TRABAJO PRÁCTICO Nº 5: APLICACIONES DE LA DERIVADA. DIFERENCIAL. REGLA DE L'HÔPITAL

Recta tangente y normal

1. Determine la ecuación de la recta tangente y la recta normal a las curvas cuyas ecuaciones se dan, bajo las condiciones que se indican:

   a) $y = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ en el punto $P\,(4,-1)$.

   b) $y = \dfrac{2r+3}{3r-2}$ en el punto de abscisa $r=1$.

   c) $y = 3\cos x$, la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y + 3x - 1 = 0$.

2. Sean f y g funciones tales que $f(u) = u^2 + 5u + 5$ y $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Determine la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f \circ g$ en el punto de la misma de abscisa $x = 2$.

3. La ecuación $arctg(x + y^3) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{\pi}{4} y$ define a y en función de x. Determinar la ecuación de la recta normal y de la recta tangente a la curva en el punto $P(0,1)$.

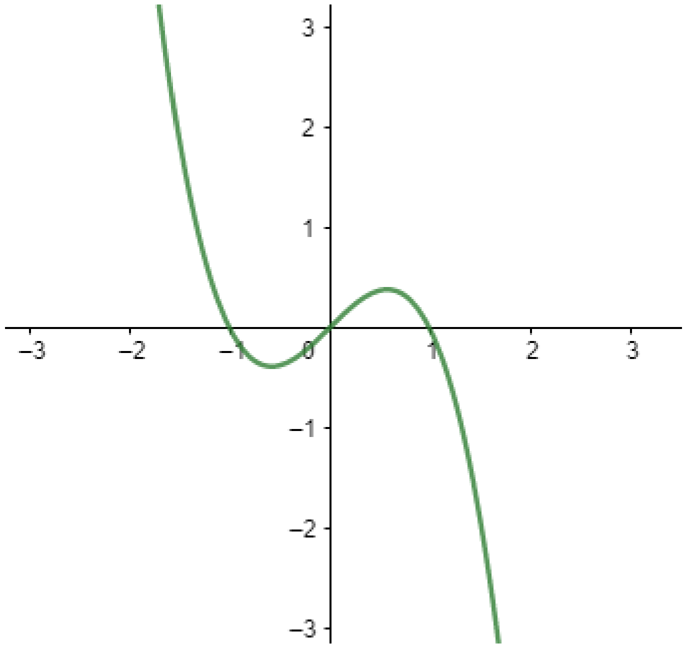
4. La ecuación $\sqrt[5]{xy^2} + 2(x - 2y) + x = 0$ define a y como función de x. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(1,1)$.

5. Sea $h : h(x) = \sqrt[5]{38 - x^2 + \dfrac{x^3}{3}}$, determine en qué puntos la gráfica admite recta tangente horizontal.

6. a) Defina recta tangente vertical.
   b) Sea la función $h : h(x) = \sqrt[3]{32 - 2x^4}$, determine en que puntos la gráfica de la función admite recta tangente vertical.

7. Halle el o los puntos en los cuales la recta normal tiene pendiente -1/9 y aquellos donde la recta tangente tiene pendiente 4, para la función $y = x^3 / 3$. Indique las expresiones de la tangente y normal.
   Esfuerzo personal (no obligatorio, si conveniente): grafique todo usando algún software disponible en el centro de estudiantes.

8. Sea $f : f(x) = x - x^3$, cuya gráfica se muestra a continuación:



a) Halle las constantes m y b de modo que la recta de ecuación $y = mx + b$ sea tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 0)$.

b) Una segunda recta que pasa por el punto $(-1, 0)$ es también tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0). Determine las coordenadas de ese punto.

Regla de L'HÔPITAL

9. El límite notable trigonométrico nos asegura que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen(x)}{x} = 1$, de acuerdo con esto vemos que: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6.sen(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} 6.\dfrac{sen(x)}{x}.\dfrac{1}{x^2} = +\infty$. Sin embargo, al aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos: $\lim\limits_{x\to 0} 6.\dfrac{sen(x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} 6.\dfrac{\cos(x)}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} 6.\dfrac{-sen(x)}{6x} = -1$.
¿Dónde radica el error, si lo hubiera?

10. Determine los siguientes límites utilizando la Regla de L'Hopital. Indique la indeterminación que resuelve.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 8}{x^2 + 3x - 6}$ b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2 + t}{e^t - 1}$ c) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\alpha^2}{tg(5\alpha)}$ d) $\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\cos(\beta) - 1}{sen(\beta)}$

e) $\lim\limits_{h\to\infty}\dfrac{0.25^h}{(1/h)}$ f) $\lim\limits_{\varphi\to 0^+}\dfrac{\ln(\varphi)}{\cos ec(\varphi)}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[10]{x}}{\ln(x)}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2} + x^3}{x^3 + 2x}$

i) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{sen(\alpha)}\right)$ j) $\lim\limits_{t\to 0^+}\left(t.\ln(t)\right)$ k) $\lim\limits_{\beta\to 0^+}\beta^{sen(\beta)}$ l) $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\left(\theta.\cot g(\theta)\right)$

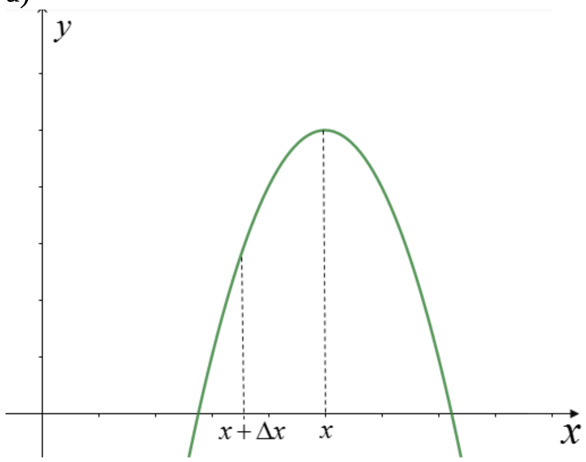
m) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \cot g(\alpha)\right)$ n) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + kx)^{1/x}$ ñ) $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1 + \dfrac{k}{z}\right)^z$ o) $\lim\limits_{u\to 0^+}\left(-\ln(u)\right)^u =$

Diferencial

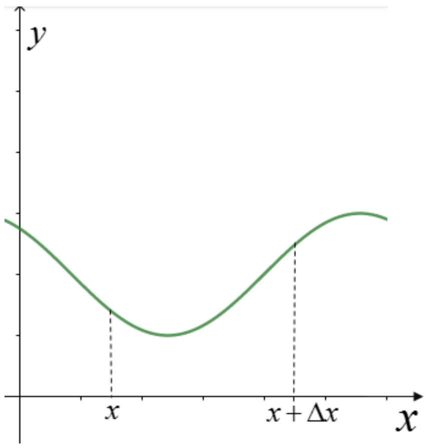
11. i) Defina diferencial de una función en un punto. Utilizando el gráfico de una función genérica, para un Δx arbitrario, indique claramente el diferencial (dy) y el incremento de la función (Δy).

    ii) En los siguientes gráficos marque Δy y dy, indicando el signo de cada uno:

    a)



    b)



12. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
    a) Si $\Delta x > 0$, entonces $dy > 0$.
    b) Siempre $\Delta y > dy$.
    c) El valor dy depende de más de una variable.

13. Para cada una de las siguientes funciones, halle dy y Δy.
    a) $f : f(x) = 3x^2 - x + 2$
    b) $g : g(x) = x.\sqrt[3]{4 - x^2}$

<u>*Aproximación de funciones por medio de una función lineal:*</u>

14. Calcule aproximadamente, usando el concepto de diferencial:

    a) $\sqrt{24.9}$ b) $sen(1^o)$ c) $2^{3.03}$ d) $\log_5(5.05)$ (dato: ln(5) = 1.60943)

<u>*Cálculo de la variación de la variable dependiente ante pequeños cambios de la variable independiente:*</u>

15.

a) Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de lado, el lado aumenta 0,04 cm. ¿Cuánto aumentará entonces su área? ¿Y aproximadamente?

b) La pared lateral de un depósito cilíndrico de 50 cm de radio y 1 m de altura, debe revestirse con una capa de hormigón de 3 cm de espesor. ¿Cuál es la cantidad aproximada de hormigón que se requiere?

c) Se mide el diámetro de una circunferencia con un error máximo de 0,10 cm y se determina que es de 15,00 cm. Usando diferenciales estime el máximo error que se comete al calcular el área del círculo; del mismo modo calcule el error máximo que se comete, al calcular el volumen de la esfera que se genera al hacer girar dicho círculo.

Bibliografía:

- L. Leithold, "El Cálculo", 7°Ed, Oxford University Press, 2005.
- J.Stewart, "Cálculo", México. Internacional Thomson Editores, 1998.
- E.J.Purcell, D. Varberg: "Cálculo con Geometría Analítica", México: Prentice – Hall Hispanoamericana, 1997.