Análisis Matemático II

Lic. en Cs. de la Computación/ Lic. Matemática Aplicada- 2022

Práctico 5 - Funciones de varias variables

(1) Determinar el dominio de las siguientes funciones y graficarlo.

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x\,y}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x\,y}{x^2-y^2}$

(d) $f(x,y) = \sqrt{4\,x^2+9\,y^2-36}$

(2) Sea $f(x,y) = \ln(x+y-1)$.
  (a) Evalúe $f(1,1)$ y $f(e,1)$.
  (b) Determine y grafique el dominio de f.
  (c) Determine el rango de f.

(3) Sea $f(x,y) = x^2e^{3xy}$.
  (a) Evalúe $f(2,0)$.
  (b) Determine y grafique el dominio de f.
  (c) Determine el rango de f.

(4) Bosquejar la gráfica de las siguientes funciones.
  (a) $f(x,y) = y^2$, donde $-1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1$
  (b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ (semiesfera)
  (c) $f(x,y) = x^2+y^2$ (paraboloide)
  (d) $f(x,y) = x^2-y^2$ (silla de montar)
  (e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (cono)
  (f) $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ (hiperboloide de dos hojas)

(5) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a) $f(x,y) = x-y$, $(3,2)$

(b) $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$, $(1,1,1)$

(c) $f(x,y) = xy+x^2$, $(2,0)$

(d) $w = \mathrm{e}^{y\ln z}$, $(\mathrm{e},2,\mathrm{e})$

(e) $f(x,y,z) = x^3y^4z^5$, $(0,-1,-1)$

(f) $w = \ln(1+e^{xyz})$, $(2,0,-1)$

(6) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a) $f(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$, en $(\pi,4)$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, en $(1,2)$.

(7) Para las siguientes funciones encontrar: *(i)* el gradiente en el punto indicado, *(ii)* una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto dado,*(iii)* una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, en (1,1).

(b) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, en $(0,2)$.

(8) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$, en $(1,-1,1)$.

(b) $f(x,y,z)=\cos(x+2y+3z)$, en $(\pi/2,\pi,\pi)$.

(9) Calcular la derivada direccional de f en el punto P_o y en la dirección del vector $\vec{u}$ dado.

(a) $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2y}$, $P_o=(2,0)$, $\vec{u}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $P_o=(1,3,2)$, $\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(10) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,1)$, para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función $f(x,y)=(x+y-2)^2+(3x-y-6)^2$?

(11) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

(a) $z=x^2(1+y^2)$

(b) $w=x^3y^3z^3$

(12) Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt

(a) $z=x^2+y^2+xy$, $x=\sin t$, $y=e^t$

(b) $z=\cos(x+4y)$, $x=5t^4$, $y=1/t$

(c) $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$, $x=\ln t$, $y=\cos t$

(d) $\arctan(y/x)$, $x=e^t$, $y=1-e^{-t}$

(13) Sea $u=\sqrt{x^2+y^2}$ donde $x=\mathrm{e}^{st}$, $y=1+s^2\cos t$. Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene al reemplazar x e y en u y luego derivar.

(14) Sea $f(x,y,z)=xyz^3$.

(a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

(b) Sabiendo que $x=x(z)=\sin z$ e $y=y(z)=\mathrm{e}^{4z}$, calcular $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)]$ reemplazando $x(z)$ e $y(z)$ en la fórmula de f.

(c) Comprobar que $\dfrac{d}{dz}[f(x(z),y(z),z)]=\dfrac{\partial f}{\partial x}.\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{\partial f}{\partial y}.\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

(15) Sea $z = f(x, y)$, $x = 2s + 3t$, $y = 3s - 2t$. Calcular,

(a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$ (b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$ (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

(16) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$ (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{2 + x^2 + y^2}$

(17) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$

(18) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-x^2 - y^4}$

(19) Calcular la distancia más corta desde el punto $(1, 0, -2)$ al plano $x + 2y + z = 4$.

(20) Calcular los valores máximo y mínimo relativos o puntos sillas de las siguientes funciones

(a) $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$
(b) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 + 8y$
(c) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$
(d) $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x \quad \text{en } 1 \leq x \leq 7$.