Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación - 2021

Práctico 3 - Series de potencias

(1) ¿Qué es una serie de potencias?

(2) (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

(3) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^n$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$

(4) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de las series siguientes?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

(5) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3(2x-3)^n$

(6) Usar la expansión $\displaystyle\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, en potencias de x. (b) $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$, en potencias de x.

(c) $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$, en potencias de x.

(d) $f(x) = \ln x$, en potencias de $(x-4)$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.

(f) $f(x) = x\ln(1-x)$, en potencias de x.

(7) Expresar las siguientes integrales como una serie de potencias en x.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^5}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

(8) Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

(9) Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

(10) Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x vale la representación?

(a) $f(x) = (1-x)^2$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$

(c) $f(x) = \cos(x)$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2)$

(e) $f(x) = e^{5x}$

(f) $f(x) = xe^x$

(11) Determinar el orden de los polinomios de Taylor que deberían usarse para aproximar los siguientes valores con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

(a) $\mathrm{e}^{0.1}$

(b) $\ln 1.4$

(12) Estimar el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por su polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 8$, para $7 \leq x \leq 9$.

(13) Sea $f(x) = (1+x)^{1/2}$. Usando el polinomio de Taylor de orden 3 de f, centrado en $a = 0$, calcular el valor aproximado de $\sqrt{2}$ que da dicho polinomio, y estimar el error en esta aproximación.

(14) ¿Para qué valores de x se puede aproximar $\operatorname{sen} x$ por $x - \dfrac{x^3}{3!}$ con un error menor que 10^{-4}?