Análisis Matemático I — Licenciatura en Ciencias de la Computación
Cálculo I — Licenciatura en Matemática Aplicada
FAMAF – UNC

Examen Final - 25 de septiembre de 2020

Ejercicio 1. a) ¿Cuáles son los números que se encuentran a menor distancia de 5 que de 3?

(I) Escriba una inecuación que represente el problema.

(II) Resuelva la inecuación del punto anterior.

b) Grafique el conjunto de soluciones de la desigualdad $\dfrac{|x-4|}{|x-1|} < (x+2)$

c) Dada la función $f(x) = e^{-x^4} + 1$, $f : R \to R$, responda las siguientes preguntas, justificando las respuestas:

(I) ¿Es inyectiva?

(II) ¿Es subyectiva?

(III) ¿Es biyectiva?

(IV) ¿Es inversible?

(V) ¿Es necesario restringir el dominio para que sea inyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?

(VI) ¿Es necesario restringir el conjunto de llegada para que sea subyectiva? En caso afirmativo, ¿cuál es?

(VII) Indique el dominio y espacio de llegada para que la función tenga inversa y calcúlela.

Ejercicio 2. a) Demuestre que en el intervalo $[0, \pi]$ la función $h(x) = 2 + \operatorname{sen}(x) - x^3$ tiene al menos una raíz, al menos un máximo y al menos un mínimo.

b) Calcule los siguientes límites sin usar la regla de L'Hôpital:

(I) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2x^3 - 3x + 1}$

(II) $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}(-\frac{x}{3})}$

c) Sea $g(x)$ la siguiente función definida a tramos:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3-x}-2}{x+1} & x < 3 \\[2ex] \dfrac{x-5}{x^2-4} & 3 \leq x \end{cases} \tag{1}$$

¿Para qué valores de x esta función es discontinua y qué tipo de discontinuidad tiene?

d) Usando las herramientas que considere más apropiadas, calcule el siguiente límite:
$\displaystyle \lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

Ejercicio 3. a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

(I) $f(x) = \ln[\operatorname{sen}(7x^2 - \pi)]$

(II) $g(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{e^x}$

b) (I) Obtenga la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$ en el punto $(1, 2)$.

(II) Utilice la ecuación obtenida en (i) para estimar el valor de $\sqrt[3]{7,9}$ con una aproximación lineal.

(III) El valor obtenido en el inciso anterior, ¿es mayor o menor al valor exacto de $\sqrt[3]{7,9}$? Justifique.

c) Enuncie el Teorema de Rolle e interprete gráficamente este resultado (puede ser mediante un ejemplo).

Ejercicio 4. Grafique una función que cumpla con **todas** las siguientes características:

(I) El dominio es $Dom\, f = \mathbb{R}$; la imagen es $\mathbb{I} = (-3, 4]$

(II) Tiene una asíntota horizontal en $y = 2$

(III) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

(IV) Tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$ y es continua en $(-2, +\infty)$

(V) $f(x)$ no es derivable en $x = 0$ y $f'(x) > 0$ en $(0, 3)$

(VI) Tiene un mínimo local en $x = -2$ y un máximo absoluto en $x = 3$

(VII) Tiene punto de inflexión en $x = -3$

(VIII) $f''(x)$ es positiva en $(-3, 0)$

(IX) $f''(x) = 0$ en $(0, 3)$

(X) Es cóncava hacia arriba en $(3, +\infty)$

Ejercicio 5. a) Resuelva la siguiente integral. *Ayuda*: Puede resultar más fácil hacer primero una sustitución y después resolver por partes.

$$\int 2x \ln(2 + x) dx$$

b) Calcule el número b tal que la recta $y = b$ divida la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = 4$ en dos regiones de igual área.

c) Sin realizar el cálculo de la integral, justifique la validez de la siguiente desigualdad:

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2}$$