Clase 4 - Solución de ecuaciones no lineales

El problema

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no lineal, se desea encontrar una solución r de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Idea: comenzando con algún $x_0 \in \mathbb{R}$, generar una sucesión $\{x_k\}$ a través de un algoritmo numérico iterativo, y se espera que tal sucesión converja a r donde $f(r) = 0$.

Método de bisección

Este método se basa fuertemente en el teorema del valor intermedio: si f es continua en $[a,b]$ y si $f(a)f(b) < 0$, entonces f debe tener una raíz en (a,b).

Idea del método de bisección

Si $f(a)f(b) < 0$, se calculan $c = \dfrac{a+b}{2}$ y $f(c)$. Sean $x_0 = c$: una aproximación a la raíz r de f y $|e_0| = |x_0 - r| \leq \dfrac{b-a}{2}$: error de aproximación inicial. Se tienen 3 posibilidades:

1. si $f(a)f(c) < 0$, entonces hay una raíz en el intervalo $[a,c]$. Reasignamos $b \leftarrow c$ y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo $[a,b]$.

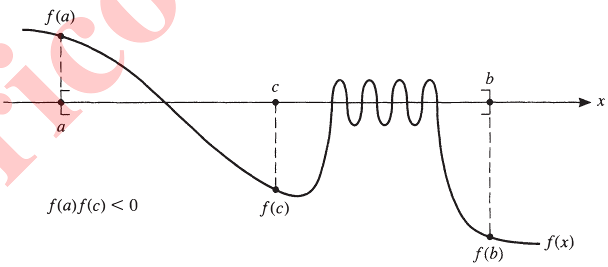

Figura 1: Caso: $f(a)f(c) < 0$

2. si $f(a)f(c) > 0$, entonces hay una raíz en el intervalo $[c,b]$. Reasignamos $a \leftarrow c$ y se repite el procedimiento en el nuevo intervalo $[a,b]$.

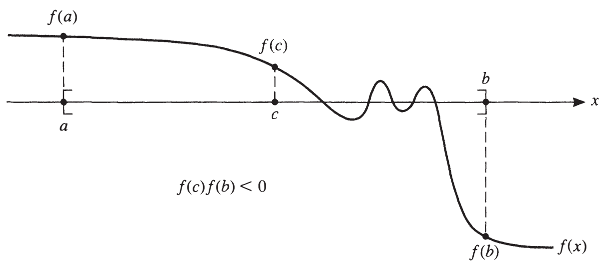

Figura 2: Caso: $f(a)f(c) > 0$

3. si $f(a)f(c) = 0$, entonces $f(c) = 0$ y $x_0 = c$ es la raíz buscada.

   Este caso es casi imposible en la práctica debido a los errores de redondeo. Por lo tanto, el criterio de parada no dependerá de que $f(c) = 0$ sino de que $|f(c)| < TOL$, donde TOL es una tolerancia dada por el usuario.

Veamos algunos comentarios de implementación antes de dar el algoritmo.

- Por cuestiones numéricas, en vez de calcular el punto medio haciendo $c \leftarrow (a+b)/2$, es más conveniente calcular $c \leftarrow a+(b-a)/2$.

- Para determinar el cambio de signo de la función, en vez de analizar si $f(a)f(c) < 0$, es más conveniente usar la función *sign*, y analizar si $sign(f(a)) \neq sign(f(b))$.

- Se utilizan 3 criterios de parada en el algoritmos:

  1. el número máximo de pasos permitidos (M);
  2. el error en la variable es suficientemente pequeño (δ);
  3. el valor de $|f(c)|$ es suficientemente pequeño (ε).

  Se pueden construir ejemplos patológicos y simples donde uno de los criterios vale y el otro no. (Ver Figuras (3 y 4)).Para que el algoritmo sea más robusto se utilizan los tres criterios de parada. De todos modos, siempre es conveniente revisar que se cumplan las hipótesis para que se pueda aplicar el método y el algoritmo y analizar los resultados obtenidos.

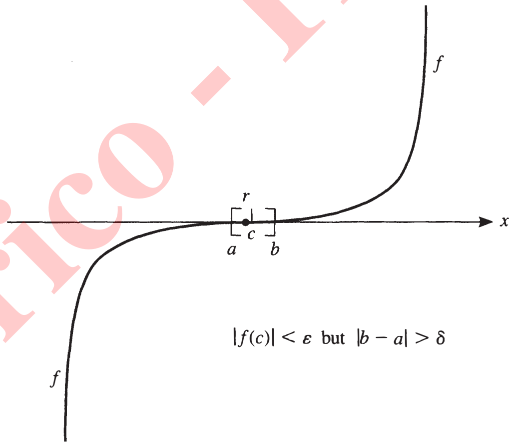

Figura 3: Ejemplo 1

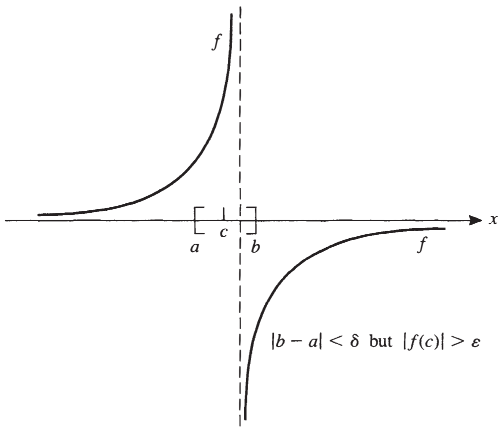

Figura 4: Ejemplo 2

Algoritmo de bisección

Dados los siguientes datos de entrada y parámetros algorítmicos: a y b extremos izquierdo y derecho del intervalo, M el máximo número de pasos (iteraciones) permitidas, δ la tolerancia para el error e (en la variable x) y ε la tolerancia para los valores funcionales.

input $a, b, M, \delta, \varepsilon$

$u \leftarrow f(a)$

$v \leftarrow f(b)$

$e \leftarrow b - a$

output a, b, u, v

if $sign(u) = sign(v)$ **then** **STOP** (1)

for $k = 1, 2, \ldots, M$ **do**

    $e \leftarrow e/2$

    $c \leftarrow a + e$

    $w \leftarrow f(c)$

    output k, c, w, e

    if $|e| < \delta$ **or** $|w| < \varepsilon$ **then** **STOP** (2)

    if $sign(w) \neq sign(u)$ **then**

        $b \leftarrow c$

        $v \leftarrow w$

    else

        $a \leftarrow c$

        $u \leftarrow w$

    endif

end

Observaciones:

1. En el algoritmo aparecen dos paradas (STOP). La primera detecta que los signos en los extremos del intervalo inicial son iguales y por lo tanto no puede continuar el algoritmo. Notar que el algoritmo no puede chequear continuidad (ver Figura (4)). La segunda parada detecta que alguno de los criterios de parada adoptados se cumple.

2. Se podría usar otro criterio de parada basado en que el error relativo sea pequeño en lugar de considerar el error absoluto.

3. El algoritmo *encuentra* una raíz de f en $[a, b]$, aunque pueden existir varias raíces. Para localizar alguna en particular se debe elegir el intervalo inicial cuidadosamente.

El siguiente teorema da un resultado de convergencia del método. Por un lado muestra que el método es **global**, en el sentido que si se cumplen las hipótesis del teorema del valor intermedio, el algoritmo encuentra una solución independiente del tamaño del intervalo. Por otro lado, de la demostración se puede deducir que la sucesión generada por este algoritmo **converge linealmente.**

Teorema 1. *Si $[a_0,b_0],[a_1,b_1],\ldots,[a_n,b_n],\ldots$ denotan los sucesivos intervalos en el método de bisección, entonces existen los límites: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, son iguales y representan una raíz de f. Si $c_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$ y $r = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, entonces $|r-c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0)$.*

Demostración. Si $[a_0,b_0],[a_1,b_1],\ldots,[a_n,b_n],\ldots$ son los intervalos generados en el método de bisección, se tiene que

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_0$$

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_0.$$

Luego $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ es convergente. Análogamente, $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, por lo tanto también es convergente. Además,

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1}), \qquad n \geq 1,$$

y aplicando esta ecuación repetidamente, se obtiene que

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0-a_0), \qquad n \geq 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}(b_0-a_0) = (b_0-a_0)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

Sea $r = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Luego tomando límite cuando n tiende a infinito en la desigualdad $f(a_n)f(b_n) < 0$, se obtiene que $(f(r))^2 \leq 0$. De allí que $(f(r))^2 = 0$, y en consecuencia $f(r) = 0$, es decir, r es una raíz de f.

Por último sea $c_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$. Luego,

$$|r-c_n| \leq \frac{1}{2}|b_n-a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b_0-a_0).$$

□

Ejemplo: Supongamos que se aplica el método de bisección para determinar una raíz r de una función f en el intervalo $[50,63]$.

a) ¿Cuántos pasos se deberían realizar con el algoritmo de bisección si se desea obtener una raíz en el intervalo $[50,63]$ con una precisión absoluta de 10^{-6}?;

b) ¿Cuántos pasos se deberían realizar con el algoritmo de bisección si se desea obtener una raíz en el intervalo $[50,63]$ con una precisión relativa de 10^{-6}?

Para responder a), y usando el Teorema anterior se tiene que

$$|r - c_n| \leq \frac{13}{2^{n+1}} \leq 10^{-6},$$

y por lo tanto $13\ 10^6 \leq 2^{n+1}$. Luego tomando logaritmo natural a ambos lados, se tiene que

$$(n+1)\ln 2 \geq \ln(13) + 6\ln(10),$$

de donde se deduce que $n \geq 23$.

Para el caso b), también se usa el teorema anterior y que $50 \leq r \leq 63$, entonces

$$\frac{|r - c_n|}{|r|} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{13}{|r|} \leq \frac{13}{50\ 2^{n+1}} \leq 10^{-6}.$$

Luego $2^{n+1} \geq \dfrac{13}{50}\ 10^6$, y aplicando logaritmo natural a ambos miembros de la desigualdad se deduce que $n \geq 17$.