11.8 SERIES DE POTENCIAS

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes que se denominan **coeficientes** de la serie. Para cada x establecida, la serie (1) es una serie de constantes que puede probar para ver si son convergentes o divergentes. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie es convergente. Observe que f es parecida a un polinomio. La única diferencia es que f tiene una cantidad infinita de términos.

Por ejemplo, si hace $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geqslant 1$ (véase ecuación 11.2.5).

■ SERIES TRIGONOMÉTRICAS
Una serie de potencias es una serie en la cual cada uno de los términos es una función con potencias. Una **serie trigonométrica**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series*.

En general, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en $(x - a)$**, o bien, **serie de potencias centrada en a**, o también, **serie de potencias con respecto a a**. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 2, se ha adoptado la convención de $(x-a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. Asimismo, note que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y de este modo la serie de potencias (2) siempre es convergente cuando $x = a$.

V EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Aplique la prueba de la razón. Si denota con a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, entonces $a_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$,

■ Nótese que
$(n+1)! = (n+1)n(n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$= (n+1)n!$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty$$

Según la prueba de la razón, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. En estos términos, la serie dada converge sólo cuando $x = 0$. □

V EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x-3)^n/n$. En tal caso

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n} \right|$$

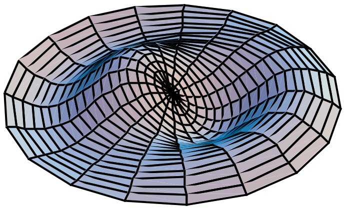
$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} |x-3| \to |x-3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente cuando $|x-3|<1$ y divergente cuando $|x-3|>1$. Ahora

$$|x-3|<1 \iff -1<x-3<1 \iff 2<x<4$$

de modo que la serie converge cuando $2<x<4$ y diverge cuando $x<2$ o bien $x>4$.

La prueba de la razón no proporciona información cuando $|x-3|=1$ de modo que debe considerar $x=2$ y $x=4$ por separado. Si pone $x=4$ en la serie, se vuelve $\Sigma\, 1/n$, la serie armónica, la cual es divergente. Si $x=2$, la serie es $\Sigma\,(-1)^n/n$, la cual es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por lo tanto, la serie de potencias dada converge para $2\leqslant x<4$. □



■ Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

Ya verá que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas funciones surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, sin olvidar la distribución de temperaturas en una lámina circular y las vibraciones de una membrana de un tambor.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n=(-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. En tal caso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$

$$=\frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2}\cdot\frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$

$$=\frac{x^2}{4(n+1)^2}\to 0<1 \qquad \text{para toda } x$$

De este modo, de acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$. □

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie quiere decir que, para todo número real x,

$$J_0(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x)=1 \qquad s_1(x)=1-\frac{x^2}{4} \qquad s_2(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304} \qquad s_4(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\frac{x^8}{147\,456}$$

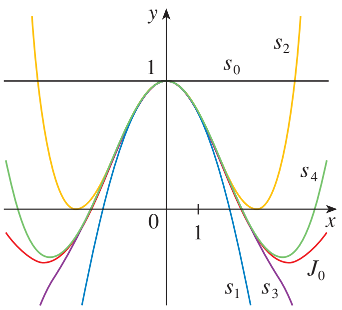


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

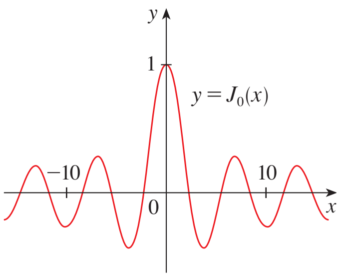


FIGURA 2

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son polinomios. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

En lo que respecta a la serie de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3 y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1. El teorema siguiente, demostrado en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

3 TEOREMA Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

(i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

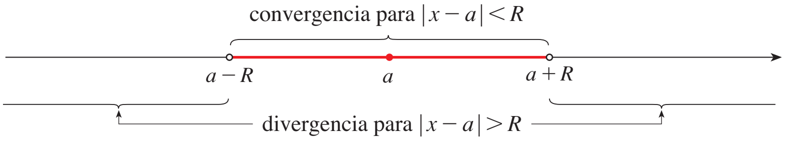
(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

El número R en el caso (iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso (i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso (ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso (iii) la desigualdad $|x - a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por lo tanto, en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a - R, a + R) \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

FIGURA 3



Se resumen a continuación el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos ya considerados en esta sección.

	Serie	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la prueba de la razón (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las pruebas de la razón y la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, de modo que es necesario verificar los extremos por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n / \sqrt{n+1}$. Por lo tanto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. En estos términos, es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto quiere decir que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Sabemos que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

la cual es divergente. (Aplique la prueba de la integral o simplemente observe que es una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

la cual converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por lo tanto, la serie dada de potencias converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$, de modo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. □

V EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Al aplicar la prueba de la razón, se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. De modo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x + 2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, así que probamos la serie en los extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

la cual es divergente según la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge en 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

la cual también es divergente según la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge sólo cuando $-5 < x < 1$, de modo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$. □

11.8 EJERCICIOS

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3–28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se infiere que la serie siguiente es convergente?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea
(a) (p, q) (b) $(p, q]$
(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. ¿Es posible hallar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.

34. Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$, sobre una misma pantalla. ¿En qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales y $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

se llama *función de Bessel de orden 1*.

(a) Determine el dominio.

(b) Dibuje las primeras sumas parciales en una misma pantalla.

CAS (c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Bessel, dibuje J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).

(a) Determine el dominio de la función de Airy.

(b) Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ en una misma pantalla.

CAS (c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Airy, dibuje A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso b), y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geqslant 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geqslant 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Muestre que si $\text{lím}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, donde $c \neq 0$, en tal caso el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ es $R = 1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x - a)^n$ satisface $c_n \neq 0$ para toda n. Demuestre que si existe $\text{lím}_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$, por lo tanto es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma\, (c_n + d_n)x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma\, c_n x^{2n}$?

11.9 REPRESENTACIONES DE LAS FUNCIONES COMO SERIES DE POTENCIAS

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, o mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué siempre se busca expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones mediante polinomios. (Los científicos lo hacen así para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen así para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Inicie con una ecuación que estudió antes:

$$\boxed{1} \qquad \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Ya encontró esta ecuación en el ejemplo 5 de la sección 11.2, donde la obtuvo al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso la opinión es distinta. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1 - x)$ como una suma de una serie de potencias.

■ Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales

$$\frac{1}{1 - x} = \text{lím}_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n se incrementa, $s_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para $f(x)$ en $-1 < x < 1$.

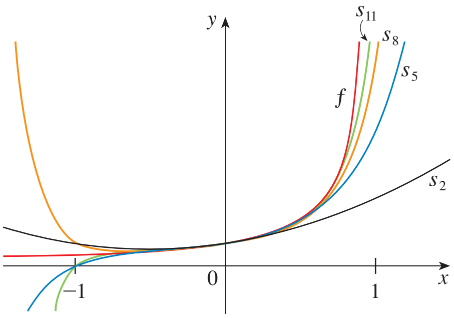


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ y algunas sumas parciales

■ Cuando se pide una serie de potencias en esta sección, se supone que la serie está centrada en 0, a menos que se indique de otra forma.

V EJEMPLO 1 Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias, y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, queda

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o bien, $|x| < 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Naturalmente, podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la prueba de la razón, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso. □

EJEMPLO 2 Determine una representación para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. De modo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Puesto que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

■ Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para ser capaces de derivar e integrar estas funciones, el siguiente teorema (el cual no será demostrado) establece que es posible hacerlo derivando o integrando cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación** e **integración término a término**.

2 TEOREMA Si la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, entonces la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por lo tanto, continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$ y

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\displaystyle\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones (i) y (ii) son R.

■ En el inciso (ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, de modo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

NOTA 1 Las ecuaciones (i) y (ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

(iii) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$

(iv) $\displaystyle\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n\,dx$

Se sabe que, por lo que toca a las sumas finitas, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones (iii) y (iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que esté trabajando con *series de potencias*. (En el caso de otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase ejercicio 36.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el extremo, y que la serie derivada sea divergente aquí. (Véase ejercicio 37.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Estudiará este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 3 de la sección 11.8 vio que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2nx^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2} \qquad \square$$

V EJEMPLO 5 Exprese $1/(1-x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se obtiene
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Si quisiera podría reemplazar n por $n+1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$. □

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1-x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observe que, excepto en el caso de un factor de -1, la derivada de esta función es $1/(1-x)$. Por eso integre ambos miembros de la ecuación 1:

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int (1 + x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C haga $x = 0$ en esta ecuación y obtenga $-\ln(1-0) = C$. Por lo tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$. □

Observe qué sucede si hace $x = \frac{1}{2}$ en el resultado del ejemplo 6. Puesto que $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$,

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

V EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1+x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1+x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

■ La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama serie de Gregory en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se transforma en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este admirable resultado se conoce como fórmula de Leibniz para π.

Para determinar C haga $x = 0$ y obtiene $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por lo tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Puesto que el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1. □

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Mediante el inciso (a) obtenga una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ que no difiera en 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar la integral, $1/(1 + x^7)$, como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

■ Este ejemplo demuestra una manera útil de las representaciones como series de potencias. Integrar $1/(1 + x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un CAS, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8(a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un CAS.

Ahora integre término a término:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

(b) Si aplica el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada use, de modo que utilice la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n + 1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, puede obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si deja de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

De modo que

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$ □

11.9 EJERCICIOS

1. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. (a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Por medio del inciso (a) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Mediante el inciso (b) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Determine una representación como serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = x\ln(1+x)$.

(c) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = \ln(x^2+1)$

15–18 Encuentre una representación como serie de potencias para la función, y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \arctan(x/3)$

19–22 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y dibuje f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n se incrementa?

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

20. $f(x) = \ln(x^2+4)$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

23–26 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \tan^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con seis cifras decimales.

27. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\arctan(3x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

31. A través del resultado del ejemplo 6, calcule ln 1.1 con cinco cifras decimales.

32. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con tres cifras decimales.

34. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

36. Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

37. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

38. (a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar que la expresión siguiente para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Aplique el método de completar cuadrados para demostrar que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Mediante la factorización de $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso (a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

En la sección anterior, se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿Qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible hallar esa representación?

Empiece por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Trate de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si hace $x = a$ en la ecuación 1, en tal caso todos los términos después del primero son 0 y obtiene

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, puede derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 tiene

$$f'(a) = c_1$$

En seguida derive ambos miembros de la ecuación 2 y obtiene

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

Una vez más haga $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Aplique el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 origina

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \cdots \qquad |x - a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Ahora ya puede ver el patrón. Si continúa derivando y sustituyendo $x = a$, obtendrá

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, tiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si adopta la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. En estos términos, ha demostrado el teorema siguiente:

5 TEOREMA Si f se puede representar como una serie de potencias (expansión) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n \qquad |x - a| < R$$

entonces sus coeficientes los da la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si sustituye esta fórmula de c_n de nuevo en la serie, observe que si f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, después debe ser de la forma siguiente:

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

TAYLOR Y MACLAURIN

La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli la conoció por 1690. Al parecer, Taylor no conocía el trabajo de Gregory ni de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función *f* en *a*** (o bien, **con respecto a *a*** o **centrada en *a***). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Como este caso surge con bastante frecuencia, se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin.**

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, después f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 70.

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por lo tanto, la serie de Taylor para f en 0, (es decir, la serie de Maclaurin), es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia haga $a_n = x^n/n!$ En tal caso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

por esto, según la prueba de la razón, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$. □

La conclusión que obtiene del teorema 5 y el ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo de serie en potencias en 0, por lo tanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por eso, ¿cómo se puede decir si e^x tiene una representación como serie de potencias?

Investigue la cuestión más general: ¿en qué circunstancias es una función igual a la suma de su serie de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuándo es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

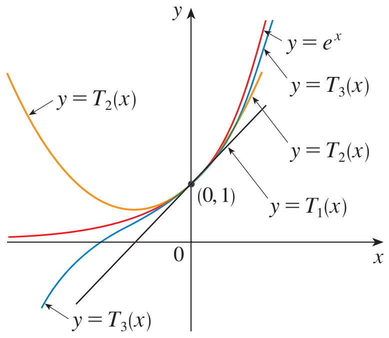


FIGURA 1

■ Cuando n se incrementa, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto hace pensar que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Observe que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de n-ésimo grado, de f en a.** Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin), con $n = 1$, 2 y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si hace

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si puede de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, entonces se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por lo tanto, ha demostrado lo siguiente:

$\boxed{8}$ **TEOREMA** Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, entonces f es igual a la suma de su serie de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el hecho siguiente.

$\boxed{9}$ **DESIGUALDAD DE TAYLOR** Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para entender por qué es cierto para $n = 1$, suponga que $|f''(x)| \leqslant M$. En particular, se tiene $f''(x) \leqslant M$, y de tal manera para $a \leqslant x \leqslant a + d$

$$\int_a^x f''(t)\, dt \leqslant \int_a^x M\, dt$$

Una antiderivada de f'' es f', por lo que según la parte 2 del teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

■ Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo I y $x \in I$, por lo tanto

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo.* Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio, que es el caso $n = 0$).

Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series.*

En estos términos,
$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. De modo que

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geqslant -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

De donde
$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aunque hemos supuesto supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 69 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en funciones que se aproximan. Aquí, el uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x$$

Es verdadero porque de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma\, x^n/n!$ es convergente para toda x y de este modo su n-ésimo término se aproxima a 0.

V EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de su serie de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, entonces $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, después $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Por eso, la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, establece que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, según la ecuación 10,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se infiere entonces del teorema de la compresión que el $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de la serie de Maclaurin, es decir,

11
$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x}$$ □

■ En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 dígitos decimales. En 2003 Shigeru Kondo, de nuevo usando la serie en (12), calculó e a más de 50,000 millones de lugares decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

www.numbers.computation.free.fr

En particular, si hace $x = 1$ en la ecuación 11, obtiene la expresión siguiente para el número e como una suma de una serie infinita:

12
$$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, de este modo, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor (6) obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 puede comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de modo que

13
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$ □

Hay dos desarrollos de series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa a sen x para toda x.

SOLUCIÓN Acomode los cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Puesto que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

■ En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

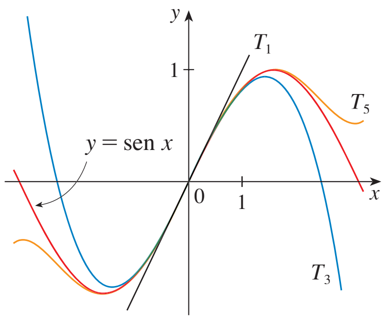


FIGURA 2

Puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$sen x o bien, $\pm\cos x$, sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant 1$ para toda x. De este modo puede tomar a $M = 1$ en la desigualdad de Taylor

14
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10 el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, de modo que $|R_n(x)| \to 0$ según el teorema de compresión. Se infiere entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. □

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

15
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para cos x.

SOLUCIÓN Podría proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \end{aligned}$$

■ La serie de Maclaurin para e^x, sen x y cos x que determinó en los ejemplos 2, 4 y 5 la descubrió Newton aplicando métodos distintos. Estas ecuaciones son notables porque se conoce todo con respecto a cada una de estas funciones si conoce todas sus derivadas en el número 0.

Puesto que la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para cos x converge también para toda x. En estos términos,

16
$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}$$ □

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x\cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para cos x, ecuación 16, por x:

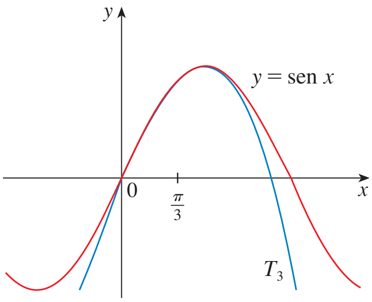
$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$ □

EJEMPLO 7 Represente $f(x) = $ sen x como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero acomode los valores en columnas

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■ Ha obtenido dos diversas series de representaciones para sen x, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cerca a 0 y la serie de Taylor para x cerca a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al sen x cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde está el polinomio opuesto verdadero.



y este patrón se repite en forma indefinida. Por lo tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots$$

La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Sólo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Puede escribir la serie con la notación sigma o suma si separamos los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}$$ □

La serie de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 así lo establece, ya que no importa cómo una representación de una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$ se obtenga, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin deducidas en esta sección y en la anterior.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar el trabajo en columnas

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\ f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1) \\ f'''(x) &= k(k - 1)(1 + 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2) \\ &\;\;\vdots & & \\ f^{(n)}(x) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)}{n!} x^n$$

Esta serie se denomina **serie binomial.** Si su n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|k-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \quad \text{es } n \to \infty$$

Entonces, por la prueba de la razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. □

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

y los números se llaman **coeficientes del binomio.**

El siguiente teorema expresa que $(1+x)^k$ es igual a la suma de su serie Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el término restante $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La prueba resumida en el ejercicio 71 es mucho más fácil.

17 SERIE BINOMIAL Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos extremos si $k \geqslant 0$. Nótese que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k-k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Esto significa que la serie termina y reduce el teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

V EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Escriba $f(x)$ de forma que pueda usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ y donde x fue reemplazada por $-x/4$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabe de (17) que esta serie converge con $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, de modo que el radio de convergencia es $R = 4$. □

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que ha deducido en esta sección y en la anterior..

TABLA 1
Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo mencionamos que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ por medio de las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

V EJEMPLO 10

(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.

(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN

(a) Primero encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determinémosla simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie de e^x dada en la tabla 1. Por esto, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora integre término a término

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El teorema fundamental del cálculo

■ Es posible hacer $C = 0$ en la antiderivada del inciso (a).

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error que hay en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$ □

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de l'Hospital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 11 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x

■ Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

porque las series de potencias son funciones continuas. □

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios; (el teorema 11.2.8 lo ilustra). En efecto, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Primero determine los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 12 Calcule los primeros tres términos no cero de la serie de Maclaurin para (a) e^x sen x y (b) tan x.

SOLUCIÓN

(a) Mediante la serie de Maclaurin para e^x y sen x en la tabla 1

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{r}
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
x \qquad\qquad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
- \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots
\end{array}$$

Así,
$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Aplique un procedimiento como el de la división larga

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

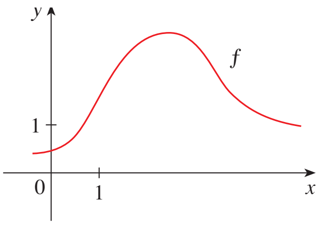
Por consiguiente,
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$
□

No se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 12, pero son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, en tal caso la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se proporciona la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5–12 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$

6. $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

8. $f(x) = \cos 3x$

9. $f(x) = e^{5x}$

10. $f(x) = xe^x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$

12. $f(x) = \cosh x$

13–20 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo de serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.]

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1, \quad a = 1$

14. $f(x) = x - x^3, \quad a = -2$

15. $f(x) = e^x, \quad a = 3$

16. $f(x) = 1/x, \quad a = -3$

17. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi$

18. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/2$

19. $f(x) = 1/\sqrt{x}, \quad a = 9$

20. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1$

21. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 7 representa sen πx para toda x.

22. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa sen x para toda x.

23. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 11 representa senh x para toda x.

24. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 12 representa cosh x para toda x.

25–28 Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

25. $\sqrt{1+x}$

26. $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

27. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$

28. $(1-x)^{2/3}$

29–38 Utilice la serie de Maclaurin que paracere en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$

30. $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$

32. $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x^2)$

33. $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x)^3$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \quad$ [*Sugerencia*: utilice $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

39–42 Determine la serie de Maclaurin de f (mediante cualquier método), y su radio de convergencia. Dibuje f y sus primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa con respecto a la correspondencia entre estos polinomios y f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$

40. $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = \ln(1+x^2)$

43. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco posiciones decimales.

44. Utilice la serie de Maclaurin para sen x a fin de calcular sen 3° con cinco posiciones decimales.

45. (a) Use la serie binomial para expandir $1/\sqrt{1-x^2}$
(b) Use la parte (a) para hallar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1}x$.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1+x}$ como una serie de potencias.
(b) Use el inciso (a) para estimar correctamente $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}}$ con tres posiciones decimales.

47–50 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

47. $\int x\cos(x^3)\,dx$

48. $\int \dfrac{e^x-1}{x}\,dx$

49. $\int \dfrac{\cos x-1}{x}\,dx$

50. $\int \arctan(x^2)\,dx$

51–54 Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

51. $\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx$ (tres decimales);

52. $\int_0^{0.2} [\tan^{-1}(x^3)+\operatorname{sen}(x^3)]\,dx$ (cinco decimales)

53. $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4}\,dx$ $(|\text{error}| < 5\times 10^{-6})$

54. $\int_0^{0.5} x^2e^{-x^2}\,dx$ $(|\text{error}| < 0.001)$

55–57 Mediante las series evalúe el límite.

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

57. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x-x+\frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Utilice la serie del ejemplo 12(b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4 de la sección 4.4 utilizando la regla de l'Hospital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

59–62 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

59. $y=e^{-x^2}\cos x$

60. $y=\sec x$

61. $y=\dfrac{x}{\operatorname{sen}x}$

62. $y=e^x\ln(1-x)$

63–68 Calcule la suma de la serie.

63. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{4n}}{n!}$

64. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

66. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{5^n n!}$

67. $3+\dfrac{9}{2!}+\dfrac{27}{3!}+\dfrac{81}{4!}+\cdots$

68. $1-\ln 2+\dfrac{(\ln 2)^2}{2!}-\dfrac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots$

69. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n=2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)|\leqslant M$ para $|x-a|\leqslant d$, en tal caso

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{M}{6}|x-a|^3\qquad\text{para } |x-a|\leqslant d$$

70. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

no es igual a la serie de Maclaurin.
(b) Dibuje la función del inciso (a) y comente su comportamiento cerca del origen.

71. Use los pasos siguientes para demostrar (17).

(a) Sea $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x)=\frac{kg(x)}{1+x}\qquad -1<x<1$$

(b) Sea $h(x)=(1+x)^{-k}g(x)$ y demuestre que $h'(x)=0$.

(c) Deduzca que $g(x)=(1+x)^k$.

72. En el ejercicio 53 de la sección 10.2 se demostró que la longitud de la elipse $x=a\operatorname{sen}\theta$, $y=b\cos\theta$, donde $a>b>0$, es

$$L=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

donde $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse.
Expanda el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 46 de la sección 7.1 para expresar L como una serie en potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.