PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.

(c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.

(b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.

(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.

(e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rentángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$$

entonces $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

(c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, . . . , $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.

(d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata funciones definidas por una ecuación de la forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

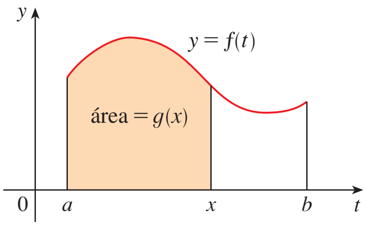


FIGURA 1

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, entonces la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si después hace variar x, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, entonces $g(x)$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, donde x puede cambiar de a a b. (Considere a g como la función "el área hasta"; véase la figura 1.)

V EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

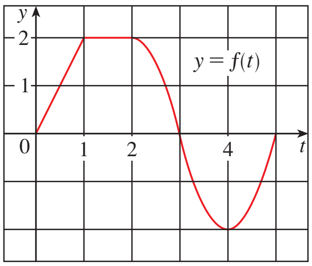


FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$

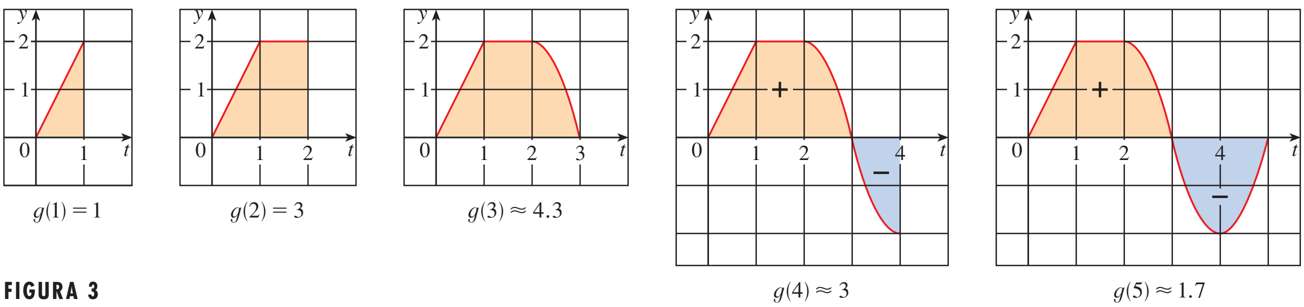


FIGURA 3

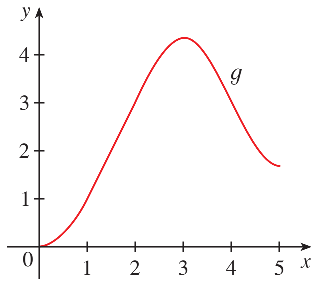


FIGURA 4
$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\, dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\, dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. □

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, entonces g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Con objeto de observar por qué esto puede ser verdadero en general considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

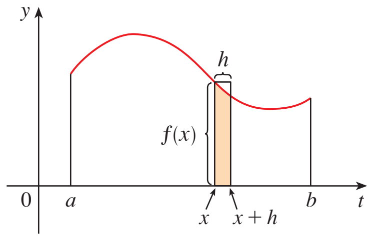


FIGURA 5

Con el fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas, por lo tanto es el área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$ (el área sombreada de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, espere que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

■ El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado sobre el límite superior.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), entonces

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

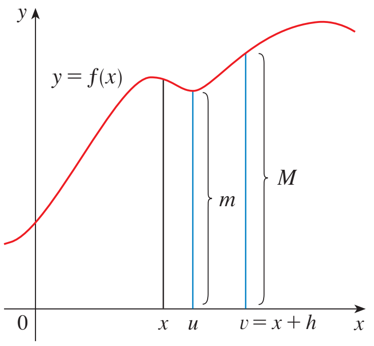


FIGURA 6

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para TFC1.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

4 $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, entonces la ecuación 4 se puede interpretar como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales), muestra que g es continua en $[a, b]$. □

De acuerdo con la notación de Leibniz para las derivadas, puede expresar al TFC1 como

5 $$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integra f y luego obtiene la derivada del resultado, regresa a la función original f.

V EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ □

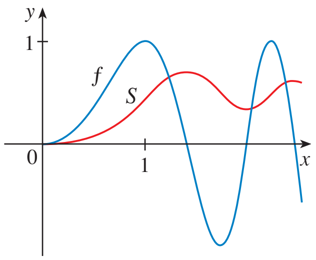


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), quien es famoso por su trabajo en la óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

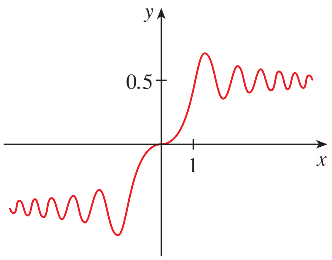


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Esto significa que puede aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 61).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se usó una computadora para dibujar S por medio de calcular el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente parece que $S(x)$ es el área debajo de la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte más grande de la gráfica de S.

Si ahora empieza por la gráfica de S de la figura 7 y piensa en qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$.] De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. □

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\
&= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\
&= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\
&= \sec(x^4)\cdot 4x^3
\end{aligned}$$

□

En la sección 5.2 calculó integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vio que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

■ Se abrevia a este teorema mediante las siglas TFC2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\
&= g(b) - g(a) = g(b) \\
&= \int_a^b f(t)\, dt
\end{aligned}$$

□

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada F de f, entonces puede evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

El teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, entonces $v(t) = s'(t)$, y s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresa mediante símbolos, es lo siguiente:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\displaystyle\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todas sus partes y sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

■ Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que el TFC2 establece que puede utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$. □

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

También la ecuación del TFC2 se puede expresar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determinar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

■ Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ □

Si compara el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, verá que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln|x|$ y, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln\frac{6}{3} = \ln 2$$

□

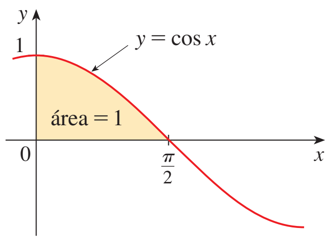


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9. □

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante identidades trigonométricas rebuscadas (oscuras), o bien, un sistema algebraico computacional como en el ejercicio 25 de la sección 5.1. Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660 y 1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil, como lo puede ver por el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$

□

LA DERIVACIÓN Y LA INTEGRACIÓN COMO PROCESOS INVERSOS

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

La parte 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original f. Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

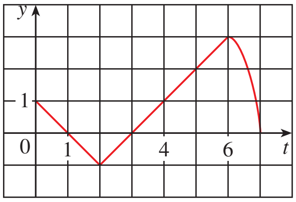
En esta versión se afirma que si toma una función F, la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos verá que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.

5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

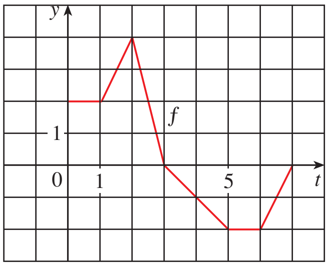
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



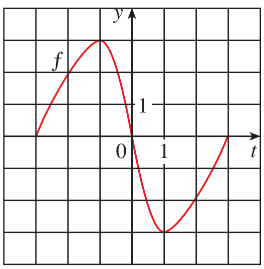
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo es creciente g?

(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(d) Trace una gráfica aproximada de g?



4. Sea $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(-3)$ y $g(3)$.
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ y $g(0)$.
(c) ¿En qué intervalo es creciente g?
(d) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivar.

5. $g(x) = \int_{1}^{x} t^2\, dt$

6. $g(x) = \int_{0}^{x} (1 + \sqrt{t})\, dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de la función.

7. $g(x) = \int_{1}^{x} \dfrac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_{3}^{x} e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(y) = \int_{2}^{y} t^2 \operatorname{sen} t\, dt$

10. $g(r) = \int_{0}^{r} \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

$\left[\textit{Sugerencia: } \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\, dt = -\int_{\pi}^{x} \sqrt{1 + \sec t}\, dt \right]$

12. $G(x) = \int_{x}^{1} \cos \sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_{2}^{1/x} \arctan t\, dt$

14. $h(x) = \int_{0}^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\, dr$

15. $y = \int_{0}^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_{1}^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\, dv$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \dfrac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{e}^{0} \operatorname{sen}^3 t\, dt$

19–42 Evalúe la integral.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-2}^{5} 6\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{0}^{1} x^{4/5}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$

25. $\int_{1}^{2} \dfrac{3}{t^4}\, dt$

26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos \theta\, d\theta$

27. $\int_{0}^{2} x(2 + x^5)\, dx$

28. $\int_{0}^{1} (3 + x\sqrt{x})\, dx$

29. $\int_{1}^{9} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec \theta \tan \theta\, d\theta$

33. $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\, dy$

34. $\int_{0}^{1} \cosh t\, dt$

35. $\int_{1}^{9} \dfrac{1}{2x}\, dx$

36. $\int_{0}^{1} 10^x\, dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \dfrac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$

38. $\int_{0}^{1} \dfrac{4}{t^2 + 1}\, dt$

39. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\, du$

40. $\int_{1}^{2} \dfrac{4 + u^2}{u^3}\, du$

41. $\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leqslant x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$

43–46 ¿Con la ecuación, qué es incorrecto?

43. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\, dx = \left. \dfrac{x^{-3}}{3} \right]_{-2}^{1} = -\dfrac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^{2} \dfrac{4}{x^3}\, dx = -\left. \dfrac{2}{x^2} \right]_{-1}^{2} = \dfrac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec \theta \tan \theta\, d\theta = \sec \theta \Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

46. $\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\, dx = \tan x \Big]_{0}^{\pi} = 0$

47–50 Mediante una gráfica dé una estimación del área de la región que se localiza abajo de la curva dada. Después calcule el área exacta

47. $y = \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 27$

48. $y = x^{-4}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

50. $y = \sec^2 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un croquis.

51. $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$

52. $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

53–56 Determine la derivada de la función.

53. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \dfrac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\, du$

$$\left[\textit{Sugerencia}: \int_{2x}^{3x} f(u)\, du = \int_{2x}^{0} f(u)\, du + \int_{0}^{3x} f(u)\, du\right]$$

54. $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\, dt$

55. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\, \operatorname{sen} t\, dt$

56. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du$

57. Si $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)\, dt$, donde $f(t) = \int_{1}^{t^2} \dfrac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\, du$, halle $F''(2)$.

58. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_{0}^{x} \frac{1}{1 + t + t^2}\, dt$$

es cóncava hacia arriba.

59. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_{1}^{4} f'(x)\, dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

60. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_{a}^{b} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, [\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2} \operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. La función de Fresnel S se definió en el ejemplo 3 y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

(b) ¿Sobre qué valores esta función es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación siguiente correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_{0}^{x} \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt = 0.2$$

CAS **62.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que defina $f(0) = 1$ y esto convierte a f en una función continua en todas partes.]

(a) Dibuje la gráfica de Si.

(b) ¿En qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_{0}^{x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = 1$$

63–64 Sea $g(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

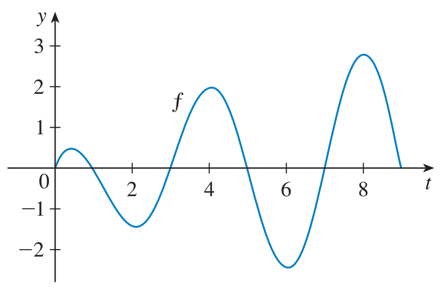
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

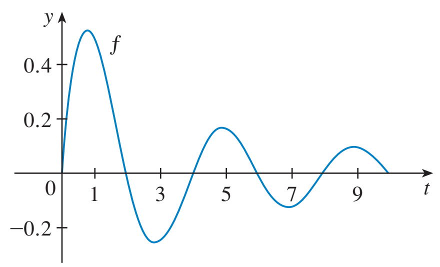
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

63.



64.



65–66 Evalúe el límite reconociendo primero la suma como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

61. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{i^3}{n^4}$

62. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \sqrt{\dfrac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)$

67. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

68. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

69. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

70. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduce que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Demostrar

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando a una función de lo más simple.

72. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.

(b) Trace las gráficas de f y g.

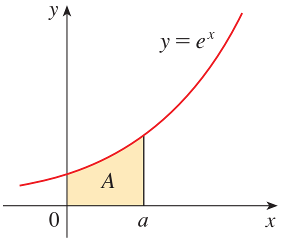
(c) ¿En dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

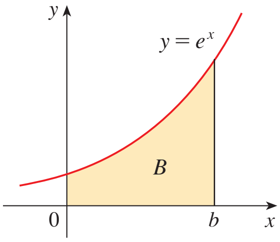
73. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

74. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.





75. Una empresa de fabricación tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a la tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Como cada vez que la máquina se somete a una reparación mayor se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones mayores.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación mayor.

(b) Haga que $C = C(t)$ esté dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la empresa minimizar C?

(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo sobre los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

76. Una compañía de alta tecnología compra un sistema de cómputo nuevo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará con una rapidez $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento en una proporción $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.

(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $(0, T]$.

(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL

Ya vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si supone que puede encontrar una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replantea el TFC2, de una manera que facilita más aplicarlo a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, entonces $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede determinar evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesita una notación conveniente para las antiderivadas que facilite trabajar con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Por esto,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo, puede escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere una integral indefinida como la representante de una *familia* entera de funciones, (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas se puede comprobar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *en un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adopte la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general es válida sólo en un intervalo.** Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendimiento de que es válida en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

■ En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. El valor de C es la intersección con el eje y.

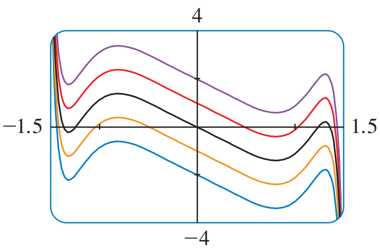


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Si usa la convención y la tabla 1, tiene

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Debe comprobar esta respuesta derivándola. □

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es evidente de inmediato en la tabla 1, por lo que se aplican las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta &= \int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta\\ &= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3-6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3\\ &= \left(\tfrac14\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac14\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)\\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75\end{aligned}$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2(b) de la sección 5.2. □

■ La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabe por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como la suma de las áreas marcadas con un signo más menos el área marcada con un signo menos.

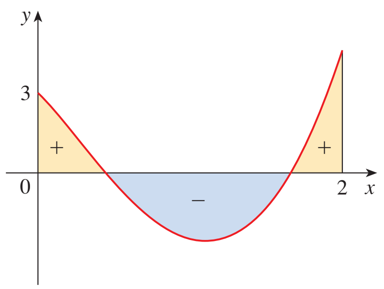


FIGURA 2

V EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\begin{aligned}\int_0^2\left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2\\ &= \tfrac12 x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2\\ &= \tfrac12(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0\\ &= -4 + 3\tan^{-1}2\end{aligned}$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1}2$. Al hacerlo tiene

$$\int_0^2\left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$ □

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt\\ &= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac32} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac23 t^{3/2} + \frac1t\Big]_1^9\\ &= \left[2\cdot 9 + \tfrac23(9)^{3/2} + \tfrac19\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac23\cdot 1^{3/2} + \tfrac11\right)\\ &= 18 + 18 + \tfrac19 - 2 - \tfrac23 - 1 = 32\tfrac49\end{aligned}$$

2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Collins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969, capítulo V.

5.5 LA REGLA DE LA SUSTITUCIÓN

En virtud del teorema fundamental, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Para hallar esta integral, aplique la estrategia para la solución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambie de una variable x a una variable u. Suponga que hace que u sea la cantidad debajo del signo integral de (1), $u = 1 + x^2$. Entonces la diferencial de u es $du = 2x\,dx$. Advierta que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, entonces en (1) se tendría la diferencial $2x\,dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podría escribir

■ En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, entonces
$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podría comprobar que tiene la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que tiene una integral que pueda escribir en la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, entonces

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hace el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, entonces, a partir de la ecuación (3) tiene

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por lo tanto, ha probado la regla siguiente:

4 REGLA DE SUSTITUCIÓN Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I, y f es continua sobre I, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Advierta que se probó la regla de sustitución para la integración aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución expresa: **es permitido operar con *dx* y *du* después de los signos de integral como si fueran diferenciales**.

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tiene

$$\begin{aligned}\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

■ Compruebe la respuesta al derivarla.

Advierta que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x. □

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplace la integral $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Intente elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también se presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera suposición no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Entonces $du = 2\,dx$, de modo que $dx = du/2$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra sustitución posible es $u = \sqrt{2x+1}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{de suerte que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de suerte que $2u\,du = 2\,dx$.) En consecuencia,

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

□

V EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Entonces $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

□

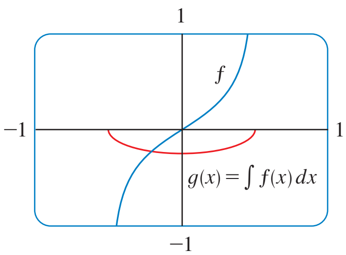


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el problema 3 puede comprobarse por derivación pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usa una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tome el caso $C = 0$). Advierta que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hace $u = 5x$, entonces $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por consiguiente

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

□

EJEMPLO 5 Calcule $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución aceptable es más obvia si factoriza x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. Entonces $du = 2x\, dx$, de modo que $x\, dx = du/2$. También, $x^2 = u - 1$, de modo que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx &= \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx \\
&= \int \sqrt{u}\, (u - 1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{u}\, (u^2 - 2u + 1)\, du \\
&= \tfrac{1}{2} \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C \\
&= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C
\end{aligned}$$
□

V EJEMPLO 6 Calcule $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escriba la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debe sustituir $u = \cos x$, dado que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\begin{aligned}
\int \tan x\, dx &= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du \\
&= -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C
\end{aligned}$$
□

Puesto que $-\ln |\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln |\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5 $$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln |\sec x| + C}$$

INTEGRALES DEFINIDAS

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, se pueden aplicar dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx &= \int \sqrt{2x + 1}\, dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4 \\
&= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}
\end{aligned}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

■ En esta regla se afirma que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 REGLA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES DEFINIDAS Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. Entonces, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$ □

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\,dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si se aplica la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = du/2$. Para encontrar los nuevos límites de integración, advierta que

cuando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar (6) *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluó la expresión en u entre los valores apropiados de u. □

■ En la figura 2 se muestra la interpretación geométrica del ejemplo 7. La sustitución $u = 2x + 1$ alarga el intervalo $[0, 4]$ con un factor de 2 y lo traslada hacia la derecha una unidad. La Regla de Sustitución hace ver que las dos áreas son iguales.

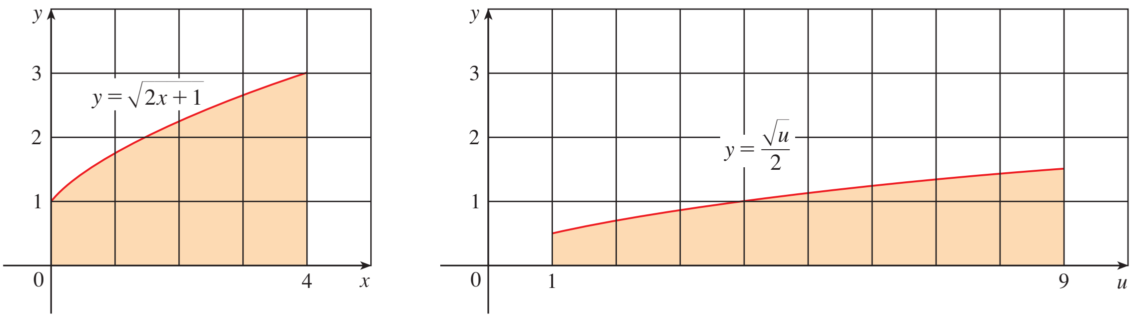


FIGURA 2

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(3 - 5x)^2}$.

■ La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviatura para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3 - 5x)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. Entonces $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$.

Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Por esto

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$ □

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Haga $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$ □

■ Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 3.

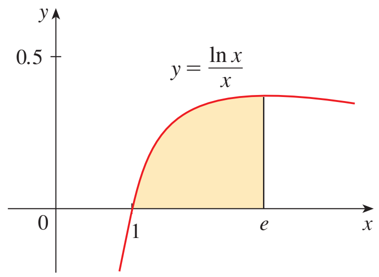


FIGURA 3

SIMETRÍA

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, (6), con el fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

7 INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$.

(a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

(b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separe la integral en dos:

8 $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha haga la sustitución $u = -x$. Entonces $du = -dx$ y, cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, de esa manera la ecuación 9 da

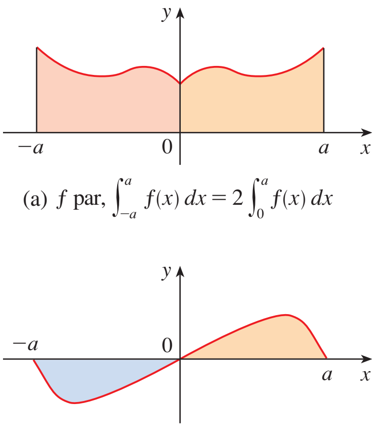
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

□

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ desde $-a$ hasta a es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

□

EJEMPLO 11 Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, de este modo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

□

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx,\ u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ u = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx,\ u - 1/x$

7–46 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \operatorname{sen} \pi t\,dt$

16. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\,d\theta$

19. $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}\ (a \neq 0)$

21. $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(1+x^{3/2})\,dx$

23. $\displaystyle\int \cos\theta\,\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\displaystyle\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

25. $\displaystyle\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\displaystyle\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

27. $\displaystyle\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sin}^2 x}\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\displaystyle\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \cot x\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\displaystyle\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen} t\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sen}^{-1}x}$

42. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\displaystyle\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\displaystyle\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Evalúe la integral definida.

51. $\displaystyle\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\displaystyle\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\cot\pi t\,dt$

57. $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$

63. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$

64. $\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\displaystyle\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva dada. Enseguida encuentre el área exacta.

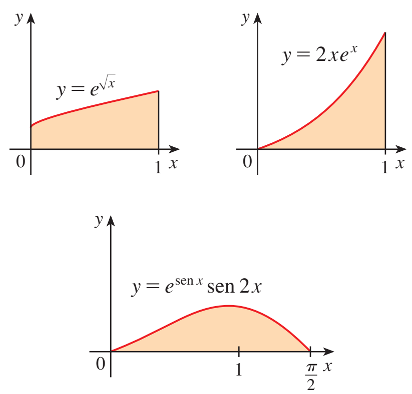
71. $y = \sqrt{2x+1},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Evalúe $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretar una de ellas en términos de un área.

74. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ al efectuar una sustitución e interpretar la integral resultante en términos de un área.

75. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



76. Un modelo de rapidez de metabolismo fundamental, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo fundamenta total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)dt$, en un periodo de 24 horas?

77. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$ y el petróleo se fuga del tanque en una proporción de $r(t) = 100^{e^{-0.01t}}$ litros por minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

78. Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántos especímenes habrá después de tres horas?

79. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

80. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras, después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Advierta que la producción tiende a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las técnicas nuevas.) Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

81. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

84. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

85. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Si f es continua en $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\text{sen}\,x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{sen}\,x)\,dx$$

87. Mediante el ejercicio 86 calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x\,\text{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Si f es continua, comprobar que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\text{sen}\,x)\,dx$$

(b) Aplique el inciso (a) para valorar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \text{ y } \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx$$

5 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde a hasta b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. (a) Enuncie el teorema del cambio total.
(b) Si $r(t)$ es la proporción a la cual el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $n(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la proposición de que “la derivación y la integración son procesos inversos”.

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^5 (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^1 \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

12. La expresión $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

13. Todas las funciones continuas tienen derivadas.

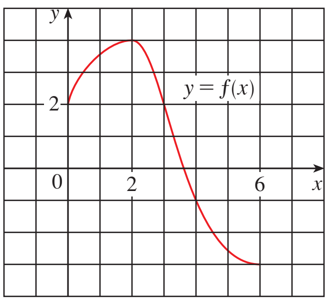
14. Todas las funciones continuas tienen antiderivadas.

15. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

EJERCICIOS

1. Use la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos medios. Luego, dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

(b) Use la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

(c) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (b).

(d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

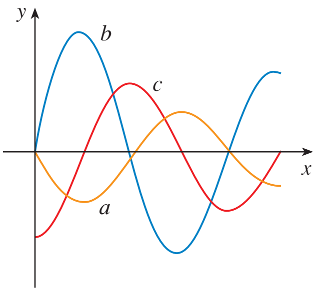
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i\, \Delta x$$

como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y, a continuación, evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

CAS 6. (a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.
(b) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (a).

7. En la figura se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique sus selecciones



8. Evalúe:
(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$
(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9–38 Evalúe la integral cuando exista.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$ 10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$ 12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$ 14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$ 16. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$ 18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$ 20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4\tan t}{2 + \cos t}\,dt$ 22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$ 24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$ 26. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\pi t\cos\pi t\,dt$ 28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ 30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \tan x\ln(\cos x)\,dx$ 32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$ 34. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$ 36. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3\sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$ 38. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$ 40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Enseguida, encuentre el área exacta.

42. Dibuje la función $f(x) = \cos^2 x\operatorname{sen}^3 x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. A continuación evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43–48 Encuentre la derivada de la función.

43. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^2}\,dt$ 44. $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$ 46. $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$ 48. $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Mediante la propiedad 8 de las integrales estime el valor de la integral.

49. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$ 50. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad.

51. $\displaystyle\int_0^1 x^2\cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$ 52. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\displaystyle\int_0^1 e^x\cos x\,dx \leqslant e - 1$ 54. $\displaystyle\int_0^1 x\operatorname{sen}^{-1}x\,dx \leqslant \pi/4$

55. Use la regla del punto medio $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

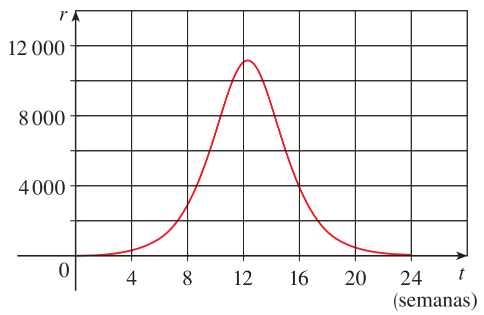
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función de velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual el petróleo del mundo es consumido, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el primero de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\, dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se listan en la tabla siguiente. Aplique la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ insectos por semana, donde la gráfica de r es como se ilustra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\, dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\, dx = 6$, valore $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta \, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt$$

(a) ¿Sobre cuáles intervalos C es creciente?

(b) ¿Sobre cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Use una gráfica para resolver la ecuación siguiente, correcta hasta dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt = 0.7$$

CAS (d) Dibuje C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra colocada a lo largo del eje x es $C/(2a)$, si $|x| \leqslant a$, y 0, si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusividad calorífica de la varilla es k, por lo tanto la temperatura de esa varilla en el punto x, en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi k t}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\, du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesita calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' dondequiera es continua. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\, du$.

67. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2 \int_a^b f(x) f'(x)\, dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\, dt$.

69. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1 - x)\, dx$$

70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Considere que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$. Hallar el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y) dx$.

7.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, la regla de sustitución para integración corresponde a la regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la regla del producto para derivación se llama regla para *integración por partes.*

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\, dx = f(x)g(x)$$

o bien,

$$\int f(x)g'(x)\, dx + \int g(x)f'(x)\, dx = f(x)g(x)$$

Esta ecuación se puede reordenar como

1

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx}$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para integración por partes**. Quizás es más fácil recordarla en la siguiente notación. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Entonces las diferenciales son $du = f'(x)\, dx$ y $dv = g'(x)\, dx$; por lo tanto, por la regla de sustitución, la fórmula para integración por partes se convierte en

2

$$\boxed{\int u\, dv = uv - \int v\, du}$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 1 Suponga que se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g se puede elegir *cualquier* derivada de g'.) Así, con la fórmula 1, se tiene

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x\, dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\, dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x\, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

Es aconsejable comprobar la respuesta mediante derivación. Si se hace así, se obtiene $x \operatorname{sen} x$, como se esperaba.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 2 Sea

■ Es útil usar el patrón:

$$\begin{array}{ll} u = \square & dv = \square \\ du = \square & v = \square \end{array}$$

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces

$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y, por lo tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \int \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

□

NOTA El objetivo de usar la integración por partes es obtener una integral más simple que aquella con la que se inició. Así, en el ejemplo 1 se inició con $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ y se expresó en términos de la integral más simple $\int \cos x\,dx$. Si se hubiera elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$, entonces $du = \cos x\,dx$ y $v = x^2/2$, así que la integración por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\,dx$ es una integral más difícil que la inicial. En general, al decidir sobre una elección para u y dv, a menudo se intenta elegir $u = f(x)$ como una función que se vuelve más simple cuando se deriva (o por lo menos no más complicada) siempre y cuando $dv = g'(x)\,dx$ se pueda integrar fácilmente para dar v.

V EJEMPLO 2 Evaluar $\int \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí no se tiene mucha elección para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

entonces

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Al integrar por partes, se obtiene

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x}$$

■ Se acostumbra escribir $\int 1\,dx$ como $\int dx$.

$$= x\ln x - \int dx$$

■ Compruebe la respuesta mediante derivación.

$$= x\ln x - x + C$$

La integración por partes es efectiva en este ejemplo, porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más simple que f.

□

EJEMPLO 3 Determine $\int t^2 e^t\,dt$.

SOLUCIÓN Note que t^2 se vuelve más simple cuando se deriva (mientras que e^t no cambia cuando se deriva o integra), de modo que se elige

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

A continuación $\qquad du = 2t\,dt \qquad v = e^t$

La integración por partes da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int t e^t\,dt$$

La integral que se obtuvo, $\int te^t\,dt$, es más simple que la integral original, pero aún no es obvio. Por lo tanto, se usa una segunda vez la integración por partes, esta vez con $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Entonces $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C$$

Al escribir esto en la ecuación 3, se obtiene

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt\\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C)\\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

□

■ Un método más fácil, con números complejos, se da en el ejercicio 50 en el apéndice H.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se vuelven más simples cuando se derivan, pero de cualquier manera se prueba con $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, de modo que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

La integral que se ha obtenido, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más simple que la original, pero por lo menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo precedente al integrar por partes dos veces, se persevera e integra de nuevo por partes. Esta vez se usa $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. Entonces $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

A primera vista, parece como si no se hubiera hecho nada porque se llegó a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es donde se inició. Sin embargo, si coloca la expresión para $\int e^x \cos x\,dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

■ En la figura 1 se ilustra el ejemplo 4 mostrando las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como una comprobación visual del trabajo, observe que $f(x) = 0$ cuando F tinene un máximo o un mínimo.

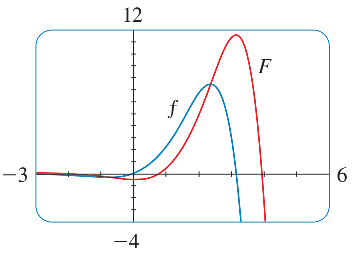


FIGURA 1

Esto se puede considerar como una ecuación que se resolverá para la integral desconocida. Al sumar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos lados, se obtiene

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de la integración, obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ □

Si se combina la fórmula para integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se puede evaluar por partes integrales definidas. Al evaluar ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y usar el teorema fundamental, se obtiene

6 $$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Por consiguiente la fórmula 6 da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx &= x \tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx \\ &= 1 \cdot \tan^{-1}1 - 0 \cdot \tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx\end{aligned}$$

■ Puesto que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región mostrada en la figura 2.

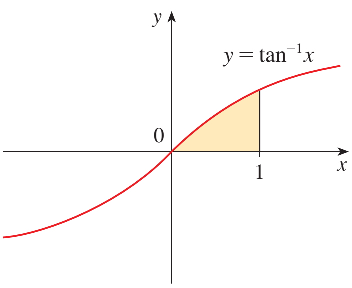


FIGURA 2

Para evaluar esta integral se usa la sustitución $t = 1 + x^2$ (puesto que u tiene otro significado en este ejemplo). Luego $dt = 2x\, dx$, de modo que $x dx = \frac{1}{2}\, dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

■ La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n-1$ y $n-2$.

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea $\quad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

Entonces $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, se resuelve esta ecuación para la integral deseada, pasando el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien,
$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$
□

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla de manera repetida se podría expresar finalmente $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe la integral por medio de la integración por partes con las elecciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx$

8. $\int x^2\cos mx\,dx$

9. $\int \ln(2x+1)\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5\ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} 3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\displaystyle\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\displaystyle\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

33–38 Primero realice una sustitución y luego use la integración por partes para evaluar la integral.

33. $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\displaystyle\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

35. $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

37. $\displaystyle\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

39–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre, y compruebe que su respuesta es razonable, graficando tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int (2x+3)e^x\,dx$

40. $\displaystyle\int x^{3/2}\ln x\,dx$

41. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

42. $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} 2x\,dx$

43. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

44. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

45. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.
(c) Emplee el inciso (a) para mostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}$$

46. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

47–50 Use la integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

47. $\displaystyle\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\displaystyle\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\displaystyle\tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

50. $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

51. Use el ejercicio 47 para determinar $\int (\ln x)^3\,dx$.

52. Use el ejercicio 48 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

53–54 Determine el área de la región acotada por las curvas dadas.

53. $y = xe^{-0.4x}$, $y = 0$, $x = 5$

54. $y = 5\ln x$, $y = x\ln x$

55–56 Use una gráfica para hallar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego encuentre (de manera aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

55. $y = x\operatorname{sen} x$, $y = (x-2)^2$

56. $y = \arctan 3x$, $y = \frac{1}{2}x$

57–60 Use el método de las envolventes cilíndricas para hallar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

57. $y = \cos(\pi x/2)$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$; respecto al eje y

58. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$; respecto al eje y

59. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$; respecto a $x = 1$

60. $y = e^x$, $x = 0$, $y = \pi$; respecto al eje x

61. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2 \ln x$ en el intervalo $[1, 3]$.

62. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de modo que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete en el despegue (incluido su combustible) es m, el combustible se consume a una proporción r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t es el que se expresa mediante la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s, y $v_e = 3\,000$ m/s, determine la altura del cohete un minuto después del despegue.

63. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos viajará durante los primeros t segundos?

64. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, muestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

65. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$, y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

66. (a) Use la integración por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* use el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interprepretación geométrica del inciso (b).

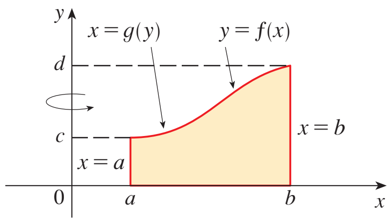
(d) Use el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Se llegó a la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, por medio de envolventes cilíndricas, pero ahora se puede usar la integración por partes para demostrarla con el método de división de la sección 6.2, por lo menos para el caso donde f es uno a uno y, por lo tanto, tiene una función inversa g. Use la figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Realice la sustitución $y = f(x)$ y después use la integración por partes en la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$



68. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Muestre que $I_{2n+2} \leqslant I_{2n+1} \leqslant I_{2n}$.

(b) Use el ejercicio 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leqslant \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leqslant 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Emplee el inciso (c) y los ejercicios 45 y 46 para mostrar que

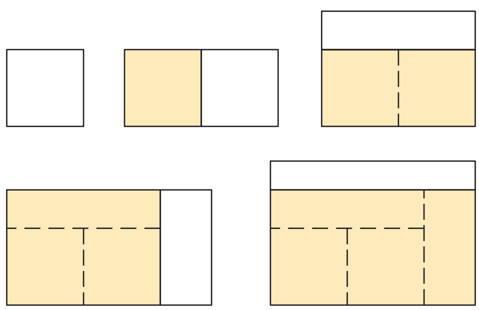
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula se escribe por lo general como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se llama *producto de Wallis*.

(e) Se construyen rectángulos como sigue. Empiece con un cuadrado de área 1 y una los rectángulos de área 1 de manera alterna al lado o arriba del rectángulo previo (véase la figura). Encuentre el límite de las relaciones de amplitud a altura de estos rectángulos.



7.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección se usan identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Se empieza con potencias de seno y coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Sustituir simplemente $u = \cos x$ no es útil, puesto que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. A fin de integrar potencias de coseno, sería necesario un factor $\operatorname{sen} x$ extra. De manera similar, una potencia de seno requeriría un factor $\cos x$ extra. Así, aquí se puede separar un factor coseno y convertir el factor $\cos^2 x$ restante a una expresión relacionada con el seno por medio de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x$$

Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\, dx$ y

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$

□

En general, se intenta escribir un integrando en el que intervienen potencias de seno y coseno en una forma donde se tiene sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos de coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos de seno). La identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ permite convertir de una parte a otra entre potencias pares de seno y coseno.

V EJEMPLO 2 Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

SOLUCIÓN Se convertiría $\cos^2 x$ a $1 - \operatorname{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de $\operatorname{sen} x$ sin ningún factor $\cos x$ extra. En cambio, se separa un solo factor seno y se reescribe el factor $\operatorname{sen}^4 x$ restante en términos de $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

■ En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

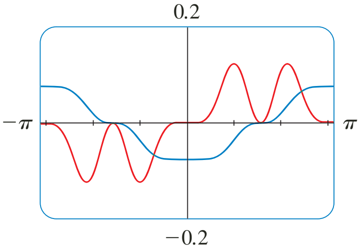


FIGURA 1

Sustituyendo $u = \cos x$, se tiene $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$

□

En los ejemplos precedentes, una potencia impar de seno y coseno permitió separar un solo factor y convertir la potencia par restante. Si el integrando contiene potencias pares de seno y coseno, esta estrategia falla. En este caso, se puede sacar ventaja de las siguientes identidades de la mitad de un ángulo (véanse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

■ En el ejemplo 3 se muestra que el área de la región mostrada en la figura 2 es $\pi/2$.

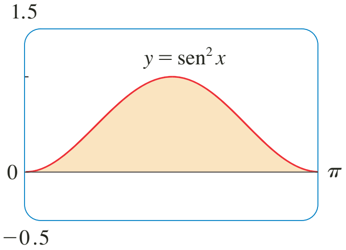


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Evalúe $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se simplifica la evaluación de la integral. Sin embargo, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo para $\operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x)\, dx = \Big[\tfrac{1}{2}\big(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\big)\Big]_0^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}\big(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\big) - \tfrac{1}{2}\big(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\big) = \tfrac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

Observe que mentalmente se hizo la sustitución $u = 2x$ al integrar $\cos 2x$. Otro método para evaluar esta integral se dio en el ejercicio 43 en la sección 7.1. □

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Se podría evaluar esta integral por medio de la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 43 de la sección 7.1), pero un mejor método es escribir $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y usar una fórmula de la mitad de un ángulo:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx\end{aligned}$$

Puesto que ocurre $\cos^2 2x$, se debe usar otra fórmula de la mitad de un ángulo

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Esto da

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \tfrac{1}{4}\int \big[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\big]\, dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int \big(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\big)\, dx \\ &= \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\big) + C\end{aligned}$$ □

Para resumir, se listan las directrices a seguir al evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde $m \geqslant 0$ y $n \geqslant 0$ son enteros.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

(a) Si la potencia de coseno es impar ($n = 2k + 1$), ahorre un factor coseno y use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los demás factores en términos de seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^m x \, (\cos^2 x)^k \cos x \, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x \, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x \, dx$$

Después sustituya $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Si la potencia de seno es impar ($m = 2k + 1$), ahorre un factor seno y use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x \, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x \, dx$$

Después sustituya $u = \cos x$. [Note que si las potencias de seno y coseno son impares, se puede usar (a) o (b).]

(c) Si las potencias de seno y coseno son pares, use las identidades de la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil usar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Se puede usar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$. Puesto que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, se puede separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión relacionada con la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O bien, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, se puede separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2 x$, se puede expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ con $du = \sec^2 x \, dx$:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^6 x \, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx$$

$$= \int u^6 (1 + u^2) \, du = \int (u^6 + u^8) \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C$$

□

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2\theta$ como en el ejemplo precedente, queda un factor $\sec^5\theta$, que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si se separa un factor $\sec\theta \tan\theta$, se puede convertir la potencia restante en una expresión que implica sólo la secante por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Por lo tanto se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$

□

En los ejemplos anteriores, se demuestran estrategias diferentes para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para dos casos, que se resumen aquí.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

(a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), ahorre un factor de $\sec^2 x$ y use $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los demás factores en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x \, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Luego sustituya $u = \tan x$.

(b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), guarde un factor de $\sec x \tan x$ y use $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los demás factores en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituya $u = \sec x$.

Para otros casos, las directrices no son tan claras. Podría ser necesario usar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de inventiva. A veces será necesario poder integrar tan x por medio de la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\boxed{\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C}$$

Se necesitará también la integral indefinida de la secante:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Se podría comprobar la fórmula 1 mediante la derivación de lado derecho, o como sigue. Primero se multiplican numerador y denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx\end{aligned}$$

Si se sustituye $u = \sec x + \tan x$, después $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\,dx$, también, la integral se convierte en $\int (1/u)\,du = \ln|u| + C$. Así, se tiene

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí sólo ocurre $\tan x$, de modo que se emplea $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan x \tan^2 x\,dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

En la primera integral se sustituye mentalmente $u = \tan x$ de modo que $du = \sec^2 x\,dx$. □

Si aparece una potencia par de tangente con una potencia impar de secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de $\sec x$. Las potencias de $\sec x$ podrían requerir integración por partes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Encuentre $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí se integra por partes con

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x\,dx \\ du &= \sec x \tan x\,dx & v &= \tan x \end{aligned}$$

Entonces
$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Si se emplea la fórmula 1 y se resuelve para la integral requerida, se obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$ □

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy especiales, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ se pueden determinar mediante métodos similares como resultado de la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Por último, se puede hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

2 Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$, o (c) $\int \cos mx \cos nx\,dx$, use la identidad correspondiente:

(a) $\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

■ Estas identidades de producto se analizan en el apéndice D.

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría ser evaluada por medio de integración por partes, pero es más fácil usar la identidad de la ecuación 2(a) como sigue:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x) + C$$ □

7.2 EJERCICIOS

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$

2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\,dx$

3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$

5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x)\,dx$

6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta$

9. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(3t)\,dt$

10. $\int_0^{\pi} \cos^6\theta\,d\theta$

11. $\int (1 + \cos\theta)^2\,d\theta$

12. $\int x \cos^2 x\,dx$

13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\,dt$

15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\,dx$

16. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

17. $\int \cos^2 x \tan^3 x\, dx$

18. $\int \cot^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$

19. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

21. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)\, dt$

23. $\int \tan^2 x\, dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\, dx$

25. $\int \sec^6 t\, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta\, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx$

28. $\int \tan^3(2x) \sec^5(2x)\, dx$

29. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^6 x\, dx$

31. $\int \tan^5 x\, dx$

32. $\int \tan^6(ay)\, dy$

33. $\int \frac{\tan^3\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$

34. $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

35. $\int x \sec x \tan x\, dx$

36. $\int \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x\, dx$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x\, dx$

39. $\int \cot^3\alpha \csc^3\alpha\, d\alpha$

40. $\int \csc^4 x \cot^6 x\, dx$

41. $\int \csc x\, dx$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$

44. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$

45. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

46. $\int \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

47. $\int \frac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \frac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int t \sec^2(t^2) \tan^4(t^2)\, dt$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x\, dx = I$, exprese el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x\, dx$ en términos de I.

51–54 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, graficando el integrando y su antiderivada (con $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \frac{x}{2}\, dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por cuatro métodos:
(a) la sustitución $u = \cos x$,
(b) la sustitución $u = \operatorname{sen} x$,
(c) la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, y
(d) integración por partes.
Explique las distintas apariencias de las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x,\quad y = \cos^2 x,\quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \operatorname{sen}^3 x,\quad y = \cos^3 x,\quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

59–60 Use una gráfica del integrando para inferir el valor de la integral. Después use los métodos de esta sección para demostrar que su conjetura es correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

61. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi;$ respecto al eje x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ respecto al eje x

63. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4;$ respecto a $y = 1$

64. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$ respecto a $y = 1$

65. Una partícula se mueve en una línea recta con función de velocidad $v(t) = \operatorname{sen}\omega t \cos^2\omega t$. Encuentre su función de posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de 155 V a -155 V con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). Así que el voltaje está dado por

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS (media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
(a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
(b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de 220 V. Encuentre la amplitud A correspondiente necesaria para el voltaje $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demuestre la fórmula, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie de Fourier finita* está dada por la suma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Muestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

7.3 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería efectiva pero, tal y como aparece, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ es más difícil. Si se cambia la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, entonces la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos \theta|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable previa) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable previa es una función de la nueva).

En general se puede hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar al revés la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, se supone que g tiene una función inversa; es decir, g es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), se obtiene

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esta clase de sustitución se llama *sustitución inversa.*

Se puede hacer la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto se puede llevar a cabo restringiendo θ a ubicarse en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la tabla siguiente se listan las sustituciones trigonométricas que son efectivas para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es uno a uno. (Éstos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.6 al definir las funciones inversas.)

TABLA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leqslant \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Entonces $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

(Note que $\cos\theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de sustitución inversa da

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

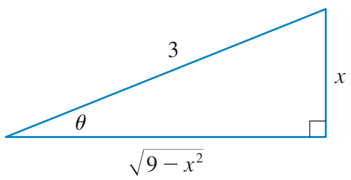


FIGURA 1

$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{3}$

Puesto que ésta es una integral indefinida, se debe volver a la variable original x. Esto se puede hacer ya sea por medio de identidades trigonométricas para expresar $\cot\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta = x/3$ o dibujando un diagrama, como en la figura 1, donde θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Puesto que $\operatorname{sen}\theta = x/3$, se marcan el cateto opuesto y la hipotenusa con longitudes x y 3. Después por el teorema de Pitágoras se obtiene la longitud del cateto adyacente como $\sqrt{9-x^2}$, así que se puede leer simplemente el valor de $\cot\theta$ en la figura:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot\theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Puesto que $\operatorname{sen}\theta = x/3$, se tiene $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad \square$$

EJEMPLO 2 Determine el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUCIÓN Resolviendo la ecuación de la elipse en favor de y, se obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{o} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

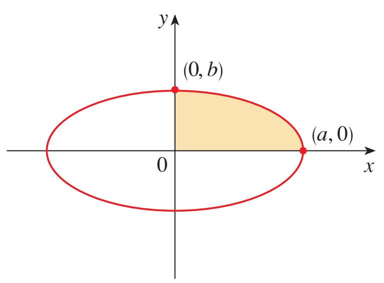


FIGURA 2

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Debido a que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área del primer cuadrante (véase figura 2). La parte de la elipse en el primer cuadrante está dada por la función

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

y, por eso,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para evaluar esta integral se sustituye $x = a \operatorname{sen} \theta$. Entonces $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Para cambiar los límites de integración se nota que cuando $x = 0$, $\operatorname{sen} \theta = 0$, cuando $\theta = 0$; de modo que $x = a$, $\operatorname{sen} \theta = 1$, por lo tanto, $\theta = \pi/2$. También

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a|\cos \theta| = a \cos \theta$$

puesto que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta \, d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 2ab\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab \end{aligned}$$

Se ha mostrado que el área de una elipse con semiejes a y b es πab. En particular, tomando $a = b = r$, se ha demostrado la famosa fórmula de que el área de un círculo con radio r es πr^2. □

NOTA Puesto que la integral del ejemplo 2 fue una integral definida, se cambiaron los límites de integración y no fue necesario convertir de nuevo a la variable original x.

V EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2 \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Por lo tanto $dx = 2 \sec^2\theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4 \sec^2\theta} = 2|\sec \theta| = 2 \sec \theta$$

Por esto, se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2 \sec^2\theta \, d\theta}{4 \tan^2\theta \cdot 2 \sec \theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec \theta}{\tan^2\theta}\, d\theta$$

Para evaluar esta integral trigonométrica se escribe todo en términos de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por lo tanto, al hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4 \operatorname{sen} \theta} + C \\ &= -\frac{\csc \theta}{4} + C \end{aligned}$$

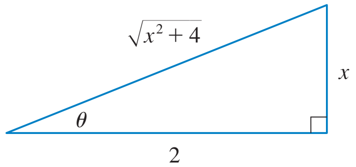


FIGURA 3

$\tan \theta = \dfrac{x}{2}$

Se usa la figura 3 para determinar que $\csc \theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ y, de este modo,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$
□

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sería posible usar aquí la sustitución trigonométrica $x = 2 \tan \theta$ (como en el ejemplo 3). Pero la sustitución directa $u = x^2 + 4$ es más simple, porque $du = 2x\, dx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 + 4} + C$$ □

NOTA En el ejemplo 4 se ilustra el hecho de que aun cuando son posibles las sustituciones trigonométricas, es posible que no den la solución más fácil. Primero se debe buscar un método más simple.

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a \sec \theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ o $\pi < \theta < 3\pi/2$. Entonces $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2\theta} = a\,|\tan \theta| = a \tan \theta$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec \theta \tan \theta}{a \tan \theta}\, d\theta$$
$$= \int \sec \theta \, d\theta = \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C$$

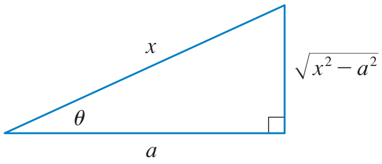


FIGURA 4

$\sec \theta = \dfrac{x}{a}$

El triángulo de la figura 4 da $\tan \theta = \sqrt{x^2 - a^2}/a$, así que se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C$$
$$= \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C$$

Al escribir $C_1 = C - \ln a$, se tiene

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Para $x > 0$ se puede usar también la sustitución hiperbólica $x = a \cosh t$. Si se emplea la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, se tiene

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2 \operatorname{senh}^2 t} = a \operatorname{senh} t$$

Puesto que $dx = a \operatorname{senh} t\, dt$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{senh} t\, dt}{a \operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Puesto que $\cosh t = x/a$, se tiene $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 se ven bastante diferentes, en realidad son equivalentes por la fórmula 3.11.4. □

NOTA Como se ilustra en el ejemplo 5, las sustituciones hiperbólicas se pueden usar en lugar de las sustituciones trigonométricas y, algunas veces, conducen a respuestas más simples. Pero por lo general se usan sustituciones trigonométricas porque las identidades trigonométricas son más familiares que las identidades hiperbólicas.

EJEMPLO 6 Encuentre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero se nota que $(4x^2+9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2+9})^3$, de modo que la sustitución trigonométrica es apropiada. Aunque $\sqrt{4x^2+9}$ no es realmente una de las expresiones de la tabla de sustituciones trigonométricas, se convierte en una de ellas si se realiza la sustitución preliminar $u = 2x$. Cuando se combina esto con la sustitución de la tangente, se tiene $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, que da $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, por lo tanto $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, así que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

Ahora se sustituye $u = \cos\theta$ de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; cuando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du \\ &= \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \frac{3}{32}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se puede transformar el integrando en una función para la cual la sustitución trigonométrica es apropiada, completando primero el cuadrado bajo el signo de la raíz:

$$\begin{aligned}3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2+2x) = 3 + 1 - (x^2+2x+1) \\ &= 4 - (x+1)^2\end{aligned}$$

Esto hace pensar en que se realice la sustitución $u = x + 1$. Después $du = dx$ y $x = u - 1$, de esa manera,

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

■ En la figura 5 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

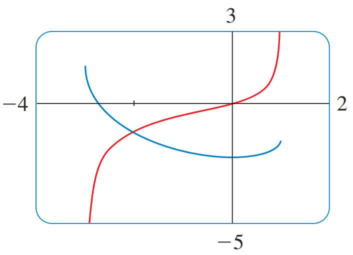


FIGURA 5

Ahora se sustituye $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, y se obtiene $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ y $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$, de tal manera,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta} \, 2 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1) \, d\theta \\
&= -2 \cos \theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

□

7.3 EJERCICIOS

1–3 Evalúe la integral por medio de la sustitución trigonométrica indicada. Bosqueje y marque el triángulo rectángulo relacionado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}} \, dx; \quad x = 3 \sec \theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2} \, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx; \quad x = 3 \tan \theta$

4–30 Evalúe la integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}} \, dt$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}} \, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 100}} \, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}} \, dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4} \, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} \, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}} \, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{25 - t^2}} \, dt$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}} \, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2} \, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}} \, dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x} \, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \, dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4} \, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}} \, dt$

31. (a) Use la sustitución trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Use la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas se relacionan mediante la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

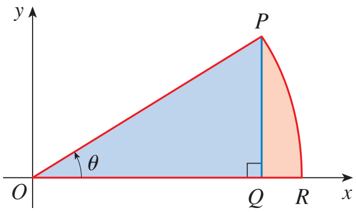
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \, dx$$

(a) por sustitución trigonométrica.
(b) mediante la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leqslant x \leqslant 7$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de modo que tenga la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Después A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

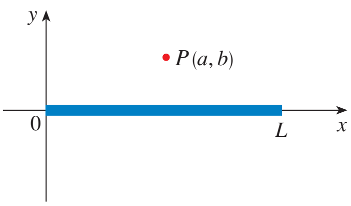
Grafique el integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y compruebe que su respuesta es razonable.

37. Use una gráfica para aproximar las raíces de la ecuación $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. Luego aproxime el área acotada por la curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ y la recta $y = 2 - x$.

38. Una varilla con carga de longitud L produce un campo eléctrico en el punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

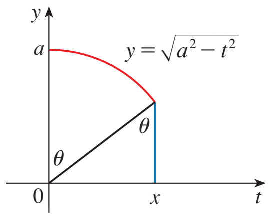
donde λ es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y ε_0 es la permisividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



39. (a) Aplique la sustitución trigonométrica para comprobar que

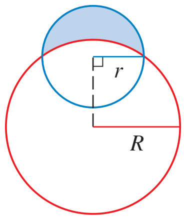
$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

(b) Aplique la figura para proporcionar interpretaciones trigonométricas de ambos términos en el lado derecho de la ecuación del inciso (a).



40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide en disco $x^2 + y^2 \leqslant 8$ en dos partes. Hallar el área de ambas partes.

41. Determine el área de la región sombreada creciente (llamada *luna*) acotada por los arcos de círculos con radios r y R. (Véase la figura.)



42. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro circular con diámetro de 10 ft. Se monta de modo que las secciones transversales circulares sean verticales. Si la profundidad del agua es 7 ft, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?

43. Se genera un toroide al hacer girar el círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ respecto al eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toroide.

7.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES

En esta sección se muestra cómo integrar cualquier función racional (una relación de polinomios) expresándola como una suma de fracciones más simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabe cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que tomando las fracciones $2/(x - 1)$ y $1/(x + 2)$ para un denominador común, se obtiene

$$\frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{2(x + 2) - (x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x + 5}{x^2 + x - 2}$$

Si ahora se invierte el procedimiento, se ve cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, considere una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y O son polinomios. Es posible expresar f como una suma de fracciones más simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de O. Esta clase de función racional se llama *propia.* Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, por lo tanto el grado de P es n y se escribe $\text{gra}(P) = n$.

Si f es impropia, es decir, $\text{gra}(P) \geqslant \text{gra}(Q)$, entonces se debe emprender el paso preliminar de dividir O entre P (por división larga) hasta obtener un residuo $R(x)$ tal que $\text{gra}(R) < \text{gra}(Q)$. El enunciado de la división es

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde S y R son también polinomios.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, algunas veces este paso preliminar es todo lo que se requiere.

V EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x-1 & x^3 \qquad + x \\ & x^3 - x^2 \\ & x^2 + x \\ & x^2 - x \\ & 2x \\ & 2x - 2 \\ & 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero se efectúa la división larga. Esto permite escribir

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

□

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Es posible demostrar que cualquier polinomio O se puede factorizar como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y los factores cuadráticos irreducibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, se podría factorizar como

$$Q(x) = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Un teorema en álgebra garantiza que siempre es posible hacer esto. Se explican los detalles para los cuatro casos que ocurren.

CASO I ■ El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que se puede escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

donde ningún factor se repite (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se pueden determinar como en el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es menor que el del denominador, no es necesario dividir. El denominador se factoriza como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales distintos, la descomposición del integrando (2) en fracciones parciales tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

■ Otro método para hallar A, B y C se da en la nota después de este ejemplo.

Para determinar los valores A, B y C, se multiplican ambos lados de esta ecuación por el producto de los denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, y se obtiene

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma estándar de polinomios, se obtiene

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Los polinomios de la ecuación 5 son idénticos, de modo que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 en el lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 en el lado izquierdo; a saber, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto da el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, y $C = -\frac{1}{10}$, y, por lo tanto,

■ Se podría comprobar el trabajo llevando los términos a un factor común y sumándolos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\,\frac{1}{x + 2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

■ En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

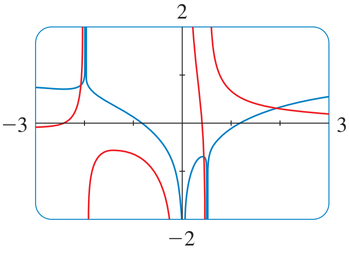


FIGURA 1

En la integración del término medio se ha hecho la sustitución mental $u = 2x - 1$, que da $du = 2\,dx$ y $dx = du/2$. □

NOTA Se puede usar otro método para hallar los coeficientes de A, B y C en el ejemplo 2. La ecuación cuatro es una identidad; se cumple para todo valor de x. Seleccione valores de x que simplifiquen la ecuación. Si $x = 0$ en la ecuación 4, entonces los términos segundo y tercero del lado derecho desaparecen y la ecuación se convierte en $-2A = -1$, o bien $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, por lo tanto $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se podría objetar que la ecuación 3 no es válida para $x = 0$, $\frac{1}{2}$, o -2, de este modo ¿por qué la ecuación 4 debe ser válida para estos valores? De hecho, la ecuación 4 es cierta para todos los valores de x, incluso $x = 0$, $\frac{1}{2}$, y -2. Véase en el ejercicio 69 la razón).

EJEMPLO 3 Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y, por lo tanto

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Con el método de la nota precedente, se escribe $x = a$ en esta ecuación y se obtiene $A(2a) = 1$, así que $A = 1/(2a)$. Si se escribe $x = -a$, se obtiene $B(-2a) = 1$, por lo tanto, $B = -1/(2a)$. Así,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\big(\ln|x - a| - \ln|x + a|\big) + C$$

Puesto que $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, se puede escribir la integral como

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Véase en los ejercicios 55-56 las formas de usar la fórmula 6. □

CASO II ■ **$Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.** Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; es decir, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Por lo tanto en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$

en la ecuación 2, se usaría

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

A modo de ilustración, se podría escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

pero se prefiere resolver en detalle un ejemplo más simple.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puesto que $Q(1) = 0$, se sabe que $x - 1$ es un factor y se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x - 1$ aparece dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Al multiplicar el mínimo común denominador, $(x-1)^2(x+1)$, se obtiene

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

■ Otra forma de hallar los coeficientes:
Escriba $x = 1$ in (8): $B = 2$.
Escriba $x = -1$: $C = -1$.
Escriba $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Ahora se igualan los coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + \quad C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \quad C &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K \end{aligned}$$

□

CASO III ■ $Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite. Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de las fracciones parciales en las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \tag{9}$$

donde A y B son constantes por determinar. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tiene una descomposición en fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

El término dado en (9) se puede integrar completando el cuadrado y con la fórmula

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C} \tag{10}$$

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no se puede factorizar más, se escribe

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes, se obtiene

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así, $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

A fin de integrar el segundo término, se divide en dos partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Se hace la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales de modo que $du = 2x\,dx$. Se evalúa la segunda integral por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6 Evalúe $\displaystyle\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador *no es menor que* el del denominador, se divide primero y se obtiene

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que la ecuación cuadrática $4x^2 - 4x + 3$ es irreducible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no se puede factorizar, de modo que no se necesita usar la técnica de fracciones parciales.

Para integrar la función dada se completa el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Esto hace pensar en hacer la sustitución $u = 2x - 1$. En tal caso, $du = 2\,dx$ y $x = (u + 1)/2$, de tal manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\tfrac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

□

NOTA En el ejemplo 6 se ilustra el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Se completa el cuadrado en el denominador y luego se hace una sustitución que lleva la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Después, la primera integral es un logaritmo, y la segunda se expresa en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV ■ $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido.

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, luego en lugar de la única fracción parcial (9), la suma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocurre en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en (11) se puede integrar completando primero el cuadrado.

■ Sería extremadamente tedioso determinar a mano los valores numéricos de los coeficientes en el ejemplo 7. Sin embargo, mediante la mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales, se pueden hallar los valores numéricos de manera muy rápida. Por ejemplo, el comando de Maple

convert(f, parfrac, x)

o el comando de Mathematica

Apart[f]

da los siguientes valores:

$$A = -1, \quad B = \tfrac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$
$$E = \tfrac{15}{8}, \quad F = -\tfrac{1}{8}, \quad G = H = \tfrac{3}{4},$$
$$I = -\tfrac{1}{2}, \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 7 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3} \qquad \square$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Al multiplicar por $x(x^2+1)^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
-x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A
\end{aligned}$$

Si se igualan los coeficientes, se obtiene el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K \qquad \square
\end{aligned}$$

■ En los términos segundo y cuarto se hizo la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

Se nota que a veces se pueden evitar las fracciones parciales cuando se integra una función racional. Por ejemplo, aunque la integral

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2+3)}\,dx$$

se podría evaluar por el método del caso III, es mucho más fácil observar que si $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\,dx$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + C$$

RACIONALIZACIÓN DE SUSTITUCIONES

Algunas funciones no racionales se pueden cambiar a funciones racionales por medio de sustituciones apropiadas. En particular, cuando un integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, en tal caso la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$ puede ser efectiva. Otros ejemplos aparecen en los ejercicios.

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x + 4}$. Después $u^2 = x + 4$, así que $x = u^2 - 4$ y $dx = 2u\,du$. Entonces,

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du$$

$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

Se puede evaluar esta integral, ya sea factorizando $u^2 - 4$ como $(u - 2)(u + 2)$ y por medio de las fracciones parciales o al usar la fórmula 6 con $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x + 4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$

$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{u - 2}{u + 2} \right| + C$$

$$= 2\sqrt{x + 4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 4} + 2} \right| + C$$

□

7.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función (como en el ejemplo 7). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x + 3)(3x + 1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 2}$

3. (a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2 - 9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2 + 4x + 3}$ (b) $\dfrac{2x + 1}{(x + 1)^3(x^2 + 4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4 - 1}$ (b) $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3 + x)(x^2 - x + 3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6 - x^3}$

7–38 Evalúe la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x - 6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r + 4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t + 4)(t - 1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$ **18.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+4}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$ **36.** $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39–50 Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe la integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$ **44.** $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia*: sustituya $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51–52 Use la integración por partes, junto con las técnicas de esta sección, para evaluar la integral.

51. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)\,dx$ **52.** $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

53. Use una gráfica de $f(x) = 1/(x^2-2x-3)$ para decidir si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación aproximada del valor de la integral, y después use las fracciones parciales para encontrar el valor exacto.

54. Grafique $y = 1/(x^3-2x^2)$ y una antiderivada en la misma pantalla.

55–56 Evalúe la integral completando el cuadrado y use la fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$ **56.** $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) observó que la sustitución $t = \tan(x/2)$ convierte cualquier función racional de sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

(a) Si $t = \tan(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, bosqueje el triángulo rectángulo o use identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Muestre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Muestre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

58–61 Use la sustitución del ejercicio 57 para transformar el integrando en una función racional de t y luego evalúe la integral.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-5\operatorname{sen} x}$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$ **60.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2 + \cos x}\, dx$

62–63 Determine el área de la región bajo la curva dada de 1 a 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Encuentre el volumen del sólido resultante si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ se hace girar respecto a (a) el eje x y (b) el eje y.

65. Una manera de desacelerar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles, pero no producen descendencia. Si P representa el número de insectos hembras en una población, S el número de machos estériles introducidos cada generación y r la rapidez de crecimiento natural de la población, entonces la población de hembras se relaciona con el tiempo t mediante

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\, dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece con una proporción de $r = 0.10$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Observe que la ecuación resultante no se puede resolver de manera explícita para P.)

66. Factorice $x^4 + 1$ como una diferencia de cuadrados sumando y restando primero la misma cantidad. Use esta factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

CAS **67.** (a) Use un sistema algebraico computacional para hallar la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ (a mano) y compare con el resultado de usar el CAS para integrar f de manera directa. Comente acerca de cualquier discrepancia.

CAS **68.** (a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ y grafique f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica de f para descubrir las características principales de la gráfica de $\int f(x)\, dx$.

69. Suponga que F, G, y Q son polinomios y

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia:* use la continuidad.]

70. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\, dx$$

es una función racional, encuentre el valor de $f'(0)$.

7.5 ESTRATEGIA PARA INTEGRACIÓN

Como se ha visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para hallar la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación se debe aplicar. Pero podría no ser obvio con la técnica que se debe usar para integrar una función dada.

Hasta ahora se han aplicado técnicas individuales en cada sección. Por ejemplo, normalmente se usó sustitución en los ejercicios 5.5, integración por partes en los ejercicios 7.1 y fracciones parciales en los ejercicios 7.4. Pero en esta sección se presenta una colección de diversas integrales en orden aleatorio y la dificultad principal es reconocer qué técnica o fórmula usar. Ninguna regla invariable se puede dar en cuanto a qué método se aplica en una determinada situación, pero se da cierta orientación sobre la estrategia que podría resultar útil.

Un prerrequisito para la selección de estrategia es conocer las fórmulas básicas de integración. En la siguiente tabla se han reunido las integrales de la lista previa junto con varias fórmulas adicionales que se han aprendido en este capítulo. La mayor parte se deben memorizar. Es útil conocer todas, pero las marcadas con un asterisco no necesitan ser memorizadas, puesto que se deducen con facilidad. La fórmula 19 se puede evitar si se emplean fracciones parciales, y en lugar de la fórmula 20, se pueden usar sustituciones trigonométricas.

TABLA DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN Se han omitido las constantes de integración.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	**8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert \sec x + \tan x\rvert$	**12.** $\int \csc x\,dx = \ln\lvert \csc x - \cot x\rvert$
13. $\int \tan x\,dx = \ln\lvert \sec x\rvert$	**14.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$

Una vez que se cuenta con estas fórmulas de integración básicas, si no se ve de inmediato cómo proceder a resolver una determinada integral, se podría probar la siguiente estrategia de cuatro pasos.

1. Simplifique el integrando si es posible A veces el uso de operaciones algebraicas o identidades trigonométricas simplifica el integrando y hace evidente el método de integración. A continuación se dan algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta$$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx = \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx$$

$$= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx$$

2. Busque una sustitución obvia Intente hallar alguna función $u = g(x)$ en el integrando cuya diferencial $du = g'(x)\,dx$ también aparece, además de un factor constante. Por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

se observa que si $u = x^2 - 1$, entonces $du = 2x\,dx$. Por lo tanto, se usa la sustitución $u = x^2 - 1$ en lugar del método de fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si los pasos 1 y 2 no han llevado a la solución, entonces se echa un vistazo a la forma del integrando $f(x)$.

(a) *Funciones trigonométricas.* Si $f(x)$ es un producto de potencias de sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, después se usan las sustituciones recomendadas en la sección 7.2.

(b) *Funciones racionales.* Si f es una función racional, se usa el procedimiento de la sección 7.4 relacionado con fracciones parciales.

(c) *Integración por partes*. Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o un polinomio) y una función trascendental (como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), entonces se prueba la integración por partes, y se eligen u y dv de acuerdo con la recomendación dada en la sección 7.1. Si considera a las funciones de los ejercicios 7.1, se verá que la mayor parte de ellas son del tipo recién descrito.

(d) *Radicales.* Los tipos particulares de sustituciones se recomiendan cuando aparecen ciertos radicales.

(i) Si $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ se usa la sustitución trigonométrica de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

(ii) Si ocurre $\sqrt[n]{ax + b}$ se usa la sustitución de racionalización $u = \sqrt[n]{ax + b}$. De una manera más general, esto funciona a veces para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Inténtelo una vez más Si los tres primeros pasos no producen respuesta, recuerde que hay básicamente sólo dos métodos de integración: sustitución y por partes.

(a) *Pruebe la sustitución.* Incluso si ninguna sustitución es obvia (paso 2), cierta inspiración o inventiva (o incluso desesperación) podría sugerir una sustitución apropiada.

(b) *Pruebe por partes.* Aunque la integración por partes emplea la mayor parte del tiempo en productos de la forma descrita en el paso 3(c), a veces es efectiva en funciones simples. En relación con la sección 7.1, se ve que funciona en $\tan^{-1}x$, $\text{sen}^{-1}x$, $\ln x$, y todas éstas son funciones inversas.

(c) *Realice algunas operaciones en el integrando.* Las operaciones algebraicas (quizá racionalizar el denominador o usar identidades trigonométricas) podrían ser útiles para transformar el integrando en una forma más fácil. Estas operaciones pueden ser más sustanciales que en el paso 1, y podrían implicar cierto ingenio. A continuación se da un ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right) dx$$

(d) *Relacione el problema con problemas previos.* Cuando se ha acumulado cierta experiencia en la integración, hay la posibilidad de usar un método en una integral dada similar a uno que ya se ha empleado en una integral previa. O incluso se podría expresar la integral dada en términos de una previa. Por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\,dx$

es una integral desafiante, pero si se emplea la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, se puede escribir

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

y si $\int \sec^3 x \, dx$ ha sido evaluada antes (véase el ejemplo 8 en la sección 7.2), entonces ese cálculo se puede usar en el problema actual.

(e) *Use varios métodos.* Algunas veces se requieren dos o tres métodos para evaluar una integral. La evaluación podría requerir varias sustituciones sucesivas de diferentes tipos, o podría ser necesario combinar la integración por partes con una o más sustituciones.

En los siguientes ejemplos se indica una manera de cómo enfrentar el problema, pero no resuelve por completo la integral.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

En el paso 1 se reescribe la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

La integral ahora es de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ con m impar, así que se puede usar la recomendación de la sección 7.2.

De manera alternativa, si en el paso 1 se hubiera escrito

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}\,\frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

por lo tanto se podría haber continuado como sigue con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x}\operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6}(-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\, du = \int (u^{-4} - u^{-6})\, du \qquad \square$$

V EJEMPLO 2 $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

De acuerdo con (ii) en el paso 3(d), se sustituye $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, por lo tanto, $dx = 2u\, du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int ue^u\, du$$

El integrando es ahora un producto de u y la función trascendental e^u de modo que se puede integrar por partes. $\square$

EJEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

Ninguna simplificación algebraica o sustitución es obvia, de modo que aquí no aplican los pasos 1 y 2. El integrando es una función racional, así que se aplica el procedimiento de la sección 7.4, sin olvidar que el primer paso es dividir. □

V EJEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aquí todo lo que se necesita es el paso 2. Se sustituye $u = \ln x$ porque su diferencial es $du = dx/x$, la cual aparece en la integral. □

V EJEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$

Aunque aquí funciona la sustitución de racionalización

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

[(ii) paso 3(d)], conduce a una función de racionalización muy complicada. Un método más fácil es hacer algunas operaciones algebraicas [como en el paso 1 o el paso 4(c)]. Al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{1 - x}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$

□

¿SE PUEDEN INTEGRAR TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS?

Surge la pregunta: ¿La estrategia de integración permitirá hallar la integral de toda función continua? Por ejemplo, ¿es posible emplearla para evaluar $\int e^{x^2}\,dx$? La respuesta es no, por lo menos no en términos de las funciones con las que se está familiarizado.

Las funciones con las que se ha estado tratando en este libro se llaman **funciones elementales**. Éstas son polinomios, funciones racionales, funciones de potencia (x^a), funciones exponenciales (a^x), funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas, y todas las funciones que se pueden obtener de éstas mediante las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si se define la función F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

por lo tanto de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo se sabe que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que sin importar el esfuerzo realizado, nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de las funciones conocidas. (No obstante, en el capítulo 11 se verá cómo expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo se puede decir de las siguientes integrales:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, puede estar seguro de que todas las integrales de los siguientes ejercicios son funciones elementales.

7.5 EJERCICIOS

1–80 Evalúe la integral

1. $\int \cos x(1 + \operatorname{sen}^2 x)dx$

2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$

3. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\tan x}\,dx$

4. $\int \tan^3 \theta\, d\theta$

5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$

7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}\,dy$

8. $\int x \csc x \cot x\, dx$

9. $\int_1^3 r^4 \ln r\, dr$

10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$

11. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$

12. $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$

13. $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^5\theta\, d\theta$

14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

15. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

18. $\int \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}}\,dt$

19. $\int e^{x+e^x}\,dx$

20. $\int e^2\, dx$

21. $\int \arctan \sqrt{x}\, dx$

22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$

23. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\, dx$

24. $\int \ln(x^2-1)\, dx$

25. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$

26. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$

27. $\int \frac{dx}{1+e^x}\,dx$

28. $\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\, dt$

29. $\int_0^5 \frac{3w-1}{w+2}\,dw$

30. $\int_{-2}^2 |x^2-4x|\, dx$

31. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

32. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$

33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\, dx$

34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\cot x}{4-\cot x}\,dx$

35. $\int_{-1}^1 x^8 \operatorname{sen} x\, dx$

36. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\, dx$

37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \tan^2\theta\, d\theta$

38. $\int_0^{\pi/4} \tan^5\theta \sec^3\theta\, d\theta$

39. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta \tan\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta}\,d\theta$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$

41. $\int \theta \tan^2\theta\, d\theta$

42. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx$

43. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\, dx$

44. $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$

45. $\int x^5 e^{-x^3}\,dx$

46. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$

47. $\int x^3(x-1)^{-4}\, dx$

48. $\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\displaystyle\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\displaystyle\int \cos x\cos^3(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\displaystyle\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

65. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

66. $\displaystyle\int_2^3 \frac{u^3+1}{u^3-u^2}\,du$

67. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^4}$

75. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

76. $\displaystyle\int (x^2-bx)\operatorname{sen} 2x\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

78. $\displaystyle\int \frac{\sec x\,\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

79. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\,\cos x\,dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

81. Las funciones $y = e^{x^2}$ y $y = x^2e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero $y = (2x^2+1)e^{x^2}$ sí. Evalúe $\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx$.

7.6 INTEGRACIÓN POR MEDIO DE TABLAS Y SISTEMAS ALGEBRAICOS

En esta sección se describe cómo usar las tablas y los sistemas algebraicos computacionales para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. No obstante, se debe tener en mente que incluso los sistemas algebraicos computacionales más poderosos, no pueden hallar fórmulas explícitas para las antiderivadas de funciones como e^{x^2} o las otras funciones descritas al final de la sección 7.5.

TABLAS DE INTEGRALES

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se afronta una integral que es difícil de evaluar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional. Una tabla relativamente breve de 120 integrales, clasificada por forma, se da en las páginas de referencia al final del libro. Tablas más extensas se encuentran en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* 31a. ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL: CRC Press, 2002) (709 elementos) o en Gradshteyn y Ryzhik's *Table of Integrals, Series, and Products,* 6e (New York: Academic Press, 2000), que contiene cientos de páginas de integrales. Se debe recordar, sin embargo, que las integrales no aparecen a menudo exactamente en la forma listada en una tabla. A menudo, es necesario usar sustitución u operaciones algebraicas para transformar una determinada integral en una de las formas de la tabla.

EJEMPLO 1 La región limitada por las curvas $y = \arctan x$, $y = 0$, y $x = 1$ se hace girar respecto al eje y. Determine el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Con el método de cascarones cilíndricos, se ve que el volumen es

$$V = \int_0^1 2\pi x\arctan x\,dx$$

7.8 INTEGRALES IMPROPIAS

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se trató con una función f definida en un intervalo finito $[a, b]$ y se supuso que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección se amplía el concepto de una integral definida para el caso donde el intervalo es infinito y también el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cualquier caso, la integral se llama *impropia*. Una de las aplicaciones más importantes de esta idea, distribuciones de probabilidad, se estudia en la sección 8.5.

TIPO I: INTERVALOS INFINITOS

Considere la región infinita S que yace bajo la curva $y = 1/x^2$, arriba del eje x, y a la derecha de la recta $x = 1$. Se podría pensar, puesto que S es de grado infinito, que su área debe ser infinita, pero considérese más de cerca. El área de la parte de S que se localiza a la izquierda de la línea $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Note que $A(t) < 1$ sin importar cuán grande se elija t.

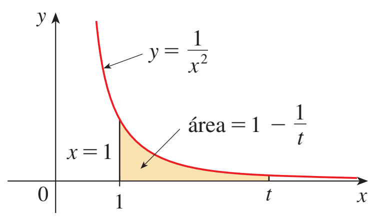


FIGURA 1

Se observa también que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), por lo tanto se puede decir que el área de la región infinita S es igual a 1 y se escribe.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

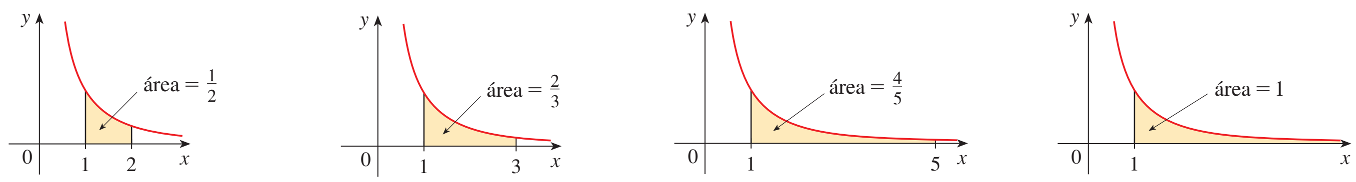


FIGURA 2

Con este ejemplo como guía, se define la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de integrales en intervalos finitos.

1 DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO I

(a) Si la $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, entonces

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, entonces

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si tanto $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede usar cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

Cualquiera de las integrales impropias de la definición 1 se puede interpretar como un área siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces se define el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f de a a t.

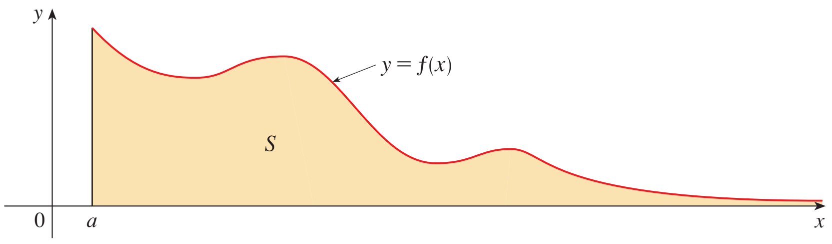


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso (a) de la definición 1, se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por lo tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente. □

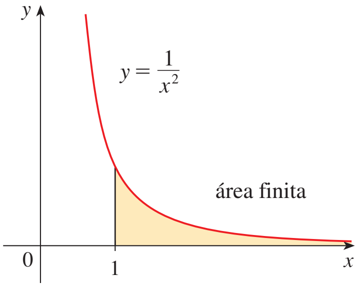


FIGURA 4

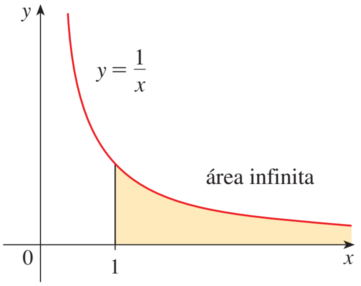


FIGURA 5

Compare el resultado del ejemplo 1 con el ejemplo dado al comienzo de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad\qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geométricamente, esto dice que aunque las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ son muy similares para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la figura 4) tiene área finita mientras que la región bajo $y = 1/x$ (en la figura 5) tiene área infinita. Note que tanto $1/x^2$ como $1/x$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$ pero $1/x^2$ se aproxima a 0 más rápido que $1/x$. Los valores de $1/x$ no se reducen con la rapidez suficiente para que su integral tenga un valor finito.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Usando el inciso (b) de la definición 1, se tiene

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x\,dx$$

Se integra por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\begin{aligned}\int_t^0 xe^x\,dx &= xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx \\ &= -te^t - 1 + e^t\end{aligned}$$

Se sabe que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, y por la regla de l'Hospital se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty} te^t &= \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} \\ &= \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0\end{aligned}$$

TEC En Module 7.8 puede investigar visual y numericamente si algunas integrales impropias son convergentes o divergentes.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx &= \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) \\ &= -0 - 1 + 0 = -1\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1 + x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente elegir $a = 0$ en la definición 1(c):

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora se deben resolver por separado las integrales del lado derecho:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}x\Big]_t^0$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t)$$
$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

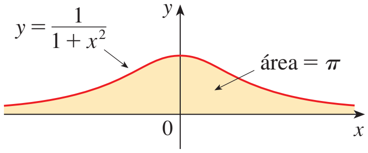


FIGURA 6

Puesto que ambas integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Puesto que $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita que yace bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ y arriba del eje x (véase la figura 6). □

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p la integral

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Se sabe del ejemplo 1 que si $p = 1$, después la integral es divergente, por consiguiente se supondrá que $p \neq 1$. Por lo tanto

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$, luego $p - 1 > 0$, de modo que $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$ entonces,

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y, por lo tanto, la integral converge. Pero si $p < 1$, en tal caso $p - 1 < 0$ y, de este modo

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge. □

Se resume el resultado del ejemplo 4 para referencia futura:

2 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

TIPO 2: INTEGRANDOS DISCONTINUOS

Suponga que f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a, b)$ pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo I, las regiones se amplían de forma indefinida en una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

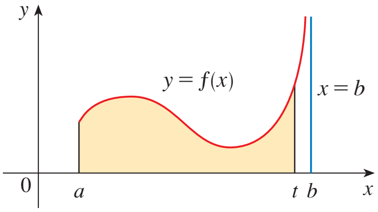


FIGURA 7

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \longrightarrow b^-$, entonces se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Se emplea esta ecuación para definir una integral impropia de tipo 2 aun cuando f no es una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

$\boxed{3}$ **DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO 2**

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) Si f es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente y **divergente** si no existe el límite.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, y ambas integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

■ Los incisos (b) y (c) de la definición 3 se ilustran en las figuras 8 y 9 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

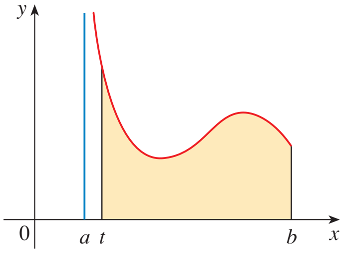


FIGURA 8

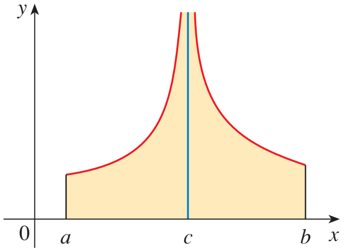


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se nota primero que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene la asíntota vertical $x = 2$. Puesto que la discontinuidad infinita aparece en el punto final izquierdo de $[2, 5]$, se usa el inciso (b) de la definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

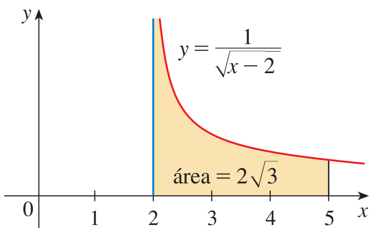


FIGURA 10

Así, la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, se puede interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10. □

V EJEMPLO 6 Determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Note que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Si usa el inciso (a) de la definición 3 y la fórmula 14 de la tabla de integrales, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\, dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

porque $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Así, la integral impropia dada es divergente. □

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo $[0, 3]$, se debe usar el inciso (c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to1^-} \left(\ln|t-1| - \ln|-1|\right)$$

$$= \lim_{t\to1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

debido a $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto significa que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No es necesario evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.] □

ADVERTENCIA Si no se hubiera notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces se podría haber hecho el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia y se debe calcular en términos de límites.

De ahora en adelante, siempre que se encuentre el símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ se debe decidir, observando la función f en $[a, b]$, si es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_0^1 \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Se sabe que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 puesto que $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. Así, la integral dada es impropia y se tiene

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to0^+} \int_t^1 \ln x\, dx$$

Ahora se integra por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$
$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1 - t)$$
$$= -t\ln t - 1 + t$$

Para hallar el límite del primer término se usa la regla de l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0$$

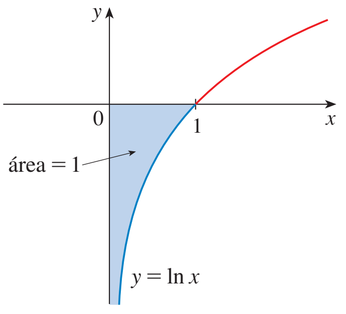


FIGURA 11

Por lo tanto, $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+}(-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$$

En la figura 11 se muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada arriba de $y = \ln x$ y abajo del eje x es 1. □

PRUEBA DE COMPARACIÓN PARA INTEGRALES IMPROPIAS

Algunas veces es imposible hallar el valor exacto de una integral impropia y, sin embargo, es importante saber si es convergente o divergente. En tales casos, es útil el siguiente teorema. Aunque se expresa para integrales de tipo 1, un teorema similar se cumple para integrales de tipo 2.

TEOREMA DE COMPARACIÓN Considere que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

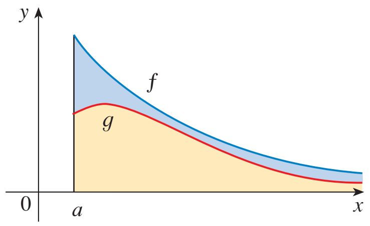


FIGURA 12

Se omite la demostración del teorema de comparación, pero la figura 12 hace que parezca plausible. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, entonces también lo es el área bajo $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, entonces también lo es el área bajo $y = f(x)$. [Note que lo contrario no necesariamente es cierto: si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ podría ser convergente, o no, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ podría ser divergente, o no.]

V EJEMPLO 9 Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No se puede evaluar la integral de manera directa, porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explicó en la sección 7.5). Se escribe

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

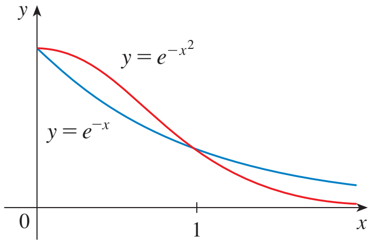


FIGURA 13

y observe que la primera integral del lado derecho es sólo una integral definida ordinaria. En la segunda integral se usa el hecho de que para $x \geqslant 1$ se tiene $x^2 \geqslant x$, así que $-x^2 \leqslant -x$ y, por lo tanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Véase la figura 13). La integral de e^{-x} es fácil de evaluar:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, si se toma $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, se ve que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. Se deduce que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. □

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el ejemplo 9 se mostró que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 70 se indica cómo mostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; con los métodos del cálculo de varias variables se puede demostrar que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. En la tabla 1 se ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados con computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ se aproximan a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t se vuelve grande. De hecho, estos valores convergen con bastante rapidez porque $e^{-x^2} \to 0$ es muy rápido cuando $x \to \infty$.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1 000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

EJEMPLO 10 La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$]. □

En la tabla 2 se ilustra la divergencia de la integral del ejemplo 10. Al parecer los valores no se aproximan a ningún número fijo.

7.8 EJERCICIOS

1. Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia.

(a) $\displaystyle\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. ¿Cuáles de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x - 1)\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1 000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de visión $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
(b) Encuentre el área bajo las gráficas de f y g de $x = 1$ a $x = t$ y evalúe para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}, y 10^{20}.
(c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si existe.

5–40 Determine si cada integral es convergente o divergente. Evalúe las que son convergentes.

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx$ **6.** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\,dw$ **8.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$ **10.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4)\,dv$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen}\theta\,d\theta$ **16.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx$ **18.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}$

19. $\displaystyle\int_0^\infty se^{-5s}\,ds$ **20.** $\displaystyle\int_{-\infty}^6 re^{r/3}\,dr$

21. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ **22.** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9 + x^6}\,dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\,dx$

25. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$ **28.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\displaystyle\int_{6}^{8} \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\displaystyle\int_{0}^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{4y-1}\,dy$

35. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\,dx$

37. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

38. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

39. $\displaystyle\int_{0}^{2} z^2 \ln z\,dz$

40. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41–46 Bosqueje la región y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant -2,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2+9)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x/(x^2+9)\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \left\{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\right\}$

47. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use su calculadora o computadora para construir una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use su gráfica para explicar de manera intuitiva por qué $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x}-1)$, use su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es convergente o divergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use su gráfica para explicar de forma intuitiva por qué $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.

49–54 Use el teorema de comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$

50. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

52. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x}\,dx$

53. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

con el mismo método que empleó en el ejercicio 55.

57–59 Determine los valores de p para los cuales la integral converge, y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^p \ln x\,dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.
(b) Infiera el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.
(c) Demuestre su conjetura por inducción matemática.

61. (a) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ es divergente.
(b) Muestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = 0$$

Esto muestra que no se puede definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante de los gases, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Muestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Se sabe del ejemplo 1 que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/x\}$ tiene área infinita. Demuestre que girando $\mathcal{R}$ respecto al eje x se obtiene un sólido con volumen finito.

64. Use la información y los datos en los ejercicios 29 y 30 de la sección 6.4 con la finalidad de determinar el trabajo requerido para propulsar un satélite de 1 000 kg fuera del campo gravitacional de la Tierra.

65. Determine la *velocidad de escape* v_0 que se requiere para propulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Use la ley de la gravitación de Newton (véase el ejercicio 29 en la sección 6.4) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos usan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de estrellas en un cúmulo estelar de la densidad observada (bidimensional) que se puede analizar a partir de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende sólo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia planar observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede mostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Si la densidad real de estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, así que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.

(a) Elabore una gráfica aproximada de lo que considera se podría parecer la gráfica de F.

(b) ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? ¿Por qué?

68. Como se verá en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae de manera exponencial: la masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. El tiempo de *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\, dt$$

Para el isótopo de carbono radiactivo, ^{14}C, emplee el fechado con radiocarbono, el valor de k is -0.000121. Determine el tiempo de vida media de un átomo de ^{14}C.

69. Determine cúan grande tiene que ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

70. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ escribiéndolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime la primera integral por medio de la regla de Simpson con $n = 8$ y muestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, que es menor que 0.0000001.

71. Si $f(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, la *transformada de Laplace de* f es la función de F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consta de los números s para los que la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Muestre que si $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde M y a son constantes, entonces la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponga que $0 \leqslant f(t) \leqslant Me^{at}$ y $0 \leqslant f'(t) \leqslant Ke^{at}$ para $t \geqslant 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, muestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

75. Muestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

76. Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ interpretando las integrales como áreas

77. Determine el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

78. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

79. Considere que f es continua en $[0, \infty]$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convengente?

80. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, en tal caso la integral siguiente es convergente

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$