Álgebra (II) 2022 Práctico 1

Repaso: números complejos

Recordar que si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su módulo es $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ y su conjugado es $\overline{z} = a - ib$.

Ejercicio 1. Sean $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demostrar que:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$, (b) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, (c) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, (d) $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$,

(e) $z\overline{z} = |z|^2$, (f) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$, (g) $|\overline{z}| = |z|$.

Ejercicio 2. Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$, hallar su módulo y su conjugado.

(a) $(-1+i)(3-2i)$, (b) $i^{131} - i^9 + 1$, (c) $1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$,

(d) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$, (e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i}$, (f) $\dfrac{3i}{1-2i} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}}$.

Cuerpos

Martes 16 de agosto

Ejercicio 3. Sea $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo. Probar los siguientes:

(a) para todo $a \in \Bbbk$ se cumple $a \cdot 0 = 0$ (donde $0 \in \Bbbk$ denota el neutro de la suma).

(b) si a y b son elementos de $\Bbbk$ tales que $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Ejercicio 4. Sea n un número natural, $n \neq 1$. Denotamos por $\mathbb{Z}/n$ al conjunto de clases de números enteros módulo n. Utilizando los resultados de aritmética modular vistos en Álgebra I/Matemática discreta, sabemos que existen operaciones

$$+ \colon \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n, \qquad \bullet \colon \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \longrightarrow \mathbb{Z}/n.$$

Probar que $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ es un cuerpo si y sólo si n es primo.

Ejercicio 5. Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y a, b y c elementos de $\Bbbk$. Probar los siguientes:

(a) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

(b) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

(c) Si $a \neq 0$ y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c$ (*propiedad cancelativa*).

(d) Si $a \neq 0$ entonces para todo $y \in \Bbbk$ existe un único $x \in \Bbbk$ tal que $a \cdot x = y$.

(e) Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $a^n := a \cdots a$ n-veces).

★ **Ejercicio 6.** Decidir si la siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y $a \in \Bbbk$. Si existe un natural n tal que $n\,a = 0$, entonces $a = 0$ (notación: $n\,a := a + \cdots + a$ n-veces). Comparar esto con el **Ejercicio 5 (e)** .
`Sugerencia:` probar que si $a \neq 0$ entonces $n\,a = 0 \iff n\,1 = 0$.

(b) Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo. Si existen $a \in \Bbbk$ no nulo y un natural n tales que $n\,a = 0$, entonces $n\,x = 0$ para todo $x \in \Bbbk$.

Espacios vectoriales y sus subespacios

Jueves 18 de agosto

Ejercicio 7. Sea $(V, +, \bullet)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\Bbbk$. Sean $a, a_1, a_2 \in \Bbbk$ y $v, v_1, v_2 \in V$. Probar los siguientes:

(a) Si $a \bullet v = 0$ entonces $a = 0$ ó $v = 0$.

(b) Si $a \neq 0$ y $a \bullet v_1 = a \bullet v_2$, entonces $v_1 = v_2$.

(c) Si $v \neq 0$ y $a_1 \bullet v = a_2 \bullet v$, entonces $a_1 = a_2$.

Ejercicio 8. Sean $(\Bbbk, +, \cdot)$ un cuerpo y n un número natural. Consideramos el conjunto

$$\Bbbk^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_1, x_2, \dots, x_n \in \Bbbk\}.$$

Usando las operaciones de $\Bbbk$, definimos:

$$\begin{aligned} +\colon \Bbbk^n \times \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \qquad & (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \bullet\colon \Bbbk \times \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^n \qquad & a \bullet (x_1, \dots, x_n) = (a \cdot x_1 \dots, a \cdot x_n). \end{aligned}$$

Verificar que $(\Bbbk^n, +, \bullet)$ es un espacio vectorial.

Ejercicio 9. Sea $(V, +, \bullet)$ un $\Bbbk$-espacio vectorial. Demostrar los siguientes:

(a) Sea -1 el opuesto aditivo de 1 en $\Bbbk$. Para todo $v \in V$, vale que $-v$ (el opuesto aditivo de v en V) es igual a $(-1) \bullet v$.

(b) Dados $v_1, v_2 \in V$, se cumple $-(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$.

(c) Si $a \in \Bbbk$ y $v \in V$, entonces $-(a \bullet v) = (-a) \bullet v = a \bullet (-v)$.

(d) Si $v \neq 0$ y $a_1 \bullet v = a_2 \bullet v$, entonces $a_1 = a_2$.

Ejercicio 10. Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.

(a) $\mathbb{R}^n$, con $v_1 \oplus v_2 = v_1 - v_2$, y el producto usual.

(b) $\mathbb{R}^n$ con la suma usual y $a \odot v = -av$.

(c) $\mathbb{R}^2$, con la suma usual y $a \odot (x, y) = (ax, y)$.

(d) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $\quad a \odot (x, y) = (ax, 0)$.

(e) El conjunto de polinomios con coeficientes reales, con el producto por reales usual, y con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).

Ejercicio 11. Probar que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.
`Nota:` Lo importante en este ejercicio es identificar las operaciones de suma y producto.

Ejercicio 12. Sean $X \neq \emptyset$ un conjunto y $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Consideramos el conjunto

$$V^X = \{ \text{ funciones } : X \longrightarrow V\}.$$

Usando las operaciones de V, definimos:

$$\begin{array}{lll} \oplus\colon V^X \times V^X \longrightarrow V^X, & (f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), & \text{para todo } x \in X. \\ \odot\colon \Bbbk \times V^X \longrightarrow V^X, & (a \odot f)(x) = a \cdot f(x), & \text{para todo } x \in X. \end{array}$$

Verificar que $(V^X, \oplus, \odot)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Martes 23 de agosto

Ejercicio 13. Sea $n \geq 3$. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales.

(a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 \geq 0\}$.

(b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 + x_2 = 0\}$.

(c) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 x_2 = 0\}$.

(d) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ x_1 + x_2 = 1\}$.

(e) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ \pi^{-21} x_1 + \sqrt{17} x_2 + 41 x_3 = 0\}$.

(f) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon\ \text{ existen } a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ tales que } a_1 x_1 + a_2 x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 14. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\Bbbk$. Probar que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subset W_2$ ó $W_2 \subset W_1$.

Ejercicio 15. A continuación enumeramos una familia de conjuntos. Cada uno de ellos es un subconjunto de algún $\mathbb{R}$-espacio vectorial conocido. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial.

(a) $C^1(0,1) = \{$ funciones derivables : $(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

(b) $C[0,1] = \{$ funciones continuas : $[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$.

(c) $\{f \in C[0,1]\colon\ f(1) = 1\}$.

(d) $\{f \in C[0,1]\colon\ f(1) \neq 1\}$.

(e) $\{f \in C[0,1]\colon\ f(1) = f(0)\}$.

(f) $\{f \in C[0,1]\colon\ \int_0^1 f = 0\}$. `Nota:` esto no forma parte de los contenidos de la materia.

Ahora pasamos a un cuerpo arbitrario $\Bbbk$. Fijamos también un número natural n.

(g) $\{(x_1, ..., x_n) \in \Bbbk^n\colon\ x_1 = x_n\}$.

(h) $\{(x_1, ..., x_n) \in \Bbbk^n\colon$ existe $j > 1$ tal que $x_1 = x_j\}$. `Atención:` La respuesta depende de n.

(i) El conjunto de polinomios con coeficientes en $\Bbbk$ de grado par, junto con el polinomio nulo.

(j) El conjunto de polinomios con coeficientes en $\Bbbk$ de grado n, junto con el polinomio nulo.

(k) El conjunto de polinomios con coeficientes en $\Bbbk$ de grado $\leq n$, junto con el polinomio nulo.

Ejercicio 16. Demostrar que los únicos subespacios de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial son $\{0\}$ y $\mathbb{R}$. Probar que esto no es cierto si se mira $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial.

★ **Ejercicio 17. Cociente por un subespacio**.
Sean $(V, +, \cdot)$ un $\Bbbk$-espacio vectorial y $W \subseteq V$ un subespacio. Definimos una relación $\sim$ en V por

$$v \sim w \iff v - w \in W, \qquad v, w \in V.$$

(a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en V.

Denotamos por $V/W = \{[v]\colon\ v \in V\}$ al conjunto de clase de equivalencias de V bajo $\sim$. Usando las operaciones de V, definimos

$$\begin{aligned} &\oplus\colon V/W \times V/W \longrightarrow V/W, && [v] \oplus [w] = [v + w]; \\ &\odot\colon \Bbbk \times V/W \longrightarrow V/W, && a \odot [v] = [a \cdot v]. \end{aligned}$$

Para definir estas operaciones estamos usando representantes en V de los elementos de V/W.

(b) Probar que $\oplus$ y $\odot$ están bien definidas como funciones. Es decir que si $[v] = [v']$ y $[w] = [w']$ entonces $[v + w] = [v' + w']$ y $[a \cdot v] = [a \cdot v']$.

(c) Verificar que $(V/W, \oplus, \odot)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Este espacio se llama *espacio cociente* de V por W.