x) \geq 0$, la hipótesis $|f(x)| \leq g(x)$ se convierte en $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Ejemplo 8.5. Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

Solución. No se puede evaluar la integral directamente porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental. Comencemos escribiendo

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx, \tag{8.1}$$

y observemos que la primera integral del miembro de la derecha es una integral definida. Para analizar la segunda integral, notemos que como $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, luego $-x^2 \leq -x$ y por lo tanto $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Además,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx \\ &= \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.\end{aligned}$$

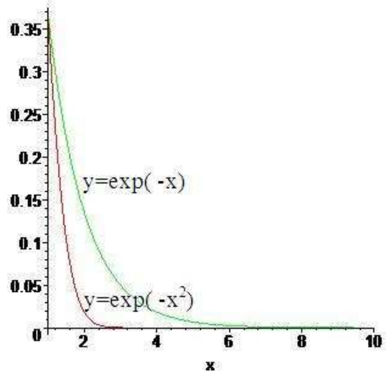


FIGURA 11. $y = e^{-x^2}$ e $y = e^{-x}$ en el intervalo $[1, \infty)$.

Ahora, usando el Teorema 8.1 con $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$ obtenemos que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ es convergente. De aquí, usando (8.1) resulta que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}$ es convergente.

EJEMPLO 8.6. Demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente.

Solución. Como $\dfrac{1+e^{-x}}{x} > \dfrac{1}{x} > 0$, $\forall\ x \in [1, \infty)$ y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ es divergente por el Ejemplo 6.5, entonces usando el Teorema 8.1 con $g(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{x}$ y $f(x) = \dfrac{1}{x}$, obtenemos que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente.

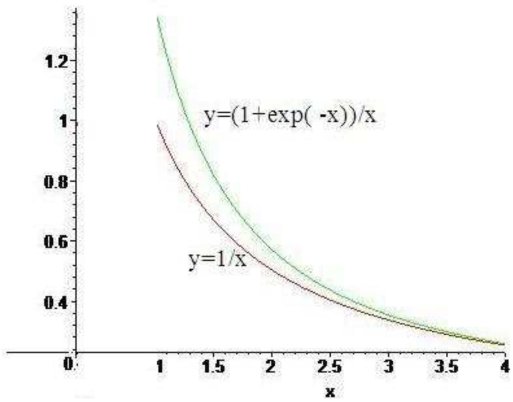


FIGURA 12. $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{1+e^{-x}}{x}$ en el intervalo $[1, \infty)$.

9. Integración por partes

A cada regla de derivación corresponde un método de integración. Por ejemplo, como ya dijimos, el método de sustitución de la integración corresponde a la regla de la cadena de la derivación. El que corresponde a la regla del producto es el método de integración por partes.

TEOREMA 9.1. *(Integración por partes).*
Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{9.1}$$

PRUEBA. Por la regla de derivación del producto tenemos

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

o equivalentemente

$$f(x)g'(x) = (fg)'(x) - f'(x)g(x).$$

Integrando, obtenemos entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = \int (fg)'(x)dx - \int f'(x)g(x)dx,$$

y como fg es una antiderivada de $(fg)'$, incluyendo la constante en la otra integral del mismo miembro, resulta

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx,$$

como queríamos demostrar.

$\square$

La fórmula (9.1) se llama **fórmula de integración por partes**. Tal vez resulte más fácil recordarla usando la siguiente notación. Sean

$$u = f(x) \qquad \text{y} \qquad v = g(x)$$

entonces

$$du = f'(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad dv = g'(x)\,dx,$$

y así, la fórmula de integración por partes se convierte en

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \tag{9.2}$$

La finalidad de expresar la $\int u\,dv$ en términos de otra integral, $\int v\,du$, es conseguir que la segunda integral sea más fácil de hallar que la primera.

Ejemplo 9.2. Evalúe $\displaystyle\int x\,e^{-x}dx$.

Solución. (Usando la fórmula (9.1)). Sean

$$f(x) = x, \quad g'(x) = e^{-x},$$

entonces

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = -e^{-x}.$$

De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}\int x\,e^{-x}\,dx &= f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx\\ &= x\,(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx\\ &= -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -x\,e^{-x} - e^{-x} + c.\end{aligned}$$

Solución. (Usando la fórmula (9.2)). Sean

$$u = x, \quad dv = e^{-x}\,dx,$$

entonces

$$du = 1, \quad v = -e^{-x}.$$

De esta manera resulta

$$\begin{aligned}\int x\,e^{-x}\,dx &= uv - \int v\,du\\ &= x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})\,dx\\ &= -x\,e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\\ &= -x\,e^{-x} - e^{-x} + c.\end{aligned}$$

Observemos que si en el Ejemplo 9.3 elegimos

$$u = e^{-x}, \quad dv = x\,dx$$

entonces

$$du = -e^{-x}\,dx, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

De esta manera tenemos

$$\begin{aligned}
\int x\, e^{-x}\, dx &= u\, v - \int v\, du \\
&= e^{-x}\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}(-e^{-x})\, dx \\
&= e^{-x}\,\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x}\, dx,
\end{aligned}$$

pero la integral $\int x^2\, e^{-x}\, dx$ es más difícil de evaluar que la inicial. Entonces esta elección de u y dv no es adecuada. En general, al decidir la elección de u y dv conviene tener en cuenta:

(i) Elegir como u una función cuya derivada sea una función más sencilla.

(ii) Elegir dv de manera que se pueda integrar fácilmente.

(iii) Ver que la nueva integral sea más fácil de evaluar que la primera.

Ejemplo 9.3. Halle $\int \ln x\, dx$.

Solución. Sean

$$u = \ln x, \qquad dv = dx,$$

entonces

$$du = \frac{1}{x}\, dx, \qquad v = x.$$

Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \ln x\, dx &= x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx \\
&= x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x + c.
\end{aligned}$$

Ejemplo 9.4. Evalúe $\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$.

Solución. Sean

$$u = x^2, \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx,$$

entonces

$$du = 2x\, dx, \qquad v = -\cos\, x.$$

Integrando por partes resulta

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx &= x^2(-\cos\, x) - \int (-\cos\, x)2\, x\, dx\\ &= -x^2\, \cos\, x + 2\int x\, \cos\, x\, dx.\end{aligned}$$

La integral que hemos obtenido, $\int x\, \cos\, x\, dx$, es más sencilla que la inicial pero todavía no es inmediata. Entonces utilicemos integración por partes por segunda vez. Sean

$$\bar{u} = x, \qquad d\bar{v} = \cos\, x\, dx,$$

entonces

$$d\bar{u} = dx, \qquad \bar{v} = \operatorname{sen} x.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned}\int x\, \cos\, x\, dx &= x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx\\ &= x \operatorname{sen} x + \cos\, x + \bar{c},\end{aligned}$$

y de todo esto concluimos

$$\begin{aligned}\int x^2\, sen\, x\, dx &= -x^2\, \cos\, x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos\, x + \bar{c})\\ &= -x^2\, \cos\, x + 2x \operatorname{sen} x + 2\, \cos\, x + c,\end{aligned}$$

donde $c = 2\bar{c}$.

Ejemplo 9.5. Determine $\int e^x\, \cos\, x\, dx$.

Solución. Sean

$$u = \cos\, x, \qquad dv = e^x\, dx,$$

entonces

$$du = -\operatorname{sen} x\, dx, \qquad v = e^x.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int e^x\, \cos\, x\, dx &= e^x\, \cos\, x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)dx\\ &= e^x\, \cos\, x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.\end{aligned} \tag{9.3}$$

La integral de la derecha es similar a la original, excepto que tiene $\operatorname{sen} x$ en vez de $\cos\, x$. Aplicamos nuevamente integración por partes con

$$\bar{u} = \operatorname{sen} x, \qquad d\bar{v} = e^x\, dx,$$

entonces

$$d\bar{u} = \cos\, x\, dx, \qquad \bar{v} = e^x.$$

De esta manera resulta

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos\, x\, dx. \tag{9.4}$$

Usando (9.3) y (9.4) obtenemos

$$\int e^x \cos\, x\, dx = e^x \cos\, x + (e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos\, x\, dx).$$

Como la integral del lado derecho es igual a la de la izquierda, sumando a ambos miembros $\int e^x \cos\, x\, dx$, tenemos

$$2\int e^x \cos\, x\, dx = e^x \cos\, x + e^x \operatorname{sen} x.$$

Finalmente, multiplicando por $\frac{1}{2}$ y sumando c para tener todas las primitivas, concluimos que

$$\int e^x \cos\, x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x\, (\cos\, x + \operatorname{sen} x) + c.$$

10. Integración por fracciones simples

Se llama *función racional* al cociente de dos polinomios, como por ejemplo $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$. A la hora de integrar, es claro que algunas de ellas son más "simples" que otras. Por ejemplo,

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \qquad\qquad \int \frac{3}{(x-2)^2}\, dx = -\frac{3}{(x-2)} + c$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\, dx = \ ? \qquad\qquad \int \frac{x^3-1}{x^4+x^2-1}\, dx = \ ?$$

Nuestra meta será entonces en esta sección, dar un método para integrar funciones racionales. La idea es descomponer una función racional en una suma de funciones racionales más simples que efectivamente sepamos integrar. Por ello este método recibe el nombre de *descomposición en fracciones parciales (o simples).* Para empezar, notemos que dadas dos (o más) expresiones racionales, sabemos combinarlas para obtener una sola expresión sumando o sacando factor común. Por ejemplo,

$$\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-3} = \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}. \tag{10.1}$$

Buscamos entonces alguna clase de proceso inverso, pues si bien en principio no sabríamos calcular $\displaystyle\int \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}\,dx$, como ya dijimos, sí sabemos integrar cada término del lado izquierdo de la ecuación (10.1).

Comencemos entonces introduciendo algunos resultados sobre polinomios que necesitaremos usar más adelante.

Dados $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, diremos que un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$ tiene *grado* n si $a_n \neq 0$, y que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una *raíz* de p si $p(\alpha) = 0$.

Notemos que un polinomio de grado 1, $p(x) = bx + c$, $b \neq 0$, tiene una sola raíz $\alpha = -\frac{c}{b}$ y además $p(x) = b(x - (-\frac{c}{b}))$. Si en cambio tomamos un polinomio de grado 2, $p(x) = ax^2 + bx + c$, tiene raíces reales si

$$d = b^2 - 4ac \geq 0. \tag{10.2}$$

En el caso $d > 0$, se tiene que

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \tag{10.3}$$

donde las raíces α_1 y α_2 están dadas por la fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando $d = 0$ estas raíces coinciden y $p(x) = a(x - \alpha_1)^2$. Luego, si el polinomio es de grado 2 puede tener dos raíces reales distintas, una raíz “doble”, o ninguna raíz real.

Tenemos entonces que, para $n = 1$ y 2, un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces, y más aún, si tiene raíces reales se lo puede escribir como un producto de factores de la forma $(x-\alpha)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de p. Diremos que un polinomio es *irreducible* si tiene grado uno o es de grado dos y no tiene raíces reales.

Este resultado se generaliza en el siguiente

Teorema 10.1. *Todo polinomio de grado $n > 0$, $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$, se puede escribir como un producto de polinomios irreducibles. Es decir,*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \ldots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{s_1} \ldots (x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{s_l} \tag{10.4}$$

donde $r_1 + \cdots + r_k + 2(s_1 + \cdots + s_l) = n$.

Notemos que si en (10.4) se agrupan todos los términos iguales, se puede suponer que $\alpha_i \neq \alpha_j$, y que los factores cuadráticos son distintos e irreducibles (sin raíces), pues si tienen raíces se los puede descomponer como explicamos arriba. Observemos también que en este teorema $a_n = 1$. Llamaremos *mónico* a un polinomio cuyo *coeficiente director* a_n, es igual a uno. En caso de no tener un polinomio mónico, se procede sacando a a_n como factor común en la expresión del polinomio, y se tiene

$$p(x) = a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} x^1 + \frac{a_0}{a_n} \right) = a_n\, q(x), \tag{10.5}$$

donde $q(x)$ es mónico y se le puede aplicar el teorema.

Ejemplos 10.2.

1. $x^2 + 2x - 3 = (x - (-3))(x - 1) = (x + 3)(x - 1)$, pues

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow \ \frac{2}{2} = 1 \\ \searrow \ -\frac{6}{2} = -3 \end{array}$$

2. $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ tiene una sola raíz doble, o que se repite.
3. $x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$.
4. $3x^3 + 4x = 3x(x^2 + \frac{4}{3})$ pues $x^2 + \frac{4}{3}$ es irreducible.

Nota: Cabe aclarar que la definición de raíz puede darse en el contexto más general de los números complejos (ver Apéndice 1) pero en nuestro contexto estamos interesados sólo en las raíces reales.

Tomemos entonces dos polinomios p y q de grados n y m respectivamente y consideremos la función racional $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Inspirado en los números racionales, si $n < m$, esta expresión se dice *propia*. Si $n \geq m$ se puede simplificar el cociente, realizando efectivamente la división. Así, si $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $n \geq m$, dividimos. Por el *algoritmo de la división de polinomios,* $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ donde $s(x)$ es un polinomio y $r(x)$ es el polinomio nulo (en el caso de que $q(x)$ divida a $p(x)$) o es un polinomio de grado menor que el grado de $q(x)$. Así, reemplazando $p(x)$ en $h(x)$, obtenemos

$$h(x) = \begin{cases} s(x), & \text{si } r(x) \equiv 0, \\ s(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}, & \text{si } r(x) \not\equiv 0, \end{cases}$$

donde $s(x)$ es un polinomio y $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ es una función racional propia. Por ejemplo

$$\frac{x^4 - 10x^2 + 3x + 1}{x^2 - 4} = x^2 - 6 + \frac{3x - 23}{x^2 - 4}.$$

Luego, a efectos de integrar, nos basta con dar un método para integrar funciones racionales propias, $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Además si $q(x)$ no es mónico, sacando factor común como en (10.5), $q(x) = b\, q_1(x)$, obtenemos $h(x) = \dfrac{1}{b} \dfrac{p(x)}{q_1(x)}$.

Partimos entonces de una función racional $h(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con grado de p menor que grado de q, y $q(x)$ un polinomio mónico. La idea, como ya dijimos, es descomponer esta función en una suma de funciones racionales más simples que efectivamente sepamos integrar. Lo que sucede es que esta descomposición depende de las raíces de q. En efecto, dividiremos el estudio en cuatro casos:

Caso 1. $q(x)$ es producto de factores lineales todos diferentes. Es decir,

$$q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r) \qquad \alpha_i \neq \alpha_j$$

Esto es equivalente a que en (10.4), $r_i = 1$, $\forall i$ y $s_j = 0$, $\forall j$.

Caso 2. $q(x)$ es producto de factores lineales todos iguales. Es decir,

$$q(x) = (x - \alpha)^r$$

Esto es equivalente a que en (10.4), $k = 1$, y $s_j = 0$, $\forall j$.

Caso 3. En este caso, $q(x)$ es producto de polinomios de grado uno y dos, y ninguno de los de grado dos se repite. Es decir,

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1) \dots (x^2 + \beta_l x + \gamma_l).$$

Esto es equivalente a que en (10.4), $s_j = 1$, $\forall j$.

Caso 4. Por último consideramos aquí el caso general, en el que el denominador de la función racional $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es producto de factores lineales y cuadráticos, donde tanto los lineales como los cuadráticos pueden repetirse.

En lo que sigue estudiaremos cada caso por separado enunciando el resultado y luego mostrando cómo aplicarlo para integrar.

Caso 1. El denominador $q(x)$ se descompone en producto de polinomios de grado 1,

$$q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_r) \qquad \alpha_i \neq \alpha_j.$$

En este caso se puede demostrar que existen constantes $A_1, \dots, A_r$, a determinar, tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \dots + \frac{A_r}{x - \alpha_r}.$$

Es claro que para usar este resultado, el primer paso es encontrar las raíces de q. Una vez obtenidas, el siguiente paso es encontrar las constantes que nos da la descomposición, y finalmente integrar. Miremos algunos ejemplos,

Ejemplo 10.3. Calculemos

$$\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\, dx.$$

Como ya dijimos, el primer paso es calcular las raíces del denominador para factorizarlo: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$. Luego, según el *Caso 1*, existen $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)} &= \frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-3} \\ &= \frac{A_1(x-3)+A_2(x+2)}{(x+2)(x-3)}. \end{aligned}$$

Pero esta igualdad vale si y sólo si

$$7x-1 = A_1(x-3)+A_2(x+2). \tag{10.6}$$

Como ésta es una igualdad de polinomios, estos deben ser iguales coeficiente a coeficiente. Es decir que como

$$A_1(x-3)+A_2(x+2) = (A_1+A_2)x+(-3A_1+2A_2),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A_1+A_2 &= 7 && \text{(son los coeficientes correspondientes a } x\text{)} \\ -3A_1+2A_2 &= -1 && \text{(son los coeficientes correspondientes al término independiente)} \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas obtenemos $A_1 = 3$ y $A_2 = 4$, es decir

$$\frac{7x-1}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-3}$$

como en (10.1).

Otra forma de encontrar A_1 y A_2 una vez planteada la ecuación

$$7x-1 = A_1(x-3)+A_2(x+2), \tag{10.7}$$

es evaluar en un x conveniente que simplifique la ecuación en el sentido de que elimine alguna variable. En este caso, sustituyendo por $x=3$, obtenemos la ecuación,

$$20 = 5\,A_2 \qquad \text{con lo cual} \qquad A_2 = 4.$$

Con esta sustitución nos independizamos de A_1. Si, en cambio reemplazamos $x = -2$ en (10.7), obtenemos

$$-15 = -5A_1 \qquad \text{lo que nos da} \qquad A_1 = 3.$$

Ahora podemos finalmente integrar, pues

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-1}{(x+2)(x-3)}\,dx &= \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx \\ &= 3\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + c. \end{aligned}$$

Ejemplo 10.4. Consideremos ahora

$$\int \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx$$

Sabiendo que

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$$

(ver Ejemplo 10.2 1.) nuestro resultado nos dice que existen A_1, A_2 tales que

$$\frac{x}{(x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+3}.$$

Si resolvemos la suma del lado derecho de esta igualdad, tenemos que

$$x = (A_1 + A_2)x + (3A_1 - A_2), \tag{10.8}$$

y por lo tanto,

$$(A_1 + A_2) = 1, \qquad (3A_1 - A_2) = 0.$$

De aquí (sumando las ecuaciones por ejemplo), deducimos que

$$A_1 = \frac{1}{4} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad A_2 = \frac{3}{4}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x-1)(x+3)}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x+3}\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x+3}\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\ln|x-1| + \tfrac{3}{4}\ln|x+3|. \end{aligned}$$

Notemos que para encontrar A_1 y A_2 podemos evaluar primero la ecuación (10.8), en

$$x = 1, \text{ que nos da} \qquad 1 = A_1(1+3) \quad \Rightarrow A_1 = \tfrac{1}{4}, \text{ y en}$$

$$x = -3, \text{ que nos da } \ -3 = A_2(-4) \quad \Rightarrow A_2 = \tfrac{3}{4}.$$

<u>*Caso 2.*</u> Recordemos que aquí, el denominador $q(x)$ es de la forma

$$q(x) = (x - \alpha)^r.$$

En este caso, se tiene que existen $A_1, \ldots, A_r$ tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}.$$

EJEMPLO 10.5. Calculemos

$$\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\, dx.$$

Buscamos entonces constantes A_1, A_2, A_3, tales que

$$\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3}.$$

Sacando común denominador y usando que los numeradores deben ser iguales, obtenemos que

$$\begin{aligned} -2x+1 &= A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3 \\ &= A_1(x^2+4x+4) + A_2 x + (2A_2 + A_3) \\ &= A_1 x^2 + (4A_1 + A_2)x + (4A_1 + 2A_2 + A_3). \end{aligned} \tag{10.9}$$

Igualando los coeficientes de estos dos polinomios llegamos a las ecuaciones

$$A_1 = 0, \qquad 4A_1 + A_2 = -2 \qquad \text{y} \qquad 4A_1 + 2A_2 + A_3 = 1,$$

y por lo tanto,

$$A_1 = 0,\ A_2 = -2,\ \text{y}\ A_3 = 5.$$

Notemos que podríamos haber reemplazado en la primera ecuación de (10.9), $x = -2$. Esto dice inmediatamente que $A_3 = 5$, y luego seguimos el cálculo como arriba para encontrar A_1 y A_2.

Volviendo a nuestra integral, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\, dx &= \int \frac{-2}{(x+2)^2}\, dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\, dx \\ &= -2\int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3}\, dx. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Para calcular estas dos integrales, usaremos la sustitución $u = x + 2$. En efecto, si $u = x+2$, $du = dx$, vale

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx &= \int \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{u^{-1}}{-1} + c_1 \\ &= -\frac{1}{(x+2)} + c_1. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene que

$$\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c_2.$$

Finalmente, si reemplazamos esto en la ecuación (10.10), concluimos que

$$\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = 2\frac{1}{(x+2)} - \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c.$$

En este momento podemos combinar estos dos casos para calcular integrales de funciones racionales donde el denominador sólo es producto de polinomios de grado uno (algunos de los cuales pueden repetirse). En este caso, la función racional se descompone en suma de fracciones simples, **una por cada factor que no se repite** y r **por cada factor que se repite** r **veces** (o que está elevado a la r), de acuerdo a cada uno de los casos que ya vimos. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10.6. Empecemos calculando

$$\int \frac{x^2+4x+18}{x(x+3)^2}\,dx$$

Para descomponer esta función racional en fracciones simples, notemos que en el polinomio $q(x) = x(x+3)^2$ el factor x no se repite y el factor $(x+3)$ se repite dos veces. Luego,

$$\frac{x^2+4x+18}{x(x+3)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+3)} + \frac{A_3}{(x+3)^2},$$

es decir que a x le corresponde un término y a $(x+3)$, dos. Es fácil ver, siguiendo los pasos que ya mencionamos en el ejemplo anterior, que

$$A_1 = 2, \qquad A_2 = -1, \qquad \text{y} \qquad A_3 = -5.$$

Por lo tanto, la integral que queríamos calcular nos quedó expresada como

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+4x+18}{x(x+3)^2}\,dx &= \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-1}{(x+3)}\,dx + \int \frac{-5}{(x+3)^2}\,dx \\
&= 2\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{(x+3)}\,dx + -5\int \frac{1}{(x+3)^2}dx \\
&= 2\ln|x| - \ln|x+3| + \tfrac{5}{(x+3)} + c.
\end{aligned}$$

Ejemplo 10.7. Consideremos finalmente,

$$\int \frac{7x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)(x+5)^3}\,dx.$$

En este caso, de acuerdo a lo que dijimos, se tiene que

$$\frac{7x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)(x+5)^3} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+2)} + \frac{A_3}{(x+5)} + \frac{A_4}{(x+5)^2} + \frac{A_5}{(x+5)^3},$$

para algunos constantes A_i, $1 \leq i \leq 5$. Queda como ejercicio para el lector determinar dichas constantes y calcular el valor de la integral.

Resumiendo: Notemos que en todos los ejemplos, una vez planteada la igualdad que asegura el enunciado, se saca denominador común en el miembro que corresponde a las fracciones simples, obteniendo así una igualdad de dos funciones racionales que tienen el mismo denominador. Por lo tanto deben tener el mismo numerador, que del lado izquierdo es $p(x)$ y del derecho es un polinomio cuyos coeficientes están en términos de las constantes a determinar.

Al igualar entonces los coeficientes de estos dos polinomios, obtenemos ecuaciones en estas constantes, que las determinan completamente. Algunas veces, a la hora de resolver estas ecuaciones, conviene primero simplificar un poco la ecuación eligiendo algún x conveniente (que serían las raíces de $q(x)$). Este procedimiento, como veremos a continuación, se aplica en general.

Caso 3 . Corresponde a la situación en la cual el denominador $q(x)$ de la función racional a integrar es producto de polinomios irreducibles de grado uno y dos y ninguno de los de grado dos se repite. En esta situación, $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se escribe como una suma, donde por cada uno de los factores cuadráticos de $q(x)$ aparece un término de la forma

$$\frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma},$$

y los términos lineales son tratados como en el *Caso 2*. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10.8. Consideremos

$$\frac{2x^2+5}{x^4+x^2} = \frac{2x^2+5}{x^2(x^2+1)}.$$

Observemos que x^2+1 no tiene raíces reales, por lo tanto nuestra función racional corresponde al *Caso 3*, ya que tiene factores cuadráticos irreducibles, pero no se repiten. Así,

$$\frac{2x^2+5}{x^4+x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Sacando común denominador en el lado izquierdo de esta igualdad e igualando los numeradores, es fácil ver que $A_1 = 0$, $A_2 = 5$, $B = 0$ y $C = -3$. Finalmente tenemos que

$$\frac{2x^2+5}{x^4+x^2} = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^2+1}.$$

Como en los casos anteriores, nuestra intención es utilizar esta nueva forma de escribir una función racional como suma de funciones racionales más simples, para poder integrar. Como los sumandos correspondientes a los factores cuadráticos del denominador de nuestra función racional son de la forma

$$\frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma},$$

estudiaremos primero algunos casos sencillos de integrales de funciones racionales de esta forma. Estos ejemplos desarrollan además técnicas generales para resolver este tipo de integrales.

Ejemplos 10.9.

1. Consideremos primero el ejemplo más sencillo, es decir $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Sabemos que

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan(x) + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{10.11}$$

2. Calculemos ahora $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$. Observemos que el denominador no tiene racices reales. Nuestro objetivo será entonces escribir el denominador de esta función racional de la siguiente forma:

$$x^2+x+1 = k(u^2+1),$$

donde k es una constante a determinar y u es una función de x.

Como primer paso completamos cuadrados en el denominador, o sea

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (x+\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} + 1 \\ &= (x+\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

Sacando factor común $\frac{3}{4}$, tenemos

$$x^2+x+1 = \tfrac{3}{4}\left[\tfrac{4}{3}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + 1\right].$$

Finalmente, si pensamos que $\frac{4}{3} = (\frac{2}{\sqrt{3}})^2$,

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \tfrac{3}{4}\left[(\tfrac{2}{\sqrt{3}})^2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+1\right] \\ &= \tfrac{3}{4}\left[\left((\tfrac{2}{\sqrt{3}})(x+\tfrac{1}{2})\right)^2+1\right] \\ &= \tfrac{3}{4}\left[\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}})x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]. \end{aligned}$$

Ahora integremos,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{1}{\tfrac{3}{4}\left[\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\,dx \\ &= \tfrac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,x+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\,dx, \end{aligned}$$

haciendo la sustitución $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \tfrac{4}{3}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(u)+c \\ &= \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\arctan(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\,x+\tfrac{1}{\sqrt{3}})+c, \end{aligned}$$

donde c es una constante.

3. Estudiemos ahora $\displaystyle\int \frac{7x+2}{x^2+x+1}\,dx$. Queremos llevarla a la forma

$$\int \frac{7x+2}{x^2+x+1}\,dx = k_1\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + k_2\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx, \tag{10.12}$$

donde k_1 y k_2 son constantes a determinar. Observemos que en la primera integral del lado derecho de (10.12), el numerador corresponde a la derivada del denominador, luego se puede calcular usando la sustitución $u = x^2 + x + 1$. La segunda integral es la que resolvimos en el ejemplo anterior.

Notemos que si queremos que k_1 y k_2 sean tales que

$$k_1(2x+1)+k_2 = 7x+2,$$

entonces, igualando coeficientes en ambos polinomios tenemos que $2k_1 = 7$ y $k_1 + k_2 = 2$. Resolviendo este sistema, tenemos que $k_1 = 7/2$ y $k_2 = -3/2$. Así,

$$\int \frac{7x+2}{x^2+x+1}\,dx = (7/2)\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - (3/2)\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

La integral que queríamos calcular quedó expresada como dos integrales que sabemos resolver. Completar los detalles queda a cargo del lector.

Veamos ahora un ejemplo donde combinaremos el *Caso 3* de fracciones simples y las técnicas desarrolladas en los ejemplos anteriores.

EJEMPLO 10.10. Calculemos

$$\int \frac{x^2 - x - 21}{(2x-1)(x^2+4)}\, dx.$$

La primera observación es que el denominador de esta función racional no es mónico. Pero $(2x-1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Reemplazando en la integral tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - x - 21}{(2x-1)(x^2+4)}\, dx &= \int \frac{x^2 - x - 21}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+4)}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+4)}\, dx. \end{aligned}$$

Calcularemos entonces $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+4)}\, dx$. Notemos que en el denominador del integrando tenemos un factor de grado uno y otro de grado dos que no se repite y no tiene raices reales. Por lo tanto estamos frente a un *Caso 3* de fracciones simples. Luego,

$$\frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+4)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{Bx + C}{x^2+4},$$

donde hay que determinar las constantes A, B y C. Sacando común denominador en el lado derecho e igualando los numeradores, es un ejercicio sencillo calcular que $A = -5$, $B = 6$ y $C = 2$. Así,

$$\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2+4)}\, dx = (-5)\int \frac{1}{x - \frac{1}{2}}\, dx + \int \frac{6x+2}{x^2+4}\, dx.$$

En la segunda integral del lado derecho tenemos una situación similar a la del Ejemplo 10.9.3. Por lo tanto, como la derivada del denominador en este caso es $2x$, queremos encontrar constantes k_1 y k_2 tales que

$$\frac{k_1(2x) + k_2}{x^2+4} = \frac{6x+2}{x^2+4},$$

de donde $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2+4)}\,dx &= (-5)\int \frac{1}{x - \dfrac{1}{2}}\,dx + 3\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx \\
&\qquad +2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \qquad (10.13)\\
&= (-5)\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + 3\ln|x^2+4| + 2\int \frac{1}{x^2+4}\,dx.
\end{aligned}$$

Nos falta calcular $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4}\,dx$, que es similar al Ejemplo 10.9.1. Como

$$x^2 + 4 = 4\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right) = 4\left(\left(\frac{1}{2}\,x\right)^2 + 1\right),$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+4}\,dx &= \int \frac{1}{4((\frac{1}{2}x)^2+1)}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{((\frac{1}{2}x)^2+1)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}\,x) + c.
\end{aligned}$$

Reemplazando en (10.13), tenemos

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2+4)}\,dx \\
&\quad = (-5)\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + 3\ln|x^2+4| + \arctan(\tfrac{1}{2}\,x) + c.
\end{aligned}$$

Volviendo a nuestra integral original, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - x - 21}{(2x-1)(x^2+4)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2 - x - 21}{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x^2+4)}\,dx \\
&= -\tfrac{5}{2}\ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + \tfrac{3}{2}\ln|x^2+4| + \tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}\,x) + c,
\end{aligned}$$

completando nuestro ejemplo.

Observación. El caso en que el denominador de la función racional a integrar tenga factores irreducibles de grado dos repetidos, se aplica lo que se conoce como *Caso 4* de fracciones simples, que no mencionaremos en este desarrollo pues está fuera del alcance de estas notas. El lector interesado en este caso podrá referirse a un libro de texto.

11. Sustitución trigonométrica

En esta sección aprenderemos una técnica que nos permite calcular integrales de la forma

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \qquad \text{con } a > 0. \tag{11.1}$$

Consideremos la sustitución $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)$ o equivalentemente

$$x = a \operatorname{sen} \theta, \qquad -\pi/2 < \theta < \pi/2$$

y

$$dx = a \cos\theta \, d\theta.$$

Así,

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - x^2} &= \sqrt{a^2 - (a \operatorname{sen} \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} \\ &= a\cos\theta. \end{aligned}$$

Usando esto para hacer la sustitución en (11.1) tenemos que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int (a\cos\theta)\, a\cos\theta\, d\theta \\ &= a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Por lo tanto nos basta con poder calcular $\int \cos^2\theta\, d\theta$. Para eso, recordemos que

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1,$$

y

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta).$$

Luego, sumando miembro a miembro tenemos que

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}. \tag{11.2}$$

Análogamente, restando miembro a miembro,

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}. \tag{11.3}$$

Usando (11.2) tenemos que

$$\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + c.$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= a^2 \int \cos^2\theta \, d\theta \\
&= \tfrac{a^2}{2}\left(\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right) + c \\
&= \tfrac{a^2}{2}\left[\operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{a}) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{a}))\right] + c.
\end{aligned} \tag{11.4}
$$

Ejemplo 11.1. Calculemos la integral $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$. En este caso $a = 2$, por lo tanto aplicando (11.4) tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx &= \left(\tfrac{4}{2}\left[\operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2}) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(\tfrac{x}{2}))\right] + c\right)\Big|_0^2 \\
&= 2\Big(\left[\operatorname{arcsen}(1) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(1))\right] \\
&\qquad - \left[\operatorname{arcsen}(0) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen}(0))\right]\Big) \\
&= \pi.
\end{aligned}
$$

Observación.

1. Para calcular integrales de la forma $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$, con $a > 0$, se puede usar la sustitución $x = a \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Así,

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2\theta)} = a\sec\theta.$$

reduciendo el cálculo de esta integral a la integral de la función $\sec^3\theta$.

2. Similarmente para calcular $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$ se puede usar la sustitución $x = a\sec\theta$, $0 < \theta < \pi/2$.

Sin embargo el cálculo de la integral de la función $\sec^3(x)$ con las sustituciones que ya conocemos es algo trabajosa. En la próxima sección estudiamos una sustitución que nos permite calcular integrales de funciones de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ de una manera más sencilla.

12. Sustitución hiperbólica

En esta sección aprenderemos una técnica que nos permite calcular

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx, \qquad \text{con } a > 0. \tag{12.1}$$

Para esto introducimos las llamadas funciones hiperbólicas, definidas de la siguiente manera:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ llamada } \textit{seno hiperbólico} \tag{12.2}$$

y

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ llamada } \textit{coseno hiperbólico}. \tag{12.3}$$

Es sencillo verificar usando la expresión de estas funciones en términos de la función exponencial que

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1, \tag{12.4}$$

y que sus derivadas son

$$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}(x) = \cosh(x) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \operatorname{senh}(x). \tag{12.5}$$

Volviendo a (12.1), como $\operatorname{senh}(x)$ es inversible, (por ser una función estrictamente creciente), consideremos la sustitución

$$\begin{aligned} x &= a\ \operatorname{senh}\ \theta \\ dx &= a\cosh\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Así, por (12.4) tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+x^2} &= \sqrt{a^2+(a\ \operatorname{senh}\ \theta)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1+\ \operatorname{senh}^2\theta)} \\ &= a\cosh\theta. \end{aligned}$$

Usando esto para hacer la sustitución en (12.1) tenemos en particular que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2+x^2}\, dx &= \int (a\cosh\theta)\, a\cosh\theta\, d\theta \\ &= a^2 \int \cosh^2\theta\, d\theta \\ &= a^2 \int \frac{e^{2\theta}+2+e^{-2\theta}}{4}\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{4}\left(\frac{e^{2\theta}}{2} + 2\theta - \frac{e^{-2\theta}}{2} + c\right) \\ &= \frac{a^2}{8}\left(e^{2\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right)} + 4\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right) - e^{-2\operatorname{arcsenh}\left(\frac{x}{a}\right)} + c\right), \quad \text{con } c\in\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12.7}$$

donde $\operatorname{arcsenh}(x)$ denota la función inversa del $\operatorname{senh}(x)$.

Ejemplo 12.1. Calculemos la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$. En este caso $a=1$, usando la sustitución (12.6) con $a=1$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(\theta)}}\cosh(\theta)\,d\theta \\
&= \int \frac{1}{\cosh(\theta)}\cosh(\theta)\,d\theta \\
&= \int d\theta \\
&= \theta + c \\
&= \operatorname{arcsenh}(x) + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}. \qquad (12.8)
\end{aligned}
$$

CAPíTULO 2

Ecuaciones diferenciales

1. Ecuaciones diferenciales y variables separables

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra una función incógnita y algunas de sus derivadas o diferenciales. Por ejemplo:

$$y' - 2x = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y^4} \tag{1.2}$$

$$y' = -2xy \tag{1.3}$$

$$2x^2y'' + xy' + \frac{1}{9}\,y = 0 \tag{1.4}$$

$$y'' + 2y' + y = e^x \tag{1.5}$$

Diremos que una función suficientemente diferenciable f es *solución* de una ecuación diferencial dada, si al reemplazar $y = f(x)$ y sus correspondientes derivadas en la ecuación, se satisface la identidad.

Así, por ejemplo, si consideramos $y = x^2$ es obvio que cumple que $y' = 2x$, por lo tanto decimos que y es solución de la ecuación (1.1).

También es fácil verificar reemplazando, que $y = (\frac{5}{6})^{1/5}x^{3/5}$ satisface la ecuación (1.2), luego y es solución de la misma.

El *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada de mayor grado que aparece en la ecuación.

Así (1.1), (1.2) y (1.3) son de orden uno o de primer orden, en tanto que (1.4) y (1.5) son de orden dos o de segundo orden.

Dada una ecuación diferencial, es fácil verificar, por simple inspección, que una función es solución de la misma. El problema que enfrentaremos en esta sección es más complicado: hallar todas las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales.

Para esto, comencemos con el tipo más sencillo de ecuación diferencial de primer orden que conocemos, es decir

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.6}$$

donde $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo I. Notemos que (1.1) es un ejemplo particular de esta situación.

Para encontrar todas las soluciones de (1.6),"buscamos todas las funciones y tales que su derivada sea la función f".

No por nada esta frase nos suena familiar. Básicamente el problema es encontrar todas las antiderivadas de f, tema del cual nos hemos ocupado en la primera parte de la materia. Recordemos que el Teorema 1.3 del Capítulo 1, relaciona todas las antiderivadas de una función dada.

Luego, integrando respecto de x en ambos miembros de (1.6) tenemos

$$\int y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Si F es una antiderivada de f, las soluciones de (1.6) son funciones $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forma

$$y(x) = F(x) + c \tag{1.7}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Esto nos da la *solución general* de la ecuación (1.6).

Ejemplo 1.1. Consideremos la ecuación (1.1), es decir $y' = 2x$. Por (1.7) tenemos que todas las soluciones de esta ecuación son de la forma

$$y(x) = x^2 + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Ver Figura 2.

Consideremos ahora otro tipo de ecuación diferencial de primer orden. Es la conocida por *ecuación diferencial de variables separables* y es de la forma

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}, \tag{1.9}$$

donde, g y h son continuas y h no se anula en su dominio. Ejemplos de este tipo de ecuaciones son las (1.2) y (1.3).

Formalmente se podría pensar a (1.9) como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad \text{ó bien}$$

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Notemos que el lado derecho de esta ecuación sólo incluye la variable x, en tanto que el izquierdo sólo involucra la variable $y = y(x)$. Así, las variables están "separadas" y de ahí su nombre: ecuación diferencial de variables separables.

Volviendo a (1.9), multipliquemos ambos miembros por $h(y)$, así,

$$h(y(x))\, y'(x) = g(x). \tag{1.11}$$

Ahora integramos respecto de x ambos miembros de (1.11) y tenemos

$$\int h(y(x))y'(x)dx = \int g(x)dx. \tag{1.12}$$

Sean H y G primitivas de h y g respectivamente. Luego usando el método de sustitución en la integral del lado izquierdo, obtenemos

$$H(y(x)) = G(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

(Notemos que podríamos haber considerado una constante c_1 en el lado derecho y otra constante c_2 en el lado izquierdo, pero se combinarían tomando $c = c_1 - c_2$ en el lado derecho). Los valores de c se mueven sobre todos los números reales para los cuales tiene sentido (1.13). Se deja como ejercicio para el lector verificar que si y satisface (1.13) para algún valor de c, entonces y es solución de (1.9).

Ahora, despejemos y si se puede (al menos en un intervalo lo suficientemente pequeño alrededor de un punto dado), y obtenemos la solución general de la ecuación (1.9).

Ejemplo 1.2. Consideremos la ecuación (1.2). Es decir $y' = \dfrac{x^2}{2y^4}$. Notemos que aquí, $g(x) = x^2$ y $h : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ es $h(y) = 2y^4$. Claramente es una ecuación diferencial de variables separables. Una primitiva de g, es $G(x) = \frac{1}{3}x^3$ y una de h es $H(y) = \frac{2}{5}y^5$. Por (1.13) tenemos que

$$\frac{2}{5}y^5(x) = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Así, despejando y tenemos que

$$y(x) = \sqrt[5]{\frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 + c\right]}.$$

Luego, ésta es la solución general de (1.2).

Ejemplo 1.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = 1 + y^2 - 2x - 2xy^2.$$

En principio no parece una ecuación de variables separables, pero notemos que podemos factorizar el segundo miembro como producto de una función de x por otra función de y. Más precisamente ,

$$y' = (1-2x)(1+y^2)$$

o equivalentemente,

$$\frac{y'(x)}{1+y^2(x)} = 1-2x.$$

Integrando ambos miembros en x, tenemos

$$\arctan(y(x)) = x - x^2 + c.$$

Despejando y, resulta que la solución general de nuestra ecuación es de la forma

$$y(x) = \tan(x - x^2 + c).$$

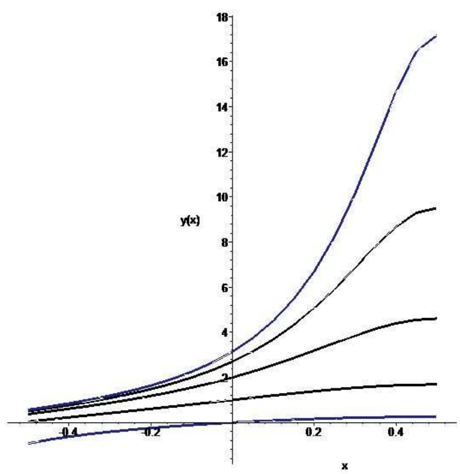


FIGURA 1. Algunas soluciones para distintos valores de c.

Notemos que la ecuación (1.7) y la (1.13) representan una familia de soluciones, una por cada constante c. Los gráficos de estas soluciones nos dan una familia de curvas que tiene la propiedad que por cada punto del plano pasa sólo una curva de la familia. Una *solución particular* de una ecuación es la solución que satisface una condición dada, digamos $y(x_0) = y_0$, llamada *condición inicial.* Veamos qué quiere decir esto en algunos de nuestros ejemplos.

EJEMPLO 1.4. Volvamos a la ecuación (1.1). En (1.8) calculamos su solución general. Notemos que para cada valor de c tenemos una curva distinta. Grafiquemos algunas de estas curvas para ciertos valores de c.

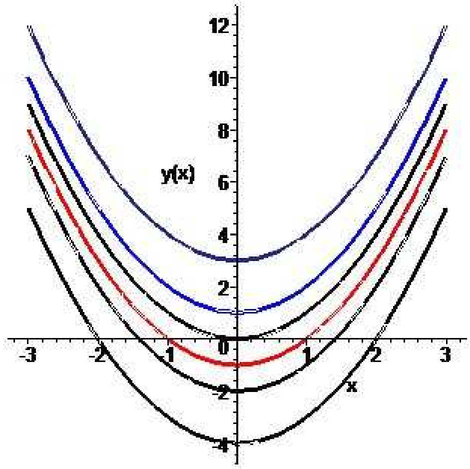


Figura 2. Soluciones particulares para $c = -4,\ -2,\ 0,\ 1,\ 3.$

La solución particular de la ecuación (1.1) que cumple la condición inicial $y(0) = 2$, es

$$y(x) = x^2 + 2$$

ya que $y(0) = 0^2 + c = 2$, de donde $c = 2$. Si la condición inicial dada es $y(3) = -\sqrt{2}$ tenemos que $3^2 + c = -\sqrt{2}$, y así $c = -\sqrt{2} - 9$. Luego la solución particular para esta condición inicial es

$$y(x) = x^2 - 9 - \sqrt{2}.$$

Ejemplo 1.5. Sea $\dfrac{dy}{dx} = y\, tg\, x$. Halle la solución general de esta ecuación y grafique soluciones para valores de $c = 1, 2$ y -1.

Primero consideremos que $y(x) \neq 0$ para x en algún intervalo. Separando las variables de nuestra ecuación, tenemos

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = tg\, x,$$

e integrando

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx &= \int tg\, x\, dx \\
\ln|y(x)| &= -\ln|\cos\, x| + c_1 \\
|y(x)| &= e^{-\ln|\cos\, x| + c_1} \\
|y(x)| &= e^{\ln(|\cos\, x|^{-1})} e^{c_1} \\
|y(x)| &= \frac{c}{|\cos\, x|}, \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

donde $c = e^{c_1}$ es una constante positiva. Si $y(x)$ es positiva (al menos para x en algún intervalo), $y(x) = \dfrac{c}{|\cos x|}$ para $c > 0$. Si $y(x)$ es negativa, entonces $y(x) = \dfrac{c}{|\cos x|}$ para $c < 0$.

El caso $c = 0$ corresponde a $y \equiv 0$, y es fácil verificar que es solución de nuestra ecuación. Por lo tanto

$$y(x) = \frac{c}{|\cos x|}$$

con $c \in \mathbb{R}$ es la solución general de la ecuación. Veamos los gráficos de las soluciones para los valores de $c = 1, 2$ y -1.

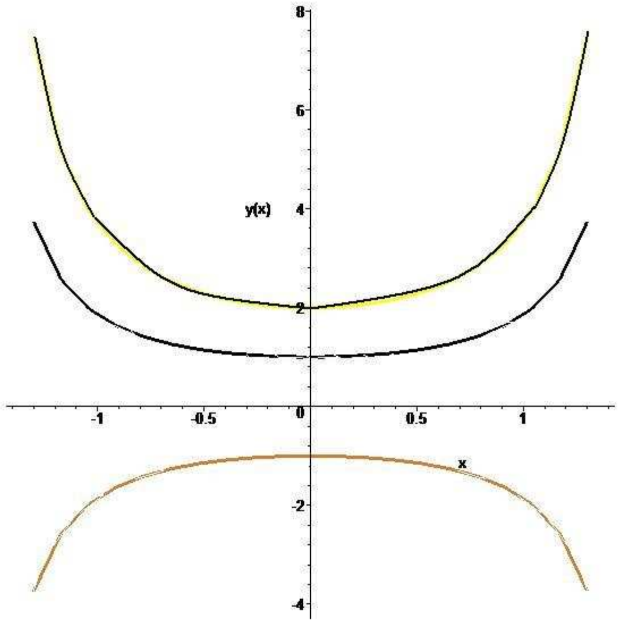


Figura 3. Soluciones particulares para $c = -1,\ 2,\ 1$.

2. Aplicaciones

Sean $\alpha, k \in \mathbb{R}$, fijos. Consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = k(y - \alpha). \tag{2.1}$$

Esta es una ecuación de variables separables que ya hemos resuelto en el caso $\alpha = 0$ (Ver Sección 1, Cap. 2). Supongamos que $y(x) \neq \alpha$ en algún intervalo. Separando las variables, tenemos

$$\frac{y'(x)}{y(x) - \alpha} = k,$$

e integrando en ambos miembros respecto de x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)-\alpha}\,dx = \int k\;dx$$
$$\ln|y(x)-\alpha| = kx + c_1$$

Despejando y tenemos $|y(x)-\alpha| = e^{kx}e^{c_1} = c\,e^{kx}$, con $c = e^{c_1} > 0$. Notemos que si $y(x)-\alpha > 0$, tenemos que $y(x) = c\,e^{kx}+\alpha$ con c una constante positiva. Si $y(x)-\alpha < 0$, resulta que $y(x) = c\,e^{kx}+\alpha$ con c una constante negativa.

También es fácil verificar que $y(x) = \alpha$ (que correspondería a $c = 0$), es solución de (2.1). Así,

$$y = c\,e^{kx} + \alpha \qquad \text{con} \quad c \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

es la solución general de la ecuación (2.1). Como una aplicación de esto estudiaremos

2.0.1. *La Ley de Enfriamiento de Newton.* La Ley de enfriamiento de Newton dice:

"*La rapidez de variación de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio ambiente que lo rodea.*"

Si $y(t)$ es la temperatura del cuerpo en el instante t y $A(t)$ es la temperatura del medio ambiente en el mismo instante, tenemos

$$y'(t) = -k(y(t) - A(t)) \tag{2.3}$$

donde k es una constante. Observemos que si el cuerpo está más caliente que el medio que lo rodea en algún instante t_0, es decir $y(t_0) > A(t_0)$, entonces el cuerpo se enfría, o sea $y(t)$ decrece, y por lo tanto $y'(t) \leq 0$. Mirando la ecuación (2.3) tenemos que en este caso $k > 0$.

En el caso en que el cuerpo está más frío que el medio en el instante t_0, es decir $y(t_0) < A(t_0)$, el cuerpo se calienta, o sea $y(t)$ crece, y por lo tanto $y'(t) \geq 0$. Así de la ecuación (2.3) deducimos que en este caso $k > 0$.

Concluimos entonces que k es siempre una constante positiva.

PROBLEMA 2.1. Un cuerpo a $200°C$ se enfría en un ambiente con temperatura constante de $10°C$. Después de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de $100°C$.

a) ¿ Cuántos minutos transcurrirán para que la temperatura del cuerpo sea de $80°C$?

b) ¿ Cuál es la temperatura del cuerpo después de una hora?

Solución. Sabemos que $A(t) = 10°C$ y la ley de enfriamiento de Newton nos dice que

$$y'(t) = -k\,(y(t) - 10)$$

Para resolver nuestro problema necesitamos conocer la función que nos da la temperatura del cuerpo en un instante cualquiera, o sea que tenemos que resolver esta ecuación diferencial. Notemos que como la temperatura ambiente es constante, esta ecuación es del tipo (2.1).

Así, por (2.2) tenemos que

$$y(t) = ce^{-kt} + 10, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Sabemos que al comienzo del experimento el cuerpo tenía una temperatura de $200°C$, es decir que $y(0) = 200$ y que 40 minutos más tarde, $y(40) = 100$. Usando esto en (2.4) tenemos

$$200 = y(0) = ce^{-k0} + 10 = c + 10,$$

de donde $c = 190$. Además

$$\begin{aligned} 100 = y(40) &= 190\, e^{-k40} + 10 \\ \frac{90}{190} &= e^{-k\,40} \\ \ln \tfrac{9}{19} &= -k\ 40 \\ -\tfrac{1}{40} \ln \tfrac{9}{19} &= k. \end{aligned}$$

Así,

$$y(t) = 190\, e^{\left(\frac{1}{40} \ln \frac{9}{19}\right)t} + 10.$$

Para responder la primera pregunta, tenemos que calcular para qué valor de t, $y(t) = 80$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 80 &= 190\, e^{\left(\frac{1}{40} \ln \frac{9}{19}\right)t} + 10 \\ \frac{70}{190} &= e^{\left(\frac{1}{40} \ln \frac{9}{19}\right)t} \\ \ln \tfrac{7}{19} &= \left(\tfrac{1}{40} \ln \tfrac{9}{19}\right) t. \end{aligned}$$

Así en $t = \dfrac{40 \ln \frac{7}{19}}{\ln \frac{9}{19}}$ tenemos que la temperatura del cuerpo es de $80°C$.

Para la segunda parte, debemos calcular la temperatura del cuerpo a los 60 minutos, es decir evaluar y en $t = 60$,

$$y(60) = 190\, e^{\left(\frac{1}{40} \ln \frac{9}{19}\right)60} + 10.$$

Consideremos ahora otro problema,

Problema 2.2. $20\,Kg$ de sal son derramados en un recipiente que tiene $120\,l$ de agua pura en el instante $t=0$. Sea $Q(t)$ la cantidad de sal disuelta en el instante t con $t \geq 0$.

La sal se disuelve a una velocidad dada por la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}Q(t) = k(20 - Q(t))(A - \frac{Q(t)}{120}) \tag{2.5}$$

donde k es una constante positiva y A es la *constante de saturación* dada en Kg/l. Halle la solución $Q(t)$ que verifica $Q(0)=0$, distinguiendo dos casos: $A \neq \frac{1}{6}$ y $A = \frac{1}{6}$.

Solución: Observemos que $\dfrac{Q(t)}{120}$ es la concentración de sal en el instante t y que $20 - Q(t)$ es la cantidad de sal que queda sin disolver. Reescribamos (2.5) de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{k}{120}(20 - Q(t))(120\,A - Q(t)). \tag{2.6}$$

Consideremos primero el caso $A = \frac{1}{6}$. Así, $120\,A - Q(t) = 20 - Q(t)$ con lo que

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{k}{120}(20 - Q(t))^2.$$

Separando las variables tenemos

$$\frac{Q'(t)}{(20 - Q(t))^2} = \frac{k}{120},$$

e integrando ambos miembros respecto de t

$$\begin{aligned} \int \frac{Q'(t)}{(Q(t)-20)^2}\, dt &= \int \frac{k}{120}\, dt \\ \frac{-1}{Q(t)-20} &= \frac{k}{120}t + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Despejando,

$$Q(t) = 20 - \frac{1}{\frac{k}{120}t + c}.$$

Sabemos que $Q(0)=0$, de donde deducimos que $c = \frac{1}{20}$. Luego, reescribiendo,

$$Q(t) = \frac{20\,kt}{kt+6}.$$

Veamos ahora el caso $A \neq \frac{1}{6}$.

Observemos que como $Q(t)$ crece, entonces $\dfrac{d}{dt}Q(t) \geq 0$. Además $\frac{k}{120} > 0$ y $20 - Q(t) \geq 0$, luego de la ecuación (2.6) deducimos que

$$120A - Q(t) \geq 0.$$

Separando las variables e integrando respecto de t en (2.6) tenemos

$$\int \frac{Q'(t)}{(20-Q(t))(120A-Q(t))}\,dt = \int \frac{k}{120}\,dt. \tag{2.7}$$

Integrando por fracciones simples el lado izquierdo,

$$-\frac{1}{120\,A-20}\ln(20-Q(t)) - \frac{1}{20-120\,A}\ln(120\,A-Q(t)) = \frac{k}{120}\,t+c.$$

Multiplicando ambos miembros por 20,

$$-\frac{1}{6A-1}\ln(20-Q(t)) - \frac{1}{1-6A}\ln(120A-Q(t)) = \frac{k}{6}\,t+c.$$

Así

$$\frac{1}{1-6\,A}\ln\left(\frac{20-Q(t)}{120A-Q(t)}\right) = \frac{k}{6}\,t+c. \tag{2.8}$$

Como $Q(0)=0$, tenemos que $c = \dfrac{1}{1-6A}\ln\left(\dfrac{1}{6A}\right)$ y por lo tanto

$$\ln\left(\frac{20-Q(t)}{120A-Q(t)}\right) = (1-6\,A)\,\frac{k}{6}\;t+\ln\left(\frac{1}{6A}\right). \tag{2.9}$$

Tomando exponencial en ambos miembros, despejamos $Q(t)$

$$\begin{aligned} \frac{20-Q(t)}{120\,A-Q(t)} &= e^{(1-6A)\frac{k}{6}\,t}\,e^{\ln(1/6A)} \\ 20-Q(t) &= \left(\frac{1}{6\,A}\,e^{(1-6A)\frac{k}{6}t}\right)(120\,A-Q(t)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Llamemos $B(t) = \left(\frac{1}{6\,A}\,e^{(1-6A)\frac{k}{6}t}\right)$, luego

$$\begin{aligned} 20-Q(t) &= 120A\,B(t)-Q(t)\,B(t) \\ Q(t)(B(t)-1) &= 120AB(t)-20 \\ Q(t) &= \frac{120\,A\,B(t)-20}{B(t)-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando a $B(t)$ por su expresión original,

$$Q(t) = \frac{20\left[e^{(\frac{1}{6}-A)kt}-1\right]}{\frac{1}{6A}e^{(\frac{1}{6}-A)kt}-1}.$$

3. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Otro tipo de ecuaciones de primer orden son las *ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.* Estas ecuaciones son de la forma

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x), \tag{3.1}$$

donde a_1, a_0 y g son funciones continuas. Observemos que (3.1) tiene sentido como ecuación diferencial para los x tales que $a_1(x) \neq 0$, y como a_1 es una función continua, si es distinta de cero en un punto entonces existe un intervalo alrededor de dicho punto tal que sigue siendo no nula. Trabajaremos en uno de estos intervalos.

Nos interesa encontrar la solución general de este tipo de ecuaciones.

Dividiendo ambos miembros de (3.1) por $a_1(x)$, la ecuación diferencial queda de la forma

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \tag{3.2}$$

con P y Q funciones continuas.

Consideremos primero el caso $Q \equiv 0$. Así (3.2) se reduce a

$$y'(x) + P(x)y(x) = 0. \tag{3.3}$$

Esta ecuación es la llamada *ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea.* Observemos que reescribiendo (3.3) obtenemos

$$\frac{d}{dx}\, y(x) = -P(x)y(x), \tag{3.4}$$

que es una ecuación diferencial de variables separables. Sea $p(x)$ una primitiva de $P(x)$ y procedamos como siempre separando variables e integrando ambos miembros respecto de x,

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx &= -\int P(x)\, dx \\ \ln|y(x)| &= -p(x) + c_1, \\ |y(x)| &= e^{c_1}\, e^{-p(x)} \\ |y(x)| &= c_2\, e^{-p(x)} \end{aligned}$$

donde $c_1 \in \mathbb{R}$ y $c_2 = e^{c_1}$ es una constante positiva. Así

$$y(x) = c\, e^{-p(x)} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

es la solución general de (3.3). Notemos que $c = 0$ corresponde al caso $y \equiv 0$ que también es solución de la ecuación diferencial homogénea (3.3).

Busquemos ahora la solución general de la ecuación (3.2), es decir de la *ecuación diferencial lineal no homogénea.* Consideremos la siguiente solución particular de la ecuación (3.3)

$$u(x) = e^{-p(x)} \tag{3.6}$$

y supongamos que $y(x)$ es una solución cualquiera de (3.2). Notemos que $u(x) \neq 0$ para todo x. Ahora cualquier función $y(x)$ se puede escribir de la forma

$$y(x) = u(x)\frac{y(x)}{u(x)} = u(x)v(x) \tag{3.7}$$

donde $v(x) = \dfrac{y(x)}{u(x)}$. Si determinamos v, como conocemos u tendremos la expresión de y que buscamos.

Puesto que $y(x)$ satisface (3.2) e $y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ tenemos que

$$Q(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + P(x)u(x)v(x),$$

y así

$$Q(x) = [u'(x) + P(x)u(x)]\, v(x) + u(x)v'(x). \tag{3.8}$$

Como u es una solución particular de la ecuación homogénea, $u'(x) + P(x)u(x) = 0$, reemplazando esto en (3.8) tenemos

$$u(x)v'(x) = Q(x).$$

Ahora, $\dfrac{d}{dx}\, v(x) = \dfrac{Q(x)}{u(x)}$ es una ecuación diferencial del tipo (1.6), por lo tanto si $q(x)$ es una primitiva particular de $\frac{Q(x)}{u(x)} = Q(x)\, e^{p(x)}$, resulta $v(x) = q(x) + c$. Reemplazando en (3.7) tenemos

$$y(x) = e^{-p(x)}(q(x) + c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Recíprocamente, se puede verificar que toda función $y(x)$ de la forma (3.9), con p primitiva de P y q primitiva de $Q(x)\, e^{p(x)}$, es solución de (3.2).

Hemos probado el siguiente

Teorema 3.1. *Sean P y Q funciones continuas. Si $p(x)$ es una primitiva de $P(x)$ y $q(x)$ es una primitiva de $Q(x)\, e^{p(x)}$, la solución general de la ecuación*

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x),$$

está dada por (3.9).

Ejemplo 3.2. La ecuación $y'(x) - 2xy(x) = 3x$ es de la forma (3.2) con $P(x) = -2x$ y $Q(x) = 3x$. Para encontrar la solución de esta ecuación calculamos primero $\int -2x\,dx = -x^2 + c$ y elegimos $p(x) = -x^2$.

Como $\int 3xe^{-x^2}\,dx = -\frac{3}{2}\,e^{-x^2} + c$, tomamos $q(x) = -\frac{3}{2}\,e^{-x^2}$. Así, aplicando (3.9) tenemos

$$y(x) = e^{x^2}\left(-\frac{3}{2}\,e^{-x^2} + c\right) = c\,e^{x^2} - \frac{3}{2},$$

con $c \in \mathbb{R}$, es la solución general de la ecuación diferencial. Esta ecuación también se puede resolver por el método de variables separables. Queda como ejercicio para el lector.

Ejemplo 3.3. Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$x^2y'(x) + xy(x) = 1, \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2.$$

Antes que nada, hay que dividir ambos miembros de la ecuación por x^2 para obtener una expresión del tipo de (3.2). Así,

$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0.$$

Podemos aplicar el Teorema 3.1 con $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = \frac{1}{x^2}$. Como $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$, $x > 0$ tomamos $p(x) = \ln(x)$, luego $\int \frac{1}{x^2}\,e^{\ln(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$ con $x > 0$.

Así, la solución general de nuestra ecuación es de la forma

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\ln(x) + c\right], \qquad x > 0$$

con $c \in \mathbb{R}$. Para encontrar la solución particular que cumple $y(1) = 2$ tenemos que $y(1) = c = 2$, por lo tanto

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[\ln(x) + 2\right].$$

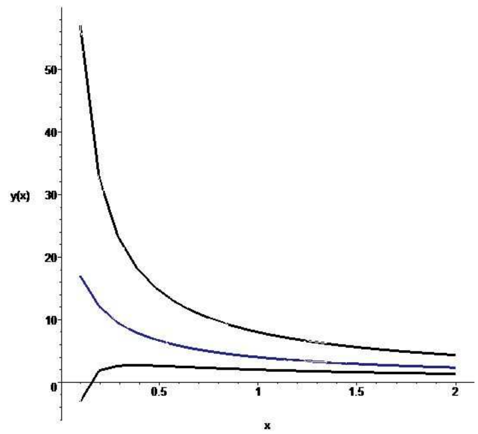


Figura 4. Soluciones para $c = 2,\ 4,\ 8$.

4. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Estas son las ecuaciones diferenciales de segundo orden más sencillas.

Corresponden a la forma

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{4.1}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Una *solución* de (4.1) es una función $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable que satisface esta ecuación.

Proposición 4.1. *a) La función $y(x)$ idénticamente cero es solución de (4.1).*

b) Si $y_1(x), y_2(x)$ son soluciones de (4.1) y c_1 y c_2 son números reales, entonces $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ también es solución de (4.1).

Prueba. *a)* es inmediato.

b) Tenemos que si $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ entonces

$$y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)$$

e

$$y''(x) = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x).$$

Así

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= a(c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x)) + b\,(c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)) \\ &\qquad + c\,(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\ &= c_1(ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)) \\ &\qquad + c_2(ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)). \end{aligned}$$

Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (4.1)

$$ay_i''(x) + by_i'(x) + cy_i(x) = 0 \qquad \text{para } i = 1, 2,$$

luego

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$$

terminando la demostración. □

Diremos que dos soluciones de (4.1) son *linealmente dependientes* si existen números reales d_1 y d_2, con al menos uno de los dos no nulo, tal que

$$d_1\, y_1(x) + d_2\, y_2(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

En caso contrario diremos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son *linealmente independientes*, dicho de otro modo, para verificar la independencia lineal de dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ debemos mostrar que si

$$d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces $d_1 = d_2 = 0$.

Observación. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones linealmente dependientes, por definición sabemos que existen $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, con al menos alguno de los dos no nulo, tal que $d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, o equivalentemente, si suponemos $d_1 \neq 0$,

$$y_1(x) = -\frac{d_2}{d_1} y_2(x)$$

para todo x en $\mathbb{R}$. Concluimos que si dos soluciones son linealmente dependientes, entonces una es múltiplo de la otra. La recíproca de esta afirmación también es cierta. Su verificación queda como ejercicio para el lector.

Ejemplos 4.2. (de funciones linealmente dependientes y linealmente independientes).

1. Consideremos $y_1(x) = 0$ e $y_2(x) = x$. Estas funciones son linealmente dependientes pues $1\, y_1(x) + 0\, y_2(x) = 0$ para todo x.

2. Si $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x + 1$, tenemos que son linealmente independientes, pues supongamos que

$$\begin{aligned} 0 &= d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) \\ &= d_1 x + d_2(x+1) \\ &= (d_1 + d_2)x + d_2. \end{aligned}$$

Recordemos que una función polinomial es nula si y sólo si sus coeficientes lo son, así $d_1 + d_2 = 0$ y $d_2 = 0$, lo que implica que $d_1 = d_2 = 0$.

3. Sean $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ con r_1 y r_2 dos números reales distintos. Este par de funciones son linealmente independientes, pues si $0 = d_1 e^{r_1 x} + d_2 e^{r_2 x}$ para todo x, en particular la igualdad vale para $x = 0$, así $0 = d_1 + d_2$, lo que implica que $d_2 = -d_1$. Por lo tanto $0 = d_1 e^{r_1 x} - d_1 e^{r_2 x}$ o equivalentemente $d_1(e^{r_1 x} - e^{r_2 x}) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular para $x = 1$ tenemos $d_1(e^{r_1} - e^{r_2}) = 0$. Como $r_1 \neq r_2$, esto dice que $d_1 = 0$ y así también $d_2 = 0$.

4. Consideremos $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = xe^{rx}$ con $r \in \mathbb{R}$. Supongamos que $0 = d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) \quad &= d_1 e^{rx} + d_2 x e^{rx} \\ &= e^{rx}(d_1 + d_2 x) \end{aligned}$$

para todo x. Como e^{rx} es no nulo para todo x, la función polinomial $d_1 + d_2 x$ es nula, por lo tanto $d_1 = d_2 = 0$.

5. Sean $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y β no nulo. Supongamos

$$0 = d_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + d_2\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) = e^{\alpha x}(d_1 \cos(\beta x) + d_2 \operatorname{sen}(\beta x))$$

para todo x. Como $e^{\alpha x}$ es siempre no nula, deducimos que $d_1 \cos(\beta x) + d_2 \operatorname{sen}(\beta x) = 0$ para todo x, en particular para $x = 0$, y así $d_1 = 0$. Tenemos entonces que $d_2 \operatorname{sen}(\beta x) = 0$ para cualquier x. Si $x = \pi/(2\beta)$, concluimos que $d_2 = 0$. Así mostramos que estas dos funciones son linealmente independientes.

De la Proposición 4.1 b) tenemos que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (4.1), $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es también solución, con c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Un resultado sorprendente es que en el caso en que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes, variando c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$ obtenemos todas las soluciones posibles. Más precisamente tenemos el siguiente importante

Teorema 4.3. *Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de (4.1), entonces la solución general de (4.1) es de la forma*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x),$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Observación. Notemos que, de acuerdo al teorema anterior, para encontrar todas las soluciones de (4.1), basta encontrar dos soluciones linealmente independientes.

Además observemos que $y = e^{rx}$ es solución de (4.1) si y sólo si

$$a\, r^2 e^{rx} + b\, r e^{rx} + c\, e^{rx} = 0 \qquad \forall x,$$

o equivalentemente, si

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \qquad \forall x,$$

o sea, si y sólo si

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \tag{4.2}$$

La ecuación (4.2) se llama *ecuación característica* de la ecuación diferencial (4.1). Concluimos que $y = e^{rx}$ es solución de (4.1) si y sólamente si r es solución de la ecuación característica.

Observemos que la ecuación característica es un polinomio cuadrático igualado a 0 y sus soluciones vienen dadas por la conocida fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Luego tenemos tres posibilidades:

- *Caso 1:* (4.2) tiene 2 soluciones reales distintas.
- *Caso 2:* (4.2) tiene 2 soluciones reales iguales.
- *Caso 3:* (4.2) tiene 2 soluciones complejas conjugadas.*

Estudiaremos cada caso individualmente.

Caso 1: Estamos asumiendo que (4.2) tiene dos soluciones reales r_1 y r_2 que son distintas. Por lo tanto, $y_1(x) = e^{r_1 x}$ e $y_2(x) = e^{r_2 x}$ son soluciones de (4.1). Además vimos en el Ejemplo 4.2 **3**. que como r_1 es distinto de r_2, $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes. Luego el Teorema 4.3 nos dice que la solución general de (4.1) en este caso es

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad \text{con } c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Caso 2: Supongamos que el polinomio cuadrático (4.2) tiene una sola solución real doble $r = \dfrac{-b}{2a}$. Sabemos entonces que $y_1(x) = e^{rx}$ es solución. Para poder escribir la solución general buscamos otra solución $y_2(x)$ tal que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sean linealmente independientes. Usaremos el *método de variación del parámetro*. Tomemos $y(x) = \mu(x)e^{rx}$ y supongamos que es solución de (4.1) para poder determinar $\mu(x)$. Para esto, notemos que

$$y'(x) = e^{rx}(\mu'(x) + r\mu(x))$$

e

$$y''(x) = e^{rx}(\mu''(x) + 2r\mu'(x) + r^2\mu(x)).$$

*En caso de no estar familiarizado con la noción de números complejos, ver Apéndice 1.

Así, reemplazando en (4.1) tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= ay''(x) + by'(x) + cy(x) \\
&= e^{rx}\left(a\mu''(x) + 2ra\mu'(x) + ar^2\mu(x)\right. \\
&\qquad \left. + b\mu'(x) + br\mu(x) + c\mu(x)\right).
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Como $r = -\dfrac{b}{2a}$, tenemos $2ra = -b$. Usando esto en el segundo término del lado derecho de (4.4), la identidad se reduce a

$$
\begin{aligned}
0 &= e^{rx}(a\mu''(x) + ar^2\mu(x) + br\mu(x) + c\mu(x)) \\
&= e^{rx}(a\mu''(x) + (ar^2 + br + c)\mu(x)).
\end{aligned}
$$

Como r es solución de (4.2), es decir $ar^2 + br + c = 0$, tenemos que $e^{rx}a\mu''(x) = 0$. Luego $\mu''(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pues habíamos asumido que $a \neq 0$. Concluimos entonces que $y(x) = \mu(x)e^{rx}$ es solución de (4.1) si y sólo si $\mu''(x) = 0$ para todo x. En particular $\mu(x) = x$ cumple que su derivada segunda es nula, por lo tanto $y_2(x) = xe^{rx}$ es solución. Vimos en el Ejemplo 4.2 **4**. que $y_1(x) = e^{rx}$ e $y_2(x) = xe^{rx}$ son linealmente independientes. Así por el Teorema 4.3 la solución general en este caso está dada por

$$
y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.5}
$$

<u>*Caso 3:*</u> Ahora asumimos que (4.2) no tiene soluciones reales, es decir, tiene dos soluciones complejas conjugadas

$$
r_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{y} \qquad r_2 = \alpha - i\beta
$$

con α, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\beta \neq 0$. Sabemos por el Ejemplo 4.2 **5**. que $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son linealmente independientes y es fácil verificar que ambas son soluciones de la ecuación (4.2). Así aplicando nuevamente el Teorema 4.3

$$
\begin{aligned}
y(x) = &\ c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \\
= &\ e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\operatorname{sen}(\beta x)) \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

es la solución general de (4.1) en este caso. En consecuencia tenemos el siguiente

Teorema 4.4. *Dada la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes*

$$
ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{4.1}
$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, sea

$$
ar^2 + br + c = 0 \tag{4.2}
$$

su ecuación característica. Entonces

a) Si (4.2) tiene dos soluciones reales distintas, r_1 y r_2, la solución general de (4.1) es de la forma

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad \textit{con } c_1 \textit{ y } c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Si (4.2) tiene una solución real doble r, la solución general de (4.1) es de la forma

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2\, x e^{rx}, \quad \textit{con } c_1 \textit{ y } c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Si (4.2) tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ con $\beta \neq 0$, la solución general de (4.1) es

$$y(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \; sen(\beta x)] \qquad \textit{con } c_1 \textit{ y } c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos 4.5.

1. Consideremos

$$2y''(x) - 5y'(x) - 3y(x) = 0.$$

Su ecuación característica es $2r^2 - 5r - 3 = 0$. Es fácil verificar que tiene dos soluciones reales distintas $r_1 = 3$ y $r_2 = -\frac{1}{2}$. Así por el Teorema 4.4 a), la solución general de nuestra ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-(\frac{1}{2})x}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$.

2. Tomemos ahora

$$y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0.$$

La ecuación característica correspondiente a esta ecuación es $r^2 - 10r + 25 = (r-5)^2 = 0$, que tiene una solución real doble $r = 5$. Por el Teorema 4.4 b), la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

con c_1 y c_2 en $\mathbb{R}$.

3. Si tenemos

$$y''(x) + y'(x) + y(x) = 0,$$

su ecuación caracterstica es $r^2 + r + 1 = 0$ que tiene dos soluciones complejas conjugadas $r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ y $r_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Notemos que en este caso $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ y $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Así, por el Teorema 4.4 c)

$$y(x) = e^{(-\frac{1}{2})x}[c_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + c_2 \; \operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)]$$

es la solución general buscada.

5. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Una ecuación de este tipo es de la forma

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g(x) \tag{5.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $g(x)$ es una función continua no idénticamente nula. La *ecuación lineal homogénea* asociada a (5.1) es

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{5.2}$$

con a, b y c como arriba. Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 5.1. *(1) Sea $y_p(x)$ una solución particular de (5.1). Si $y_h(x)$ es una solución de la ecuación homogénea (5.2), entonces*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

también es solución de (5.1).

(2) Si $y_p(x)$ es una solución particular de (5.1) e $y(x)$ es cualquier solución de (5.1), entonces $y(x)$ es de la forma

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

donde y_h es solución de (5.2).

PRUEBA. Veamos que $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$ es solución de (5.1). Observemos que $y_p(x)$ cumple

$$ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) = g(x). \tag{5.3}$$

Además, como $y_h(x)$ es solución de la ecuación lineal homogénea asociada a (5.1),

$$ay_h''(x) + by_h'(x) + cy_h(x) = 0. \tag{5.4}$$

Usando (5.3) y (5.4) tenemos que

$$\begin{aligned} ay''(x) + by'(x) + cy(x) &= a(y_p(x) + y_h(x))'' + b(y_p(x) + y_h(x))' \\ &\qquad +c(y_p(x) + y_h(x)) \\ &= ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x) \\ &\qquad +ay_h''(x) + by_h'(x) + cy_h(x) \\ &= g(x) + 0 = g(x) \end{aligned}$$

probando nuestra primera afirmación. Veamos la prueba de *(2)*. Basta ver que si $y(x)$ es cualquier solución de (5.1) e $y_p(x)$ es una solución particular, $u(x) = y(x) - y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea (5.2). Para esto calculemos

$$\begin{aligned} au''(x) + bu'(x) + cu(x) = &\ a(y(x) - y_p(x))'' + b(y(x) - y_p(x))' \\ &\qquad\qquad\qquad + c(y(x) - y_p(x)) \\ = &\ (ay''(x) + by'(x) + cy(x)) \\ &\qquad - (ay_p''(x) + by_p'(x) + cy_p(x)) \\ = &\ g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

terminando nuestra demostración. □

En la sección anterior nos ocupamos de buscar las soluciones de la ecuación homogénea (5.2), por lo tanto sabemos calcular $y_h(x)$. De acuerdo con la Proposición 5.1, para encontrar la solución general de (5.1) es necesario encontrar una solución particular de la misma, $y_p(x)$. Para esto usaremos el *método de los coeficientes indeterminados* que nos dice cómo es $y_p(x)$ en los casos en que $g(x)$ sea de la forma e^{ax}, un polinomio $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$, $\text{sen}(\beta x)$, $\cos(\beta x)$ o producto y suma de estas funciones.

El método consiste en proponer cuál es la forma de $y_p(x)$ de acuerdo a la siguiente tabla. En esta expresión hay coeficientes desconocidos que debemos determinar.

Tabla de soluciones particulares de (5.1)

	$g(x)$	$y_p(x)$
(1)	$p_n(x) = a_n x^n + ... + a_0$	$x^s(A_n x^n + ... + A_0)$
(2)	$p_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_n x^n + ... + A_0)e^{\alpha x}$
(3)	$p_n(x)e^{\alpha x}\text{sen}(\beta x)$ ó $p_n(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$x^s[(A_n x^n + ... + A_0)e^{\alpha x}\cos(\beta x) +$ $(B_n x^N + ... + B_0)e^{\alpha x}\text{sen}(\beta x)]$

En el caso (1), es decir cuando $g(x)$ es un polinomio, s es el número de veces que 0 es solución de la ecuación característica de (5.2).

En el caso (2), cuando $g(x)$ es producto de un polinomio por una exponencial $e^{\alpha x}$, s es el número de veces que α es solución de la ecuación característica de (5.2).

En los casos (3), cuando $g(x)$ es producto de un polinomio por una exponencial de la forma $e^{\alpha x}$ y una trigonométrica $\cos(\beta x)$ ó $\text{sen}(\beta x)$, s es el número de veces que $\alpha + i\beta$ es solución de la ecuación característica de (5.2).

Notemos que s es siempre igual a 0, 1 ó 2.

Ejemplo 5.2. Consideremos

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = e^x.$$

Busquemos la solución general de esta ecucación. De acuerdo con la tabla una solución particular es de la forma

$$y_p(x) = x^s\, Ae^x.$$

Por otra parte, la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial que consideramos es $r^2 + r - 2 = 0$, y sus soluciones son 1 y -2. Luego $s = 1$. Falta determinar la constante A. Para esto reemplazamos $y_p(x)$ en nuestra ecuación,

$$\begin{aligned} (Axe^x)'' + (Axe^x)' - 2Axe^x &= e^x \\ A(2e^x + xe^x) + A(e^x + xe^x) - 2Axe^x &= e^x \\ e^x[(2A + Ax) + (A + Ax - 2Ax)] &= e^x \\ 3A &= 1. \end{aligned}$$

Esto nos dice que $A = 1/3$. Así, la solución particular es

$$y_p(x) = (1/3)xe^x.$$

Ya dijimos que 1 y -2 son las soluciones de la ecuación característica, por lo tanto

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de la ecuación lineal homogénea asociada a nuestra ecuación diferencial. Aplicando la Proposición 5.1 tenemos que la ecuación tiene solución general

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = (1/3)xe^x + c_1e^x + c_2e^{-2x} \tag{5.5}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$.

Daremos ahora la solución particular que cumple $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Notemos que como hay dos constantes arbitrarias en (5.5) necesitamos dos condiciones iniciales. Si evaluamos (5.5) en 0 tenemos que

$$0 = y(0) = c_1 + c_2,$$

y si derivamos (5.5) y la evaluamos en 0 resulta

$$1 = 1/3 + c_1 - 2c_2.$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, tenemos que $c_1 = 2/9$ y $c_2 = -2/9$. Así, la solución particular que cumple con las condiciones iniciales dadas es

$$y(x) = (1/3)xe^x + (2/9)e^x - (2/9)e^{-2x}. \tag{5.6}$$

Una pregunta que surge naturalmente es qué ocurre si en (5.1) $g(x)$ es suma de un par de funciones continuas, digamos

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ continuas. La respuesta la da la siguiente

PROPOSICIÓN 5.3. *Sea $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ con $g_1(x)$ y $g_2(x)$ funciones continuas y sean $u_i(x)$ con $i = 1, 2$, soluciones de $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = g_i(x)$, respectivamente. Entonces $u = u_1(x) + u_2(x)$ es solución de (5.1).*

PRUEBA. Por hipótesis tenemos que

$$au_1''(x) + bu_1'(x) + cu_1(x) = g_1(x)$$

y

$$a\,u_2''(x) + b\,u_2'(x) + cu_2(x) = g_2(x).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a\,u''(x) + b\,u'(x) + cu(x) &= a\,(u_1''(x) + u_2''(x)) + b(u_1'(x) + u_2'(x)) \\ &\qquad + c(u_1(x) + u_2(x)) \\ &= (a\,u_1''(x) + b\,u_1'(x) + cu_1(x)) \\ &\qquad + (a\,u_2''(x) + b\,u_2'(x) + cu_2(x)) \\ &= g_1(x) + g_2(x) = g(x), \end{aligned}$$

completando la prueba. □

EJEMPLO 5.4. Consideremos la ecuación

$$y''(x) + y'(x) = x + x\operatorname{sen} x. \tag{5.7}$$

Su ecuación característica es $r^2 + r = 0$, y sus soluciones son 0 y -1. Consideremos la ecuación homogénea asociada a la ecuación (5.7). Del Teorema 4.4 tenemos que su solución general es de la forma

$$y_h(x) = c_1 + c_2\,e^{-x}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$. Busquemos ahora una solución particular de (5.7). Por la Proposición 5.3 basta encontrar las soluciones particulares de

$$y''(x) + y'(x) = x \tag{5.8}$$

y

$$y''(x) + y'(x) = x \operatorname{sen} x. \tag{5.9}$$

Consideremos (5.8). Según la tabla corresponde al caso (1), es decir

$$y_{p,1}(x) = x^s\,(A\,x + B)$$

con s igual a la cantidad de veces que 0 es solución de la ecuación característica. Por lo tanto $s = 1$. Falta determinar A y B. Como $y_{p,1}$ es solución de (5.8),

$$y''_{p,1}(x) + y'_{p,1}(x) = x$$

o sea $2A + 2Ax + B = x$, de donde deducimos que $A = 1/2$ y $B = -1$. Así

$$y_{p,1}(x) = x(\frac{1}{2}x - 1).$$

La solución particular de (5.9), según la tabla, corresponde al caso (3), es decir $y_{p,2}(x) = x^s[(A_1x + A_0)\cos x + (B_1x + B_0)\operatorname{sen} x]$. Notemos que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, luego $\alpha + i\beta = i$, pero i no es solución de la ecuación característica de (5.9) (que es la misma que la de (5.7)). Así $s = 0$. Como $y_{p,2}(x)$ es solución de (5.9),

$$\begin{aligned}
x \operatorname{sen} x &= y''_{p,2}(x) + y'_{p,2}(x) \\
&= -2\,A_1 \operatorname{sen} x - (A_1\,x + A_0)\cos\,x + 2\,B_1\cos\,x - (B_1x + B_0)\operatorname{sen} x \\
&\quad + A_1\cos\,x - (A_1\,x + A_0)\operatorname{sen} x + B_1\operatorname{sen} x + (B_1\,x\, + B_0)\cos x \\
&= (-2A_1 - B_0 - A_0 + B_1)\operatorname{sen} x + (-A_0 + 2B_1 + A_1 + B_0)\cos\,x \\
&\quad + (-B_1 - A_1)\,x \operatorname{sen} x + (-A_1 + B_1)\,x\,\cos\,x.
\end{aligned}$$

Despejando las incógnitas tenemos que $A_0 = -\frac{1}{2}$, $A_1 = -\frac{1}{2}$, $B_0 = 1$ y $B_1 = -\frac{1}{2}$. Así

$$y_{p,2}(x) = (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\cos x + (-\frac{1}{2}x + 1)\operatorname{sen} x.$$

Por la proposición anterior, una solución particular de (5.7) es

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) \\
&= x(\frac{1}{2}x - 1) + (-(\frac{1}{2})x - \frac{1}{2})\cos\,x + ((-\frac{1}{2})x + 1)\operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Luego, la solución general de (5.7) es

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\
&= c_1 + c_2e^{-x} + x\,(\frac{1}{2}x - 1) \\
&\qquad + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\cos\,x + (-\frac{1}{2}\,x + 1)\operatorname{sen} x,
\end{aligned}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

CAPíTULO 3

Cálculo vectorial

1. Vectores y el espacio tridimensional

Recordemos que en Matemática I denotamos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales y por $\mathbb{R}^2$ al conjunto de pares ordenados de números reales, o sea

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) \,:\, a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Por analogía, denotaremos por $\mathbb{R}^3$ a las ternas ordenadas de números reales, es decir

$$\mathbb{R}^3 = \{(a_1, a_2, a_3) \,:\, a_1 \in \mathbb{R},\ a_2 \in \mathbb{R} \text{ y } a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Notemos que los elementos de $\mathbb{R}^3$ son ternas **ordenadas**. Es decir, no es lo mismo la terna $(1, -2, 0)$ que $(-2, 1, 0)$.

A partir de ahora y hasta el final de estas notas usaremos letras minúsculas negrillas para denotar una terna. Por ejemplo $\mathbf{a} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -7), etc.$

En $\mathbb{R}^3$ se definen las siguientes operaciones.

Suma:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Multiplicación por escalares: Sea $r \in \mathbb{R}$,

$$r(a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3).$$

Observemos que estas operaciones son cerradas en $\mathbb{R}^3$, es decir que suma de dos ternas es una nueva terna y un escalar por una terna es otra terna de números reales.

Denotaremos por $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$. Así definimos la *resta*

$$\mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a}).$$

Además el vector nulo lo denotamos por

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0).$$

EJEMPLO 1.1. Sean $\mathbf{a} = (2, -3, 1)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 5)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (2, -3, 1) + (0, 1, 5) = (2 + 0, -3 + 1, 1 + 5) \\ &= (2, -2, 6). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$3\mathbf{a} = 3\,(2, -3, 1) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-3), 3 \cdot 1) = (6, -9, 3),$$

y

$$-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a} = (-1)(2, -3, 1) = (-2, 3, -1).$$

Listaremos ahora las propiedades de las operaciones suma y multiplicación por escalar. Comencemos por la suma. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en $\mathbb{R}^3$.

Asociatividad: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

Conmutatividad: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Existencia de neutro: $\mathbf{a} + \mathbf{0} \ = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Existencia de inverso: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

La multiplicación por escalares cumple $r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$, para r y $s \in \mathbb{R}$, y la

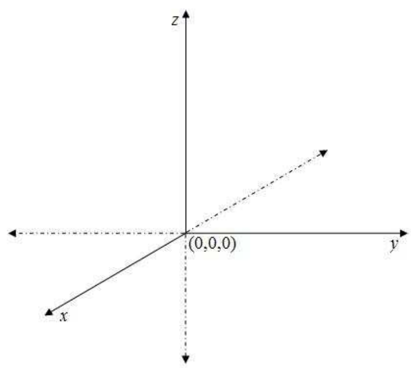
Distributividad: Para todo $r \in \mathbb{R}$,

$$r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}.$$

La verificación de estas propiedades es un ejercicio sencillo que dejamos para el lector. Por estar $\mathbb{R}^3$ munido de estas dos operaciones que satisfacen las propiedades arriba listadas, se dice que es un *espacio vectorial* y a sus elementos, o sea las ternas, se los llama también *vectores*.

2. Representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^3$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, los vectores en $\mathbb{R}^3$ se representan por un punto en el espacio tridimensional. Por analogía con $\mathbb{R}^2$, elegimos tres rectas perpendiculares entre sí que llamaremos ejes x, y y z y su intersección es el origen, que representa el vector $(0, 0, 0)$. En cada eje, elegimos el sentido positivo y negativo y una unidad (no necesariamente la misma en cada eje). Así tenemos



donde por convención, el sentido positivo en el eje x es hacia la izquierda, en el eje y es hacia la derecha y en el eje z hacia arriba.

Por ejemplo ¿Cómo hacemos para representar el punto $(x, y, z) = (1,\ 1,\ 2)$?

Marcamos $x = 1$ en el eje x, $y = 1$ en el eje y y $z = 2$ en el eje z, y por cada uno de ellos marcamos un plano perpendicular al eje correspondiente (paralelo al plano determinado por los restantes ejes). La intersección de los tres planos es el punto $(1, 1, 2)$.

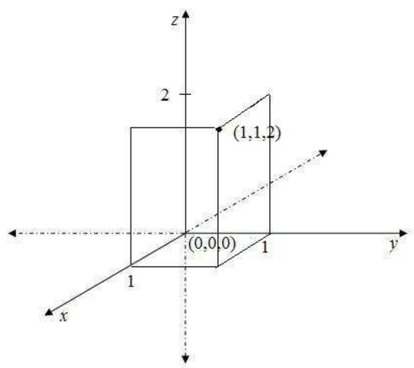


Figura 1. Representación del punto $(1, 1, 2)$.

En la práctica, basta marcar la proyección del punto en el plano xy, es decir hacer la coordenada $z = 0$. Trazar una recta paralela al eje z por este punto, y marcar sobre esta recta el valor de z.

Representaremos, también, a un vector como una flecha desde el origen hasta el punto correspondiente.

Ahora veamos cómo se representan las operaciones que definimos en $\mathbb{R}^3$. La interpretación geométrica de la suma de dos vectores en $\mathbb{R}^3$, es semejante a la de los vectores en $\mathbb{R}^2$. Veamos la figura de abajo. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos puntos en el espacio. Vale como en $\mathbb{R}^2$, la regla del paralelogramo. Así el punto $\mathbf{p} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ es el que representa a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

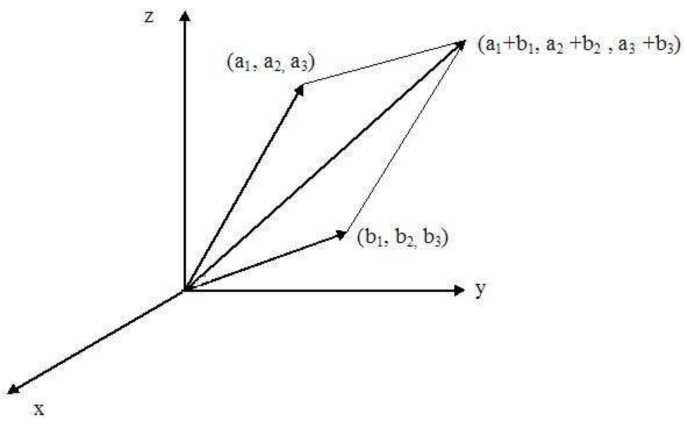
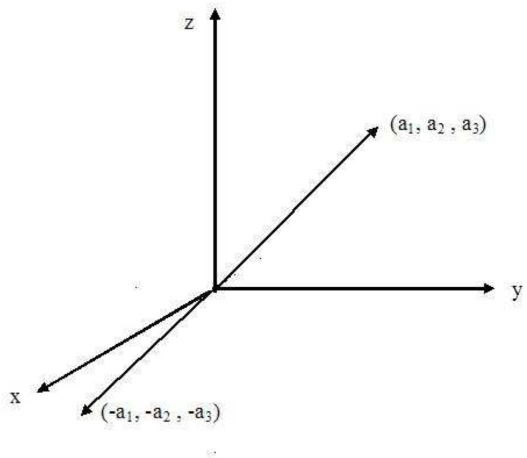
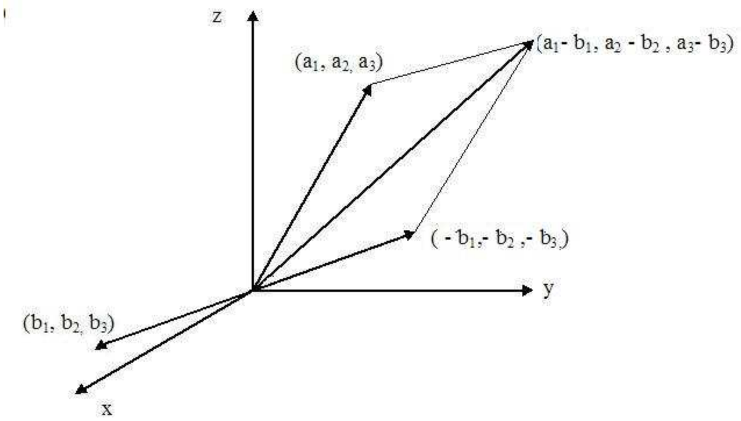


FIGURA 2. Suma de dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

Veamos qué ocurre cuando multiplicamos un vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ por un número real c. Primero consideremos $c = -1$. Es fácil ver que la flecha que representa a $c\,\mathbf{a}$, es la misma que la de $\mathbf{a}$ pero con el sentido cambiado. Por ejemplo:

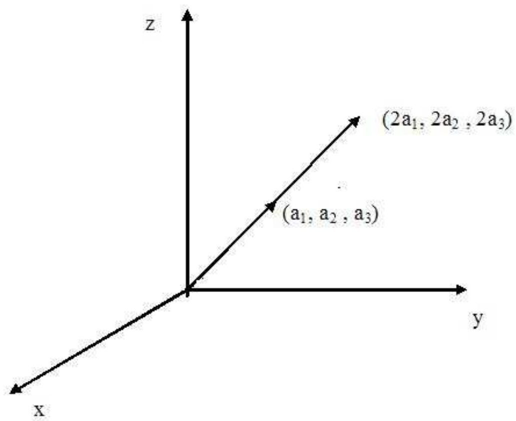


Así $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ viene representado por la flecha que apunta de $\mathbf{b}$ hacia $\mathbf{a}$ trasladada al origen.



En general si c es un número negativo, $c\,\mathbf{a}$ va a ser una flecha que va a tener el sentido opuesto al de $\mathbf{a}$.

¿Qué pasa por ejemplo si $c = 2$? En este caso $c\,\mathbf{a} = 2\mathbf{a}$ tiene el doble de la longitud de $\mathbf{a}$ y como $c > 0$, tiene el mismo sentido de $\mathbf{a}$. Así



Similarmente, si tomamos $c = \dfrac{1}{2}$, $c\,\mathbf{a}$ tiene la mitad de la longitud de $\mathbf{a}$.

En general, dado $c \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, si $c > 0$, $\mathbf{a}$ conserva el sentido de $\mathbf{a}$, y si $c < 0$, conserva la dirección de $\mathbf{a}$ pero invierte el sentido. El vector $c\,\mathbf{a}$ tiene longitud $|c|$ veces la longitud de $\mathbf{a}$, es decir si $|c| > 1$, alarga a $\mathbf{a}$ y si $|c| < 1$ entonces acorta a $\mathbf{a}$.

3. Producto interno

Definiremos una nueva operación entre vectores. Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$.
El *producto interno* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el número real

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.1. Si calculamos el producto interno entre $\mathbf{a} = (1, -3, 2)$ y $\mathbf{b} = (2, 3, -5)$ tenemos que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot (5) = -17.$$

Veamos qué propiedades tiene esta nueva operación.

Proposición 3.2. *Sean* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$*,* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *y* $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ *vectores en* $\mathbb{R}^3$ *y* $k \in \mathbb{R}$.

(1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle$
(2) $\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$
(3) $k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle k\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, k\mathbf{b} \rangle$
(4) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \geq 0$
(5) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$ *si y sólamente si* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Prueba. (1) Es consecuencia directa de la definición de producto interno y la conmutatividad de los números reales.

(2) Probemos la primera identidad. La segunda es totalmente análoga y queda como ejercicio para el lector. Calculemos el lado izquierdo de la primera igualdad.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \langle ((a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \rangle \\ &= \langle (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3), (c_1, c_2, c_3) \rangle \\ &= (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 \\ &= (a_1c_1 + b_1c_1) + (a_2c_2 + b_2c_2) + (a_3c_3 + b_3c_3). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Por otra parte, el lado izquierdo es

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle &= \langle (a_1, a_2, a_3), (c_1, c_2, c_3) \rangle + \langle (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \rangle \\ &= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Reordenando (3.2), es fácil ver que obtenemos (3.3) probando así nuestra igualdad.

(3) Tenemos que

$$k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = k(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = k(a_1b_1) + k(a_2b_2) + k(a_3b_3), \tag{3.4}$$

si aplicamos la propiedad asociativa de los números reales en (3.4) tenemos que

$$k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = (ka_1)b_1 + (ka_2)k_2 + (ka_3)b_3 = \langle k\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

Si conmutamos k con cada a_i, para $i = 1, 2, 3$, en cada término de (3.4) y aplicamos la propiedad asociativa nuevamente

$$\begin{aligned} k\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle &= a_1(kb_1) + a_2(kb_2) + a_3(kb_3) \\ &= \langle \mathbf{a}, k\mathbf{b}\rangle. \end{aligned}$$

(4) Es inmediato, ya que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ es suma de cuadrados, que es siempre no negativa.

(5) Supongamos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Esto es una suma de números no negativos igualados a 0 por lo tanto $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$ y $a_3^2 = 0$, de donde $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ y $a_3 = 0$. Así

$$\mathbf{a} = (0, 0, 0).$$

Recíporcamente, supongamos ahora que $\mathbf{a} = (0, 0, 0)$. Así

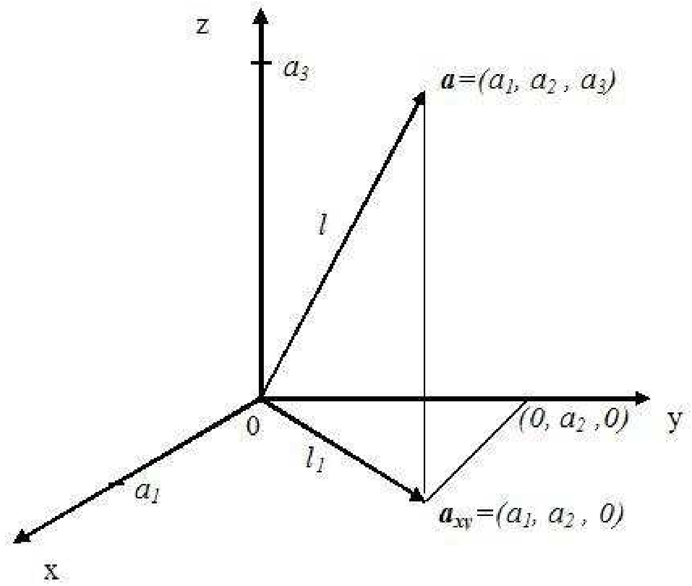
$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = \langle (0, 0, 0), (0, 0, 0)\rangle = 0 + 0 + 0 = 0.$$

□

Definición 3.3. La *norma* de un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ se define como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Geoméricamente, $\|\mathbf{a}\|$ es la longitud de la flecha que representa a $\mathbf{a}$, o sea la longitud del vector $\mathbf{a}$. Veamos esto.



Llamemos l a la longitud de $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y l_1 a la longitud del vector proyección de $\mathbf{a}$ en el plano xy es decir l_1 es la longitud de $\mathbf{a}_{xy} = (a_1, a_2, 0)$. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo con vértices $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_{xy}$ y $(0, a_2, 0)$, tenemos que

$$l_1^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

Ahora aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras al triángulo con vértices, $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}_{xy}$ y tenemos que

$$l = \sqrt{l_1^2 + a_3^2},$$

y por lo tanto

$$l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

que es lo que queríamos probar.

La $\|\mathbf{a}\|$ puede interpretarse como la distancia del punto $\mathbf{a}$ al origen. Motivado por el Teorema de Pitágoras, definimos la *distancia* entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|.$$

Por ejemplo, la distancia entre $(1, 0, 2)$ y $(0, -1, 0)$ es

$$\begin{aligned} d((1,0,2),(0,-10)) &= \|(1,0,2) - (0,-1,0)\| \\ &= \|(1,1,2)\| \\ &= \sqrt{6}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición lista las propiedades de la norma de un vector.

Proposición 3.4. *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *vectores en* $\mathbb{R}^3$ *y* $r \in \mathbb{R}$.

(1) $\|\mathbf{a}\| > 0$ *para todo* $\mathbf{a}$ *no nulo y* $\|\mathbf{0}\| = 0$.
(2) $\|r\mathbf{a}\| = |r| \, \|\mathbf{a}\|$, *donde* $|r|$ *es el valor absoluto del número real* r.
(3) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$.
(4) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos\theta$ *donde* $0 \leq \theta \leq \pi$ *es el ángulo medido en radianes entre los vectores* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$.
(5) $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$.

Observación. Nótese que el lado izquierdo de (5) es el valor absoluto del número real $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.

Prueba. Daremos a modo ilustrativo la prueba de 1 y de 2.

(1) Si $\mathbf{a} \neq 0$, por la Proposición 3.2 tenemos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle > 0$. Así $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} > 0$.
(2) Tenemos que $r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$. Así

$$\begin{aligned} \|r\,\mathbf{a}\| &= \sqrt{\langle r\,\mathbf{a}, r\,\mathbf{a} \rangle} \\ &= \sqrt{r^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \\ &= \sqrt{r^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \\ &= |r|\|\mathbf{a}\|, \end{aligned}$$

probando la segunda afirmación. □

Diremos que un vector $\mathbf{a}$ es *unitario* si $\|\mathbf{a}\| = 1$. Por ejemplo, los vectores

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

son vectores unitarios.

En general dado cualquier vector $\mathbf{b}$ no nulo, como $\|\mathbf{b}\|$ es un número real no nulo, podemos considerar el vector

$$\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Este es un vector unitario, ya que por la segunda afirmación de la Proposición 3.4,

$$\left\| \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \right\| = \frac{1}{|\,\|\mathbf{b}\|\,|}\,\|\mathbf{b}\| = \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\,\|\mathbf{b}\| = 1$$

Por ejemplo, consideremos $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$. La $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$, por lo tanto $\mathbf{b}$ no es unitario, pero

$$\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

sí lo es.

Llamaremos a $\dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ el *vector unitario en la dirección de* $\mathbf{b}$.

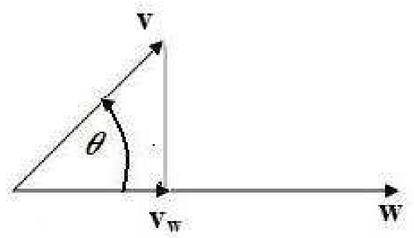
Notemos que (4) de la Proposición 3.4 nos permite, dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, calcular el valor del ángulo θ comprendido entre ellos, calculando

$$\theta = \operatorname{arcos}\left(\frac{\langle \mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}\right).$$

Así por ejemplo, si $\mathbf{a} = (2,0,0)$ y $\mathbf{b} = (1,1,0)$, el ángulo θ comprendido entre ellos es

$$\begin{aligned}\theta =& \operatorname{arcos}\left(\frac{\langle (2,0,0),(1,1,0)\rangle}{\|(2,0,0)\|\;\|(1,1,0)\|}\right)\\ =&\operatorname{arcos}\left(\frac{2}{\sqrt{4}\,\sqrt{2}}\right)\\ =&\operatorname{arcos}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ =&\pi/4.\end{aligned}$$

3.1. Proyección ortogonal. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no nulos y θ el ángulo comprendido entre ellos.



Proyectemos $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$. Esto nos da un nuevo vector que llamaremos *la proyección ortogonal de* $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ y denotaremos por $\mathbf{v}_w$. Daremos una expresión de $\mathbf{v}_w$ en términos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Supongamos primero que θ cumple $0 \leq \theta \leq \pi/2$. La longitud de la proyección $\mathbf{v}_w$ es

$$\|\mathbf{v}_w\| = \|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

y su dirección es la misma que la del vector unitario

$$\frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Así

$$\mathbf{v}_w = \|\mathbf{v}\| \cos\theta \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}. \tag{3.6}$$

Pero sabemos por la parte (4) de la Proposición 3.4 que

$$\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{w}\|}.$$

Reemplazando en (3.6) tenemos que

$$\mathbf{v}_w = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}\,. \tag{3.7}$$

El caso $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, es análogo y sigue valiendo la fórmula (3.7).

A continuación tenemos dos importantes definiciones.

Definición 3.5. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores no nulos.

(1) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se dicen *ortogonales* si $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0$.
(2) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se dicen *paralelos* si uno es un múltiplo escalar del otro o sea, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a} = r\,\mathbf{b}$.

Veamos que estas definiciones coinciden con la idea intuitiva de dos vectores perpendiculares o de dos vectores paralelos.

Notemos que cuando pensamos en un par de vectores perpendiculares no nulos estamos asumiendo que el ángulo comprendido entre ellos es recto. Llamemos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ a nuestro par de vectores perpendiculares no nulos y θ el ángulo comprendido entre ellos, que en este caso es $\theta = \pi/2$ medido en radianes. Por la parte (4) de la Proposición 3.4, y del hecho que $\cos\pi/2 = 0$, tenemos que

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\cos(\pi/2) = 0,$$

que es la propiedad que define un par de vectores ortogonales. Recíprocamente si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos tales que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = 0$, de nuevo, por (4) de la Proposición 3.4,

$$0 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\,\cos\theta.$$

Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son no nulos, $\cos\theta = 0$, por lo tanto $\theta = \pi/2$.

En el caso de 2 vectores paralelos, pensamos en 2 vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no nulos que tienen la misma dirección, pero sus sentidos y longitudes pueden ser distintas.

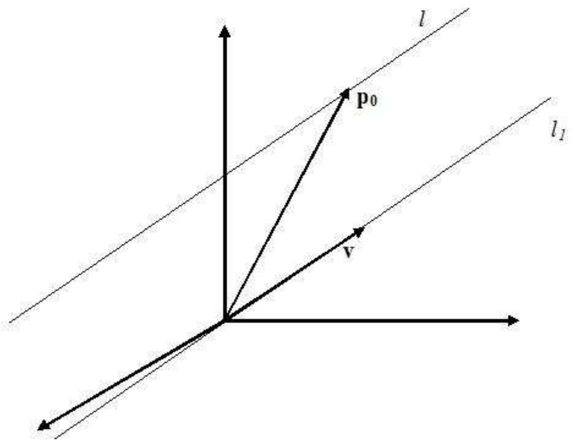
Dependiendo si $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ y $\dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ son iguales u opuestos, tenemos la relación $\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \pm\dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$, de donde deducimos inmediatamente que $\mathbf{a} = \pm\dfrac{\|\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}$, que es lo que queríamos ver.

Recíprocamente, si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen la misma dirección, por lo que coincide con la noción intuitiva de vectores paralelos.

4. Rectas en $\mathbb{R}^3$

Sean $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $\mathbf{v}$ es no nulo.

El conjunto de puntos $t\mathbf{v}$ con $t \in \mathbb{R}$ describe la recta l_1 que tiene la dirección de $\mathbf{v}$ y que pasa por el origen.



Ahora, los puntos de la forma $\mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ describen la recta l que pasa por el punto $\mathbf{p}_0$ y tiene la dirección de $\mathbf{v}$.

Definición 4.1. Sean $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con $\mathbf{v} \neq 0$. La *recta l que pasa por el punto $\mathbf{p}_0$ y tiene la dirección* de $\mathbf{v}$ es el conjunto de todos los $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que se expresan

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{v} \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

o equivalentemente,

$$l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} \text{ con } t \in \mathbb{R}\}. \tag{4.2}$$

La ecuación (4.1) se llama *ecuación vectorial de la recta* l y el vector $\mathbf{v}$ se llama *vector dirección* de l.

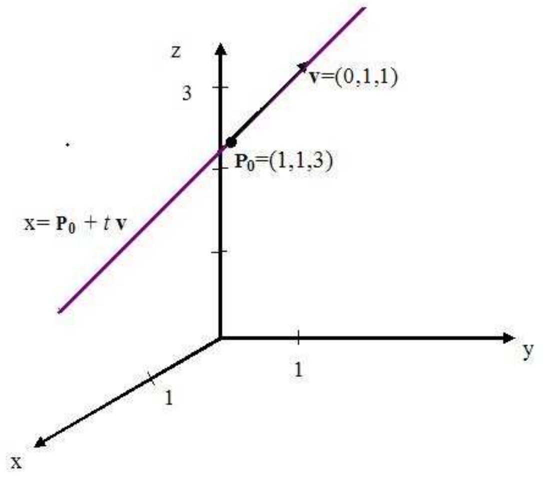
Ejemplo 4.2. Consideremos $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 3)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$. La ecuación vectorial de la recta que pasa por $\mathbf{p}_0$ y tiene dirección $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t\,\mathbf{v}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

o sea, la recta es el conjunto de los

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1, 1, 3) + t(0, 1, 1) \\ &= (1,\, 1 + t,\, 3 + t), \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$.



Nos podemos preguntar, por ejemplo si los puntos $(0,0,2)$ y $(1,-1,1)$ pertenecen o no a esta recta. Es decir, que queremos saber por ejemplo si existe algún número real t tal que $(0,0,2) = (1, 1+t, 3+t)$. Si igualamos coordenada a coordenada, esto nos da un sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \\ 0 &= t+1 \\ 2 &= t+3. \end{aligned}$$

La primera ecuación es una contradicción, de donde deducimos que es imposible que $(0,0,2)$ pertenezca a nuestra recta. Similarmente si asumimos que $(1,-1,1) = (1, 1+t, t+3)$, entonces tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

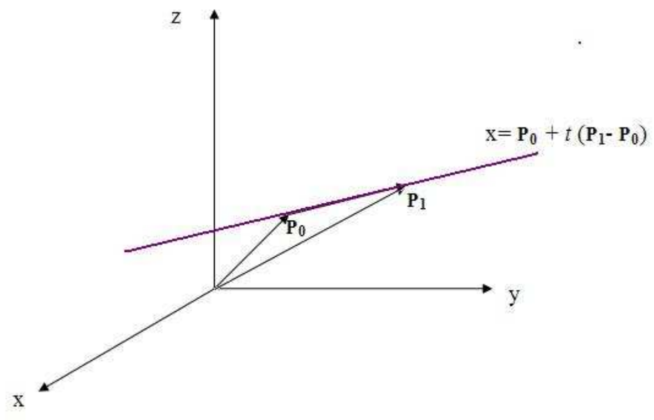
$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -1 &= t+1 \\ 1 &= t+3. \end{aligned}$$

Notemos que no tenemos aquí ecuaciones que nos conduzcan a un absurdo, es más, $t = -2$ es la solución que buscamos. Por lo tanto $(1,-1,1)$ sí pertenece a la recta.

Sabemos por los axiomas de la geometría euclideana que dados dos puntos $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$ en $\mathbb{R}^3$ hay una única recta que pasa por ellos. Si recordamos la representación geométrica de la diferencia de dos puntos, nos resulta natural la siguiente definición.

Definición 4.3. La *ecuación vectorial de la recta que pasa por* $\mathbf{p}_0$ *y* $\mathbf{p}_1$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$



Ejemplo 4.4. Consideremos los puntos $\mathbf{p}_0 = (1,0,2)$ y $\mathbf{p}_1 = (3,-5,7)$. La ecuación vectorial de la recta que pasa por estos puntos es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) &= (1,0,2) + t[(3,-5,7) - (1,0,2)]\\ &= (1,0,2) + t(2,-5,5).\end{aligned}$$

Por analogía con la noción de vectores ortogonales y paralelos, definimos

Definición 4.5. Dos rectas se dicen *paralelas* si sus vectores dirección son paralelos. Dos rectas se dicen *ortogonales* si sus vectores dirección son ortogonales y se cortan en un punto.

Ejemplos 4.6.

1. Consideramos

$$\mathbf{x} = (0,1,3) + t(1,-3,0) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

y

$$\mathbf{x} = t(-2,6,0) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Estas rectas son paralelas pues sus vectores dirección lo son. En efecto, $(-2,6,0) = (-2)(1,-3,0)$.

2. Las rectas

$$\mathbf{x} = (2,\pi,0) + t(1,0,0) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

y

$$\mathbf{x} = (3,\pi,0) + t(0,2,100) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R},$$

son perpendiculares, ya que

$$\langle (1,0,0),(0,2,100)\rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 100 = 0,$$

y se cortan en $(3,\pi,0)$.

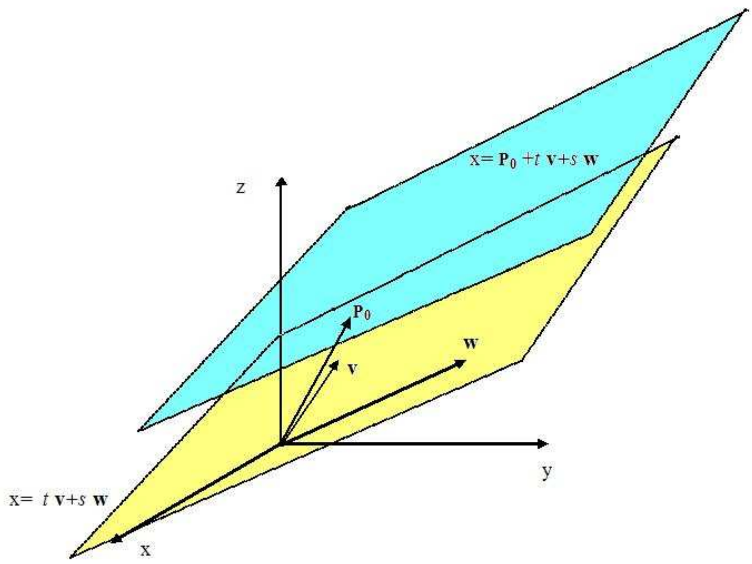
5. Planos en $\mathbb{R}^3$

Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no nulos y no paralelos. Si consideramos todos los múltiplos de $\mathbf{v}$, digamos $t\,\mathbf{v}$ con $t \in \mathbb{R}$ y a estos les sumamos todos los múltiplos de $\mathbf{w}$, o sea $s\mathbf{w}$ con $s \in \mathbb{R}$, obtendremos un plano que pasa por el origen formado por todos los puntos de la forma $t\mathbf{v} + s\mathbf{w}$ con t y s números reales. Si además a cada uno de estos puntos le sumamos un punto fijo $\mathbf{p}$, tenemos

Definición 5.1. El *plano generado por* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$ *que pasa por* $\mathbf{p}$, tiene ecuación

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \qquad \text{con } s \text{ y } t \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

La ecuación (5.1) se la llama la *ecuación vectorial* del plano generado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ que pasa por $\mathbf{p}$.



Por la geometría euclideana sabemos que un plano también queda determinado por alguna de las siguientes posibilidades

1. tres puntos no colineales,
2. una recta y un punto fuera de ella,
3. dos rectas paralelas (distintas).

La pregunta que cabe es cómo determinar la ecuación del plano en estos casos. Consideremos primero tres puntos no colineales digamos, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Así tenemos que

$$\mathbf{b}-\mathbf{a} \quad \text{y} \quad \mathbf{c}-\mathbf{a}$$

son dos vectores no nulos y no paralelos. Ahora el plano que contiene a $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es el plano que pasa por $\mathbf{a}$ y está generado por $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}-\mathbf{a}$, es decir su ecuación vectorial es

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+s(\mathbf{c}-\mathbf{a}) \qquad \text{con } t,\ s\in\mathbb{R} \tag{5.2}$$

Tomemos ahora una recta l y un punto $\mathbf{a}$ fuera de ella. Eligiendo dos puntos distintos $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ en la recta, tenemos tres puntos no colineales, por lo tanto estamos en el caso anterior.

Finalmente, si tenemos dos rectas paralelas nos basta elegir dos puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en una de ellas y un punto $\mathbf{c}$ en la otra y proceder como en el primer caso para encontrar la ecuación del plano determinado por estas rectas.

Ejemplos 5.2.

1. Consideremos

$$\mathbf{a}=(1,3,2) \qquad \mathbf{b}=(3,-2,2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c}=(2,1,3).$$

De acuerdo con (5.2), la ecuación vectorial del plano determinado por estos tres puntos es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+s(\mathbf{c}-\mathbf{a})+\mathbf{a}\\ &= t((3,-2,2)-(1,3,2))+s((2,1,3)-(1,3,2))+(1,3,2)\\ &= t(2,-5,0)+s(1,-2,1)+(1,3,2) \qquad \text{con } s,\ t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Ahora tomemos el punto $\mathbf{a}=(1,0,1)$ y la recta $\mathbf{x}=(2,1,0)+t(1,-1,0)$. Es fácil ver que $(1,0,1)$ no pertenece a la recta dada. Para determinar la ecuación del plano basta con tomar dos puntos sobre la recta. Por ejemplo podemos considerar el punto de la recta que corresponde a $t=0$, es decir $\mathbf{b}=(2,1,0)$ y el que corresponde a $t=1$, o sea, $\mathbf{c}=(3,0,0)$. Igual que en el ejemplo anterior, tenemos que la ecuación del plano que buscamos es

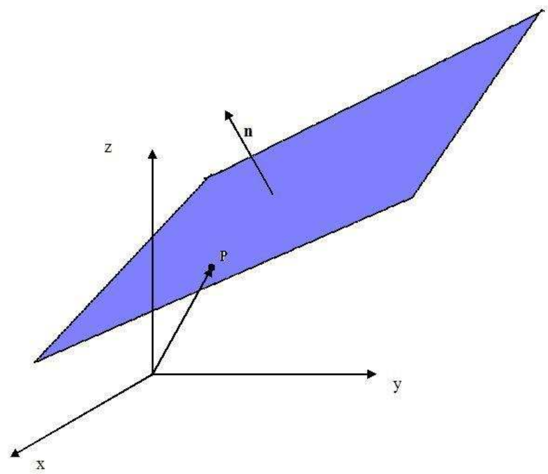
$$\mathbf{x}=(1,0,1)+(1,1,-1)t+(2,0,-1)s \qquad \text{con } s \text{ y } t\in\mathbb{R}.$$

Un plano también queda determinado dando un vector perpendicular $\mathbf{n}$ a dicho plano y un punto por el que pasa. Más precisamente

DEFINICIÓN 5.3. El *plano normal a* $\mathbf{n}$ *que pasa por* $\mathbf{p}$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, es decir

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0. \tag{5.3}$$

Esta ecuación es la llamada *ecuación normal del plano.*



Escribamos (5.3) en coordenadas: si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ y $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{p}), \mathbf{n} \rangle = \ & \langle (x - p_1, y - p_2, z - p_3), (n_1, n_2, n_3) \rangle \\ & = (x - p_1)n_1 + (y - p_2)n_2 + (z - p_3)n_3 \\ & = (xn_1 + yn_2 + zn_3) - d, \end{aligned}$$

donde $d = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3$. Acabamos de ver que la ecuación (5.3) es equivalente a lo que llamaremos la *ecuación cartesiana del plano que pasa por* $\mathbf{p}$ *y tiene vector normal* $\mathbf{n}$, es decir a

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d. \tag{5.4}$$

Notemos que dada la ecuación cartesiana de un plano, el vector cuyas coordenadas están formadas por los escalares que acompañan a x, y y z es el vector normal al plano dado.

EJEMPLOS 5.4.

1. La ecuación normal del plano que tiene como vector normal a $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$ y pasa por el origen es

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle = \langle (x, y, z), (1, 1, 1) \rangle = 0.$$

Así, $x + y + z = 0$ es la ecuación cartesiana de este plano.

2. Consideremos ahora el plano ortogonal a $(1,1,1)$, que pasa por $(1,0,1)$. Su ecuación normal es

$$\langle((x,y,z)-(1,0,1)),(1,1,1)\rangle=0.$$

Luego, su ecuación cartesiana es

$$x+y+z=2.$$

3. La ecuación $2x+y-z=0$ representa al plano que pasa por el origen, ya que $(0,0,0)$ satisface esta ecuación y tiene vector normal $\mathbf{n}=(2,1,-1)$.

4. $2x+y-z=1$ es el plano que tiene como vector normal a $\mathbf{n}=(2,1,-1)$ y pasa por el punto $(0,1,0)$, ya que este punto satisface la ecuación.

Definición 5.5. Dos planos son *paralelos* si sus vectores normales son paralelos. Dos planos son *ortogonales* si sus vectores normales lo son.

Por ejemplo, los planos $2x+3y-z=0$ y $-4x-6y+2z=1$ tienen vectores normales $\mathbf{n}_1=(2,3,-1)$ y $\mathbf{n}_2=(-4,-6,2)$ respectivamente. Como $-2\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2$, estos dos planos son paralelos.

Por otra parte, el plano $2x+3y-z=0$, con vector normal $\mathbf{n}_1=(2,3,-1)$, y el plano $x+2z=5$ cuyo vector normal es $\mathbf{n}_2=(1,0,2)$ son ortogonales ya que

$$\langle\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2\rangle=\langle(2,3,-1),(1,0,2)\rangle=2+0-2=0.$$

Estudiamos el siguiente problema:

“ Dada la ecuación normal o cartesiana de un plano obtener su ecuación vectorial y viceversa.”

Supongamos que tenemos dada la ecuación cartesiana del plano

$$n_1x+n_2y+n_3z=d \tag{5.5}$$

Para escribir la ecuación vectorial de este plano, buscamos dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no nulos y no paralelos que sean ortogonales al vector normal $\mathbf{n}=(n_1,n_2,n_3)$, y un punto $\mathbf{p}$ que pertenezca al plano, o sea un punto cuyas coordenadas satisfagan (5.5).

Ejemplo 5.6. Sea

$$2x+y-3z=3 \tag{5.6}$$

el plano con vector normal $\mathbf{n}=(2,1,-3)$. Buscamos un par de vectores $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ no nulos y no paralelos tales que sus coordenadas satisfagan la ecuación $2x+y-3z=0$. Por ejemplo podemos elegir $\mathbf{v}=(1,1,1)$ y $\mathbf{w}=(1,-2,0)$. Claramente son no paralelos entre sí. Notemos además que $\mathbf{p} = (1,1,0)$ cumple la ecuación (5.6) por lo tanto $\mathbf{p}$ pertenece al plano. Así, la ecuación vectorial del plano es

$$\mathbf{x} = (1,1,0) + t(1,1,1) + s(1,-2,0) \qquad \text{con } t,s \in \mathbb{R}.$$

Recíprocamente, supongamos que tenemos dada la ecuación vectorial del plano

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} + s\mathbf{w} \qquad \text{con } \ t,s \in \mathbb{R}$$

y queremos escribir su ecuación normal. Notemos que el plano viene dado en la ecuación vectorial, por lo tanto sólo necesitamos encontrar un vector $\mathbf{n}$ ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ que será el vector normal al plano. Para esto definimos el *producto cruz* de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Recordemos que $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$ y $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Definimos

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\
&= (v_2w_3 - v_3w_2)\mathbf{i} - (v_1w_3 - w_1v_3)\mathbf{j} + (v_1w_2 - w_1v_2)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que el producto cruz de dos vectores es un nuevo vector ortogonal a estos dos.

Ejemplo 5.7. Dada la ecuación

$$\mathbf{x} = (1,0,0) + t(1,1,-1) + s(3,0,2),$$

usando el producto cruz, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= (1,1,-1) \times (3,0,2) \\
&= \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\
&= (2,-5,-3)
\end{aligned}$$

y $\mathbf{p} = (1,0,0)$, así la ecuación normal es

$$\langle (x,y,z) - (1,0,0), (2,-5,-3) \rangle = 0.$$

5.1. Distancia de un punto a un plano. Supongamos que tenemos dada la ecuación normal de un plano al que denotaremos por π, es decir el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en el espacio que cumplen

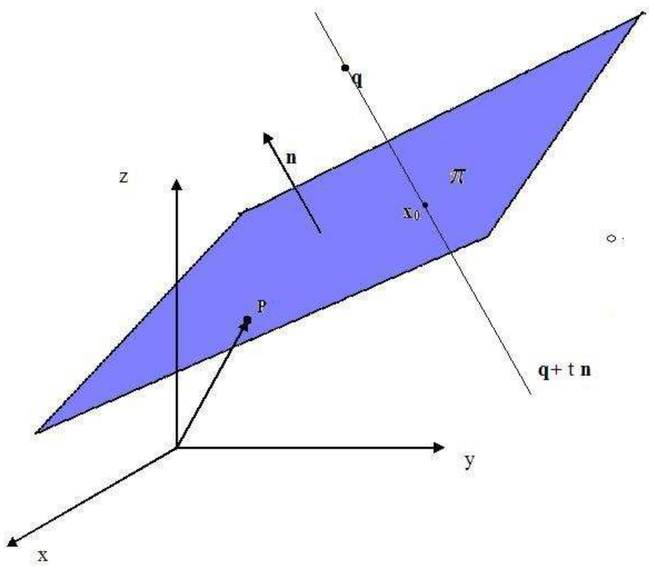
$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0,$$

y un punto $\mathbf{q}$ que no pertenece al plano. Para calcular la distancia de $\mathbf{q}$ al plano, que denotamos $d(\pi, \mathbf{q})$, notemos primero que dicha distancia es el menor de los números $\|\mathbf{x}-\mathbf{q}\|$ con $\mathbf{x}$ perteneciente al plano. Este número se obtiene cuando $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ es ortogonal al plano, es decir

$$\mathbf{x} - \mathbf{q} = t_0\, \mathbf{n}$$

para algún $t_0 \in \mathbb{R}$. Llamemos $\mathbf{x}_0$ al punto en el plano que realiza esta distancia, es decir el punto del plano tal que

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{q} = t_0 \mathbf{n}. \tag{5.7}$$



Por lo tanto

$$d(\pi, \mathbf{q}) = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{q}\| = |t_0|\, \|\mathbf{n}\|. \tag{5.8}$$

Por otra parte, como $\mathbf{x}_0$ pertenece al plano, satisface

$$\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0.$$

Usando (5.7) tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{q} + t_0\, \mathbf{n} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle \\ &= \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle + t_0 \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle. \end{aligned}$$

Despejando

$$\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = -t_0 \|\mathbf{n}\|^2$$

y tomando valor absoluto en ambos miembros

$$|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle| = |t_0| \, \|\mathbf{n}\|^2. \tag{5.9}$$

Por (5.8) tenemos que $d(\pi, \mathbf{q}) = |t_0| \, \mathbf{n}$. Reemplazando esto en (5.9) tenemos que

$$d(\pi, \mathbf{q}) = \frac{|\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}, \tag{5.10}$$

y el punto $\mathbf{x}_0$ del plano que se encuentra a la menor distancia de $\mathbf{q}$ es

$$\mathbf{x}_0 = -\frac{\langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle}{||\mathbf{n}||^2}\mathbf{n} + \mathbf{q}.$$

Ejemplo 5.8. Hallar la distancia del punto $\mathbf{q} = (1, 4, 1)$ al plano de ecuación

$$2x - y + 2z = 10. \tag{5.11}$$

De (5.11) deducimos que el vector normal es $\mathbf{n} = (2, -1, 2)$ y $\mathbf{p} = (5, 0, 0)$ pertenece al plano. Aplicando (5.10) tenemos que

$$\begin{aligned} d(\pi, (1, 4, 1)) &= \frac{|\langle (1, 4, 1) - (5, 0, 0), (2, -1, 2) \rangle|}{\|(2, -1, 2)\|} \\ &= \frac{|-10|}{3} \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

6. Funciones de varias variables

Ya hemos estudiado $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$. Estas son las funciones de una variable.

Muchas cantidades pueden ser miradas como dependiendo de más de una variable. Por ejemplo el volumen de un cilindro circular de radio r y altura h está dado por $V = \pi r^2 h$, decimos que V depende de r y h. Si elegimos denotar esta asignación por f, podríamos escribir $V = f(r, h)$ donde $f(r, h) = \pi r^2 h$, con $r > 0, h > 0$.

Así f es función de dos variables que tiene como dominio el conjunto de puntos, en el plano rh, con coordenadas (r, h) satisfaciendo $r > 0, h > 0$.

Denotaremos por $\mathbb{R}^n$ al conjunto de n-uplas de números reales. Por analogía con la correspondiente definición para funciones de una variable, definimos una función de n variables como sigue:

Definición 6.1. Una *función* f de n variables es una regla que asigna un único número real $f(x_1, ..., x_n)$ a cada punto $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ en algún subconjunto $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}(f)$ se llama el *dominio* de f. El conjunto de números reales $f(\mathbf{x})$ obtenidos a partir de puntos del dominio se llama el *rango* de f.

Como para funciones de una variable, se toma el dominio de una función f de n variables como el mayor conjunto de puntos $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ para los cuales $f(\mathbf{x})$ esté bien definida como un número real, a menos que el dominio esté explicitado de antemano.

Si $n = 2$ ó $n = 3$ se suele usar (x, y) ó (x, y, z) en vez de (x_1, x_2) ó (x_1, x_2, x_3).

Ejemplos 6.2.

1. $f(x, y) = x^2y - y^3$ $\qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$.

2. $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ $\qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

3. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}},$ $\qquad \mathcal{D}(f) = B(\mathbf{0}, 1)$,

donde $B(\mathbf{0}, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ es la bola unitaria abierta centrada en $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^3$.

4. $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

En este caso estamos explicitando que $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, aunque la asignación también tiene sentido para $(x, y) = (0, 0)$.

Definición 6.3. Si f es una función de n variables, el *gráfico de* f es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$G(f) = \{(x_1, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, ..., x_n) \in \mathcal{D}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, ..., x_n)\}.$$

Sólo podemos dibujar funciones de una ó dos variables. Si f es de una variable, ya sabemos que como gráfico obtenemos una curva

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \mathcal{D}(f),\; y = f(x)\}.$$

Si f es de dos variables obtenemos una superficie.

Ejemplos 6.4.

1. Sea $f(x, y) = 2x + 3y + 1$. Su dominio es $\mathbb{R}^2$, y su gráfico está dado por

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, z = 2x + 3y + 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3y - 2x = 1\}.$$

Entonces $G(f)$ es el plano que pasa por $\mathbf{p} = (0,0,1)$, con vector normal $\mathbf{n} = (-2,-3,1)$. Ver Figura 3.

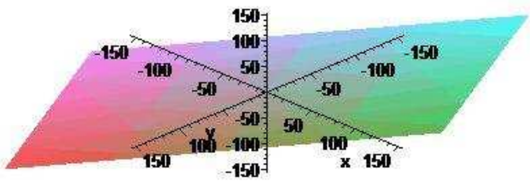


FIGURA 3

2. Consideremos ahora $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. En este caso

$$\mathcal{D}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y

$$\begin{aligned} G(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \end{aligned}$$

es la semiesfera superior, centrada en $(0,0,0)$, de radio 1. Ver Figura 4.

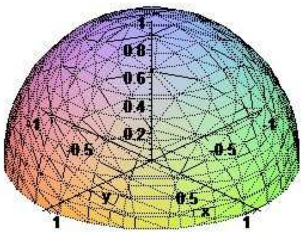


FIGURA 4

7. Límite y continuidad de funciones de n variables

Dado $r > 0$ y $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{p}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}$.

DEFINICIÓN 7.1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *abierto* si dado cualquier $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ en A existe $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq A$.

Definición 7.2. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ se dice *punto de acumulación de A* si para todo $r > 0$, $B(\mathbf{p}, r)$ contiene puntos de A distintos de $\mathbf{p}$.

Generalizamos ahora las nociones de límite y continuidad que conocemos para funciones de una variable.

Para definir la noción de límite, queremos que los valores $f(\mathbf{x})$ se acerquen a un número l cuando $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{p}$.

Definición 7.3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{p}$ un punto de acumulación de A. Se dice que $l \in \mathbb{R}$ es el *límite de $f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x}$ que tiende a $\mathbf{p}$* y se escribe

$$l = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x})$$

si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A \backslash \{\mathbf{p}\}, \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

Definición 7.4. Sea $A \subset \mathbb{R}^n, f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que f es *continua* en $\mathbf{p} \in A$, si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tal que

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})| < \varepsilon.$$

f se dice *continua en A*, si es continua en cada punto de A.

Nota. Si $\mathbf{p}$ es un punto de acumulación de A, f es continua en $\mathbf{p}$ si y sólo si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}).$$

Teorema 7.5. *Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, continuas en un punto $\mathbf{p} \in A$. Entonces $f + g$ y fg son continuas en $\mathbf{p}$. Además, si $g(\mathbf{p}) \neq 0$, también f/g es continua en $\mathbf{p}$.*

La demostración es idéntica a aquélla para funciones de una variable.

En lo que respecta a la composición, vale el siguiente

Teorema 7.6. *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, continua en un punto $\mathbf{p} \in A$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $f(\mathbf{p})$, entonces $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{p}$.*

Una situación particular se presenta cuando $f(x, y) = h(x)$ con h continua en x_0. En este caso, f resulta continua en (x_0, y_0) para todo $y_0 \in \mathbb{R}$.

En efecto, la continuidad de h en x_0 nos garantiza que, dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

si $|x - x_0| < \delta$. Pero como $||(x,y) - (x_0,y_0)|| \geq |x - x_0|$, el resultado sigue.

EJEMPLO 7.7.

$f(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy)\cos(z) + x^3$ es continua en $\mathbb{R}^3$ pues las aplicaciones $(x,y,z) \mapsto x$, $(x,y,z) \mapsto \cos(z)$ y $(x,y,z) \mapsto y$ son continuas por la observación anterior. El Teorema 7.5 entonces garantiza la continuidad de $(x,y,z) \mapsto x^3$ y de $(x,y,z) \mapsto xy$. Por Teorema 7.6 resulta también continua $(x,y,z) \mapsto \operatorname{sen}(xy)$ y nuevamente usamos el Teorema 7.5 para obtener la continuidad de f.

Un importante teorema válido para funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ asegura que si f es continua en el intervalo cerrado [a,b] entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en puntos de [a,b]. Este resultado se generaliza a funciones de n variables, reemplazando el intervalo [a,b] por ciertos subconjuntos $K \subset \mathbb{R}^n$ *acotados*, o sea que están contenidos en $B(0,M)$ para algún $M > 0$.

TEOREMA 7.8. *(Weierstrass). Sea $f : K \to \mathbb{R}, K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, acotado, que contiene a todos sus puntos de acumulación. Supongamos que f es continua en K. Entonces f alcanza su valor máximo y su valor mínimo sobre K.*

8. Derivadas parciales

Dada una función f de n variables, si pensamos que dejamos $n-1$ variables fijas y movemos la restante, obtenemos una función de variable real, de la que sabemos decir cuándo es derivable en un punto.

Daremos la siguiente definición para el caso $n = 2$, por simplicidad, pero la definición en el caso general es análoga.

DEFINICIÓN 8.1. Sea f una función de dos variables definida en un conjunto abierto A. La *derivada parcial de f respecto de x* es la función f_x tal que su valor en cualquier punto $(x,y) \in A$ está dado por

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

si este límite existe.

Análogamente, la *derivada parcial de f respecto de y* es la función f_y tal que su valor en cualquier $(x,y) \in A$ está dado por

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

si este límite existe.

¿Cómo interpretamos geométricamente estas derivadas parciales? Si definimos $g(x) = f(x, y_0)$, el gráfico de g se obtiene intersecando el gráfico de f con el plano de ecuación $y = y_0$ y por lo tanto la derivada de g en el punto (x_0, y_0) será la pendiente de la recta tangente a la curva, en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

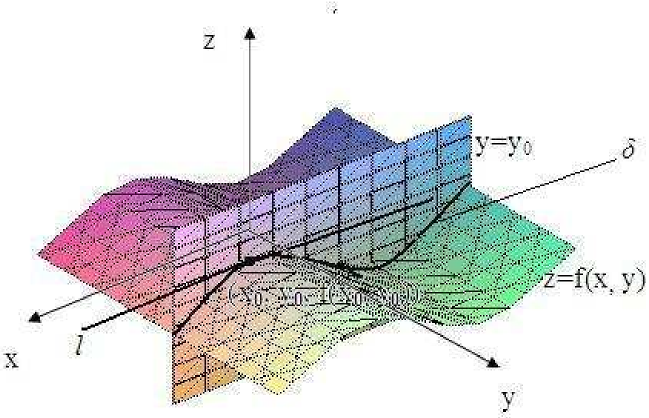


Figura 5. Aquí, δ es la curva dada por la intersección de gráfico de f con el plano $y = y_0$ y l es la recta tangente a dicha curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ejemplos 8.2.

1. Si $f(x,y) = xy - x^2 + y^5$,

$$f_x(x,y) = y - 2x, \qquad f_y(x,y) = x + 5y^4.$$

2. Si $f(x,y) = x^3\cos^2(xy)$,

$$f_x(x,y) = 3x^2\cos^2(xy) - 2x^3y\cos(xy)\mathrm{sen}(xy),$$
$$f_y(x,y) = -2x^4\cos(xy)\mathrm{sen}(xy).$$

Otros símbolos usados para derivadas parciales, en lugar de f_x son $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $D_x f$, f_1 y en lugar de f_y son $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $D_y f, f_2$.

Si f es de n variables, se usan las notaciones análogas, $f_{xi}, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, D_{x_i}, f_i$.

EJEMPLO 8.3.

Si $f(x, y, z) = xyz - 2z^3$,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy - 6z^2.$$

9. Derivadas sucesivas

Dada una función f de n variables para la cuales existen sus n derivadas parciales $f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)$ para todo x de un cierto conjunto A, podemos preguntamos si existen las derivadas parciales de cada $f_{x_i}, 1 \leq i \leq n$. Hay a lo sumo n^2 de ellas.

Si $n = 2$, $\qquad (f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$.

Si $n = 3$, $\qquad (f_x)_x, (f_x)_y, (f_x)_z, (f_y)_x, (f_y)_y, (f_y)_z, (f_z)_x, (f_z)_y, (f_z)_z$.

Estas se llaman *segundas derivadas parciales de f.* Se denotan con los siguientes símbolos:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

EJEMPLO 9.1. Sea $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen}(x^2 y)$,

$$\begin{aligned}
&f_x(x, y) = 2x + 2xy\cos(x^2 y), \quad f_y = x^2\cos(x^2 y),\\
&f_{xx}(x, y) = 2 + 2y\cos(x^2 y) - 4x^2y^2\operatorname{sen}(x^2 y),\\
&f_{xy}(x, y) = 2x\cos(x^2 y) - 2x^3 y\operatorname{sen}(x^2 y),\\
&f_{yx}(x, y) = 2x\cos(x^2 y) - 2x^3 y\operatorname{sen}(x^2 y), \quad f_{yy}(x, y) = -x^4\operatorname{sen}(x^2 y).
\end{aligned}$$

Observamos en este ejemplo, y si efectuamos los cálculos en los anteriores también, que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Nos preguntamos si siempre vale la igualdad.

TEOREMA 9.2. *(Schwartz). Si f es una función de dos variables con segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$ para todo $(x, y) \in A$.*

Si continuamos con este proceso de volver a derivar, obtenemos las terceras derivadas parciales, denotadas

$$f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \qquad f_{xxy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \qquad \text{etc.}$$

A las derivadas de orden $k \geq 1$ las denotamos

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}} \qquad 0 \leq j \leq k.$$

En muchos casos se obtiene igualdad de dos derivadas sucesivas realizadas en distinto orden. Por ejemplo si f tiene terceras derivadas parciales continuas, podemos aplicar el Teorema de Schwartz a f_x para obtener que $f_{xxy} = f_{xyx}$.

10. Derivadas direccionales

Si f es una función de dos variables, $f_x(x_0, y_0)$ da la tasa de variación de f en el punto $\mathbf{p_0} = (x_0, y_0)$ cuando nos movemos en el dominio de f sobre una recta paralela al eje x, que pasa por $\mathbf{p_0}$. Análogamente interpretamos $f_y(x_0, y_0)$. Las direcciones se pueden dar en términos de vectores unitarios. Así la $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ se calculan tomando los valores de f sobre las rectas de ecuaciones $\mathbf{p_0} + t\mathbf{i}$, $t \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{p_0} + t\mathbf{j}$, $t \in \mathbb{R}$ respectivamente, donde $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$.

A diferencia del caso de una variable, una función de dos variables puede tener ambas derivadas parciales en un punto (x_0, y_0) y **no** ser continua en dicho punto como sucede en el ejemplo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

para $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En efecto,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \tfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Pero f no es continua en $(0, 0)$. Ni siquiera existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ por que $f(0, y) = 0 = f(x, 0)$, pero $f(x, x) = \frac{1}{2}$. Entonces acercándonos al $(0, 0)$ por los ejes coordenados, f toma el valor cero y por la recta $y = x$, f toma el valor $\dfrac{1}{2}$.

Para obtener más información sobre f en $\mathbf{p_0} = (x_0, y_0)$ es conveniente conocer también la tasa de variación de f en $\mathbf{p_0}$ cuando nos movemos, a partir de él, en la dirección dada por un vector unitario $\mathbf{u}$.
Tomamos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ tal que $u_1^2 + u_2^2 = 1$ y suponemos que $\mathcal{D}(f)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

Definición 10.1. La *derivada direccional de* f en la dirección de $\mathbf{u}$ es la función dada, para $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$, por

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hu_1, y+hu_2) - f(x,y)}{h},$$

si este límite existe.

Observemos que $f_x = D_{\mathbf{i}}\, f$ y $f_y = D_{\mathbf{j}}\, f$.
Dado $(x, y) \in \mathcal{D}(f)$, para t suficientemente chico, llamamos

$$g(t) = f(x + tu_1, y + tu_2),$$

y resulta

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=\frac{dg}{dt}(0). \tag{10.1}$$

Más adelante daremos un teorema que nos permitirá calcular las derivadas direccionales sin usar la definición. Para ello necesitamos un resultado, que tiene importancia en sí mismo, que es la llamada regla de la cadena.

11. Regla de la cadena

Sea f una función de dos variables definida en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que f_x y f_y son continuas en A. Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos funciones derivables en un intervalo abierto I y supongamos que $(x(t), y(t)) \in A$ para todo $t \in I$. Definimos la composición $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Entonces g es derivable para todo $t \in I$ y vale

$$\frac{dg}{dt}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big)\,\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big)\,\frac{dy}{dt}(t). \tag{11.1}$$

Ejemplo 11.1. Sea $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^3$ con $x(t) = t$ y $y(t) = \operatorname{sen} t$. Como

$$f_x(x,y)=2x+2y \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y)=2x+3y^2,$$

por la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dg}{dt}=2t+2\ \operatorname{sen} t+(2t+3\ \operatorname{sen}^2 t)\ \cos t.$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente

Teorema 11.2. *Sea f una función de dos variables, definida en un conjunto abierto $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario. Supongamos que f_x y f_y existen y son continuas en A. Entonces si $(x, y) \in A$,*

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y)=f_x(x,y)u_1+f_y(x,y)u_2.$$

Prueba. Sabemos por (10.1) que $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = g'(0)$ donde

$$g(t)=f(x+tu_1,y+tu_2).$$

Llamamos $x(t) = x+tu_1$ y $y(t) = y+tu_2$. Como $x(0) = x, y(0) = y, x'(0) = u_1$, $y'(0) = u_2$, por la regla de la cadena resulta

$$\frac{dg}{dt}(0)=f_x(x,y)u_1+f_y(x,y)u_2.$$

$\square$

Definición 11.3. Sea f una función de dos variables tal que $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ existen. El *gradiente de f en (x,y)* es el vector de $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)).$$

Con esta notación, la conclusión del teorema anterior se lee

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), \mathbf{u}\rangle. \tag{11.2}$$

Ejemplo 11.4. Calcule la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2y - 2xy^2$ en el punto $(-1,2)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = (2,5)$.

Solución. Primero calculamos el $\nabla f(-1,2)$. Como

$$\nabla f(x,y) = (2xy - 2y^2, x^2 - 4xy),$$

tenemos que $\nabla f(-1,2) = (-12,9)$.

Notemos que $\mathbf{v}$ no es unitario, el vector unitario $\mathbf{u}$, en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{29}}, \dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$. Por consiguiente, gracias a la ecuación (11.2),

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(-1,2) &= \langle \nabla f(-1,2), \mathbf{u}\rangle \\ &= \langle (-12,9), (\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}})\rangle \\ &= \frac{-24}{\sqrt{29}} + \frac{45}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{21}{\sqrt{29}}. \end{aligned}$$

Para funciones de tres variables definimos las derivadas direccionales de manera análoga. Tomamos $\mathbf{u} = (\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3})$ tal que $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Suponemos que $\mathcal{D}(f)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$.

Definición 11.5. La *derivada direccional* de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es la función dada, para $(x,y,z) \in \mathcal{D}(f)$, por

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hu_1, y+hu_2, z+hu_3) - f(x,y,z)}{h}$$

si este límite existe.

Usando notación vectorial, podemos escribir las definiciones de derivada direccional para funciones de dos ó tres variables de manera unificada

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Si $f(x,y,z)$ tiene derivadas parciales continuas y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es unitario, como en el caso de dos variables se prueba que

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = f_x(x,y,z)u_1 + f_y(x,y,z)u_2 + f_z(x,y,z)u_3,$$

y si definimos el *gradiente de* f por

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)),$$

esta fórmula se lee

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \langle \nabla f(x,y,z), \mathbf{u}\rangle. \tag{11.3}$$

Si f es de dos o tres variables, consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto dado. Esto proporciona las *tasas o razones de cambio* de f en todas las direcciones posibles. Nos preguntamos en cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad y cuál es la máxima razón de cambio. La respuesta está en el siguiente

Teorema 11.6. *Sea f una función de dos o tres variables con derivadas parciales continuas en un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sea $\mathbf{x} \in A$ y $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x})$ es $||\nabla f(\mathbf{x})||$ y se presenta cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que el vector $\nabla f(\mathbf{x})$, o sea cuando $\mathbf{u} = \lambda \nabla f(\mathbf{x})$, con $\lambda > 0$.*

Prueba. De las ecuaciones (11.2) y (11.3) tenemos

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{u}\rangle = ||\nabla f(\mathbf{x})||\,||\mathbf{u}||\cos(\theta) = ||\nabla f(\mathbf{x})||\cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre $\nabla f(\mathbf{x})$ y $\mathbf{u}$. El valor máximo posible de $\cos(\theta)$ es 1, cuando $\theta = 0$ y eso ocurre si $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\nabla f(\mathbf{x})$. □

Ejemplos 11.7. Sea $f(x,y) = x\cos y$.

1. Calcule la razón de cambio de f en el punto $\mathbf{p} = (2, \pi/4)$ en la dirección de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q} = (0, \pi/4)$.

2. ¿ En qué dirección tiene f máxima razón de cambio en el punto $\mathbf{p}$? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?

Solución. **1.** Como $\nabla f(x,y) = (\cos y, -x\,\mathrm{sen} y)$, entonces $\nabla f(\mathbf{p}) = \nabla f(2,\pi/4) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$.

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{q}-\mathbf{p}}{||\mathbf{p}-\mathbf{q}||} = \frac{(-2,0)}{||(-2,0)||} = (-1,0),$$

de modo que la razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(2,\pi/4) = \langle \nabla f(2,\pi/4), \mathbf{u}\rangle = \langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}), (-1,0)\rangle = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. De acuerdo con el Teorema 11.6, f se incrementa más rápido en la dirección del $\nabla f(2,\pi/4) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ y la máxima razón de cambio es

$$||\nabla f(2,\pi/4)|| = ||(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})|| = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

12. Curvas de nivel y gráfico de funciones

Un método muy útil para poder obtener información acerca del comportamiento de funciones de dos variables es elaborar un mapa de contorno, en el que se unan los puntos de igual elevación, para formar curvas de nivel.

Definición 12.1. La *curva de nivel* k de una función f de dos variables es la curva con ecuación $f(x,y) = k$, donde k es una constante.

Entonces una curva de nivel es el lugar geométrico del plano donde la función f toma el valor k (o sea la gráfica de f tiene altura k). La superficie dada como el gráfico de f será más empinada en donde las curvas de nivel se aproximan entre sí y más plana en donde aquéllas están separadas.

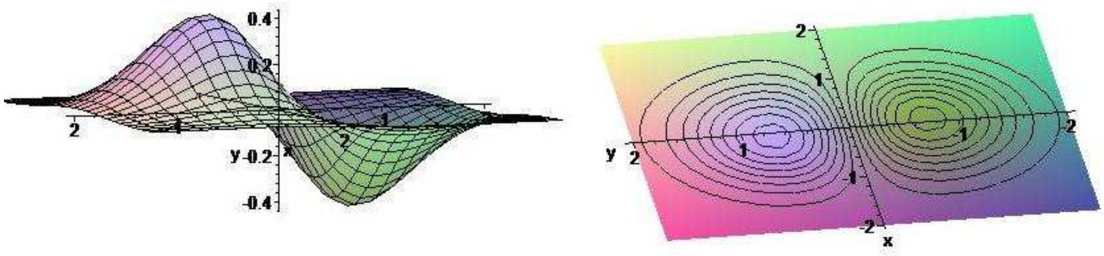


Figura 6. Gráfico de $f(x,y) = x\,e^{-x^2-y^2}$ y sus correspondientes curvas de nivel.

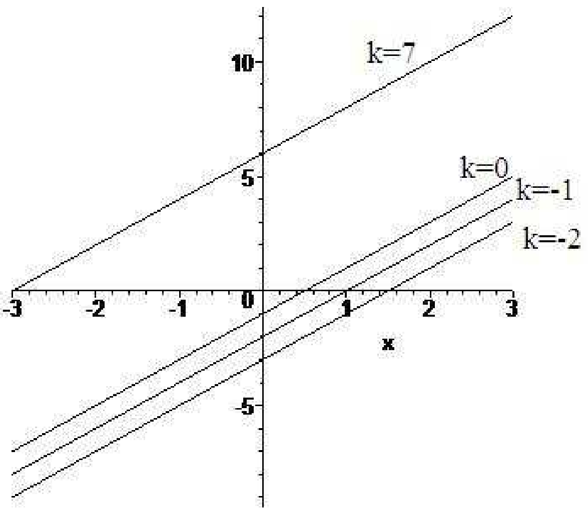
Un ejemplo frecuente de esta técnica son los mapas topográficos de regiones montañosas.

Ejemplo 12.2. Dibuje las curvas de nivel de $f(x,y) = 1-2x+y$ para $k = -2,-1,0,7$.

Solución. Las curvas de nivel son $1 - 2x + y = k$ que dan lugar a una familia de rectas de pendiente 2. Las correspondientes a los cuatro valores dados de k son

$$y = 2x - 3, \quad y = 2x - 2, \quad y = 2x - 1, \quad y = 2x + 6$$

que están dibujadas abajo



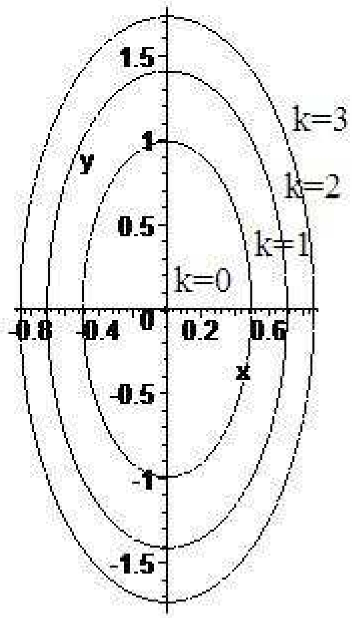
EJEMPLO 12.3. Dibuje algunas curvas de nivel de la función

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2.$$

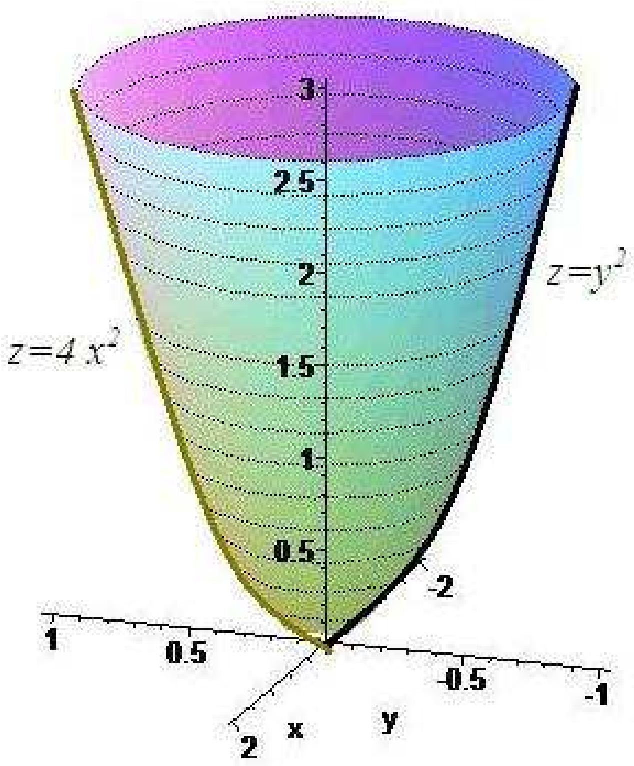
Solución. Las curvas de nivel son, si $k > 0$,

$$4x^2 + y^2 = k \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{k/4} + \frac{y^2}{k} = 1.$$

que describen una familia de elipses con semiejes $\frac{\sqrt{k}}{2}$ y $\sqrt{k}$. Si $k = 0$ obtenemos sólo el punto $(0, 0)$ y si $k < 0$, el conjunto vacío.



Para dibujar la gráfica de una función f es útil trazar las curvas de nivel. Por el ejemplo anterior sabemos que la proyección al plano xy de la intersección del plano $z = k$ con la gráfica de $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ es una elipse (ver la figura de arriba). Además en el plano yz obtenemos la parábola $z = y^2$, y en el plano xz obtenemos la parábola $z = 4x^2$. Podemos entonces graficar aproximadamente del siguiente modo:



EJEMPLO 12.4. Grafique $h(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución. Debemos describir $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = ln\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Las curvas de nivel son $ln\sqrt{x^2+y^2} = k$, o sea $\sqrt{x^2+y^2} = e^k$ y estas son circunferencias de centro $(0,0)$ y radio e^k.

En el plano xz obtenemos la curva $z = ln|x|$ y en el plano yz obtenemos la curva $z = ln|y|$. Así, la gráfica esta dada por la Figura 7.

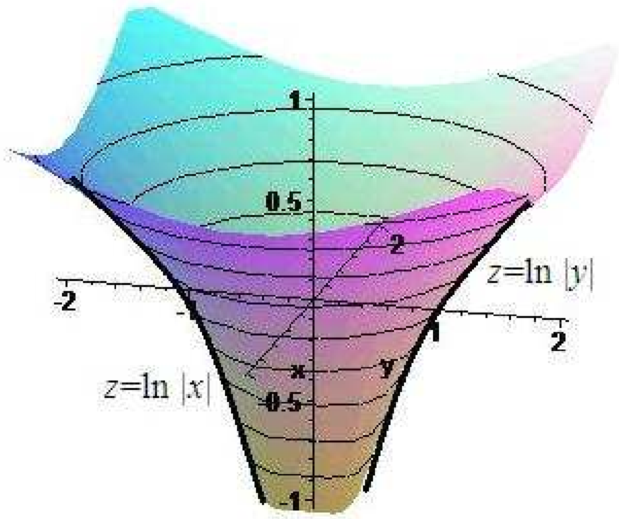


FIGURA 7. Gráfico de $f(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$.

13. Curvas en el espacio

Sean f, g, y h funciones reales y continuas definidas en un intervalo I. El conjunto C de todos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ donde

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

con t variando en el intervalo I se llama *curva en el espacio* y a t se le llama un *parámetro.* Podemos pensar que $(f(t), g(t), h(t))$ describe la posición, en el tiempo t, de una partícula que se está moviendo en el espacio.

EJEMPLO 13.1. Describa la curva definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (1-2t, 3t, 3+5t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Solución. Para $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{r}(t) = (1,0,3) + t(-2,3,5)$ y sabemos que está es la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(1,0,3)$ y es paralela al vector $(-2,3,5)$.

EJEMPLO 13.2. Dibuje la curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t,\ t)$.

Solución. Si (x, y, z) está en la curva, debe satisfacer

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\ \mathrm{sen}\, t, \quad z = t,$$

para algún t real, entonces $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ y por lo tanto (x, y, z) debe pertenecer al cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Como además $z = t$, la curva describe una espiral ascendente conforme t aumenta. Esta curva se llama *hélice.*

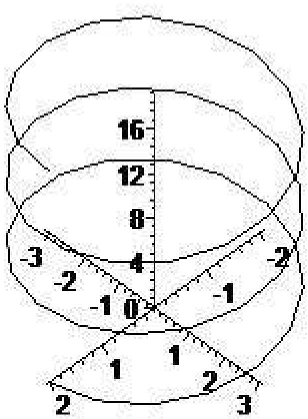


FIGURA 8. Curva cuya ecuación vectorial es $\mathbf{x}(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t,\, t)$, llamada hélice.

Dada una curva C descripta por $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t), h(t))$ con $t \in I$, si existen $f'(t_0)$, $g'(t_0)$ y $h'(t_0)$, para un $t_0 \in I$, definimos la *derivada de la función vectorial* $\mathbf{r}$ en el punto t_0 como

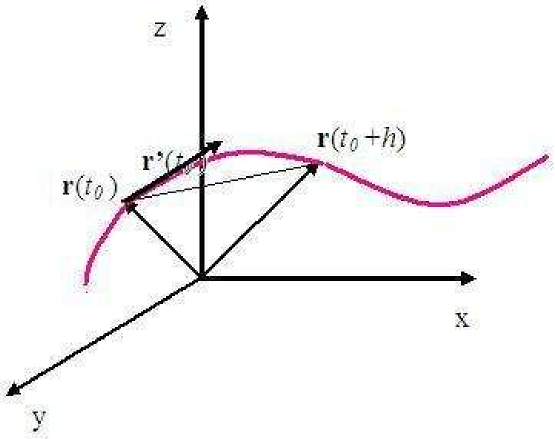
$$\mathbf{r}'(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)).$$

El significado geométrico de este vector $\mathbf{r}'(t_0)$ es el siguiente. Si t es muy pequeño,

$$\frac{\mathbf{r}(t_0 + t) - \mathbf{r}(t_0)}{t} = \left(\frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t}, \frac{g(t_0 + t) - g(t_0)}{t}, \frac{h(t_0 + t) - h(t_0)}{t} \right)$$

tiene una dirección secante desde $\mathbf{r}(t_0)$ hacia $\mathbf{r}(t_0 + t)$, si $t > 0$, que tiene como dirección límite la de la tangente a la curva en el punto $\mathbf{r}(t_0)$. Ver gráfico.

Por esta razón el vector $\mathbf{r}'(t_0)$ se llama *vector tangente* a la curva C en el punto $\mathbf{r}(t_0)$ siempre que $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$.



Ejemplo 13.3. Sea C la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = t\,\cos\,2\pi\,t, \quad y = t\,\mathrm{sen}\,2\pi\,t, \;\; z = 4t, \qquad \text{con}\, t \in \mathbb{R}.$$

Dé la ecuación de la recta tangente a C en el punto correspondiente a $t = 1/4$.

Solución. Si $t = 1/4$ obtenemos el punto $\mathbf{p} = (0, \frac{1}{4}, 1)$. Si llamamos

$$\mathbf{r}(t) = (t\,\cos\,2\,\pi\,t, t\,\mathrm{sen}\,2\,\pi\,t, \; 4t),$$

obtenemos

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos\,2\,\pi\,t - 2\,\pi\,t\,\mathrm{sen}\,2\,\pi t, \mathrm{sen}\,2\,\pi\,t + 2\,\pi\,t\,\cos\,2\,\pi\,t, \; 4),$$

por lo tanto $\mathbf{r}'(1/4) = (-\frac{\pi}{2}, 1, 4)$, entonces la recta tangente a C en el punto $\mathbf{p}$ tiene ecuación vectorial

$$\mathbf{x} = \left(0, \frac{1}{4}, 1\right) + t\left(-\frac{\pi}{2}, 1, 4\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

14. Plano tangente a superficies de nivel

Si F es una función de tres variables y k es un número real, definimos la *superficie de nivel k de F* como los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $F(x, y, z) = k$.

Sea $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en la superficie S y sea C cualquier curva que está en la superficie S que pasa por $\mathbf{p}$. C se describe mediante la ecuación vectorial $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sea t_0 tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p}$. Entonces tenemos

(a) $F(x_0, y_0, z_0) = k$

(b) $F(x(t), y(t), z(t)) = k$

(c) $(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{p}$.

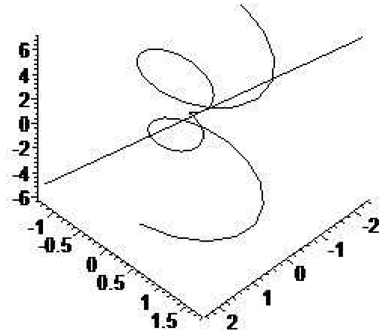


FIGURA 9. La curva $x = t\cos 2\pi t$, $\;y = t\,\mathrm{sen}\,2\pi t$, $\;z = 4t$, con $t \in \mathbb{R}$, y su recta tangente en $t = 1/4$.

Si ahora suponemos que x, y y z son funciones derivables en t_0 y F tiene primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto A que contiene a $\mathbf{p}$, podemos derivar ambos miembros de la ecuación (b) y obtener mediante la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} F_x(x(t_0), y(t_0), z(t_0))x'(t_0) \quad + & \quad F_y(x(t_0), y(t_0), z(t_0))y'(t_0) \\ & + F_z(x(t_0), y(t_0), z(t_0))z'(t_0) = 0, \end{aligned} \tag{14.1}$$

por (c) esto se escribe

$$\langle \nabla F(\mathbf{p}), \mathbf{x}'(t_0)\rangle = 0$$

y esto se interpreta geométricamente diciendo que el vector gradiente de F en $\mathbf{p}$ es perpendicular al vector tangente $\mathbf{x}'(t_0)$ a cualquier curva C que esté en S y que pase por el punto $\mathbf{p}$. Si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ resulta entonces natural definir *el plano tangente a la superficie de nivel* k de F *en el punto* (x_0, y_0, z_0) como el plano que pasa por (x_0, y_0, z_0) y que tiene vector normal $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$, o sea como el plano de ecuación $\langle \nabla F(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) - \mathbf{p}\rangle = 0$ o equivalentemente

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

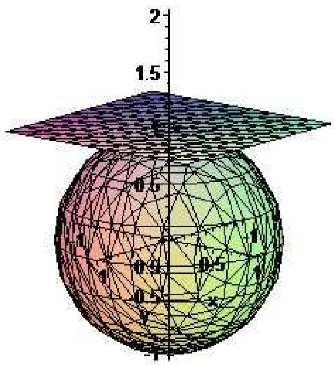
También definimos el *vector normal* a S en (x_0, y_0, z_0) como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

EJEMPLO 14.1. Sea S definida por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, o sea la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que en el punto $(0, 0, 1)$, S tiene plano tangente horizontal.

Solución. Tomamos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, de modo que S es la superficie de nivel uno de F. Su plano tangente en $(0, 0, 1)$ es el plano perpendicular al $\nabla F(0, 0, 1)$, que pasa por $(0,0,1)$. Como $\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, el plano buscado está dado por la ecuación

$$\langle (0,0,2), (x,y,z-1) \rangle = 0, \text{ o sea } 2(z-1) = 0,$$

o lo que es lo mismo, el plano horizontal de ecuación $z = 1$, como se puede ver en la siguiente figura.



Si S es la superficie dada como el gráfico de una f de dos variables, con derivadas parciales continuas, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathcal{D}(f),\ z = f(x,y)\} \\ &= \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathcal{D}(f),\ z - f(x,y) = 0\}, \end{aligned}$$

por lo tanto S es la superficie de nivel cero de $F(x,y,z) = z - f(x,y)$. El vector normal a S en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ es entonces

$$\nabla F(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = (-f_x(x_0,y_0),\ -f_y(x_0,y_0), 1),$$

y en este caso la ecuación del plano tangente queda

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Ejemplo 14.2. Sea S el gráfico de $f(x,y) = x^2 + 9y^2$. Dé la ecuación del plano tangente a S en $(1,0,1)$.

Solución. Como $f_x(x,y) = 2x$ y $f_y(x,y) = 18\,y$, el plano tangente está dado por la ecuación,

$$z - 1 = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y,$$

ó sea,

$$z - 2x = -1.$$

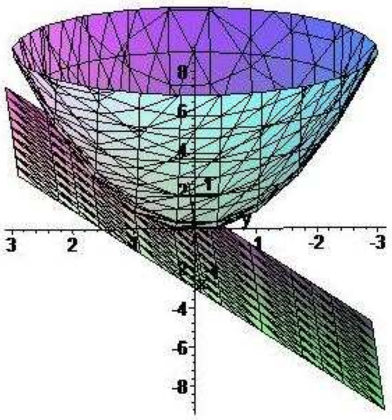


FIGURA 10. Gráfico de $f(x,y) = x^2 + 9y^2$ y su plano tangente en $(1,0,1)$.

15. Máximos y mínimos de funciones de dos variables

Como vimos en el curso anterior, una aplicación importante de las derivadas es el cálculo de máximos y mínimos de funciones de una variable. Ahora desarrollaremos una teoría análoga, en el caso de funciones de dos variables. Llamaremos *disco de centro* (a,b) y *radio* r al conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y) - (a,b)|| < r\}$.

DEFINICIÓN 15.1. Una función f de dos variables tiene un *máximo local* en (a,b) si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todos los puntos (x,y) en algún disco de centro (a,b). El número $f(a,b)$ se llama *valor máximo local.* Si $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo punto (x,y) en dicho disco, entonces (a,b) es un *mínimo local* de f y $f(a,b)$ es un *valor mínimo local.*

Si las desigualdades de la definición anterior se cumplen para todos los puntos $(x,y) \in \mathcal{D}(f)$ entonces f tiene un *máximo absoluto* (o un *mínimo absoluto*) en (a,b).

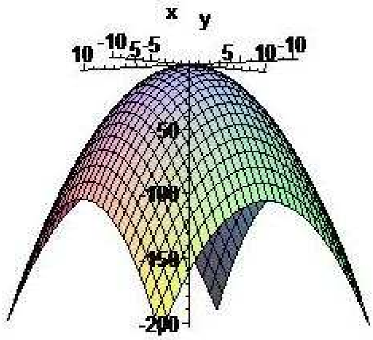
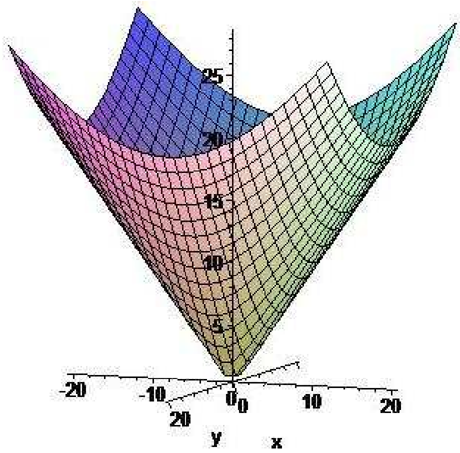


Figura 11. El paraboloide $z = -x^2 - y^2$ tiene un máximo absoluto en el origen.

Un punto (a, b) puede ser un punto de mínimo o de máximo local para una f, sin que f tenga derivadas parciales allí (el ejemplo típico de esta situación, en el caso de una variable, es $f(x) = |x|$ que tiene un mínimo absoluto en $x = 0$). Por ejemplo $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuya gráfica es la parte superior del cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ tiene un mínimo absoluto en $(x, y) = (0, 0)$ y no existen las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.



Si suponemos la existencia de derivadas parciales en un *extremo local* (máximo o mínimo local) de f tenemos el siguiente

Teorema 15.2. *Si f tiene un extremo local en (a, b) y las derivadas parciales de f existen en (a, b) entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.*

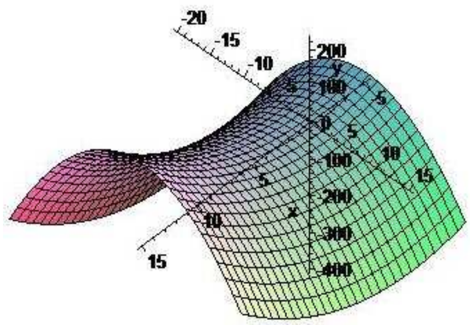
Prueba. Si definimos $g(x) = f(x, b)$ resulta que g tiene un extremo local en $x = a$. Por lo tanto debe ser $g'(a) = 0$, pero por definición, $g'(a) = f_x(a, b)$. De manera análoga se demuestra que $f_y(a, b) = 0$. $\square$

Definición 15.3. Un punto (a,b) tal que $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$ se llama *punto crítico* de f. Un punto (a,b) tal que alguna derivada parcial de f no existe allí se llama *punto singular de f.*

El teorema anterior dice que si f tiene un extremo local en (a,b) entonces (a,b) es punto singular ó punto crítico. Nos preguntamos si todo punto crítico es extremo local. La respuesta es no, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.4. Sea $f(x,y)=y^2-x^2$. Tenemos que

$f_x(x,y)=-2x$ y $f_y(x,y)=2y$, entonces $(0,0)$ es claramente un punto crítico de f. Además $f(0,0)=0$. No es máximo local porque si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y, f toma valores positivos. O sea $f(0,y)>f(0,0)\quad \forall\, y\neq 0$. No es mínimo local pues $f(x,0)<f(0,0)\quad \forall\, x\neq 0$. Cerca del origen la gráfica tiene la forma de una silla de montar.



Por analogía con el ejemplo anterior, a un punto crítico que no sea ni de máximo ni de mínimo local lo llamamos *punto de silla.*

Así como en el caso de una variable el signo de la derivada segunda nos daba información adicional sobre los puntos críticos, para el caso de dos variables tenemos el siguiente

Teorema 15.5. *(Test de las derivadas segundas). Sea f con derivadas parciales segundas continuas en un disco con centro (a,b) tal que (a,b) es un punto crítico de f, o sea $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$. Sea $D=D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-(f_{xy}(a,b))^2$.*

a) Si $D>0$ y $f_{xx}(a,b)>0$ entonces (a,b) es un mínimo local.
b) Si $D>0$ y $f_{xx}(a,b)<0$ entonces (a,b) es un máximo local.
c) Si $D<0$ entonces (a,b) es punto de silla.

Para recordar la fórmula que define D, observamos que en realidad D es un determinante

$$D = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}.$$

A esta matriz de derivadas segundas se la llama *matriz hessiana* de f en (a,b) y a su determinante el *hessiano*.

Si $D = 0$ el teorema (15.5) no da información. Pueden presentarse un máximo local, un mínimo local o un punto de silla. Por ejemplo si tomamos $f(x,y) = x^4+y^4$, $D(0,0) = 0$ y $(0,0)$ es mínimo local.

Si ahora tomamos $g(x,y) = -(x^4+y^4)$, $D(0,0) = 0$ y $(0,0)$ es máximo local.

Finalmente, si elegimos $h(x,y) = x^4 - y^4$, en este caso $D(0,0) = 0$ y $(0,0)$ es punto de silla (es un mínimo local en la dirección del eje x y un máximo local en la dirección del eje y).

Ejemplo 15.6. Encuentre y clasifique los puntos críticos de

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y.$$

Solución. Para buscar los puntos críticos debemos encontrar los puntos donde ambas derivadas parciales se anulen. $f_x(x,y) = 8x^3 - 2x$ y $f_y(x,y) = 2y - 2$.

Si $8x^3 - 2x = 0$, entonces $2x(4x^2-1) = 0$. Luego, $x = 0$ ó $4x^2 = 1$, luego $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ ó $x = -\frac{1}{2}$.

Si $2y - 2 = 0$ entonces $y = 1$. Por lo tanto, los puntos críticos son $(0,1)$, $(\frac{1}{2},1)$ y $(-\frac{1}{2},1)$.

A cada uno de ellos le aplicamos el teorema (15.5). Calculamos la matriz hessiana $H(x,y)$ y su determinante $D(x,y)$ en cualquier (x,y). Como

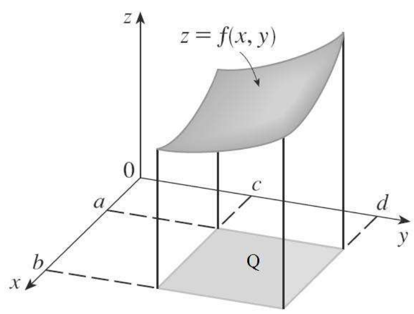
$$f_{xx}(x,y) = 24x^2 - 2, \qquad f_{xy}(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad f_{yy}(x,y) = 2,$$

entonces $H(x,y) = \begin{vmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ y $D(x,y) = 48x^2 - 4$. Así, $D(0,1) = -4$ por lo tanto $(0,1)$ es punto de silla; $D(\frac{1}{2},1) = 8$ y $f_{xx}(\frac{1}{2},1) = 4$ entonces $(\frac{1}{2},1)$ es un mínimo local. Por último, $D(-\frac{1}{2},1) = 8$ y $f_{xx}(-\frac{1}{2},1) = 4$ luego $(-\frac{1}{2},1)$ es también mínimo local.

16. Integrales múltiples

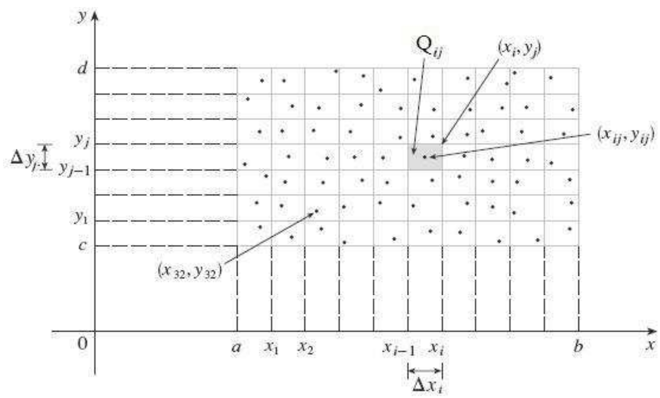
En esta sección, estudiaremos integración de funciones de dos variables.

16.1. Integrales dobles en rectángulos. Tomamos el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$. Dada una $f : Q \to \mathbb{R}$ positiva, para aproximar el volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q, hacemos un trabajo similar al que hacíamos cuando queríamos aproximar el área arriba de un intervalo $[a, b]$ y debajo del gráfico de una función de una variable.



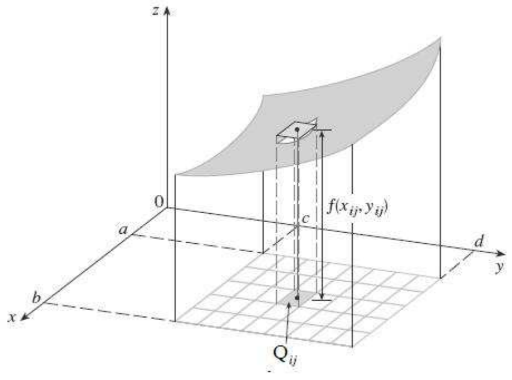
En esa ocasión tomamos una partición del intervalo, un punto en cada subintervalo y tomábamos la suma de las áreas de los rectángulos con base en cada subintervalo y altura dada por el valor de f en el punto elegido.

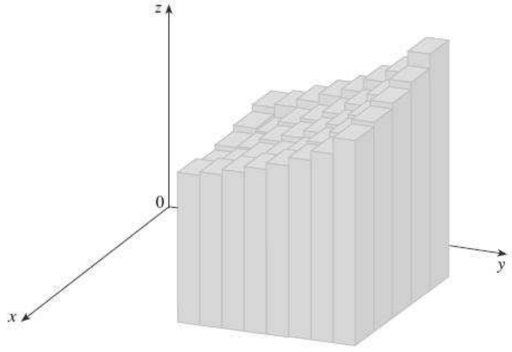
Dados $a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$ y $c = y_0 < y_1 < ... < y_n = d$, formamos una partición de Q de la siguiente manera. Tomamos $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$. Hay mn de estos subrectángulos y cubren a Q. Llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, así el área de Q_{ij} es $\Delta x_i \Delta y_j$. Ahora elegimos un punto (x_{ij}, y_{ij}) en cada Q_{ij} y hacemos la *doble suma de Riemann*



$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

que no es otra cosa que la suma de los volúmenes de los paralelepípedos de base en Q_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$. El volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q debería ser el límite de este proceso. (Ver figura).





Dada la partición

$$P = \{Q_{ij} \ : \ i = 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\},$$

definimos la *norma de la partición* como la mayor longitud de las diagonales de los Q_{ij}. Se denota $\|P\|$.

Por analogía con esta situación, dada una $f : Q \to \mathbb{R}$ cualquiera (no necesariamente positiva), damos la siguiente

Definición 16.1. La *integral doble* de f sobre el rectángulo Q es

$$\int\int_Q f(x,y)dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$$

si este límite existe. En este caso, f se dice *integrable* sobre Q.

El significado preciso de este límite es el siguiente: existe un número I (que después denotaremos $\int\int_Q f(x,y)dA$) para el cual vale que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists$ un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| I - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta x_i \Delta y_j \right| < \varepsilon$$

para todas las particiones P de Q de norma menor que δ y para cualquier elección de puntos $(x_{ij}, y_{ij}) \in Q_{ij}.$

Una notación frecuentemente usada es $\displaystyle\int\int_Q f(x,y)dxdy$ en vez de $\displaystyle\int_Q f(x,y)dA.$

Se puede demostrar que si f es continua en Q entonces f es integrable sobre Q. Más aún, si f es continua en Q, salvo una cantidad finita de curvas suaves, y acotada entonces f sigue siendo integrable sobre Q.

16.2. Integrales iteradas.

Como ya sabemos, no es muy fácil evaluar integrales de funciones a partir de la definición. Ahora veremos que el cálculo de integrales dobles se reduce al de integrales de funciones de una variable. Concretamente, si $Q = [a,b] \times [c,d]$ a partir de una función $f : Q \to \mathbb{R}$, si fijamos una variable, obtenemos una función de la otra variable, que podemos pensar en integrarla. O sea hacemos, para cada $y \in [c,d]$, $\int_a^b f(x,y)dx$. Esto define una función de y que podemos volver a integrar, obteniendo $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy$. Esta se llama *integral iterada* de f. Por supuesto que podríamos haber hecho este proceso en el otro orden obteniendo $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$, que es la otra integral iterada de f. Suelen omitirse los paréntesis y simplemente escribimos $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ o $\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$.

Ejemplos 16.2. Evalúe las siguientes integrales iteradas.

$$1. \int_0^2 \int_{-1}^1 x^2y^3dxdy \qquad 2. \int_{-1}^1 \int_0^2 x^2y^3dydx.$$

Solución.

1.
$$\int_{-1}^1 x^2y^3dx = y^3 \int_{-1}^1 x^2dx = y^3\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3}y^3.$$

Por lo tanto

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 x^2y^3dxdy = \int_0^2 \frac{2}{3}y^3dy = \frac{2}{3}\frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{8}{3}.$$

2.
$$\int_0^2 x^2y^3dy = x^2 \int_0^2 y^3dy = x^2\frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=2} = 4x^2.$$

Por lo tanto

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 x^2y^3dydx = \int_{-1}^1 4x^2dx = 4\frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{8}{3}.$$

El hecho de haber obtenido idénticos resultado al realizar, en el ejercicio anterior, ambas integrales iteradas de una función dada no es casual. Esta es la situación general, como lo establece el siguiente teorema, el cual a su vez es una herramienta muy útil para calcular integrales dobles.

Teorema 16.3. *(Fubini) Si f es continua en el rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$ entonces*

$$\int\int_Q f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

De manera más general, lo anterior vale si suponemos que f es acotada en Q, f discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

EJEMPLO 16.4. Calcule el volumen del sólido debajo del plano $z = 4 - x - y$ y arriba del rectángulo Q dado por $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$.

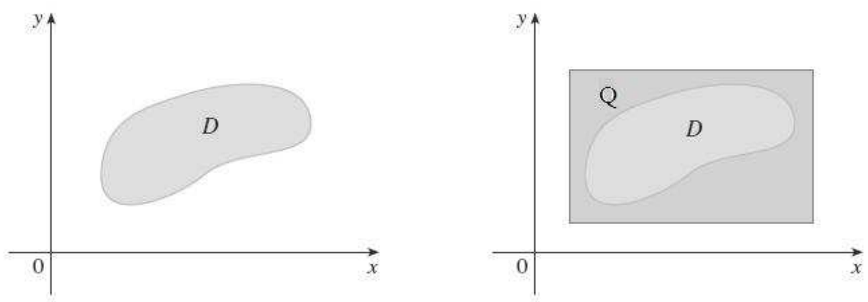
Solución. Debemos calcular la

$$\begin{aligned}
\int\int_Q (4-x-y)\,dA &= \int_1^2 \int_0^1 (4-x-y)\,dxdy = \int_1^2 \left(4x - \frac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_1^2 \left(4 - \frac{1}{2} - y\right) dy = \left(4y - \frac{1}{2}y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=1}^{y=2} \\
&= 8 - 1 - 2 - \left(4 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 2.
\end{aligned}$$

16.3. Integrales dobles en regiones generales.

Sea D una región acotada en $\mathbb{R}^2$, o sea D está contenida en algún rectángulo Q de lados paralelos a los ejes. Queremos definir una noción de integral de una f definida sobre D. Para ello extendemos f al rectángulo Q dándole el valor cero fuera de D, o sea definimos

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in Q \text{ pero no en } D. \end{cases}$$



Decimos que f es *integrable sobre* D si F es integrable sobre Q y en ese caso definimos

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_Q F(x,y)dA.$$

Como F vale cero fuera de D, esta región no contribuye a la integral y por lo tanto la definición es independiente del rectángulo elegido, y en el caso de que f sea positiva, todavía podemos interpretar esta integral como el volumen del sólido que se encuentra arriba de D y debajo del gráfico de f. Estas integrales se pueden calcular con relativa facilidad para algún tipo de regiones D bastante generales.

Una región D se dice de *tipo I* si está entre las gráficas de dos funciones continuas de x, es decir

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas en [a,b], y se dice de *tipo II* si es de la forma

$$D = \{(x, y) : a \leq y \leq b, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con h_1 y h_2 funciones continuas en [a,b].

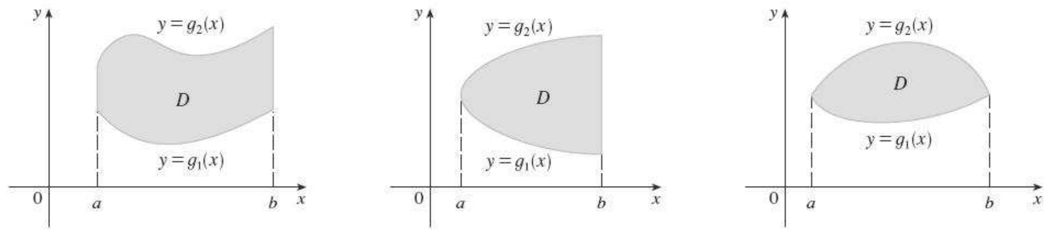


FIGURA 12. Ejemplos de regiones de tipo I.

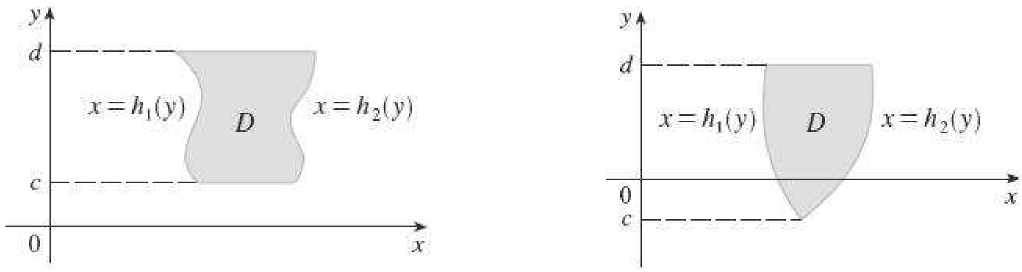


FIGURA 13. Ejemplos de regiones de tipo II.

Está claro que hay regiones de tipo I y II simultáneamente. Por ejemplo un círculo, un rectángulo, etc.

Para evaluar la integral de una función continua definida sobre una región D de tipo I, tomamos un rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$ que contenga a D y definimos F como arriba. Por el teorema de Fubini tenemos que

$$\int\int_Q F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx,$$

pero como $F(x, y) = 0$ fuera de D, resulta que para cada x fijo entre a y b, $F(x, y)$ se anula si $y < g_1(x)$ o si $y > g_2(x)$ por lo tanto para esos valores de x,

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x, y) dy,$$

pero entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)dydx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

En la última igualdad usamos que F coincide con f en D.

De manera similar, si f está definida sobre una región D de tipo II, resulta

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx.$$

Ejemplo 16.5. Evalúe la $\int\int_D (x-2y)dA$, donde D es la región del primer cuadrante comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$.

Solución. La región D es de tipo I y ambas curvas se intersectan cuando $x^2 = 2x$, o sea cuando $x = 0$ o $x = 2$. Entonces

$$\int\int_D (x-2y)dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x-2y)dydx = \int_0^2 (x^4 - x^3 - 2x^2)dx = -\frac{44}{15}.$$

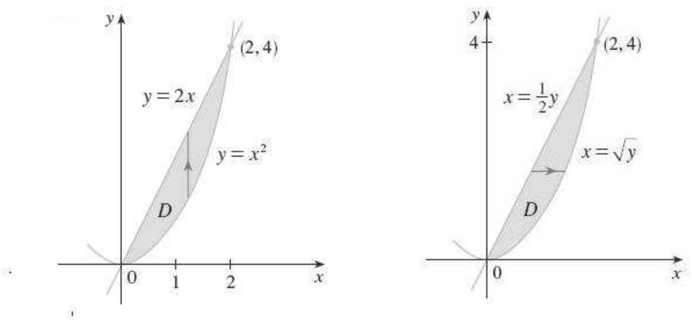


Figura 14. La región D vista como de tipo I y como de tipo II.

Ejemplo 16.6. Evalúe el área A de la región plana acotada por las curvas $y = 2x - 1$ y $x = y^2 - 1$.

Ambas curvas se cortan cuando $\frac{y+1}{2} = y^2 - 1$, o sea cuando $y = \frac{3}{2}$ o $y = -1$. Como para calcular el área de una región debemos integrar sobre dicha región la función idénticamente uno, hacemos

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \int_{y^2-1}^{\frac{y+1}{2}} dxdy = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} (\frac{y+1}{2} - y^2 + 1)dy = \frac{125}{48}.$$

Propiedades.

Suponemos que todas las integrales existen.

1. $\displaystyle\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int\int_D f(x,y)\,dA + \int\int_D g(x,y)\,dA$

2. $\displaystyle\int\int_D cf(x,y)\,dA = c\int\int_D f(x,y)\,dA$

3. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ para todo $(x,y) \in D$ entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA \leq \int\int_D g(x,y)dA.$$

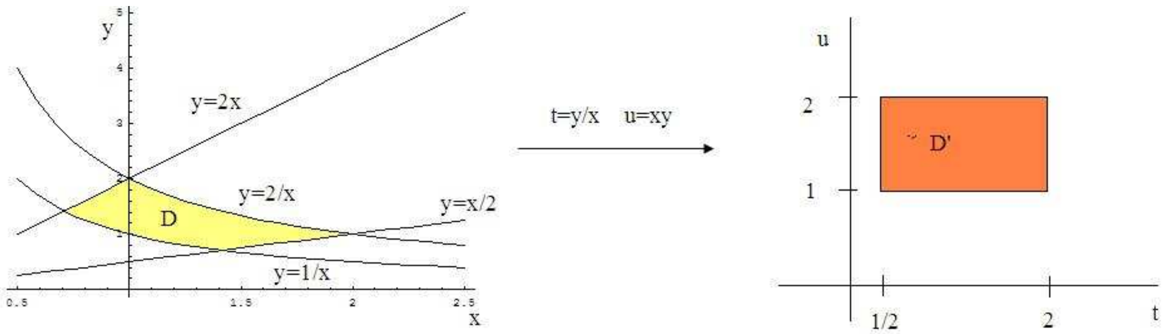
4. Si $D = D_1 \cup D_2$ donde D_1 y D_2 no se superponen, excepto quizás en su frontera, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA$$

17. Cambio de variables

Para calcular la integral de una función de dos variables sobre una región D, frecuentemente es conveniente realizar un cambio de variables para transformar D en otra región, preferiblemente rectangular, sobre la cual sea más fácil de calcular la integral resultante. Tomemos por ejemplo

$$D = \{(x,y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\} \subset \mathbb{R}^2.$$



Si ponemos $t = \frac{y}{x}$, $u = xy$, es claro que D está definido por las condiciones $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$, $1 \leq u \leq 2$, que determinan un rectángulo en el plano tu. Sería útil poder sustituir las variables x e y por t y u, poniendo $x = \sqrt{\frac{u}{t}}$, $y = \sqrt{ut}$.

En general, dado un conjunto D de tipo I ó II, queremos efectuar un cambio de variables de la forma $x = \phi_1(t,u)$, $y = \phi_2(t,u)$ donde t y u varían en un nuevo conjunto acotado D'. Denotamos con $\phi(t,u) = (\phi_1(t,u), \phi_2(t,u))$ a la función que aplica D' en D, y en el caso de que existan las derivadas parciales de ϕ_1 y de ϕ_2, definimos *la matriz jacobiana* de ϕ en (t,u) por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial t}(t,u) & \frac{\partial\phi_1}{\partial u}(t,u) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial t}(t,u) & \frac{\partial\phi_2}{\partial u}(t,u) \end{bmatrix}$$

y a su determinante lo llamamos *jacobiano* de ϕ en (t,u) y lo denotamos $J\phi(t,u)$. Hacemos las siguientes hipótesis.

1) ϕ establece una correspondencia biunívoca (1-1) entre los puntos de D' y los puntos de D.

2) ϕ_1 y ϕ_2 tienen derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene a D' y $J\phi(t,u)$ es acotado y distinto de cero sobre D'.

Vale el siguiente

Teorema 17.1. *Sea D y D' regiones planas del tipo I ó II. Sea $\phi : D' \to D$ que satisface las hipótesis* 1) *y* 2) *de arriba. Sea f una función continua y acotada sobre D. Vale entonces*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(\phi_1(t,u), \phi_2(t,u)) \left| J\phi(t,u) \right| dtdu.$$

Ejemplo 17.2. Volvamos al ejemplo dado al principio de esta sección. Tomamos $D = \left\{(x,y) : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\right\}$. Si queremos determinar el área de D debemos calcular $\int\int_D dxdy$. Hacemos el cambio de variables $x = \sqrt{\frac{u}{t}}$, $y = \sqrt{tu}$, que transforma el rectángulo $[\frac{1}{2}, 2] \times [1,2]$ en D y cuyo jacobiano es

$$\det \begin{bmatrix} -\frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} t^{-\frac{3}{2}} & \frac{u^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}}{2} \\ \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2} t^{-\frac{1}{2}} & \frac{t^{\frac{1}{2}}}{2} u^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2t}.$$

Por el teorema anterior,

$$\int\int_D dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2t} dtdu = \ln 2.$$

17.1. Coordenadas polares.

Como sabemos, un punto del plano distinto del origen puede ser descripto por medio de sus coordenadas polares r, θ, con $r > 0$, poniendo

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Esto define una función $\phi(r,\theta)$ desde el semiplano $r > 0$, del plano $r\theta$ en el plano xy sin el origen. Claramente $\phi(r,\theta)$ tiene derivadas parciales continuas. Sin embargo esta $\phi(r,\theta)$ no es biunívoca, puesto que valores de θ que difieren en múltiplos enteros de 2π dan origen al mismo punto del plano xy. Restringimos entonces ϕ a la banda

$$\{(r,\theta) : r > 0, \quad a \leq \theta < a + 2\pi\}.$$

Sean ahora D' y D dos regiones del tipo I ó II de los planos $r\theta$ y xy respectivamente tales que ϕ aplica D' en D de manera biunívoca. Para calcular la integral sobre D de una función continua y acotada f, recurrimos al Teorema 17.1. Como

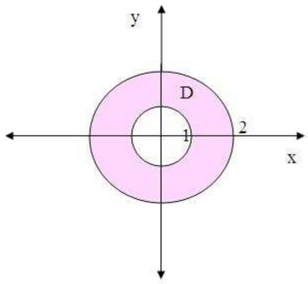
$$J\phi(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r$$

obtenemos

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta.$$

Ejemplo 17.3. Sea D la corona circular del plano xy dada por

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4.$$



Queremos calcular

$$\int\int_D (x^2 - 2y^2)dxdy.$$

En término de coordenadas polares, un punto (x,y) está en D si y sólo si $1 \leq r \leq 2$. Sea

$$D' = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi\},$$

entonces ϕ aplica biunívocamente D' sobre D. Podemos entonces aplicar la fórmula anterior para obtener

$$\int\int_D (x^2 - 2y^2)dxdy = \int\int_{D'} (r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} r^3(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta \right) d\theta) dr$$

$$= \left(\int_1^2 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta) d\theta \right) = -\frac{15}{4}\pi.$$

CAPíTULO 4

Apéndice

1. Números complejos

1.0.1. *Generalidades.* Las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

están dadas por la conocida fórmula $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$, donde $d = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante.* Si el discriminante d es negativo decimos que (1.1) no tiene solución en los números reales, pues tendríamos que calcular la raíz de un número negativo para obtenerlas. Notemos que si d es negativo, $d = -|d|$. Supongamos por un instante que pudiéramos calcular

$$\sqrt{d} = \sqrt{-|d|} = \sqrt{(-1)}\sqrt{|d|}$$

donde $\sqrt{|d|}$ es la raíz de un número positivo. Así, si llamamos $i = \sqrt{(-1)}$, tenemos que las soluciones de la ecuación (1.1), en el caso en que su discriminante sea negativo, son de la forma

$$-\frac{b}{2a} \pm i\,\frac{\sqrt{|d|}}{2a}.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1. Un número complejo es una expresión de la forma

$$z = a + ib = a + b\,i,$$

donde a y b números reales y el símbolo i cumple $i^2 = -1$. Denotaremos el conjunto de números complejos por $\mathbb{C}$.

El número real a se llama *parte real de* z, y lo denotamos por $\mathrm{Re}(z) = a$, y a b se lo llama *parte imaginaria de* z, y se lo denota $\mathrm{Im}(z) = b$.

Dado un número complejo $z = a + i\,b$, definimos el *conjugado* de z como el número complejo $\overline{z} = a - ib$.

Ejemplo 1.2. Dado $z = 2 + i5$, su parte real es igual a 2, su parte imaginaria es 5 y el conjugado de z es $\overline{z} = 2 - i5$.

Al igual que para los números reales, para los números complejos tenemos definidas las siguientes operaciones. Dados $z_1 = a_1 + i\,b_1$ y $z_2 = a_2 + i\,b_2$ dos números complejos, definimos:

suma: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
resta: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
multiplicación: $z_1 z_2 = (a_1\,a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Observemos que en la suma y la resta la parte real es simplemente la suma o la resta de las partes reales de z_1 y z_2. Lo mismo para la parte imaginaria. La multiplicación coincide con aplicar la propiedad distributiva del producto de los números reales y usar la propiedad $i^2 = -1$.

Ejemplo 1.3. Consideremos $z_1 = -1 + i3$ y $z_2 = 2 - i5$. Luego
$z_1 + z_2 = (-1 + 2) + i(3 - 5) = 1 - 2i$
$z_1 - z_2 = (-1 - 2) + i(3 + 5) = -3 + i8$.
$z_1 z_2 = ((-1)2 - 3(-5)) + i((-1)(-5) + 3 \cdot 2)) = (-2 + 15) + i(5 + 6)$.

Notemos que

$$z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2,$$

es siempre un número real positivo. Definimos el *módulo o valor absoluto* de $z = a + i\,b$ por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{1.2}$$

Volviendo a las operaciones en $\mathbb{C}$, el cociente de dos números complejos se define de la siguiente manera:
cociente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\,\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$, para $z_2 \neq 0$.
Notemos que el numerador es producto de dos números complejos, en tanto que el denominador es un número real.

Ejemplo 1.4. Si $z_1 = 3 - i2$ y $z_2 = 1 + i\,7$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} =& \frac{3 - i\,2}{1 + i\,7} \\
=& \frac{(3 - i\,2)}{(1 + i\,7)} \frac{(1 - i\,7)}{(1 - i\,7)} \\
=& \frac{(3 \cdot 1 - (-2)(-7)) + i(3(-7)) + (-2)1)}{1^2 + 7^2} \\
=& \frac{(3 - 14) + i(-21 - 2)}{50} \\
=& \frac{-11}{50} + i\frac{(-23)}{50}.
\end{aligned}$$

La suma y el producto en $\mathbb{C}$ cumplen las siguientes propiedades. Sean z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{C}$.

Asociatividad: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$.

Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
$z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Distributividad: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

El lector podrá verificar fácilmente estas propiedades usando las definiciones de suma y producto. La conjugación de los números complejos tiene las siguientes propiedades.

LEMA 1.5. *Sean z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Entonces*

(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,
(2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, *si* $z_2 \neq 0$
(4) $\overline{\overline{z}} = z$.

PRUEBA. queda como ejercicio para el lector. □

PROPOSICIÓN 1.6. *Sean z_1 y z_2 números complejos y $r \in \mathbb{R}$. Entonces*

(1) $|r\,z_1| = |r||z_1|$,
(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,
(3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, *si* $z_2 \neq 0$
(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

PRUEBA. Probaremos la segunda afirmación a modo ilustrativo. Tenemos $|z_1 z_2| = \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})}$. Aplicando (1) del Lema 1.5 y la conmutatividad del producto de números complejos,

$$|z_1 z_2| = \sqrt{z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2}} = \sqrt{|z_1|^2 |z_2|^2} = |z_1|\,|z_2|.$$

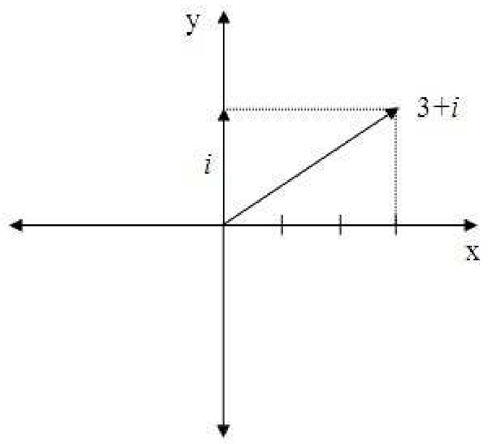
$\square$

1.0.2. *Representación geométrica de los números complejos.*

La aplicación de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}^2$ que asigna

$$a + ib \mapsto (a, b)$$

nos permite representar a los números complejos como puntos en el plano cartersiano. Por ejemplo, i corresponde al par ordenado $(0, 1)$, $z = 3 + i$ corresponde al par $(3, 1)$.



Vía este mapa la suma de números complejos corresponde a la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$. También es fácil interpretar geométricamente la norma de un número complejo, pues si $z = a + ib$, tenemos $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ que, por el teorema de Pitágoras, es la distancia de z al origen en el plano cartesiano.

Notemos que un punto en $\mathbb{R}^2$ queda totalmente determinado si uno dá la longitud del vector que lo representa, y el ángulo que forma con el eje x (en sentido antihorario).

Así, si $z = a + ib$, podemos preguntarnos cómo se escribe z en términos de r y θ. Notemos por otro lado

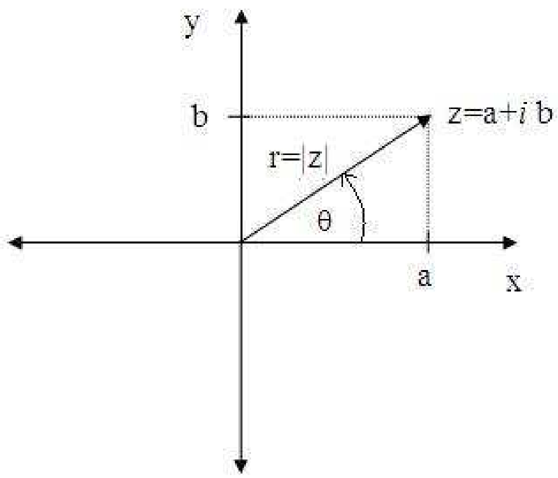
$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{r}$$

y

$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{r}$$

de donde

$$a = r\,\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta.$$



Por lo tanto,

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\, r\,\mathrm{sen}\theta = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta).$$

Si llamamos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta, \tag{1.3}$$

tenemos lo que se conoce como la *forma polar* de z,

$$z = re^{i\theta} \tag{1.4}$$

donde r es el *radio* de z y θ es su *argumento*.

Por ejemplo si $z = i$, entonces $r = 1$ y $\theta = \pi/2$, así su forma polar es

$$i = 1\, e^{i\,\pi/2} = \cos\,\pi/2 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/2.$$

Si consideramos $z = 1 + i\sqrt{3}$, tenemos $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, luego su forma polar es

$$z = 2e^{i\,(\pi/3)} = 2(\cos\,\pi/3 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/3).$$

Notemos que θ y $\theta + 2k\pi$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ determinan el mismo número complejo, entonces decimos que θ y $\theta + 2k\pi$ son *argumentos equivalentes*.

En el siguiente lema tenemos una lista de propiedades útiles para calcular la norma y el producto de dos números complejos.

Lema 1.7.

(1) $|e^{i\theta}| = 1$,
(2) $|re^{i\theta}| = r$,
(3) $(r_1\, e^{i\theta_1})(r_2\, e^{i\theta_2}) = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Prueba. Como $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\text{sen }\theta| = \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, (1) sigue.

La segunda afirmación sigue de (1) y de la Proposición 1.6 (1).

Ahora, recordemos que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen }(\theta_1)\text{sen }(\theta_2) \tag{1.5}$$

y

$$\text{sen }(\theta_1 + \theta_2) = \text{sen }(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\text{sen }(\theta_2). \tag{1.6}$$

Así, usando (1.5) y (1.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
(r_1e^{i\theta_1})(r_2e^{i\theta_2}) &= (r_1(\cos\theta_1 + i\text{sen }\theta_1))(r_2(\cos\theta_2 + i\text{sen }\theta_2)) \\
&= r_1r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen }(\theta_1)\text{sen }(\theta_2)) \\
&\quad +i(\cos(\theta_1)\text{sen }(\theta_2) + \text{sen }(\theta_1)\cos(\theta_2))] \\
&= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\text{sen }(\theta_1+\theta_2)) \\
&= r_1r_2 \quad e^{i(\theta_1+\theta_2)}
\end{aligned}$$

probando (3). □

Como corolario de la parte (3) del Lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.8.

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \ \textit{con } n \in \mathbb{N}. \tag{1.7}$$

La fórmula (1.7) se llama *fórmula de De Moivre* y sirve para interpretar geométricamente el producto de dos números complejos. Si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ son dos números complejos, la fórmula de De Moivre nos dice que z_1z_2 es un nuevo número complejo cuya norma es $|z_1||z_2| = r_1\, r_2$ y cuyo argumento es $\theta_1 + \theta_2$.

1.0.3. *Raíces enésimas de números complejos.*

La fórmula (1.7) nos permite calcular la raíz enésima de cualquier número complejo. Dado w un número complejo no nulo y $n \in \mathbb{N}$, buscamos todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$z^n = w. \tag{1.8}$$

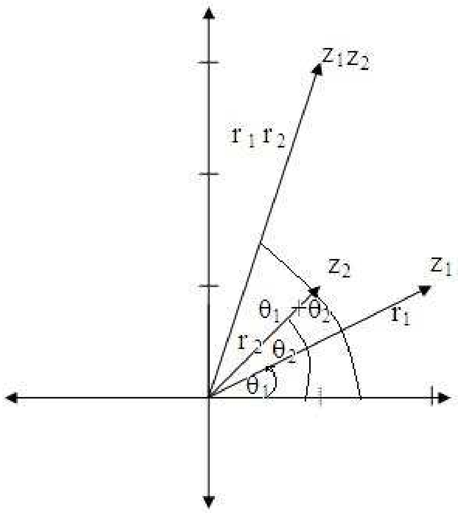
Si $w = r(\cos\theta + i\text{sen }\theta)$ y $z = \widetilde{r}(\cos\widetilde{\theta} + i\text{sen }\widetilde{\theta})$, lo que buscamos es determinar $\widetilde{r}$ y $\widetilde{\theta}$, conociendo r y θ, y sabiendo que z y w están relacionados por (1.8).

Luego, reemplazando a z y w por sus formas polares en (1.8)

$$[\widetilde{r}(\cos\widetilde{\theta} + i\text{sen }\widetilde{\theta})]^n = r(\cos\theta + i\text{sen }\theta),$$

y usando la fórmula de Moivre (1.7), tenemos

$$\widetilde{r}^{\,n}(\cos(n\,\widetilde{\theta}) + i \text{ sen } (n\widetilde{\theta})) = r(\cos\,\theta + i\,\text{sen }\,\theta). \tag{1.9}$$



Tomando norma en ambos miembros concluimos que $\widetilde{r}^{\,n} = r$. Como $r \geq 0$ tenemos que

$$\widetilde{r} = \sqrt[n]{r}. \tag{1.10}$$

Volviendo a (1.9) e igualando las partes reales e imaginarias de ambos miembros deducimos que

$$\cos n\,\widetilde{\theta} = \cos\,\theta \quad \text{y} \quad \text{sen}\; n\,\widetilde{\theta} = \text{sen}\;\theta.$$

Por lo tanto

$$n\,\widetilde{\theta} = \theta + 2k\pi \qquad \text{para } k \in \mathbb{Z},$$

de donde

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

¿ Cuántos de estos $\widetilde{\theta}$ dan origen a números complejos diferentes? Notemos que para $k = 0$ y $k = n$ tenemos

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta}{n} \text{ y } \widetilde{\theta} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Pero estos dos valores de $\widetilde{\theta}$ determinan el mismo número complejo.

Similarmente, para $k = 1$ y $k = n + 1$, obtenemos

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta + 2\pi}{n} \quad \text{y} \quad \widetilde{\theta} = \frac{\theta + 2\pi}{n} + 2\pi$$

que nuevamente son argumentos equivalentes.

Así, siguiendo tenemos que $k = n - 1$ y $k = 2n - 1$ nos dan

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta + (n-1)\pi}{n} \text{ y } \widetilde{\theta} = \frac{\theta + (n-1)\pi}{n} + 2\,\pi$$

que difieren nuevamente en 2π y por lo tanto corresponden al mismo número en $\mathbb{C}$.

<u>Conclusión</u>: Hay exactamente n argumentos $\widetilde{\theta}$ no equivalentes, que son:

$$\widetilde{\theta} = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{1.12}$$

Por lo tanto hay $z_1, ..., z_n$ números complejos distintos tales que

$$z_i^n = w, \qquad\qquad 1 \leq i \leq n.$$

Cada z_i se llama *raíz enésima* de w.

Ejemplos 1.9. **1.** Hallemos las soluciones de $z^3 = 1$. Notemos que $n = 3$, $r = 1$ y $\theta = 0$ en este caso.

Por (1.10), si $z = \widetilde{r}(\cos \widetilde{\theta} + i \text{sen } \widetilde{\theta})$, tenemos que

$$\widetilde{r} = 1.$$

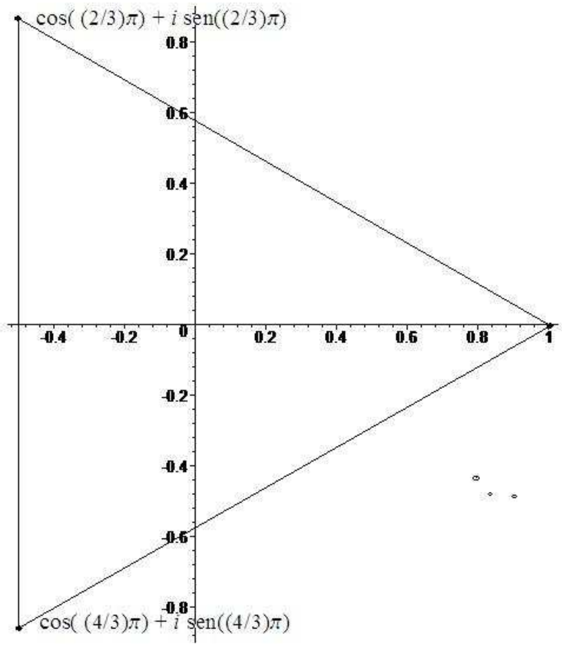
Usando (1.12), tenemos que

$$\widetilde{\theta} = \frac{0 + 2k\pi}{3} \qquad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

Esto nos dice que $\widetilde{\theta}$ toma los valores 0, $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$. Por lo tanto las soluciones de $z^3 = 1$ son

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \,.\, e^{i0} = 1, \\ z_1 &= \cos(2\pi/3) + i \,\text{sen }(2\pi/3), \\ z_2 &= \cos(4\pi/3) + i \,\text{sen }(4\pi/3). \end{aligned}$$

Representadas en el plano son los vértices del siguiente triángulo



2. Busquemos ahora las soluciones de la ecuación

$$z^4 = -2.$$

En este caso $n = 4$, $r = 2$ y $\theta = \pi$. Por (1.10)

$$\widetilde{r} = \sqrt[4]{2}$$

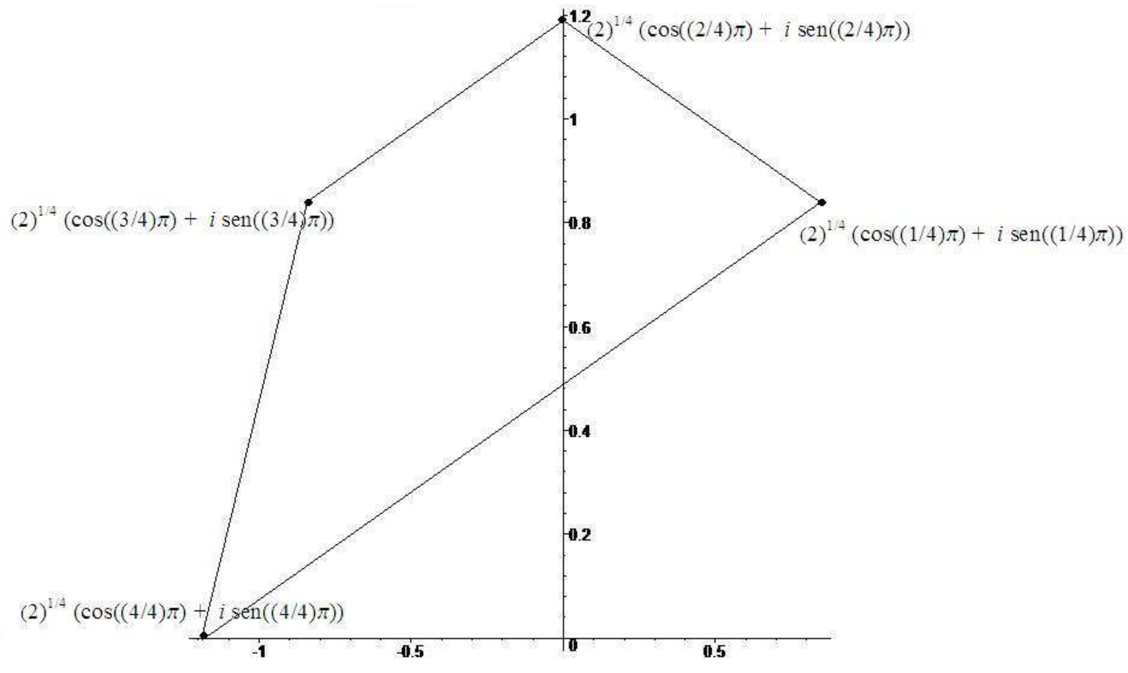
y por (1.12)

$$\widetilde{\theta} = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad \text{con } k = 0, 1, 2 \text{ y } 3.$$

Así, $\widetilde{\theta}$ toma los valores $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ y $7\pi/4$. Las soluciones son

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/4}, \\ z_1 &= \sqrt[4]{2}\, e^{i3\pi/4}, \\ z_2 &= \sqrt[4]{2}\, e^{i5\pi/4}, \\ z_3 &= \sqrt[4]{2}\, e^{i7\pi/4}. \end{aligned}$$

Representadas en el plano complejo corresponden a los vértices de la siguiente figura.



2. Demostración del Test de las derivadas segundas

Calculamos la derivada direccional segunda de f en la dirección de $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Sabemos que $D_{\mathbf{u}} f = f_x u_1 + f_y u_2$. Aplicando nuevamente este resultado,

$$\begin{aligned} D^2_{\mathbf{u}}f &= (f_{xx}u_1 + f_{xy}u_2)u_1 + (f_{yx}u_1 + f_{yy}u_2)u_2 \\ &= f_{xx}u_1^2 + 2f_{xy}u_1u_2 + f_{yy}u_2^2, \end{aligned} \tag{2.1}$$

por el teorema de igualdad de las derivadas cruzadas. Completamos cuadrados en esta expresión y obtenemos entonces que si $f_{xx}(x,y) \neq 0$,

$$\begin{aligned} D^2_{\mathbf{u}}f &= f_{xx}\left(u_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}u_2\right)^2 + \frac{u_2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) \\ &= f_{xx}\left(u_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}u_2\right)^2 + \frac{u_2^2}{f_{xx}}D(x,y). \end{aligned} \tag{2.2}$$

a) Si $f_{xx}(a,b) > 0$ y $D(a,b) > 0$, como ambas son funciones continuas debe cumplirse que $f_{xx}(x,y) > 0$ y $D(x,y) > 0$ para todo (x,y) en algún disco B alrededor de (a,b), entonces al observar la ecuación (2.2) vemos que $D^2_{\mathbf{u}}f(x,y) > 0$ para todo (x,y) en B. Esto dice que si C es la curva en el gráfico de f obtenida moviéndonos, a partir del punto $(a,b,f(a,b))$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$, entonces C es cóncava hacia arriba en algún intervalo y esto se cumple en cualquier dirección $\mathbf{u}$, y así la gráfica de f está arriba de su plano tangente horizontal en el punto $(a,b,f(a,b))$, por consiguiente $f(x,y) \geq f(a,b)$ para todo (x,y) en B y así (a,b) es un mínimo local.

b) Sigue de manera análoga.

c) Si $f_{x,x}(a,b) = 0$, de la ecuación (2.1) sigue

$$D^2_{\mathbf{u}}f(a,b) = 2f_{xy}(a,b)u_1u_2 + f_{yy}(a,b)u_2^2 = u_2(2f_{xy}(a,b)u_1 + f_{yy}(a,b)u_2).$$

Si elegimos u_2 muy chico y positivo, el signo de esta expresión es el de $u_1 f_{xy}(a,b)$, ($f_{xy}(a,b) \neq 0$, sino $D(a,b)$ sería cero) que cambia si cambiamos el signo de u_1. Entonces tenemos direcciones en las que pasamos por un mínimo local y otras en las que atravesamos un máximo local, por lo tanto (a,b) es punto de silla.

Si $f_{xx}(a,b) \neq 0$, de la ecuación (2.1) deducimos que $D^2_{\mathbf{u}}f(a,b)$ tiene el signo de $f_{xx}(a,b)$ si $\mathbf{u} = (1,0)$. Ahora si $f_{xy}(a,b) = 0$, $D^2_{\mathbf{u}}f(a,b)$ tiene el signo de $-f_{xx}(a,b)$ si $\mathbf{u} = (0,1)$. Si $f_{xy}(a,b) \neq 0$, tomamos $\mathbf{u}$ en el círculo unidad intersección la recta de ecuación $u_2 = -\frac{f_{xx}(a,b)}{f_{xy}(a,b)}u_1$, con $u_2 > 0$, para anular el primer paréntesis de la ecuación (2.2) y obtener que $D^2_{\mathbf{u}}f(a,b)$ tiene el signo de $-f_{xx}(a,b)$. Como en cualquier caso hay cambio de signo, la demostración sigue como en el caso $f_{xx}(a,b) = 0$.

Bibliografía

[1] Bacciotti, A., Ricci, F. *Lezioni di Analisi Matematica 2.* Editrice Levrotto e Bella, Torino, 1991.

[2] Lang, S. *Cálculo I y II.* Fondo Interamericano Educativo, Bogotá, 1976.

[3] Leithold, L. *Cálculo con geometría análitica.* 6 ed., Editorial Harla, 1992.

[4] Stewart, J. *Cálculo de una variable y multivariables.* Editorial Iberoamericana, 1994.

[5] Thomas, G. *Cálculo y geometría análitica.* 6 ed., Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1987.

[6] Zill, D. *Cálculo con geometría análitica.* Editorial Iberoamérica, México, 1987.