11.1 SUCESIONES

Se puede considerar que una **sucesión** es una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Aquí se trata exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por lo regular, se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir dando una fórmula para el término n-ésimo. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: Una en la que se aplica la notación anterior, en otra se aplica una fórmula definida y en la tercera se escriben los términos de la sucesión. Observe que la n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$ □

V EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el n-ésimo término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n. El signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por una potencia de (-1). En el ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo, se usa $(-1)^{n-1}$, o bien, $(-1)^{n+1}$. Por lo tanto,

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}$$

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma simple.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el uno de enero del año n.

(b) Si a_n es el n-ésimo dígito en la expansión decimal del número e, entonces $\{a_n\}$ es una sucesión bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 71).

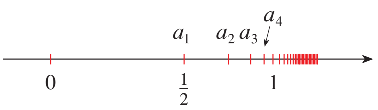


FIGURA 1

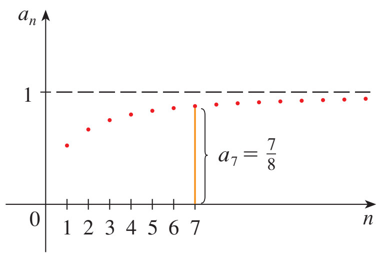


FIGURA 2

Una sucesión como la del ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, se puede representar dibujando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

De acuerdo con la figura 1 o la 2, parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n se incrementa. En efecto, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al incrementar a n. Se indica lo anterior escribiendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

quiere decir que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se incrementa suficientemente. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene como **límite** L, y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si podemos aproximar los términos a_n tanto como se quiera cuando n es suficientemente grande. Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, se dice que la sucesión **converge** (o que **es convergente**). De lo contrario se dice que la sucesión **diverge** (o **es divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de las dos sucesiones que tienen como límite a L.

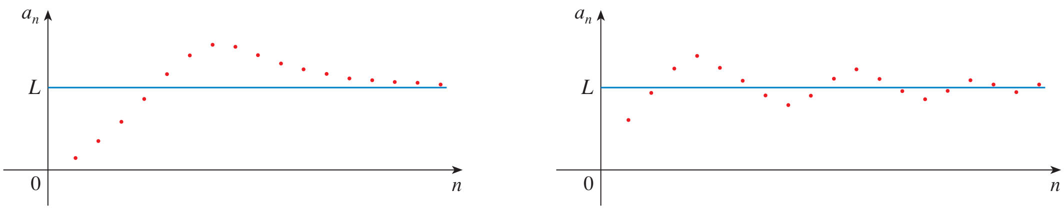


FIGURA 3
Gráficas de las dos sucesiones $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Una versión más exacta de la definición 1 es como se indica a continuación.

2 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por **límite** a L y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un entero correspondiente N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

■ Compare esta definición con la definición 2.6.7.

La definición 2 se ilustra mediante la figura 4, en la cual los términos a_1, a_2, a_3, . . . se localizan en la recta numérica. No importa qué tan pequeño se escoja al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en el intervalo.

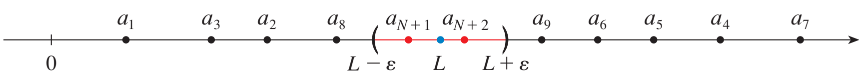


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida, no importa qué tan pequeño se haya escogido ε, pero por lo regular un ε más pequeño requiere una N más grande.

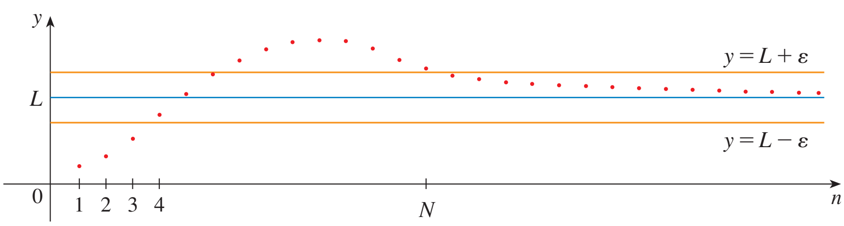


FIGURA 5

La comparación de la definición 2 y la definición 2.6.7 señala que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea entero. En estos términos está el siguiente teorema, el cual se ilustra en la figura 6.

3 TEOREMA Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$, cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

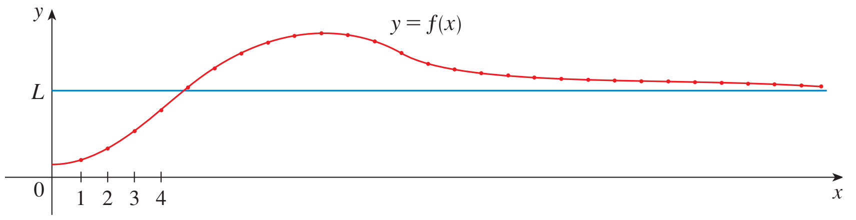


FIGURA 6

En particular, puesto que ya se sabe que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$, cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

4
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n tiende a ser muy grande cuando n lo es, se usa la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La siguiente definición exacta es parecida a la definición 2.6.9.

5 DEFINICIÓN $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M hay un entero N tal que

$$a_n > M \qquad \text{siempre que } n > N$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites que se estudian en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

LEYES DE LOS LÍMITES PARA LAS SUCESIONES.

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

TEOREMA DE LA COMPRESIÓN PARA LAS SUCESIONES.

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

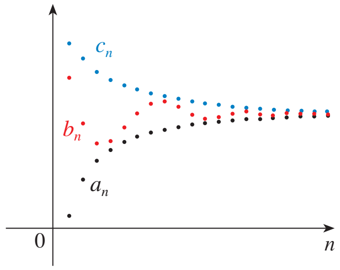


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ es comprimida entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$

Otro hecho útil con respecto a los límites de sucesiones se proporciona en el teorema siguiente cuya demostración se deja como ejercicio (ejercicio 75).

6 TEOREMA Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que se presenta en la sección 2.6: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n y luego se aplican las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

■ Esto demuestra que la conjetura que se hizo antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

En este caso se aplica la ecuación 4 con $r = 1$. □

EJEMPLO 5 Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de l'Hospital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. No obstante, se puede aplicar la regla de l'Hospital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$ □

EJEMPLO 6 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribe los términos de la sucesión obtiene

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

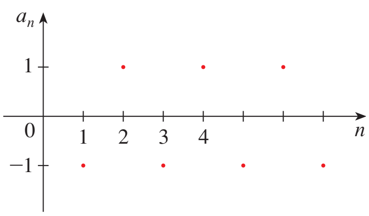


FIGURA 8

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente. □

■ La gráfica de la sucesión del ejemplo 7 se muestra en la figura 9 y apoya la respuesta.

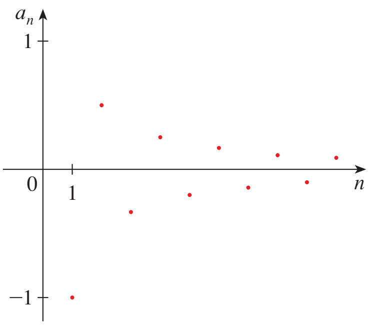


FIGURA 9

EJEMPLO 7 Evaluar $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si es que existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$ □

El siguiente teorema dice que al aplicar una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La prueba se deja como ejercicio 76.

7 TEOREMA Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 8 Encuentre $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 hace posible escribir

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} (\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$ □

V EJEMPLO 9 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

■ GRAFICACIÓN DE SUCESIONES
Algunos sistemas algebraicos computacionales contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 9 se puede dibujar introduciendo las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujando en el modo punto (*dot mode*) iniciando con $t = 1$; se establece el paso t-ésimo igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

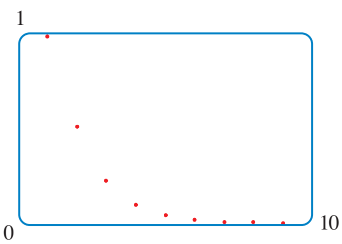


FIGURA 10

SOLUCIÓN Tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$, pero en este caso no hay función correspondiente para usar la regla de l'Hospital ($x!$ no está definida cuando x no es un entero). Se escriben algunos de los términos para ver qué pasa con a_n cuando n es grande:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3}$$

8 $$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}$$

Al parecer, por estas expresiones y la gráfica de la figura 10, los términos son decrecientes y quizá se aproximen a 0. Para confirmarlo, observe que según la ecuación 8

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es cuando mucho 1 porque el numerador es menor que (o igual) al denominador. De este modo

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabe que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión. □

EJEMPLO 10 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Sabe por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.5 que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por lo tanto, si hace $a = r$ y aplica el teorema 3 llega a

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, por lo tanto $0 < |r| < 1$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, debido a eso, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, entonces $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 6. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso de $r = -1$ se muestra en la figura 8.)

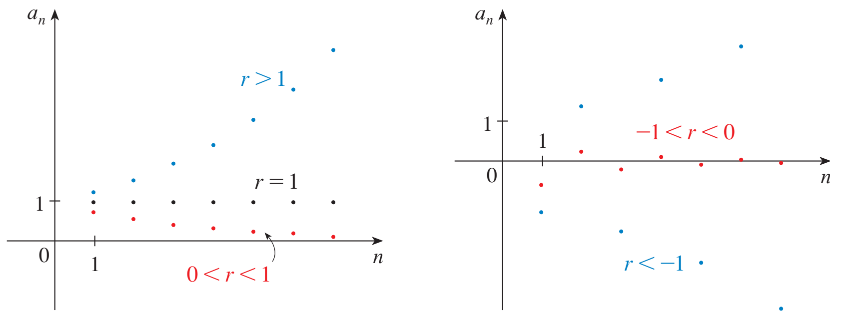


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$

□

Los resultados del ejemplo 10 se resumen para uso futuro como sigue.

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Recibe el nombre de **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 11 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

■ El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

y por lo tanto $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. □

EJEMPLO 12 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Es necesario demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{n}{n^2 + 1}$$

Esta desigualdad equivale a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{n}{n^2 + 1} \quad &\iff \quad (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2 + 1] \\ &\iff \quad n^3 + n^2 + n + 1 < n^3 + 2n^2 + 2n \\ &\iff \quad 1 < n^2 + n \end{aligned}$$

Puesto que $n \geqslant 1$, ya sabe que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por lo tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{cuando } x^2 > 1$$

En estos términos, f es decreciente en $(1, \infty)$ y por eso $f(n) > f(n+1)$. Por lo tanto $\{a_n\}$ es decreciente. □

11 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si hay un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Se dice que está **acotada por abajo** si hay un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, en tal caso $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo $(a_n > 0)$, pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Ya sabe que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ cumple con $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, pero es divergente del ejemplo 6] y no toda sucesión monótona es convergente $(a_n = n \to \infty)$. Pero si una sucesión es tanto acotada *como* monótona, entonces tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, después los términos están forzados a aglomerarse y a aproximarse a un número L.

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completitud** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leqslant M$ para toda x en S), luego S tiene una **cota superior mínima** b. [Esto quiere decir que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, por lo tanto $b \leqslant M$]. El axioma de completitud expresa el hecho de que no hay brecha o agujero en la recta de los números reales.

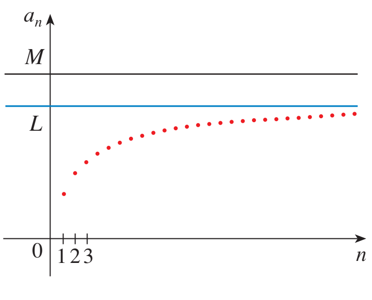


FIGURA 12

12 **TEOREMA DE LA SUCESIÓN MONÓTONA** Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Puesto que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ posee una cota superior. De acuerdo con el axioma de completitud, tiene una cota mínima superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (puesto que L es la cota superior *mínima*). Por lo tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para un entero } N$$

Pero la sucesión es creciente de modo que $a_n \geqslant a_N$ para toda $n > N$. En estos términos, si $n > N$

$$a_n > L - \varepsilon$$

de tal manera
$$0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$$

puesto que $a_n \leqslant L$. Así que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{cuando } \ n > N$$

así $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la cota inferior más grande) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente. □

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión que es creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 13 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la relación de recurrencia

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 & a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5 \\ a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 & a_5 = 5.75 & a_6 = 5.875 \\ a_7 = 5.9375 & a_8 = 5.96875 & a_9 = 5.984375 \end{array}$$

■ Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase página 77 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, aplique la inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es válido para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si supone que se cumple para $n = k$, después tiene

$$a_{k+1} > a_k$$

de modo que
$$a_{k+1} + 6 > a_k + 6$$

y
$$\tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$$

Por esto,
$$a_{k+2} > a_{k+1}$$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es válida para $n = k + 1$. Por lo tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego de verificar que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Puesto que la sucesión es creciente, se sabe que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Se tiene que $a_1 < 6$, de modo que la aseveración es válida para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$. En tal caso

$$a_k < 6$$

de este modo

$$a_k + 6 < 12$$

$$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Por eso,

$$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra por inducción matemática que $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que sabe que $L = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$ existe, puede aplicar la relación de recurrencia para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

■ Una demostración de este hecho se pide en el ejercicio 58.

Como $a_n \to L$, se infiere que $a_{n+1} \to L$, también (cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, también). De este modo

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación, determina que $L = 6$, tal como había predicho. □

11.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Proporcione dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3–8 Proporcione los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = 1 - (0.2)^n$

4. $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

6. $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$

8. $a_1 = 4, a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

9–14 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

9. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right\}$

10. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \dots\}$

12. $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots\right\}$

14. $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \dots\}$

15. Haga una lista de los seis primeros términos de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

¿Parece que la sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo.

16. Haga una lista de los nueve primeros términos de la sucesión $\{\cos(n\pi/3)\}$. ¿Parece que esta sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo; si no es así, explique por qué.

17–46 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

17. $a_n = 1 - (0.2)^n$

18. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

19. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

20. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

21. $a_n = e^{1/n}$

22. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

23. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

24. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$

26. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

27. $a_n = \cos(n/2)$

28. $a_n = \cos(2/n)$

29. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

30. $\{\arctan 2n\}$

31. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

32. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

33. $\{n^2 e^{-n}\}$

34. $\{n \cos n\pi\}$

35. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

36. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

37. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

38. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

39. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

41. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

42. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

43. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\}$

44. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

45. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

46. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

47–53 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si ésta es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, deduzca el valor del límite a partir de la gráfica, y luego demuestre su conjetura. (Véase una advertencia sobre las gráficas de sucesiones en la nota al margen de la página 680).

47. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

48. $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{n}\right)$

49. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

50. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

51. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

52. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

53. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

54. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

55. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés, compuesto anualmente, por lo tanto n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique

56. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo para $a_1 = 25$. Conjeture con respecto al tipo de sucesión.

57. ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{nr^n\}$?

58. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} a_n$$

(b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define con $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si supone que $\{a_n\}$ es convergente, calcule el límite.

59. Suponga que sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir con respecto al valor del límite?

60–66 Determine si la sucesión es creciente, decreciente, o no es monótona. ¿Está acotada la sucesión?

60. $a_n = (-2)^{n+1}$

61. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

62. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

63. $a_n = n(-1)^n$

64. $a_n = ne^{-n}$

65. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

66. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

67. Determine el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right\}$$

68. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que sí existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

69. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y que $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

70. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

cumple con $0 < a_n \leqslant 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre el límite.

71. (a) Fibonacci planteó el problema siguiente: Suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tiene un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3(c).
(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ y demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine el límite.

72. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \ldots,$ $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre el inciso (a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y calculando el valor de L con cinco cifras decimales.

73. (a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Con una gráfica de la sucesión del inciso (a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

74. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

75. Demuestre el teorema 6.
[*Sugerencia:* Aplique la definición 2 o el teorema de la compresión].

76. Demuestre el teorema 7

77. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$

78. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
(a) Demuestre que si $0 \leqslant a < b$, en tal caso

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.
(c) Aplique $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ en el inciso (b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.
(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.
(e) Mediante los incisos (c) y (d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.
(f) Aplique el teorema 12 para demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$. (El límite es e. Vea la ecuación 3.6.6)

79. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso de modo que, en general,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.
(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

80. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

81. El tamaño de una población de peces inalterada está modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.
(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, después los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.
(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
(c) Mediante el inciso (b) demuestre que si $a > b$, en seguida $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, en otras palabras, la población muere.
(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, por lo tanto $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Asimismo, demuestre que si $p_0 > b - a$, en tal caso $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO — CAS SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación logística en diferencias**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para poder trabajar con los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación logística en diferencias de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, donde el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿Se estabilizará en un valor límite? ¿Cambiará de manera cíclica? O bien, ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los primeros n términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente.

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Dibuje las sucesiones. ¿Convergen? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor de p_0 escogido? ¿Depende del valor elegido de k?
2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?
3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?
4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos en ciertas condiciones.

11.2 SERIES

Si trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtiene una expresión de la forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que se denomina **serie infinita**, o sólo **serie**, y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero, ¿tiene sentido hablar de suma de una cantidad infinita de términos?

Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si empieza a sumar los términos, obtiene sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . y después del n-ésimo término, llega a $n(n + 1)/2$, lo cual se vuelve muy grande cuando n se incrementa.

Sin embargo, si empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. En la tabla se puede ver que cuando suma más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en *Presentación preliminar del cálculo* en la página 7). De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Por eso es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Se aplica una idea similar para determinar si una serie general (1) tiene o no tiene una suma. Considere las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si existe $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ (como un número finito), después, como en el ejemplo anterior, se llama suma de la serie infinita $\sum a_n$.

2 DEFINICIÓN Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote con s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n \to \infty} s_n = s$ existe como un número real, entonces la serie $\sum a_n$ se dice **convergente** y se escribe

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si no es así, la serie se dice **divergente.**

Así, la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Cuando escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie puede llegar tan cerca como quiera al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

■ Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Para determinar esta integral integre desde 1 hasta t y hacemos que $t \to \infty$. En el caso de series, sume desde 1 hasta n y hacemos que $n \to \infty$.

EJEMPLO 1 Un ejemplo importante de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

■ La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 1. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, después, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

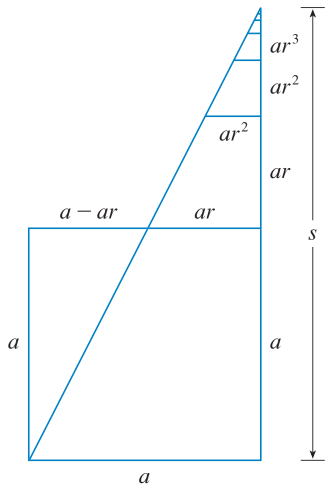


FIGURA 1

Cada término se obtiene a partir del término precedente y se multiplica por la razón común r. (Ya se consideró el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ de la página 687).

Si $r = 1$, en consecuencia $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Al restar estas ecuaciones obtiene

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\boxed{3} \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $-1 < r < 1$, sabe por (11.1.9) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Por esto, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leqslant -1$ o bien, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y de ese modo, según la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por lo tanto, la serie geométrica diverge en esos casos. □

El resumen de los resultados del ejemplo 1 es como se señala a continuación.

■ En palabras: la suma de la serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

$\boxed{4}$ La serie geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$

es convergente si $|r| < 1$ y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

V EJEMPLO 2 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente según (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$ □

■ ¿Qué se quiere dar a entender en realidad cuando se dice que la suma de la serie del ejemplo 2 es 3? Naturalmente, no puede sumar uno más uno una cantidad infinita de términos. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, se acerca tanto como quiera al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n, y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

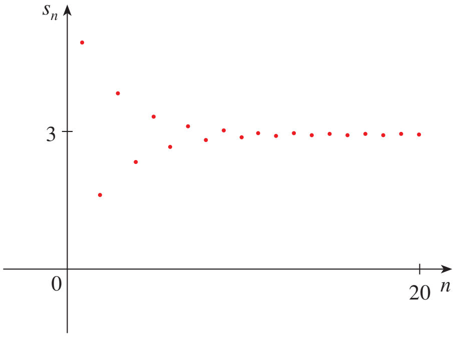


FIGURA 2

EJEMPLO 3 ¿Es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$?

SOLUCIÓN Escriba el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

■ Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Identifique esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con (4). □

V EJEMPLO 4 Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón de enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término tiene una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Debido a eso,

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$ □

EJEMPLO 5 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término es $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$). De este modo,

TEC En Module 11.2 se estudia una serie que depende del ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Puesto que $|r| = |x| < 1$, converge, y de acuerdo con (4) se tiene

5 $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$ □

EJEMPLO 6 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN No es una serie geométrica, de modo que regrese a la definición de una serie convergente y calcule las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Puede simplificar esta expresión si la descompone en fracciones parciales

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(véase sección 7.4). Así que,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

■ Observe que los términos se cancelan por pares. Éste es un ejemplo de una **suma telescópica**. Debido a las cancelaciones, la suma se colapsa, al igual que un telescopio de pirata que se colapsa, en dos términos.

y de este modo
$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ □

■ En la figura 3 se ilustra el ejemplo 6 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Refiérase a los ejercicios 62 y 63, en donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 6.

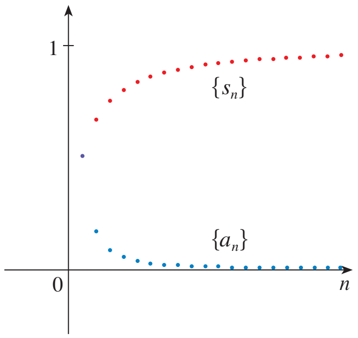


FIGURA 3

V EJEMPLO 7 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular, es conveniente considerar las sumas parciales $s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, \ldots$ y demostrar que se hacen grandes.

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned} s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

En forma similar, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, y, en general,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

■ El método usado en el ejemplo 7 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica es divergente. □

6 TEOREMA Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En tal caso, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Puesto que $\Sigma\, a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}\\ &= s - s = 0\end{aligned}$$ □

NOTA 1 Con cualquier *serie* $\Sigma\, a_n$ se asocian *dos sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente, entonces el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s, (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no puede concluir que $\Sigma\, a_n$ es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma\, 1/n$ tiene $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero ya demostró en el ejemplo 7 que $\Sigma\, 1/n$ es divergente.

7 LA PRUEBA DE LA DIVERGENCIA Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La prueba de la divergencia se infiere del teorema 6 porque si la serie no es divergente, entonces es convergente y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 8 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

De modo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

NOTA 3 Si encuentra que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sabe que $\Sigma\, a_n$ es divergente. Si tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no sabe *nada* con respecto a la convergencia o la divergencia de $\Sigma\, a_n$. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente

8 TEOREMA Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes, entonces también lo son las series $\Sigma\, ca_n$ (donde c es una constante), $\Sigma\,(a_n + b_n)$ y $\Sigma\,(a_n - b_n)$, y

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte (ii) del teorema 8:

Sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)$$

y, a través de la ecuación 5.2.10, tiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$ □

EJEMPLO 9 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right)$.

SOLUCIÓN La serie $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

En el ejemplo 6 encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Así, por el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n}\right) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 3\cdot 1 + 1 = 4$$ □

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que es capaz de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n}{n^3 + 1}$$

es convergente. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

se infiere que la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ es convergente. Asimismo, si sabe que la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

es también convergente.

11.2 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 Calcule por lo menos 10 sumas parciales de las series. Dibuje tanto la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie? ¿Convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique la razón.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{(n+1)}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

9. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
(b) Diga si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

10. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–20 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

11. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

13. $-3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

14. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

21–34 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$

23. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

35–40 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma extensible (como en el ejemplo 6). Si es convergente, encuentre su suma.

35. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

41–46 Exprese el número como una razón de enteros.

41. $0,\overline{2} = 0.2222\ldots$

42. $0.\overline{73} = 0.73737373\ldots$

43. $3.\overline{417} = 3.417417417\ldots$

44. $6.2\overline{54} = 6.2545454\ldots$

45. $1.53\overline{42}$

46. $7.\overline{12345}$

47–51 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

49. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

52. Puesto que la serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

CAS **53–54** Aplique el comando de las fracciones parciales en su sistema algebraico computacional para determinar la suma parcial, y luego aplique esta expresión para determinar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el sistema algebraico a la suma de la serie.

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2+n)^3}$

54. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$

55. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

56. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

57. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, los que reciben el dinero también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador*. En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, naturalmente, $c + s = 1$.

(a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: El gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan el principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

58. Una cierta pelota tiene la característica de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.

(a) Suponga que la pelota continúa rebotando de manera indefinida y calcule la distancia total que recorre. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos).

(b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja.

(c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

59. ¿Cuál es el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2?$$

60. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

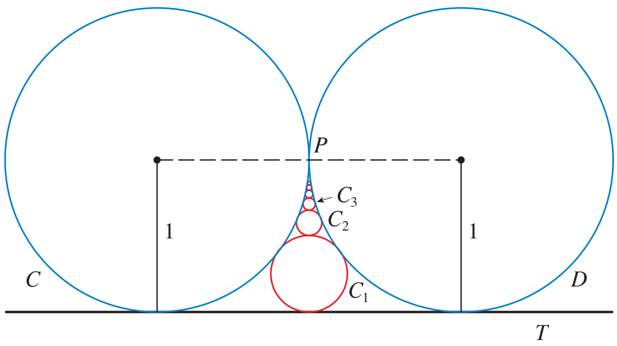
61. En el ejemplo 7 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se resume otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Vea el ejercicio 4.3.76.)

Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

62. Dibuje las curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determine las áreas entre las curvas sucesivas y mediante geometría demuestre el hecho siguiente, demostrado en el ejemplo 6,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

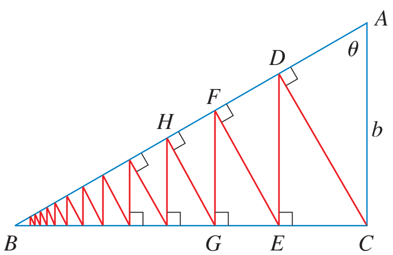
63. En la figura se ilustran dos círculos C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es el círculo que toca C, D y T; C_2 es el círculo que toca C, D y C_1; C_3 es el círculo que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de círculos $\{C_n\}$. Determine una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 6.



64. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este procedimiento continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



65. ¿Qué es lo que está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\
&= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\
&= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\
&= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1
\end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada").

66. Suponga que se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \neq 0)$ es una serie convergente. Demuestre que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

67. Demuestre la parte (i) del teorema 8.

68. Si $\sum a_n$ es divergente y $c \neq 0$, demuestre que $\sum ca_n$ es divergente.

69. Si $\sum a_n$ es convergente y $\sum b_n$ es divergente, demuestre que la serie $\sum (a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: aplique el razonamiento de contradicción.]

70. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, ¿necesariamente $\sum (a_n + b_n)$ es divergente?

71. Suponga que una serie $\sum a_n$ consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué $\sum a_n$ debe ser convergente.

72. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es válido.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1} f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

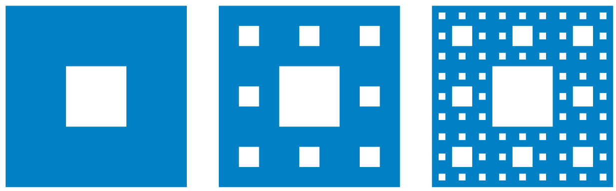
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1} f_{n+1}} = 2$

73. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en $[0, 1]$ después de que todos esos intervalos se han eliminado.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) El **tapete de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción). Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área del tapete de Sierpinski es cero.



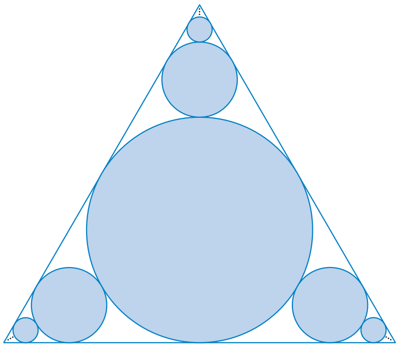
74. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora adivine el límite de la sucesión.
(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 escribiendo $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume la serie.

75. Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Mediante el patrón conjeture una fórmula para s_n.
(b) Aplique la inducción matemática para demostrar su conjetura.
(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule la suma

76. En la figura hay una cantidad infinita de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca a otros círculos y a los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 LA PRUEBA DE LA INTEGRAL Y ESTIMACIONES DE LAS SUMAS

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Se es capaz de lograrlo en el caso de series geométricas y las series $\Sigma\ 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil calcular $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por lo tanto, en las siguientes secciones se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) El primer método utiliza integrales impropias.

Empiece por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada mediante una computadora de los valores, dados en el margen sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Se confirma esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el extremo derecho del intervalo de este modo, la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

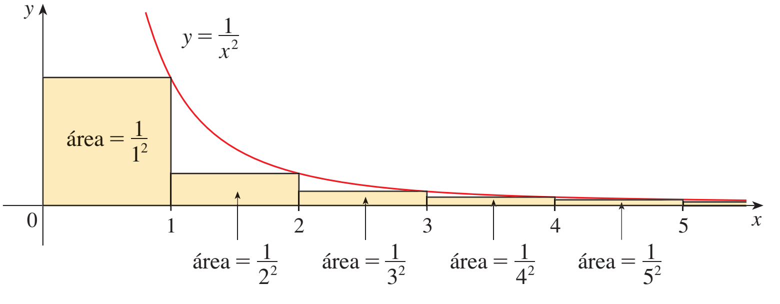


FIGURA 1

Si excluye el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 descubrió que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. De modo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

En estos términos, las sumas parciales están acotadas. También sabe que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por lo tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, y de esa manera la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15].

Ahora estudie la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

La tabla de valores de s_n hace pensar en que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, de modo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Una vez más use una imagen para confirmarlo. En la figura 2 se ilustra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda por *encima* de la curva.

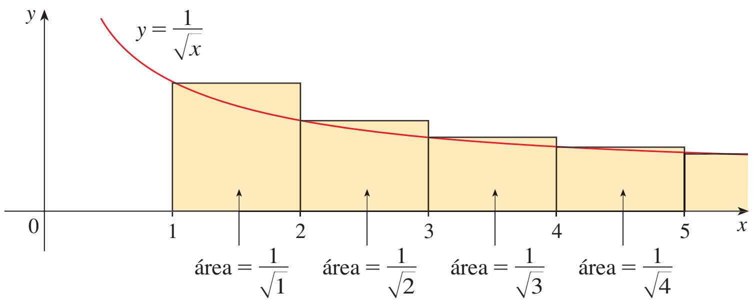


FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el extremo *izquierdo* del intervalo. Así, la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Pero según la sección 7.8, esta integral impropia es divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Por eso, la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series, se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

PRUEBA DE LA INTEGRAL Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. En tal caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(i) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{use} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea siempre decreciente. Lo importante es que f sea decreciente *por último*, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. En consecuencia $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

EJEMPLO 1 Aplique la prueba de la integral para saber si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ de modo que aplique la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $\int_1^{\infty} 1/(x^2 + 1)\,dx$ es una integral convergente y si es así, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\Sigma\, 1/(n^2 + 1)$ es convergente. □

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p es la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergente?

SOLUCIÓN Si $p < 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, entonces la función $f(x) = 1/x^p$ evidentemente es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Según el capítulo 7 [véase (7.8.2)],

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leqslant 1$$

■ Para usar la prueba integral necesita evaluar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ y, por lo tanto, tiene que hallar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, de modo que también necesita otras pruebas para convergencia.

Se infiere de la prueba de la integral que la serie $\Sigma\, 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leqslant 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 7 de la sección 11.2). □

La serie del ejemplo 2 se llama **serie p**. Es importante en el resto de este capítulo, de modo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

1 La serie p, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

EJEMPLO 3
(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.
(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$. □

NOTA *No* debe inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{en tanto que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

V EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, de modo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Por lo tanto, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se infiere que f es decreciente cuando $x > e$ y así aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Puesto que esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma\,(\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral. □

ESTIMACIÓN DE LA SUMA DE UNA SERIE

Suponga que pudo aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie $\Sigma\,a_n$ es convergente y que quiere encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Claro, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo, necesita estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

11.4 PRUEBAS POR COMPARACIÓN

En las pruebas por comparación, la idea es comparar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

recuerde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, la cual es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ por lo tanto, es convergente. Como la serie (1) es similar a la serie convergente, se presiente que también debe ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada (1) tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por lo tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, la cual es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede hacer para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica sólo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si tiene una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie conocida *convergente*, por lo tanto la serie también es convergente. La segunda parte establece que si empieza con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie *divergente* conocida, en tal caso también es divergente.

PRUEBA POR COMPARACIÓN Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos.
(i) Si $\Sigma\, b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces $\Sigma\, a_n$ es convergente.
(ii) Si $\Sigma\, b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces $\Sigma\, a_n$ es divergente.

■ Es importante estar atento a la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números, y una serie es una suma. Con toda serie $\Sigma\, a_n$ hay dos sucesiones asociadas: la sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sea
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Puesto que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Asimismo, $t_n \to t$, así que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$, $s_n \leqslant t_n$. De este modo, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto quiere decir que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada superiormente, por el teorema de sucesiones monótonas la serie $\Sigma\, a_n$ es convergente.

(ii) Si $\Sigma\, b_n$ es divergente, después $t_n \to \infty$ (puesto que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$ de modo que $s_n \geqslant t_n$. Así que $s_n \to \infty$. Por lo tanto $\Sigma\, a_n$ diverge. □

Naturalmente, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\Sigma\, b_n$ para los fines de la comparación. La mayor parte de las veces se usan las series:

La serie estándar se usa con la prueba por comparación

- p [$\Sigma\, 1/n^p$ que convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)] o bien,
- series geométricas [$\Sigma\, ar^{n-1}$ es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)].

V EJEMPLO 1 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grandes el término dominante en el denominador es $2n^2$ de modo que compare la serie dada con la serie $\Sigma\ 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho). Ya sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso (i) de la prueba por comparación. □

NOTA 1 La condición $a_n \leqslant b_n$ o bien, $a_n \geqslant b_n$ de la prueba por comparación es para toda n, es necesario comprobar sólo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es un entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Lo anterior se ilustra con el ejemplo siguiente.

V EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie se probó (usando la prueba de la integral) en el ejemplo 4 de la sección 11.3, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geqslant 3$ y de esa manera

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

Ya sabe que $\Sigma\ 1/n$ es divergente (serie p con $p = 1$). De esta manera la, serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación. □

NOTA 2 Los términos de la serie que se está probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, en tal caso la prueba por comparación no se aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\ b_n = \Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma\ 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tal caso se puede aplicar la prueba siguiente.

PRUEBA POR COMPARACIÓN EN EL LÍMITE Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, en seguida ambas series convergen o ambas divergen.

■ Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

DEMOSTRACIÓN Sea m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, hay un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } \; n > N$$

y así

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si $\Sigma\, b_n$ es convergente también lo es $\Sigma\, Mb_n$. Así $\Sigma\, a_n$ es convergente según el inciso (i) de la prueba por comparación. Si la serie $\Sigma\, b_n$ diverge también $\Sigma\, mb_n$ es divergente y por el inciso (ii) de la prueba por comparación la serie $\Sigma\, a_n$ diverge. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba por comparación en el límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad\qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Puesto que existe este límite y $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica convergente, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto recomienda efectuar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad\qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Puesto que $\Sigma\, b_n = 2\,\Sigma\, 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

Observe que al probar muchas series se encuentra una serie conveniente $\Sigma\, b_n$ conservando sólo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

ESTIMACIÓN DE SUMAS

Si ha usado la prueba por comparación para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente comparando con la serie $\Sigma\, b_n$, entonces se puede hacer una estimación de la serie $\Sigma\, a_n$ al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, considere el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación $\Sigma\, b_n$ considere el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Puesto que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, $R_n \leqslant T_n$. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie p, estime su residuo T_n como en la sección 11.3. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie geométrica, por lo tanto T_n es la suma de una serie geométrica y puede sumarla exactamente (véanse ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, sabe que R_n es menor que T_n.

V EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime el error de esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n de la serie de comparación $\Sigma\, 1/n^3$ ya se estimó en el ejemplo 5 de la sección 11.3 por medio de la estimación del residuo para la prueba de la integral. Allí se encontró que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por lo tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005. □

11.4 EJERCICIOS

1. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que se sabe que $\Sigma\, b_n$ es convergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, qué puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

2. Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que se sabe que $\Sigma\, b_n$ es divergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir de $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿que puede decir con respecto a $\Sigma\, a_n$? ¿Por qué?

3–32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3 + 1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4 - 1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{n\sqrt{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3 + 10^n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + 3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 1}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{3n^4 + 1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 1}{n4^n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n - 1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n\sqrt{n}}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + 3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 4^n}{1 + 3^n}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4^n}{n + 6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 2}}{2n^2 + n + 1}$

22. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 2n}{(1 + n^2)^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 5n}{n^3 + n + 1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n + n^2}{\sqrt{1 + n^2 + n^6}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 5}{\sqrt[3]{n^7 + n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 Mediante la suma de los primeros 10 términos, obtenga un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 2^n}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + 1)3^n}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2, . . . , 9) es que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

38. ¿Para qué valores de p la serie $\Sigma_{n=2}^{\infty}\, 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y $\Sigma\, a_n$ converge, por lo tanto $\Sigma\, a_n^2$ también converge.

40. (a) Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que $\Sigma\, b_n$ es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces $\Sigma\, a_n$ también es convergente.
(b) Mediante el inciso (a) demuestre que la serie converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$

41. (a) Suponga que $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series con términos positivos y que $\Sigma\, b_n$ es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

entonces $\Sigma\, a_n$ también es divergente.
(b) Use el inciso (a) para demostrar que la serie es divergente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, pero $\Sigma\, a_n$ converge. [Compare con el ejercicio 40.]

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, en tal caso $\Sigma\, a_n$ es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\Sigma\, a_n$ es convergente, por lo tanto $\Sigma \ln(1 + a_n)$ es convergente.

45. Si $\Sigma\, a_n$ es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma\, a_nb_n$ también es convergente?

11.5 SERIES ALTERNANTES

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta este momento se aplican sólo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar a series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes*, cuyos términos se alternan en signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con los ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o bien,} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (En efecto, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente establece que si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, en este caso la serie converge.

PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

cumple con

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para toda } n$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

entonces la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración vea la figura 1, la cual es una representación de la idea en la que se apoya la demostración. Primero dibuje $s_1 = b_1$ en una recta numérica. Para determinar s_2 reste b_2, de modo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 sume b_3, de modo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, se observa que las sumas parciales oscilan hacia un lado y hacia el otro. Puesto que $b_n \to 0$, los pasos siguientes se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ En estos términos, es posible que ambas converjan en el mismo número s, el cual es la suma de la serie. Por consiguiente, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

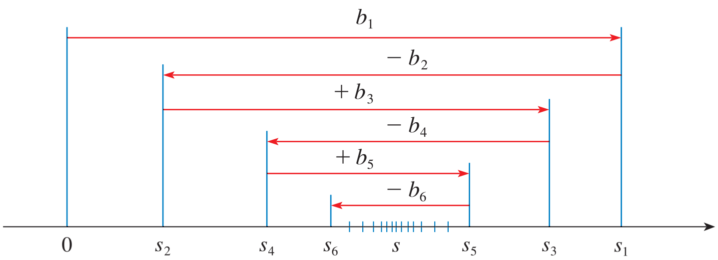


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero considere las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{puesto que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{puesto que } b_4 \leqslant b_3$$

En general, $\quad s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2} \qquad \text{puesto que } b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto, $\quad 0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$

Pero también puede escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Todos los términos entre paréntesis son positivos, de modo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por lo tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares se incrementa y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona es convergente. Llame s a su límite, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Ahora calcule el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[según la condición ii)]} \\ &= s\end{aligned}$$

Puesto que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen en s, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (véase el ejercicio 80(a) de la sección 11.1), por lo que la serie es convergente. □

■ En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n van en zigzag dentro del límite, el cual al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase ejercicio 36).

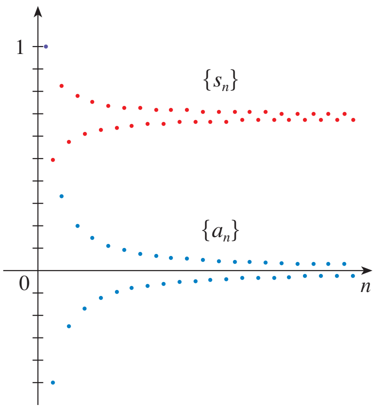


FIGURA 2

V EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

cumple con

$$\text{(i)}\ \ b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

V EJEMPLO 2 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición (ii) no se cumple. En cambio, vea el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n - 1}$$

Este límite no existe, de modo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, de modo que trate de comprobar las condiciones (i) y (ii) de la prueba de la serie alternante.

Al contrario de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3 + 1)$ sea decreciente. Sin embargo, si considera la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3 + 1)$, encuentre que

$$f'(x) = \frac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$$

Puesto que se consideran sólo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. De esta manera, f es decreciente en el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto quiere decir que $f(n + 1) < f(n)$ y, por lo tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

■ En lugar de verificar la condición (i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 12 de la sección 11.1.

La condición (ii) se comprueba rápidamente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Por esto, la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

ESTIMANDO SUMAS

Una suma parcial de s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no es muy utilizado, a menos que estime la exactitud de la aproximación. El error generado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

■ Desde el punto de vista de la geometría, puede ver por qué el teorema de estimación para series alternantes es verdadero al examinar la figura 1 en la página 710. Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$, y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

TEOREMA DE ESTIMACIÓN PARA SERIES ALTERNANTES Si $s = \Sigma\, (-1)^{n-1} b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{(i)}\;\; 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\;\; \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces $\qquad |R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$

DEMOSTRACIÓN Sabemos de la demostración para la prueba de series alternantes que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. Se infiere que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$ □

V EJEMPLO 4 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con tres cifras decimales. (Por definición, $0! = 1$.)

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{de modo que} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \quad \text{conforme} \quad n \to \infty$$

Para ver cuántos términos necesitamos usar en la aproximación, escriba los primeros términos de la serie

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que $$b_7 = \tfrac{1}{5040} < \tfrac{1}{5000} = 0.0002$$

y $$s_6 = 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} \approx 0.368056$$

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, se sabe que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0.0002$$

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, de modo que tenemos $s \approx 0.368$ que es correcta hasta la tercera cifra decimal. □

■ En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, de modo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

NOTA La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es en general válida sólo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otros tipos de series.

11.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
(b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
(c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2–20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21–22 Calcule las 10 primeras sumas parciales de la serie y dibuje tanto la sucesión de términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. Estime el error al usar la décima suma parcial para aproximarse a la suma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3}}$

23–26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie necesita sumar para determinar la suma con la exactitud señalada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{6}}$ $(|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\,5^{n}}$ $(|\text{error}| < 0.0001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{10^{n} n!}$ $(|\text{error}| < 0.000005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n e^{-n}$ $(|\text{error}| < 0.01)$

27–30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie que sea correcta hasta la cuarta cifra decimal.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5}}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} n}{8^{n}}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^{2}}{10^{n}}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3^{n} n!}$

31. ¿Es la 50a. suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una estimación excesiva o una subestimación de la suma total? Explique.

32–34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p}}$ **33.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^{p}}{n}$

35. Demuestre que es divergente la serie $\Sigma\,(-1)^{n-1} b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par. ¿Por qué no se aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

(a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Según el ejercicio 40 de la sección 11.3

$$h_n - \ln n \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

y, por lo tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso (a), demuestre que $s_{2n} \to \ln 2$ cuando $n \to \infty$.

11.6 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y LAS PRUEBAS DE LA RAZÓN Y LA RAÍZ

Dada una serie $\Sigma\, a_n$, considere las series correspondientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

■ Hay pruebas para la convergencia para series con términos positivos y para series alternantes. Pero, ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3, se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda a veces en tales casos.

1 DEFINICIÓN Una serie $\Sigma\, a_n$ es llamada **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\Sigma\, |a_n|$ es convergente.

Observe que si $\Sigma\, a_n$ es una serie con términos positivos, entonces $|a_n| = a_n$ y por lo tanto la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2}} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$). □

EJEMPLO 2 Ya sabe que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 1 de la sección 11.5), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por lo tanto, es divergente. □

2 DEFINICIÓN Una serie $\Sigma\, a_n$ se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. En estos términos, es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. No obstante, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta significa convergencia.

3 TEOREMA Si una serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, entonces es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o bien, $-a_n$. Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\Sigma\, |a_n|$ es convergente, así que $\Sigma\, 2|a_n|$ es convergente. Por lo tanto, según la prueba de la comparación, $\Sigma\, (a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por lo tanto, convergente. □

■ En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

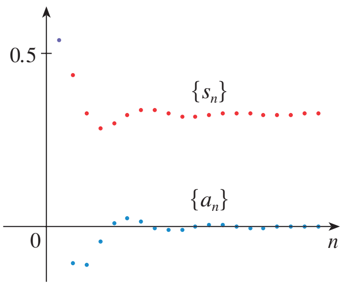


FIGURA 1

V EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie posee términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los siguientes tres son negativos, y los otros tres que siguen son positivos. Los signos no siguen un patrón regular.) Entonces puede aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Puesto que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, entonces

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabemos que $\Sigma\, 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por lo tanto, $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ es convergente según la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, debido a eso, convergente de acuerdo con el teorema 3. □

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente

PRUEBA DE LA RAZÓN

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, en consecuencia, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, o bien, $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la regla de comparación no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de $\Sigma\, a_n$.

DEMOSTRACIÓN

(i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Puesto que $L < 1$, puede escoger un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

que equivale,

$$\boxed{4} \qquad |a_{n+1}| < |a_n|\, r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

Al hacer a n sucesivamente igual a N, $N + 1$, $N + 2$, . . . en (4), se obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

y, en general,

$$\boxed{5} \qquad |a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. De modo que la desigualdad 5), junto con la prueba de la comparación demuestran que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por lo tanto, $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$, o bien, $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, entonces el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ eventualmente será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \qquad \text{siempre que } \; n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$$

En consecuencia, $\Sigma\, a_n$ es divergente según la prueba de la divergencia. □

NOTA La parte (iii) de la regla de comparación establece que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\Sigma\, 1/n^2$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

pero para la serie divergente $\Sigma\, 1/n$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. En este caso, la regla de comparación no funciona, razón por la cual debe aplicar otra prueba.

■ ESTIMACIÓN DE SUMAS

En las tres últimas secciones estudió varios métodos para estimar la suma de la serie, y el método dependía de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la regla de comparación? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, en este caso aplique los métodos especiales que se explican en el ejercicio 34.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la regla de comparación con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

De esta manera, de acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente. □

V EJEMPLO 5 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ es convergente.

SOLUCIÓN Puesto que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no necesita los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Puesto que $e > 1$, la serie dada es divergente según la prueba de la razón. □

NOTA La prueba de la razón funciona en el ejemplo 5, pero un método más fácil es la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geqslant n$$

se infiere que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, la serie dada es divergente según la prueba de la divergencia.

Es conveniente aplicar la siguiente prueba cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la prueba de la razón y se deja en el ejercicio 37.

PRUEBA DE LA RAÍZ

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por lo tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces la parte (iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la prueba de la razón no intente con la prueba de la raíz porque L será una vez más 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la prueba de la razón porque también fallará.)

V EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

Así, la serie dada converge según la prueba de la raíz. □

REORDENAMIENTOS

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta si las sumas infinitas se comportan como sumas finitas.

Naturalmente, si reordena los términos en una suma finita, pues el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. Con **reordenamiento** de una serie infinita $\Sigma\, a_n$ se da a entender una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ podría ser el siguiente:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie absolutamente convergente de suma s,
en tal caso cualquier reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar, con lo cual la suma será distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alterna

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Véase ejercicio 36 en la sección 11.5.) Si multiplica la serie por $\frac{1}{2}$, obtiene

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si inserta ceros entre los términos de esta serie, tiene

■ Sumar ceros no afecta la suma de la serie; se repite cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales, pero el límite es el mismo.

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Ahora sume la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que la serie en (8) consta de los mismos términos que en (6), pero reordenados de modo que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, por lo tanto hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 40.

11.6 EJERCICIOS

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie $\Sigma\, a_n$ en cada uno de los casos siguientes?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–28 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1.1)^n}{n^4}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

25. $$1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$$

26. $$\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

29. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}\, a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ es convergente o divergente.

30. Una serie $\Sigma\, a_n$ está definida de acuerdo con las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}}\, a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ converge o diverge.

31. ¿Para cuáles de las series siguientes la prueba de la razón no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

33. (a) Demuestre que $\Sigma_{n=0}^{\infty}\, x^n/n!$ converge para toda x.
(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

34. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, de modo que $\Sigma\, a_n$ es convergente según la prueba de la razón. Como es lo usual, R_n sea el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, 1/n2^n$. Con ayuda del ejercicio 34 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Determine un valor de n de tal modo que s_n no difiera 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

36. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Aplique el ejercicio 34 para estimar el error.

37. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para la parte (i):* tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y aplique el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ cuando $n \geqslant N$.]

38. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de la India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.
(a) Verifique que la serie sea convergente.
(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa sólo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

39. Dada cualquier serie $\Sigma\, a_n$ define una serie $\Sigma\, a_n^+$ si todos sus términos son positivos de $\Sigma\, a_n$ y una serie $\Sigma\, a_n^-$ si todos sus términos son negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específicos,

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, por lo tanto $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$, siempre que $a_n < 0$, después $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.
(a) Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son convergentes.
(b) Si $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son divergentes.

40. Demuestre que si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, en este caso hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ cuya suma es r. [*Sugerencias:* utilice la notación del ejercicio 39. Tome sólo suficientes términos positivos a_n^+ de modo que su suma sea mayor que r. Luego sume sólo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

11.7 ESTRATEGIA PARA PROBAR SERIES

Ya conoce varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie. Ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en cada serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, puesto que le pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una acaba por funcionar. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma.*

1. Si la serie es de la forma $\Sigma\, 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.
2. Si la serie es de la forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ o $\Sigma\, ar^n$, es una serie geométrica, la cual converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie alcance esta forma.
3. Si la serie posee una forma similar a la de una p-serie o a una serie geométrica, entonces se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomios), por lo tanto, la serie se debe comparar contra una p-serie. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 poseen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar sólo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican sólo en series con términos positivos, pero si $\Sigma\, a_n$ tiene algunos términos negativos, en seguida puede aplicar la prueba por comparación a $\Sigma\, |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.
4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces se debe aplicar la prueba para la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma\, (-1)^{n-1}b_n$, o bien, $\Sigma\, (-1)^n b_n$, entonces una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la prueba de la razón. Siempre piense que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ para todas las p-serie y, por lo tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. En estos términos, la prueba de la razón no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, entonces la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\, dx$ se puede evaluar con facilidad, entonces la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Puesto que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, debe usar la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de $n,$ compare la serie dada con la p-serie.

La serie de comparación de la prueba de comparación en el límite es $\Sigma\, b_n$, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$ □

V EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Puesto que la integral $\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La prueba de la razón también funciona. □

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante. □

V EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la prueba de la razón. □

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, por lo que se aplica la prueba por comparación. □

11.7 EJERCICIOS

1–38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$
7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$
11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$
15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \cdots \cdot (3n+2)}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$
18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$
20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$
26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$
27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$
30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$
31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$
32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$
33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$
34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$
35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$
37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$
38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$