Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2022/1
FAMAF

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) 135 por 23. *b)* -135 por 23. *c)* 135 por -23.
d) -135 por -23. *e)* 127 por 99. *f)* -98 por -73.

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.

b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$, hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

a) $(1503)_6$ *b)* $(1111)_2$ *c)* $(1111)_{12}$
d) $(123)_4$ *e)* $(12121)_3$ *f)* $(1111)_5$

(5) Convertir

a) $(133)_4$ a base 8, *b)* $(B38)_{16}$ a base 8,
c) $(3506)_7$ a base 2, *d)* $(1541)_6$ a base 4.

(6) Calcular:

a) $(2234)_5 + (2310)_5$, *b)* $(10101101)_2 + (10011)_2$.

(7) Expresar en base 5: $(1530)_6 + (1110)_2$.

(8) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \neq 0$ y $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.

b) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(rb + sc)$ para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}$.

c) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.

(9) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (no nulos cuando el enunciado lo requiera). ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.

c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.

d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.

e) $b, c \in \mathbb{N}$ y $a = b \cdot c \Rightarrow a \geq b$ y $a \geq c$.

(10) Dados $b, c \in \mathbb{Z}$, probar las siguientes propiedades:

a) 0 es par y 1 es impar.

b) Si b es un número par no nulo y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).

c) Si un número par no nulo divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.

d) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.

e) La suma de un número par y uno impar es impar.

f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

g) b es par si y sólo si b^2 es par.

(11) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificar la respuesta.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3^n + 1$ es múltiplo de n.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3n^2 + 1$ es múltiplo de 2.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2.

(12) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}, \quad n^2 + 2$ no es divisible por 4.

(13) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

(14) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

(15) *a)* Probar que $n(n+1)$ es divisible por 2 para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, el producto de dos enteros consecutivos siempre es par.

b) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

c) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: para todo $n \in \mathbb{N}$, el número combinatorio $\binom{n+3}{4} \in \mathbb{N}$).

d) Sea $m \geq 2$. Probar que el producto de m enteros consecutivos es divisible por $m!$.

(16) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

(17) Encontrar

a) $(7469, 2464)$, *b)* $(2689, 4001)$,

c) $(2447, -3997)$, *d)* $(-1109, -4999)$.

(18) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35, *b)* 11 y 15, *c)* 12 y 52,

d) 12 y -52, *e)* 12 y 532, *f)* 725 y 441,

g) 606 y 108.

(19) Probar que no existen enteros a y b que satisfagan $a + b = 100$ y $(a, b) = 3$.

(20) *a)* Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.

b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.

(21) *a)* Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, y $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(ka, kb) = k(a, b)$.

b) Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a, b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.

c) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a, b)}$ y $\dfrac{b}{(a, b)}$ son coprimos.

(22) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

(23) Probar que 3 y 5 son números primos.

(24) Dar todos los números primos positivos menores que 100.

(25) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

(26) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $n(n + 1)$ son coprimos.

(27) Demostrar que si $a \cdot b$ es un cuadrado y $(a, b) = 1$, entonces a y b son cuadrados.

(28) *a)* Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.

b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.

c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.

(29) *a)* Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.

b) Probar que $\sqrt[4]{54}$ no es racional.

c) Probar que no existen enteros m, n no nulos tal que $21n^5 = m^5$.

(30) Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

(31) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.

b) $a = 11$ y $b = 13$.

c) $a = 140$ y $b = 150$.

d) $a = 225$ y $b = 44$.

e) $a = 60$ y $b = 70$.