

Clase 6 - Solución de ecuaciones no lineales (3)

Método de la secante

Continuamos con el mismo problema de resolver una ecuación no lineal. Hasta ahora vimos el método de bisección y el método de Newton. Recordemos que la iteración del método de Newton está dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{para } n \geq 0. \quad (1)$$

Si bien este método tiene convergencia cuadrática local, tiene como desventaja que requiere la evaluación de la derivada de la función f en cada iteración. Uno de los métodos más conocidos que evita esto es el **método de la secante**.

La idea del método de la secante consiste en reemplazar $f'(x_n)$ en la iteración de Newton (1) por una aproximación dada por el cociente incremental, dado por la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(x_n, f(x_n))$ y $(x_n + h, f(x_n + h))$:

$$f'(x_n) \approx a_n = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h},$$

para algún h suficientemente pequeño.

Para evitar evaluar f en un punto adicional $(x_n + h)$ se elige $h = x_{n-1} - x_n$, entonces:

$$a_n = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Ver Figura 1.

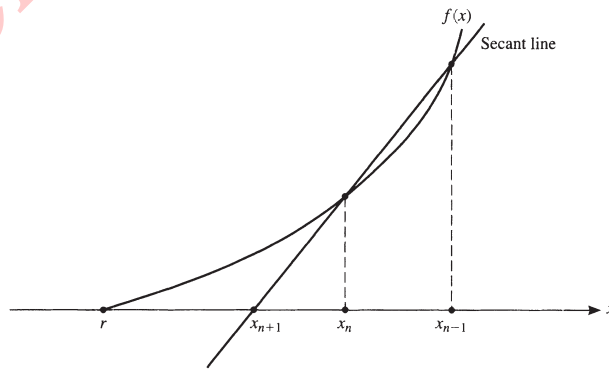


Figura 1: Interpretación gráfica del método secante.

Así, la iteración del método secante consiste en:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \quad \text{para } n \geq 1,$$

es decir,

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \right] \quad \text{para } n \geq 1. \quad (2)$$

Algoritmo del método de la secante

Dados los siguientes datos de entrada y parámetros algorítmicos: x_0 y x_1 las primeras 2 aproximaciones iniciales de r , el número máximo de iteraciones permitido M , δ la tolerancia para el error e (en la variable x) y ε la tolerancia para los valores funcionales.

input $x_0, x_1, M, \delta, \varepsilon$

$f_0 \leftarrow f(x_0)$

$f_1 \leftarrow f(x_1)$

output $0, x_0, f_0$

output $1, x_1, f_1$

for $k = 2, 3, \dots, M$ **do**

if $|f_0| > |f_1|$ **do**

$x_0 \leftrightarrow x_1; f_0 \leftrightarrow f_1$

endif

$s \leftarrow (x_1 - x_0)/(f_1 - f_0)$

$x_1 \leftarrow x_0$

$f_1 \leftarrow f_0$

$x_0 \leftarrow x_0 - f_0 * s$

$f_0 \leftarrow f(x_0)$

output k, x_0, f_0

if $|x_1 - x_0| < \delta$ **or** $|f_0| < \varepsilon$ **then STOP**

end do

Observaciones:

1. En el algoritmo los puntos x_0 y x_1 pueden intercambiarse para lograr que $|f(x_0)| \leq |f(x_1)|$. Así, para el par $\{x_{n-1}, x_n\}$ se satisface que $|f(x_n)| \leq |f(x_{n-1})|$, y para el par siguiente $\{x_n, x_{n+1}\}$ se tiene que $|f(x_{n+1})| \leq |f(x_n)|$. Esto garantiza que la sucesión $\{|f(x_n)|\}$ es no creciente.

2. El algoritmo se detiene por el número máximo de iteraciones permitidas, por satisfacer la tolerancia para los valores funcionales, o por la tolerancia en la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

3. En cuanto al análisis de errores, es posible probar que:

$$e_{n+1} \approx c e_n^\alpha = (c e_n^{\alpha-1}) e_n^1,$$

donde $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618334\dots$. Como $1 < \alpha < 2$ se dice que el método de la secante tiene **convergencia superlineal**. Además, por recurrencia

$$e_{n+1} \approx c e_n^\alpha \approx c^{1+\alpha} e_{n-1}^{\alpha^2}$$

donde $\alpha^2 = (1 + \sqrt{5})^2/4 = (3 + \sqrt{5})/2 = 2.618334\dots$, esto dice que **dos iteraciones de método de la secante** es mejor que **una iteración del método de Newton**.

Iteración de punto fijo

En esta sección veremos que es un punto fijo de una función dada, como encontrarlos numéricamente y cuál es la conexión con el problema de determinar raíces de funciones.

Definición 1. un punto fijo de una función g es un número p , en el dominio de g , tal que $g(p) = p$.

Por un lado, si p es una raíz de una función f , esto es, $f(p) = 0$, entonces es posible definir diferentes funciones g con un punto fijo en p , por ejemplo: $g(x) = x - f(x)$, o $g(x) = x + 3f(x)$.

Por otro lado, si g tiene un punto fijo en p , esto es, $g(p) = p$, entonces la función $f(x) = x - g(x)$ tiene una raíz en p .

Aunque estamos interesados en el problema de determinar soluciones de una ecuación no lineal, o equivalentemente, encontrar raíces de funciones no lineales veremos que la forma de la iteración de punto es muy fácil de estudiar y analizar. Además algunas opciones de punto fijo dan origen a técnicas matemáticas y computacionales muy poderosas para determinar raíces.

Ejemplo 1: se busca determinar los posibles puntos fijos de la función $g(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-2, 3]$.

Para esto se plantea la ecuación $g(x) = x$, es decir, se debe resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2 = x$, o sea, $x^2 - x - 2 = 0$. Luego es fácil verificar que $x = -1$ y $x = 2$ son puntos fijos ($g(p) = p$) pues

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \quad \text{y} \quad g(2) = (2)^2 - 2 = 2.$$

Ver Figura 2.

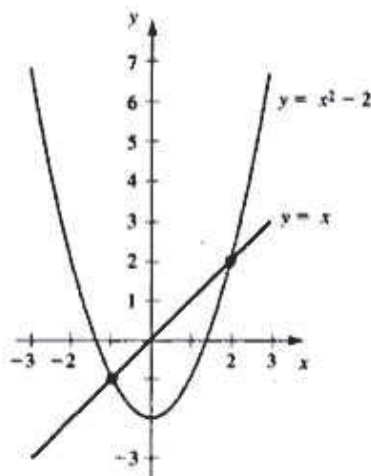


Figura 2: Puntos fijos de g .

A continuación veremos un resultado que da condiciones suficientes para la existencia y unicidad del punto fijo.

Teorema 1.

1. Si $g \in C[a, b]$ (es decir, g es una función continua en el intervalo $[a, b]$) y $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ entonces existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = p$. **(EXISTENCIA)**
2. Si además existe $g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y existe una constante positiva $k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$, entonces el punto fijo en (a, b) es único. (Ver Figura 3). **(UNICIDAD)**

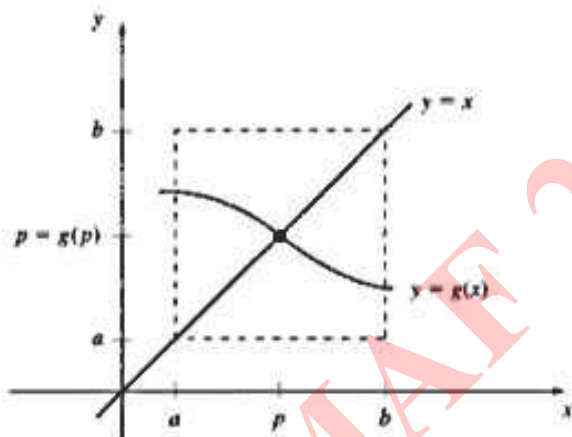


Figura 3: Unicidad del punto fijo.

Demostración.

1. Si $g(a) = a$ o $g(b) = b$, el punto fijo está en uno de los extremos del intervalo y ya estaría probado.

Supongamos que esto no es cierto, entonces $g(a) > a$ y $g(b) < b$. Sea $h(x) = g(x) - x$ una función definida en $[a, b]$, que además es continua en $[a, b]$ pues g y x lo son y resta de funciones continuas es una función continua. Además, por lo anterior, tenemos que

$$h(a) = g(a) - a > 0 \quad \text{y} \quad h(b) = g(b) - b < 0.$$

Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $p \in (a, b)$ tal que $h(p) = 0$, esto es, $g(p) = p$ y por lo tanto p es un punto fijo de g .

2. Ahora supongamos que existen dos puntos fijos distintos p y q en $[a, b]$, es decir, $p, q \in [a, b]$, $p \neq q$ tal que $g(p) = p$ y $g(q) = q$. Por el Teorema del Valor Medio existe ξ entre p y q , y por lo tanto en $[a, b]$ tal que

$$g(p) - g(q) = g'(\xi)(p - q).$$

Luego usando la hipótesis que $|g'(x)| \leq k < 1$ tenemos que

$$|p - q| = |g(p) - g(q)| = |g'(\xi)||p - q| \leq k|p - q| < |p - q|,$$

lo que es una contradicción que provino de suponer que habrían dos puntos fijos distintos en $[a, b]$, y por lo tanto el punto fijo es único.

□

Analicemos la existencia y unicidad de punto fijo en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: considerar $g(x) = \frac{(x^2 - 1)}{3} = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Es fácil ver g tiene un mínimo absoluto en $x = 0$ y $g(0) = -1/3$. Además tiene máximos absolutos en $x = -1$ y $x = 1$ donde $g(-1) = 0$ y $g(1) = 0$. Además, claramente g es continua en $[-1, 1]$ y $|g'(x)| = \left| \frac{2}{3}x \right| \leq \frac{2}{3}$ para todo $x \in [-1, 1]$. Por lo tanto existe un único punto fijo p de g en el intervalo $[-1, 1]$. Para determinar p , planteamos

$$g(p) = p, \Rightarrow \frac{p^2 - 1}{3} = p, \Rightarrow p^2 - 3p - 1 = 0,$$

cuyas raíces son $p_1 = \frac{(3 - \sqrt{13})}{2} = -0,302776\dots$ y $p_2 = \frac{(3 + \sqrt{13})}{2} = 3,302776\dots$. El único punto fijo es claramente p_1 pues este punto está en $[-1, 1]$ en cambio p_2 no. Ver Figura 4.

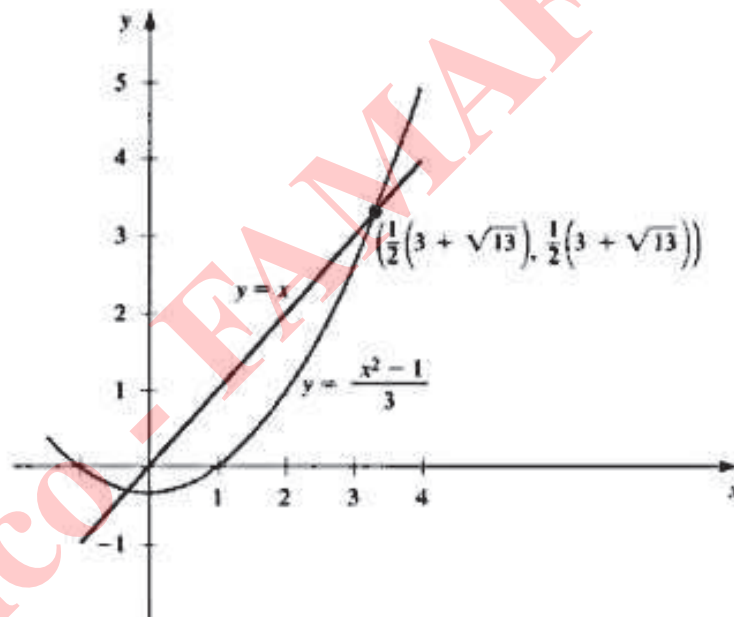


Figura 4: Puntos fijos del Ejemplo 1.

Notar en el gráfico que p_2 también es un punto fijo de g en el intervalo $[3, 4]$. Sin embargo, $g(4) = 5$ y $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$, por lo que no se satisfacen las hipótesis del teorema anterior en el intervalo $[3, 4]$. Esto dice que tales hipótesis son condiciones suficientes para garantizar la existencia y unicidad de un punto fijo, pero no son necesarias.

Ejemplo 2: considerar $g(x) = 3^{-x} = e^{-(\ln 3)x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Su derivada es $g'(x) = -(\ln 3)e^{-(\ln 3)x} = -(\ln 3)3^{-x} < 0$, por lo tanto g es decreciente en el intervalo $[0, 1]$. Entonces,

$$g(0) = 1 \geq g(x) \geq \frac{1}{3} = g(1),$$

y por el teorema anterior, existe un punto fijo en $[0, 1]$. Por otro lado, $g'(0) = -\ln 3 = -1.0986\dots$ y por lo tanto no se puede usar el teorema anterior para garantizar unicidad pues $|g'(x)| \not\leq 1$ en el intervalo $(0, 1)$. Ver Figura 5.

Idea del algoritmo de punto fijo

Para calcular aproximadamente el punto fijo de una función g primero se inicia con una aproximación inicial p_0 y calculando $p_n = g(p_{n-1})$ para $n \geq 1$ se obtiene una sucesión de

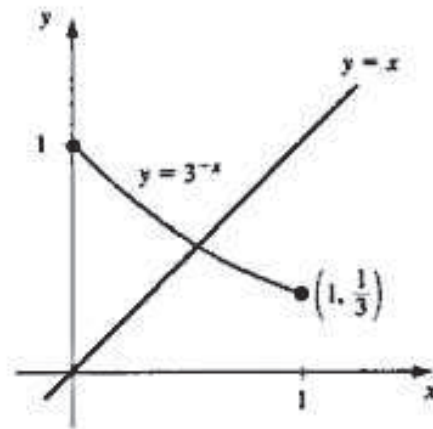


Figura 5: Puntos fijos del Ejemplo 1.

aproximaciones $\{p_n\}$. Si la función g es continua y la sucesión converge entonces lo hace a un punto fijo p de g pues

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}) = g(p).$$

Algoritmo del método de punto fijo

Dados los siguientes datos de entrada y parámetros algorítmicos: p_0 una aproximación inicial, el número máximo de iteraciones permitido M y δ la tolerancia para el error e (en la variable x)

input p_0, M, δ

output $0, p_0$

$i \leftarrow 1$

while $i \leq M$ **then do**

$p \leftarrow g(p_0)$

output i, p

if $|p - p_0| < \delta$ **then STOP**

$i \leftarrow i + 1$

$p_0 \leftarrow p$

end while

Observaciones:

1. El algoritmo es muy fácil de implementar.
2. los criterios de parada utilizados son la distancia entre dos iteraciones sucesivas y el número máximo de iteraciones.

Teorema 2.

Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos que existe $g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ y existe una constante positiva $0 < k < 1$ tal que $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$, entonces para cualquier $p_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $p_n = g(p_{n-1})$, para $n \geq 1$, converge al único punto fijo p en (a, b) .

Demostración. Por el teorema anterior, se sabe que bajo estas hipótesis existe un único punto fijo $p \in [a, b]$. Como $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, la sucesión de aproximaciones $\{p_n\}$ está bien definida para todo n , es decir, $p_n \in [a, b]$ para todo n .

Para probar la convergencia se usará el Teorema del Valor Medio en lo siguiente

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi_n)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|,$$

luego, por recurrencia, se tiene que

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \leq \dots \leq k^n |p_0 - p|.$$

Como $0 < k < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$, luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = |p_0 - p| \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0,$$

y por lo tanto, la sucesión $\{p_n\}$ converge al punto fijo p . □

Corolario 1. Si g es una función que satisface las hipótesis del teorema anterior, se tienen las siguientes cotas de error

$$\begin{aligned} |p_n - p| &\leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \\ |p_n - p| &\leq \frac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0| \quad \text{para todo } n \geq 1 \end{aligned}$$

Demostración. La demostración puede consultarse en el libro de Burden-Faires. □

Análisis de error en métodos de punto fijo

Supongamos que p es un punto fijo de una función g y que $\{p_n\}$ es la sucesión, que converge a p , definida por $p_{n+1} = g(p_n)$.

Sea p_n una aproximación del punto fijo p , es decir $p_n = p + h$, y consideremos el desarrollo de Taylor de g centrado en p :

$$\begin{aligned} p_{n+1} = g(p_n) = g(p + h) &= g(p) + g'(p)(p_n - p) + \frac{g''(p)}{2}(p_n - p)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{g^{(r-1)}(p)}{(r-1)!}(p_n - p)^{r-1} + \frac{g^{(r)}(\xi_n)}{r!}(p_n - p)^r, \end{aligned} \quad (3)$$

para algún ξ_n entre p_n y p .

Supongamos ahora que $g'(p) = g''(p) = \dots = g^{(r-1)}(p) = 0$ pero $g^{(r)}(p) \neq 0$, entonces

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = g(p_n) - g(p) = \frac{g^{(r)}(\xi_n)}{r!} (p_n - p)^r = \frac{g^{(r)}(\xi_n)}{r!} e_n^r,$$

esto es,

$$e_{n+1} = \frac{g^{(r)}(\xi_n)}{r!} e_n^r,$$

y tomando límite se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = \frac{|g^{(r)}(p)|}{r!} = C,$$

por lo tanto el método tiene orden de convergencia (al menos) r .

Conclusión: si las derivadas de la función de iteración de punto fijo se anulan en el punto fijo p hasta el orden $(r-1)$ entonces el método tiene orden de convergencia (al menos) r .

Usando este resultado se obtienen tres corolarios interesantes que relacionan el método de Newton con el método de punto fijo para una función f que satisface las hipótesis del teorema de convergencia de Newton.

Corolario 2. Si f es una función que tiene una raíz simple p , entonces el método de Newton es un método de punto fijo y tiene orden de convergencia (al menos) 2.

Demostración. Sea $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, la función de iteración del método de Newton. Es claro que si p es una solución de $f(x) = 0$, entonces p es un punto fijo de g pues

$$g(p) = p - \frac{f(p)}{f'(p)} = p,$$

ya que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$.

Ahora calculemos $g'(x)$ y luego evaluemos en p :

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 + \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2},$$

entonces

$$g'(p) = \frac{f''(p)f(p)}{(f'(p))^2} = 0,$$

y por lo tanto el método tiene orden de convergencia (al menos) 2. □

Corolario 3. Si p es una raíz de multiplicidad $r \geq 2$ de f , entonces el método de Newton tiene orden 1.

Demostración. Ya vimos que si $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ entonces $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$.

Ahora, supongamos que p es una raíz de multiplicidad r de f , esto es, $f(x) = (x-p)^r h(x)$, con h una función tal que $h(p) \neq 0$ y $r \geq 2$.

La derivada primera de f es

$$f'(x) = r(x-p)^{r-1}h(x) + (x-p)^r h'(x) = (x-p)^{r-1} [rh(x) + (x-p)h'(x)],$$

y la derivada segunda de f es

$$\begin{aligned} f''(x) &= r(r-1)(x-p)^{r-2}h(x) + 2r(x-p)^{r-1}h'(x) + (x-p)^r h''(x), \\ &= (x-p)^{r-2} [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]. \end{aligned}$$

Luego

$$g'(x) = \frac{(x-p)^r h(x)(x-p)^{r-2} [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]}{(x-p)^{2r-2} [rh(x) + (x-p)h'(x)]^2},$$

entonces

$$g'(p) = \frac{h(p)r(r-1)h(p)}{r^2(h(p))^2} = \frac{r-1}{r} \neq 0,$$

pues $r \geq 2$. □

Por último, modificando levemente la función de iteración del método de Newton se puede recuperar la convergencia cuadrática aún en casos de raíces múltiples.

Corolario 4. Si p es una raíz de multiplicidad $r \geq 2$ de f , entonces la siguiente modificación del método de Newton recupera la convergencia cuadrática:

$$x_{n+1} = x_n - r \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{esto es,} \quad g(x) = x - r \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Demostración. Usando las expresiones de f, f' y f'' obtenidas en el corolario anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - r \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = 1 - r + r \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ &= 1 - r + r \frac{(x-p)^r h(x)(x-p)^{r-2} [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]}{(x-p)^{2r-2} [rh(x) + (x-p)h'(x)]^2} \\ &= 1 - r + r \frac{h(x) [r(r-1)h(x) + 2r(x-p)h'(x) + (x-p)^2 h''(x)]}{[rh(x) + (x-p)h'(x)]^2}. \end{aligned}$$

Evaluando en el punto fijo p se obtiene

$$g'(p) = 1 - r + r \frac{h(p)r(r-1)h(p)}{r^2(h(p))^2} = 1 - r + (r-1) = 0,$$

y por lo tanto el método de Newton modificado tiene convergencia (al menos) cuadrática. □