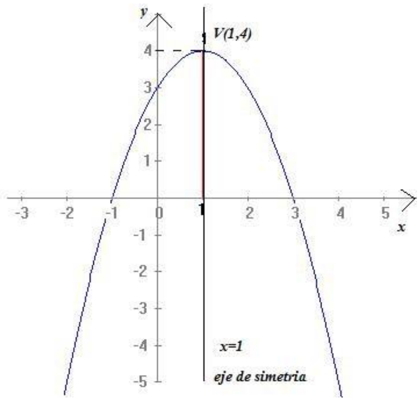
TRABAJO PRÁCTICO Nº 4
DERIVADA. DEFINICIÓN. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. DERIVADA DE FUNCIÓN COMPUESTA.

1. Defina derivada de una función en un punto, y realice la interpretación geométrica de la misma.
2. a) Observando el siguiente gráfico, indique el signo que debe tener la pendiente de la recta tangente a la curva en *x=0*, *x=1* y *x=2*. Luego obtenga valores aproximados para dichas pendientes. ¿Qué pasa con la recta tangente en el vértice de la parábola?

   b) Obtenga, usando la definición, la derivada de la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ para x=0, x=1 y x=2. Compare los valores obtenidos con los resultados del inciso a). Grafique y verifique con Geogebra

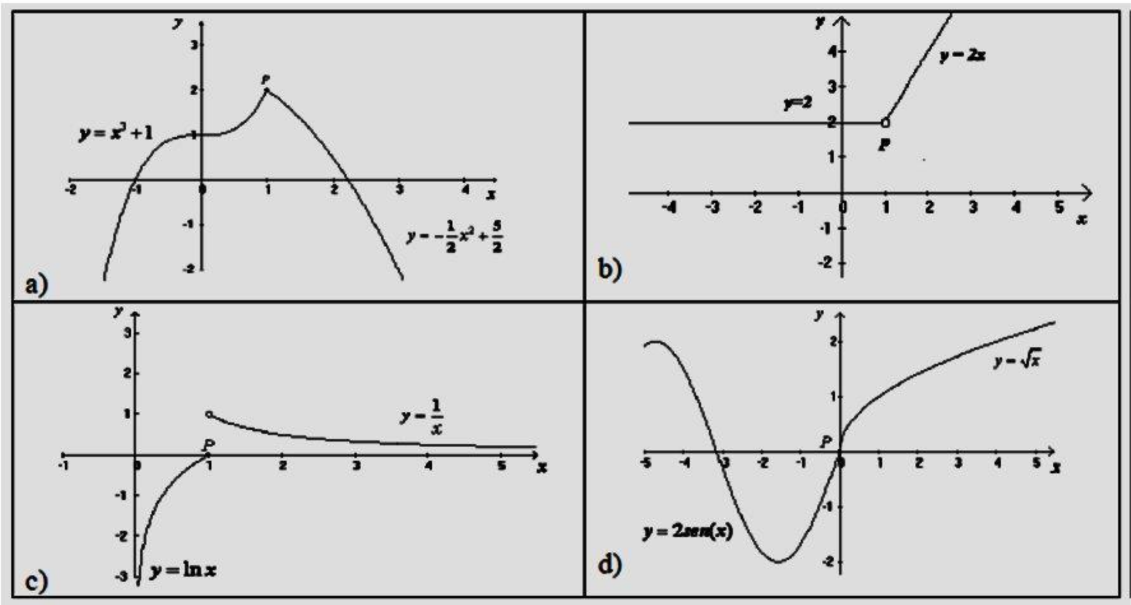


3. Analice y ejemplifique con gráficos de funciones ya estudiadas.
   El signo de la pendiente de la recta tangente es
   a) siempre positivo en todos los puntos de una curva
   b) siempre negativo en todos los puntos de una curva
   c) negativo hasta x =1 y luego positivo
   d) ni positivo ni negativo en todos los puntos de una función
   e) cero en infinitos puntos pero no en todos

4. Determine las funciones derivadas de las siguientes funciones usando la definición. Después, evalúe los valores de las derivadas que se especifican

   a) $f(x) = 1-2x,\ f'(-3),\ f'(5)$ b) $g(t) = \sqrt{t},\ g'(1),\ g'(2)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ f'(2),\ f'(-2)$

   (¿qué observación se puede hacer en el último inciso?)
5. i) Calcule y compare las derivadas laterales para decidir si las siguientes funciones son o no son derivables en el punto P.



ii) ¿Las funciones dadas son continuas en el punto P? ¿Por qué?

6. Enuncie un teorema que relacione la continuidad y la derivabilidad de una función en un punto.
7. Responda Verdadero o Falso. Justifique.

a) Si *f(x)* es derivable en x =c, entonces se cumple que $f(c)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

b) Si $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$, entonces se cumple que *f(x)* es derivable en x =c.

c) Si $f_-'(c) \neq f_+'(c)$, entonces *f(x)* no es continua en x =c.

8. Analice, teniendo en cuenta la continuidad, si las siguientes funciones son derivables o no en los puntos indicados, justificando cada respuesta.

a) $f(x)=\begin{cases} x-2 & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\le x \end{cases}$ en $x=0$

b) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x\le 1 \\ \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 & \text{si } 1<x \end{cases}$ en $x=1$ y $x=\frac{1}{3}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ 4x-3 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en $x=2$

d) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{si } x<2 \\ \sqrt{2x} & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$ en $x=2$ y $x=3$

9. Derive aplicando reglas de derivación:

a) $y=4+2x-3x^2-5x^3-8x^4$

b) $y=\frac{1}{x}+\cos x$

c) $y=e^x+8\cos(x)$

d) $y=2^x-\sqrt{x}+\frac{2}{x^{10}}$

e) $y=4x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{\pi}-tg(x)$

f) $y=\ln x+\sec x+x^4\cdot\cos x$

g) $y=\left(x+e^x\right)\cdot tg(x)$

h) $y=\frac{\cos(x)}{sen(x)+\cos x}$

i) $y=x^3e^x-\frac{2}{senx}$

j) $y=\frac{\frac{1}{x^3}+sen(x)}{\log x\cdot sen(x)}$

k) $y = 6secx.lnx + \frac{cos(x)}{e^x}$

l) $y=\left(2+2^x\right)\left(\frac{\sec(x)+\cos ec(x)}{\cos(x)}\right)$

10. Derive las siguientes funciones compuestas:

a) Escriba la función composición en la forma $f(g(x))$, identificando la función interior $u=g(x)$ y la exterior $f(u)$. Luego, encuentre la derivada $\frac{dy}{dx}$.

i) $y=\left(x^2+-2x+6\right)^7$ ii) $y=sen\left(2e^x\right)$ iii) $y=5\log\left(\sqrt{x}\right)$ iv) $y=\sqrt[3]{1+x^3}$

b) Halle la derivada de la función:

i) $f(x)=\frac{1}{\left(x^2-2x-5\right)^4}$

ii) $f(z)=sen\left(sen\left(sen\left(z\right)\right)\right)$

iii) $y=e^{-5x}\cos^4\left(3x\right)$

iv) $f(t)=\left(t-\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$

v) $g(r)=\ln\left(2^{(3-r)}sen(\frac{2}{3}r)\right)$

vi) $y = \sqrt{ln\left(cos(6 + 3^x)\right)}$

11. Derive las siguientes funciones, utilizando el concepto de derivación de funciones inversas:

a) $y(x) = arcsen(x)$ b) $m(t) = arccos(\sqrt{t})$ c) $t(r) = arctg(r^2)$ d) $g(y) = e^{y^3}$

12. Derive las siguientes funciones cuyas expresiones están dadas en forma implícita (es decir que $y = f(x)$). Despeje y':

$a)\ seny = xy^2$ i. b) $x^2 + y^2 = 4$ i. c) $y^2(x + y) = x^2(x - y)$

13. Derive aplicando derivación logarítmica

a) $y = \left(\sqrt[3]{Cosx}\right)^{Senx}$ b) $y = [\ln(3x+2)]^{tgx}$ c) $y = (Cos^3 x)^{Sen^4 x}$

d) $y = \sqrt[x]{x^5 + 6x}$ e) $y = e^{(x^2-4)} sen(x)$

14. Determine la derivada enésima de las siguientes funciones:

a) $y = e^{2x}$ b) $y = \dfrac{2}{1-x}$ c) $y = sen(x)$

15. Derive, simplifique, factorice, llevando la derivada a una expresión lo más compacta posible. Determine el dominio de cada una derivadas.

a) $y = (x+2)^8 (3-x)^6$ b) $y(z) = tg\left(\sqrt{1-z}\right)$ c) $xe^y = y - 1$

d) $y = \left[\log\left(x^2 e^x\right)\right]^{sen(\cos(x))}$ e) $x(t) = \dfrac{\sqrt{t+1}(2-t)^5}{(t+3)^7}$

<u>Teorema de Rolle- Teorema de Lagrange</u>

16. La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo $[-1,1]$. Demuestre que la derivada de esta función no se hace cero en ningún punto de dicho intervalo. Explicar porqué no vale el teorema de Rolle.

17. Para las funciones siguientes se define un intervalo cerrado. Decida si el Teorema de Lagrange es aplicable en cada caso. De ser así encuentre los valores posibles de c; sino establezca la razón.

$a) y = x^{2/3}; [0,2]$ $b) y = x^{2/3}; [-2,2]$ $c) y = x + \frac{1}{x}; [-1, \frac{1}{2}]$

$d) y = x + \frac{1}{x}; [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

18. Explique por qué la función $y = |senx|$ satisface las hipótesis del Teorema de Lagrange en el intervalo [0,1], pero no las satisface en el intervalo [-1,1].

<u>Bibliografía</u>:

- L. Leithold, "El Cálculo", 7º Ed, Oxford University Press, 2005.
- J. Stewart, "Cálculo", México. International Thomson Editores, 1998.
- N. Piskunov, "Cálculo diferencial e integral" (Tomo I), Ed. Mir Moscú, 1977.
- E. Purcell y D. Varberg, "Cálculo con Geometría Analítica", 6º Ed.. Prentice Hall Hispanoamericana S.A. México, 1993.