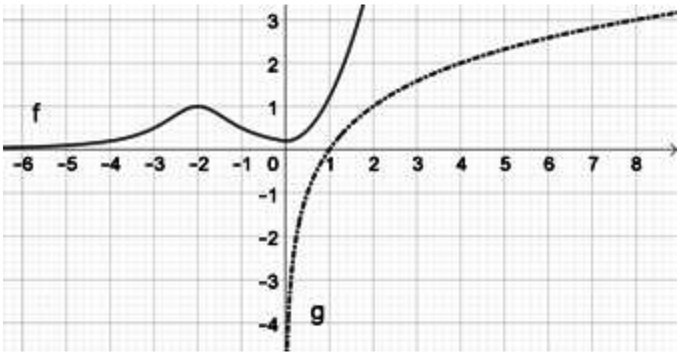
TRABAJO PRÁCTICO N° 6
ESTUDIO DE FUNCIONES. PROBLEMAS DE EXTREMOS

1. Sean f y g , dos funciones en $\mathbb{R}$.



Complete:

a) El dominio de la función f es …… mientras que el dominio de g es ………

b) La función g …………….(tiene/no tiene) extremos relativos, mientras que f presenta un mínimo relativo en $x =$......... y un …………… (mínimo/máximo) relativo en $x = -2$.

c) La función g es …………………(creciente/decreciente) en todo su dominio.

d) La función f es creciente en el intervalo ………………… y decreciente en ...

2. Usando la derivada primera, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$. Clasifique los extremos en absoluto o relativos.

3. ¿Todas las funciones polinómicas de grado mayor o igual a 2 presentan extremos? Para probar que esto es falso, trabaje con la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ en Geogebra (utilice deslizadores para los coeficientes a, b y c). Encuentre analíticamente la relación entre los coeficientes para que la función no presente extremos, y verifíquelo con los valores utilizados en los deslizadores.

4. Indique si las funciones del ejercicio 1 presentan puntos de inflexión, determinando los intervalos de concavidad positiva y los intervalos de concavidad negativa, en caso de que existan.

5. Usando la derivada segunda, encuentre los intervalos de concavidad positiva, concavidad negativa, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

6. Realice el estudio completo de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

e) $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x\le -1 \\ -2x & x>-1 \end{cases}$ f) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

Realice el estudio completo de las siguientes funciones (no es necesario entregar estos ejercicios). Puede usar Geogebra para verificar sus resultados.

a) $f(x)=xe^x$ b) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ f) $f(x)=\dfrac{2-x}{x^2-4}+\dfrac{1}{x}$

Para pensar (no es necesario entregar las respuestas)

"Sean a y b dos números reales cualesquiera, tal que $a<b$, y f una función derivable en $\mathbb{R}$". Responda verdadero o falso:

a) Si $\forall x\in[a,b], f'(x)>0$, entonces la función crece en el intervalo $[a,b]$.

b) Si la función crece en el intervalo $[a,b]$, entonces $f'(x)>0\ \forall x\in[a,b]$.

c) Si $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)<0$, entonces la función decrece en todo su dominio.

d) Si $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)<0$, entonces la función no presenta extremos.

e) Si $f'(a)=0$, entonces la función tiene un extremo en $x=a$.

f) Si $f'(a)=0$, y la derivada primera cambia de signo en $x=a$, entonces la función tiene un extremo en $x=a$

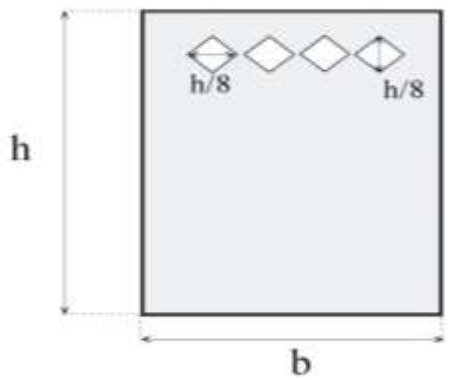
PROBLEMAS DE EXTREMOS

7. Indique la función, de una variable, a optimizar en los siguientes casos:

a. Suma de dos números cuando el producto entre ellos es fijo.
b. Superficie de un rectángulo de perímetro dado.
c. Superficie del área lateral de una caja de base cuadrada con tapa (paralelepípedo recto) de volumen dado.
d. Diferencia entre un número y su cuadrado.
e. Distancia entre el punto $(0,a)$, con $a\in\mathbb{R}^+$ y la parábola $f(x)=x^2$.

8. Se desea construir un recipiente de forma cilíndrica con tapa, para contener un volumen V de líquido, con el menor costo posible. ¿Cuál debe ser la altura del recipiente?

9. Se desea construir una puerta según se muestra en la figura. ¿Cuáles serán sus dimensiones, para que el costo de construcción sea mínimo? Tenga en cuenta que el valor del metro cuadrado de vidrio es ocho veces el correspondiente al metro cuadrado de madera, y el perímetro de la puerta es de 5.6 *m*



10. Se quiere escribir en una página de manera que contenga 125 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 4,5 cm. cada uno y los márgenes laterales de 2,5 cm. cada uno. ¿Qué dimensiones debiera tener la página de manera que se gaste un mínimo de papel?

Bibliografía:

- J. Stewart, *Cálculo*, México. International Thomson Editores, 1998
- L. Leithold, *El Cálculo*, 7ma Ed, 1998
- M. Spivak, *Calculus*, Barcelona. Reverté, 1990
- T. Apostol, *Calculus* Vol.I. Buenos Aires. Reverté, 1982