

Clase 8 - Interpolación polinomial (2)

Repaso:

- **El problema:** Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, con x_0, x_1, \dots, x_n distintos, se desea determinar un polinomio p , con el **menor grado posible**, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0, \dots, n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados.

- Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.
- Error en el polinomio interpolante.
- Convergencia de los polinomios de interpolación.

Diferencias divididas

Recordemos la forma de Newton del polinomio interpolante basado en los puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=0}^n c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \end{aligned}$$

Notemos que el coeficiente c_0 se obtiene simplemente de $c_0 = y_0$ (o de $f(x_0)$). El coeficiente c_1 se calcula con y_1 (o de $f(x_1)$), despejando en

$$y_1 = p_1(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0), \quad \text{esto es} \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

este coeficiente depende de x_0, x_1, y_0, y_1 . En general, para calcular el coeficiente c_k se requieren conocer $x_0, \dots, x_k, y_0, \dots, y_k$, o si estamos interpolando a una función f se requieren: $x_0, \dots, x_k, f(x_0), \dots, f(x_k)$. Este coeficiente se denota por

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k],$$

para $k = 0, \dots, n$ y se denomina **diferencias divididas**.

Ahora la forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k f[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j),$$

donde si $k = 0$:

$$f[x_0] = f(x_0),$$

si $k = 1$:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Veremos a continuación un resultado general para determinar las diferencias divididas asociadas a un polinomio que interpola una función f .

Teorema 1. Dados x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos, las diferencias divididas satisfacen la siguiente ecuación

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Demostración.

Sea p_{n-1} el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos x_0, x_1, \dots, x_{n-1} .

Sea q el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en los n puntos x_1, x_2, \dots, x_n .

Sea p_n el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n .

Se afirma que

$$p_n(x) = q(x) + \frac{(x - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x) - p_{n-1}(x)]. \quad (1)$$

Es claro que a ambos lados de la igualdad se tienen polinomios de grado $\leq n$. Además, para $i = 0$,

$$p_n(x_0) = f(x_0) \quad \text{y} \quad q(x_0) + \frac{(x_0 - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_0) - p_{n-1}(x_0)] = p_{n-1}(x_0) = f(x_0).$$

Para $i = 1, \dots, n-1$,

$$p_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{y} \quad q(x_i) + \frac{(x_i - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_i) - p_{n-1}(x_i)] = f(x_i),$$

pues $q(x_i) = p_{n-1}(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$.

Para $i = n$,

$$p_n(x_n) = f(x_n) \quad \text{y} \quad q(x_n) + \frac{(x_n - x_n)}{(x_n - x_0)}[q(x_n) - p_{n-1}(x_n)] = q(x_n) = f(x_n).$$

Por lo tanto, a ambos lados de (1) se tiene un polinomio de grado $\leq n$ y ambos interpolan a f en los mismos $n+1$ puntos distintos. Luego por unicidad del polinomio interpolante, la igualdad (1) es cierta. Como ambos polinomios son iguales, los coeficientes de cada potencia de x deben coincidir. En particular considerando el coeficiente de x^n a ambos lados de (1) obtenemos

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \dots, x_n] &= \frac{1}{x_n - x_0} (f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]) \\ &= \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \end{aligned}$$

□

Luego

$$\begin{aligned}
 f[x_0] &= f(x_0) \\
 f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} \\
 f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
 &\vdots \\
 f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Tabla de diferencias divididas

Dados 4 puntos distintos (no necesariamente ordenados) se puede construir la tabla de diferencias divididas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l}
 x_0 & f[x_0] \quad f[x_0, x_1] \quad f[x_0, x_1, x_2] \quad f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 x_1 & f[x_1] \quad f[x_1, x_2] \quad f[x_1, x_2, x_3] \\
 x_2 & f[x_2] \quad f[x_2, x_3] \\
 x_3 & f[x_3]
 \end{array}$$

Ejemplo: Dados los siguientes valores:

$$\begin{array}{c|cccc}
 x & 3 & 1 & 5 & 6 \\
 \hline
 f(x) & 1 & -3 & 2 & 4
 \end{array}$$

a) obtener la tabla de diferencias divididas

$$\begin{array}{l|l}
 3 & 1 \quad 2 \quad -3/8 \quad 7/40 \\
 1 & -3 \quad 5/4 \quad 3/20 \\
 5 & 2 \quad 2 \\
 6 & 4
 \end{array}$$

b) obtener el polinomio interpolante en la forma de Newton:

$$p(x) = 1 + 2(x-3) - \frac{3}{8}(x-3)(x-1) + \frac{7}{40}(x-3)(x-1)(x-5).$$

Algoritmo para calcular los coeficientes de la tabla de diferencias divididas

Para obtener algorítmicamente los coeficientes de la tabla de diferencias divididas se puede pensar la misma como en un arreglo matricial de la siguiente forma:

x_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}	c_{03}	\dots	$c_{0,n-1}$	$c_{0,n}$
x_1	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	\dots	$c_{1,n-1}$	
x_2	c_{20}	c_{21}	c_{22}	c_{23}	\ddots		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots				
x_{n-1}	$c_{n-1,0}$	$c_{n-1,1}$					
x_n	$c_{n,0}$						

donde $c_{ij} = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}]$.

Dados los datos de entrada x_0, x_1, \dots, x_n y $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ se pueden calcular estos coeficientes a partir de la fórmula (2) de la siguiente manera:

```
for j = 1 to n do
  for i = 0 to n - j do
     $c_{i,j} \leftarrow (c_{i+1,j-1} - c_{i,j-1}) / (x_{i+j} - x_i)$ 
  end do
end do
```

Este algoritmo puede ser optimizado de modo de almacenar estos coeficientes en un vector en vez de una matriz para ahorrar espacio de almacenamiento.

Propiedades de las diferencias divididas

Veremos a continuación algunos resultados interesantes acerca de las diferencias divididas. El primero es un resultado sobre la permutación de los puntos de interpolación, el segundo sobre el error de interpolación y el tercero y último relaciona las diferencias divididas con las derivadas de orden superior.

Teorema 2. Sean x_0, x_1, \dots, x_n números reales distintos y z_0, z_1, \dots, z_n un reordenamiento de x_0, x_1, \dots, x_n . Entonces $f[z_0, z_1, \dots, z_n] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Demostración. Primero es importante notar que el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n coincide con el polinomio interpolante de grado $\leq n$ basado en los puntos z_0, z_1, \dots, z_n , por unicidad del polinomio interpolante.

Luego, el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en z_0, z_1, \dots, z_n es $f[z_0, z_1, \dots, z_n]$ y el coeficiente de x^n en el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en x_0, x_1, \dots, x_n es $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, y deben ser iguales pues estos dos polinomios son iguales.

□

Teorema 3. Sea p el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en los $n+1$ nodos distintos x_0, x_1, \dots, x_n . Si t es un número real distinto de los nodos, entonces

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j).$$

Demostración. Sea q el polinomio de grado $\leq n+1$ que interpola a f en x_0, x_1, \dots, x_n, t . Por la manera en que se genera el polinomio interpolante en la forma de Newton se sabe que

$$q(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Como q interpola a f en el punto t , se tiene que $q(t) = f(t)$, y entonces:

$$f(t) = p(t) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j),$$

por lo tanto,

$$f(t) - p(t) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \prod_{j=0}^n (t - x_j).$$

□

Teorema 4. Si f es una función n veces continuamente diferenciable en $[a, b]$ y x_0, x_1, \dots, x_n son $n+1$ nodos distintos en $[a, b]$, entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Demostración. Sea p el polinomio de grado $\leq n-1$ que interpola a f en x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Por el teorema del error en el polinomio interpolante de la clase anterior, aplicado a $x = x_n$, se sabe que

$$f(x_n) - p(x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Ahora, por el Teorema 3 se obtiene

$$f(x_n) - p(x_n) = f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j),$$

y por lo tanto

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

□

Interpolación de Hermite

Comenzaremos analizando a las diferencias divididas como función de sus argumentos. Hasta ahora hemos definido a las diferencias divididas para puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n . Consideremos ahora el caso simple de 2 puntos x_0 y x :

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ahora tomando límite para x que tiende a x_0 se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Luego es posible extender la definición de diferencias divididas para números repetidos de la siguiente manera

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Con esta generalización se pueden construir un polinomio interpolante de grado 3, con sólo 2 puntos de interpolación y agregando 2 condiciones de interpolación de la derivada en esos mismos puntos, esto es:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0), & p(x_1) &= f(x_1), \\ p'(x_0) &= f'(x_0), & p'(x_1) &= f'(x_1). \end{aligned}$$

Así se obtiene la siguiente tabla de diferencia dividida

x_0	$f[x_0]$	$f'(x_0)$	$f[x_0, x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	
x_1	$f[x_1]$	$f'(x_1)$		
x_1	$f[x_1]$			

Ahora, el polinomio interpolante basado en esta tabla está dado por

$$p(x) = f[x_0] + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1).$$

En general, el polinomio interpolante que usa las derivadas en un punto se llama **forma de Hermite**.

El siguiente resultado es una generalización del Teorema 4.

Teorema 5. Sean $(n+1)$ nodos distintos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ y $z \in (x_0, x_n)$. Sea f una función definida en $[x_0, x_n]$ que es n veces continuamente diferenciable en $[x_0, x_n]$. Entonces

$$\lim_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (z, z, \dots, z)} f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

Demostración. Por el Teorema 4 se sabe que existe $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Como $x_0 \rightarrow z, x_1 \rightarrow z, \dots, x_n \rightarrow z$ entonces $\xi \rightarrow z$.

Como $f^{(n)}$ es continua entonces

$$\lim_{(x_0, x_1, \dots, x_n) \rightarrow (z, z, \dots, z)} f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \lim_{\xi \rightarrow z} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}.$$

□

El siguiente corolario es una consecuencia directa del teorema anterior.

Corolario 1. Si f es n veces continuamente diferenciable en un entorno del punto x_0 , entonces

$$f[x_0, x_0, \dots, x_0] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Demostración. Trivial, basta tomar $z = x_0$.

□

Ejemplo: determinar el polinomio de grado 4 que interpola los siguientes datos:

$$\begin{aligned} p(1) &= 2, & p'(1) &= 3, \\ p(2) &= 6, & p'(2) &= 7, & p''(2) &= 8. \end{aligned}$$

La tabla de diferencias divididas resulta en

1	2	3	1	2	-1
1	2	4	3	1	
2	6	7	4		
2	6	7			
2	6				

y el polinomio interpolante de Hermite es

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2.$$