2do parcial - A.M. I - LC - 2018

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3} & \text{si } x \neq -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}$

a) Determinar si f es continua en $x=-3$, y en caso de no serlo, clasificar el tipo de discontinuidad.

Para que una función sea continua en un punto a debe cumplir:

1) $a \in \text{Dom} f$ (existe $f(a)$)

2) $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ $\left(\to \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \right)$

3) $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

1) $x=-3$ pertenece al dominio $\longrightarrow$ $\boxed{f(-3)=0}$

2) Ya que la función a la derecha de $x=-3$ es la misma que la función a la izquierda de $x=-3$, para ver si existe el $\lim_{x \to -3} f(x)$ no hace falta calcular los límites laterales (podían hacerlo y verificar que dan iguales)

- $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}} = \lim_{x \to -3} x-3 = -6$$

$x^2-9 \to 0$, $x+3 \to 0$; diferencia de cuadrados

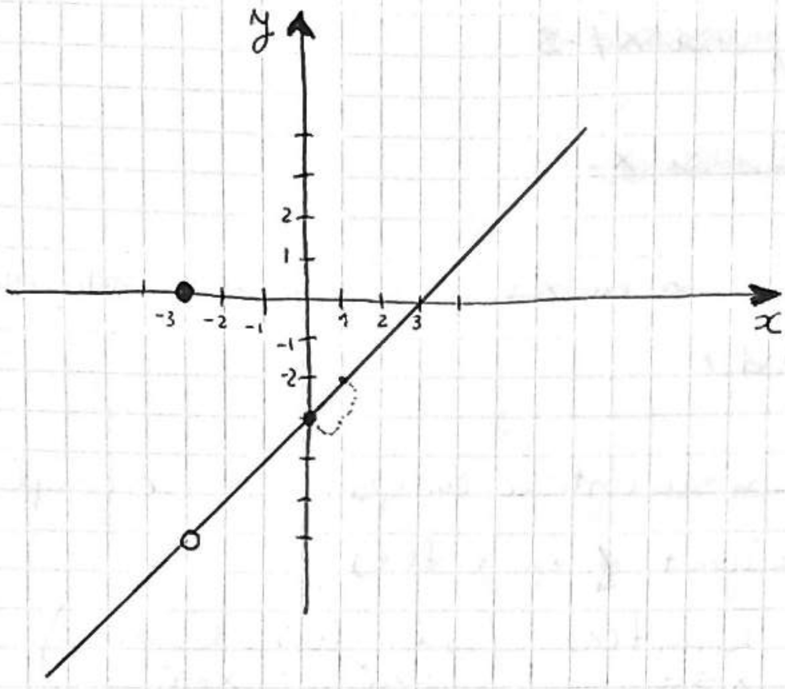
Por lo tanto: $\boxed{\text{Existe } \lim_{x \to -3} f(x)}$

3) $\left.\begin{array}{l} f(-3)=0 \\ \lim_{x \to -3} f(x) = -6 \end{array}\right\}$ Como no son iguales entonces $\boxed{f(x) \text{ NO es continua en } x=-3.}$

$\to$ El tipo de discontinuidad es $\boxed{\text{evitable}}$ ya que $\exists \lim_{x \to -3} f(x)$ y es finito.

$$\frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(\cancel{x+3})(x-3)}{(\cancel{x+3})} = x-3$$

(b) Graficar sin usar tabla de valores.



$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \neq -3 \\ 0 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

$y = x - 3$

recta con pendiente $a = 1$

ord. al origen $b = -3$

Es la recta $y = x$ desplazada 3 unidades hacia abajo.

2) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right)$

a) Derivar f(x).

f es una composición de tres funciones

$F(x) = \cos(x)$

$G(x) = \frac{\pi}{2} e^x$

$H(x) = x+1$

$f(x) = F(G(H(x)))$

Por la regla de la cadena $\rightarrow f'(x) = F'(G(H(x))) \cdot G'(H(x)) \cdot H'(x)$

$$f'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right) \cdot \frac{\pi}{2} e^{x+1} \cdot 1$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{\pi}{2} e^{x+1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} e^{x+1}\right)}$$

Cuentas auxiliares

$F'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$G'(x) = \frac{\pi}{2} e^x$

$H'(x) = 1$

b) Dar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto $(-1,0)$

$$y = ax + b$$

la recta tangente a la función en el punto $(x=-1, \overset{f(-1)}{y=0})$ tiene pendiente $a = f'(-1)$

$$a = f'(-1) = -\frac{\pi}{2} \cdot e^{-1+1} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} e^{-1+1}\right) = -\frac{\pi}{2} \overbrace{e^0}^{=1} \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} \cdot \overset{1}{e^0}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \overbrace{sen\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}$$

$$\boxed{a = -\frac{\pi}{2}}$$

$$y = -\frac{\pi}{2} \cdot x + b$$

pasa por $(-1,0) \rightarrow \quad 0 = -\frac{\pi}{2} \cdot (-1) + b$

$$0 = \frac{\pi}{2} + b \rightarrow \boxed{b = -\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{y = -\frac{\pi}{2} x - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x+1)}$$ recta tangente a f en el punto $(-1,0)$

3) Calcular límites:

dif de cuadrados en el numerador

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} \cdot \overbrace{\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}}^{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1^2}{x^2\left[\sqrt{x^2+1}+1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x^2\left[\sqrt{x^2+1}+1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left[\sqrt{x^2+1}+1\right]} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to 1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) $\lim_{x\to 0^+} x^{\tan(x)}$ $\to$ ¿0^0?

$$x^{\tan(x)} = e^{\ln(x^{\tan(x)})} \quad (**)$$
$$= e^{\tan(x).\ln(x)}$$

$$(**) = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan(x)\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} \tan(x).\ln(x)}$$

$$(***) \quad \tan(x).\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\tan(x)}}$$

$$(***) = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\tan(x)}}} =$$

calculemos esto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\tan(x)}} \quad \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación} \quad \underset{\text{L'Hop}(*)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)}} =$$

$$(*) \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)' = \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' =$$

$$\frac{-\operatorname{sen}(x).\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$= -\frac{(\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x))}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x} \quad \frac{0}{0} \text{ INDETERM} \quad \underset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\tan(x)} = e^0 = \boxed{1}$$

4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

a) Dominio y Paridad

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f \text{ está bien definida}\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} - \{0\}}$$

$$\underbrace{f(-x) = (-x) + \frac{1}{(-x)} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)}$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x) \Rightarrow f \text{ es impar}}$$

b) Asíntotas verticales y horizontales.

A. Vertical: $0 \notin \text{Dom} f$

$$\lim_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = \lim_{\underbrace{x \to 0^+}_{x>0}} \frac{x^2+1}{x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to 0^-} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \boxed{-\infty}$$

tiene asíntotas verticales en $x = 0$

A. Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x} \overset{\text{Indeterm.}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{+\infty}$$

(otra forma de resolver:)

$$\lim_{x \to -\infty} x + \frac{1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{x} \overset{\text{Indeterm.}}{\underset{\text{L'Hôp.}}{=}} \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1} = \boxed{-\infty}$$

No tiene As. Horizont ya que los límites no son finitos.

c) Puntos críticos?

Son los $x \in Dom(f)$ en los que $f'(x)=0$ ó f' no existe.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad \left(Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}\right)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

f' no está definido en $x=0$ que No está en el dominio de f, por lo que NO es P.C.

$$f'(x_c)=0 = 1 - \frac{1}{x_c^2}$$

$$0 = \frac{x_c^2 - 1}{x_c^2} \rightarrow \text{el numerador debe anularse}$$

$$x_c^2 - 1 = 0$$

$$0 = \frac{(x_c-1)(x_c+1)}{x_c^2}$$

(dif de cuadrados) $(x_c+1)(x_c-1) = 0$

uno debe ser cero:

$x_c+1=0$ ó $x_c-1=0$

PUNTOS CRÍTICOS $\rightarrow$ $\boxed{x_c = -1}$ $\boxed{x_c = 1}$

d) Intervalos de crec. y decrec. de f(x)

f crece en los intervalos en los que $f'(x) > 0$
f decrece en los intervalos en los que $f'(x) < 0$

Voy a construir una tabla con intervalos determinados por todos los puntos críticos y todos los puntos que no están en el dom. de f.

-1 (P.C) $\quad 0$ ($\notin$ Dom) $\quad 1$ (P.C) $\quad x$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

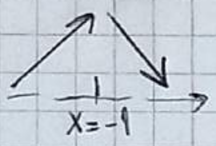
	$(-\infty,-1)$	$x=-1$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f' = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

6

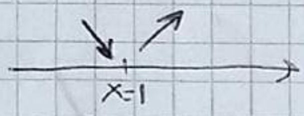
$\therefore$ f crece en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

f decrece en $(-1,0) \cup (0,1)$

e) Máximos y mínimos locales:



Como f crece hasta $x=-1$ y luego decrece $\Rightarrow$ $x=-1$ es máximo local



f decrece ~~hasta~~ hasta $x=1$ y luego crece $\Rightarrow$ $x=1$ es mínimo local.

Otra forma: si $f''(x_c) > 0 \rightarrow x_c$ es mínimo local

si $f''(x_c) < 0 \rightarrow x_c$ es máximo local.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - x^{-2}$

$$f''(x) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$f''(-1) = -2 < 0 \rightarrow x=-1$ es máximo local

$f''(1) = 2 > 0 \rightarrow x=1$ es mínimo local

---

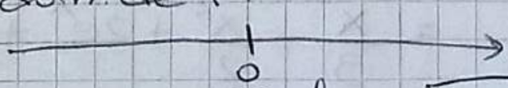
f) Intervalos de concavidad y convexidad.

$\begin{cases} f \text{ es cónc. hacia arriba en los intervalos que } f''(x) > 0 \\ f \text{ es cónc. hacia abajo en los intervalos que } f''(x) < 0 \end{cases}$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Voy a fabricar una tabla con los puntos en los que $f''(x)=0$ y los puntos que NO pertenecen al dominio de f.

$\rightarrow$ $f''(x)$ no se hace cero nunca $\rightarrow$ sólo marco los puntos que no están en el dom. de f



$\notin$ Dom f

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'' = \frac{2}{x^3}$	$-$	$+$

f es cónc. hacia abajo en $(-\infty,0)$

f es cónc. hacia arriba en $(0,+\infty)$

g) Puntos de inflexión

Son puntos del dominio en donde cambia la concavidad.

→ En este caso la concavidad cambia en $x=0$ que No pertenece al dominio, por lo tanto $\boxed{\text{No tiene}}$ puntos de inflexión.

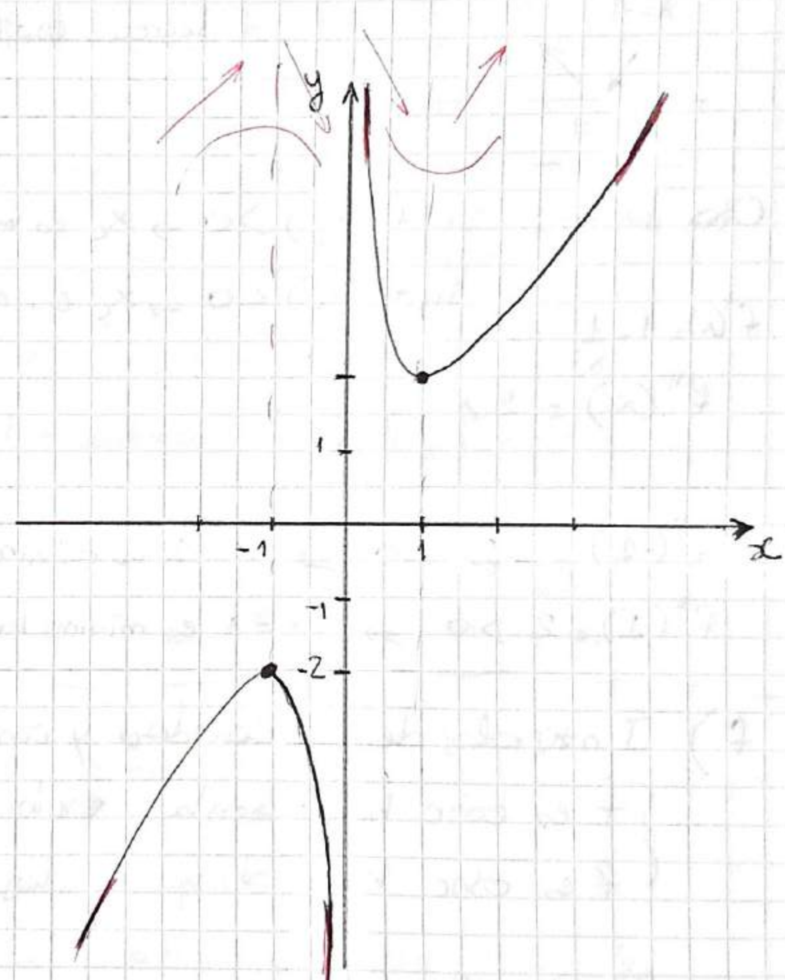
h) Graficar:

- $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$ (es impar)
- A.V. en $x=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to 0^-} f = -\infty$
- No tiene A.H. $\lim\limits_{x\to +\infty} f \to +\infty$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f = -\infty$
- f crece $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ ↗
- f decrece $(-1,0) \cup (0,1)$ ↘
- Máximo local en $x=-1$

  $f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$
- Mínimo local en $x=1$

  $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$
- f cóncava arriba en $(0,+\infty)$ (∪)
- f cóncava abajo en $(-\infty,0)$ (∩)



5 - Integrales

a) $\int (x^2 - x + 2e^x)\,dx \overset{\int suma = suma\ de\ \int}{=} \int x^2 dx - \int x\,dx + 2\int e^x dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2e^x + C$

b) $f(x) = x+3$ obtener la primitiva F de f / $F(1) = 1$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+3)\,dx = \int x\,dx + 3\int dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C$

$F(1) = 1 \rightarrow 1 = \frac{1}{2} + 3 + C \rightarrow C = 1 - 3 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{5}{2}}$

$\boxed{F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{5}{2}}$