Análisis Matemático II

Licenciatura en Ciencias de la Computación - 2021

Práctico 5 - Funciones de varias variables

(1) Determinar el dominio de las siguientes funciones y graficarlo.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2 - y^2}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2 + 9\,y^2 - 36}$

(2) Sea $f(x,y) = \ln(x+y-1)$.
(a) Evalúe $f(1,1)$ y $f(e,1)$.
(b) Determine y grafique el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

(3) Sea $f(x,y) = x^2 e^{3xy}$.
(a) Evalúe $f(2,0)$.
(b) Determine y grafique el dominio de f.
(c) Determine el rango de f.

(4) Bosquejar la gráfica de las siguientes funciones.
(a) $f(x,y) = y^2$, donde $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$
(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (semiesfera)
(c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ (paraboloide)
(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (silla de montar)
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (cono)
(f) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ (hiperboloide de dos hojas)

(5) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a) $f(x,y) = x - y$, $(3,2)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $(1,1,1)$

(c) $f(x,y) = xy + x^2$, $(2,0)$

(d) $w = \mathrm{e}^{y \ln z}$, $(\mathrm{e}, 2, \mathrm{e})$

(e) $f(x,y,z) = x^3 y^4 z^5$, $(0,-1,-1)$

(f) $w = \ln(1 + e^{xyz})$, $(2,0,-1)$

(6) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $(\pi, 4)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, en $(1,2)$.

(7) Para las siguientes funciones encontrar: *(i)* el gradiente en el punto indicado, *(ii)* una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado,*(iii)* una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, en (1,1). (b) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $(0,2)$.

(8) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$, en $(1,-1,1)$.

(b) $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$, en $(\pi/2, \pi, \pi)$.

(9) Calcular la derivada direccional de f en el punto P_o y en la dirección del vector $\vec{u}$ dado.

(a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{2y}$, $P_o = (2,0)$, $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+z^2)$, $P_o = (1,3,2)$, $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(10) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y) = (x+y-2)^2 + (3x-y-6)^2$?

(11) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

(a) $z = x^2(1+y^2)$ (b) $w = x^3y^3z^3$

(12) Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt

(a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$

(b) $z = \cos(x+4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$

(c) $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$, $x = \ln t$, $y = \cos t$

(d) $\arctan(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

(13) Sea $u = \sqrt{x^2+y^2}$ donde $x = \mathrm{e}^{st}$, $y = 1 + s^2\cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene al reemplazar x e y en u y luego derivar.

(14) Sea $f(x,y,z) = xyz^3$.

(a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

(b) Sabiendo que $x = x(z) = \sin z$ e $y = y(z) = \mathrm{e}^{4z}$, calcular $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)]$ reemplazando $x(z)$ e $y(z)$ en la fórmula de f.

(c) Comprobar que $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)] = \dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{dy}{dz} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

(15) Sea $z = f(x, y)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3s - 2t$. Calcular,

(a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

(16) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{2 + x^2 + y^2}$

(17) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$

(18) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-x^2 - y^4}$

(19) Calcular la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

(20) Calcular los valores máximo y mínimo relativos o puntos sillas de las siguientes funciones

(a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
(b) $f(x, y) = x^3 y + 12x^2 + 8y$
(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
(d) $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x \quad$ en $1 \leq x \leq 7$.