

Elementos de teoría de conjuntos y lógica elemental

P. Kisbye y A. L. Tiraboschi

RESUMEN. Este cuadernillo tiene la intención de presentar herramientas matemáticas básicas a alumnos de las carreras de informática. A grandes rasgos, los temas tratados son teoría de conjuntos, lógica elemental y relaciones. Las subsecciones marcadas con [*] podrán obviarse en una primera lectura.

Índice general

Capítulo 1. Conjuntos	1
1. Conjuntos y pertenencia	1
2. Subconjuntos	4
3. Operaciones entre conjuntos	4
4. El álgebra de conjuntos	7
5. Producto Cartesiano	9
6. Ejercicios	11
Capítulo 2. Nociones intuitivas de Lógica	17
1. Propositiones	17
2. Conectivos lógicos	18
3. Tautologías y Contradicciones	24
4. Álgebra de Propositiones	25
5. Razonamientos e implicaciones lógicas	30
6. Predicados	35
7. Cuantificadores	36
8. Ejercicios	38
Capítulo 3. Relaciones	47
1. Relaciones	47
2. Propiedades de las relaciones	49
3. Relaciones de orden	51
4. Relaciones de equivalencia	56
5. Cardinales	58
6. Ejercicios	58

Capítulo 1

Conjuntos

Cualquier colección de objetos o individuos se denomina conjunto. Ejemplos de conjuntos son el conjunto de los números naturales, de los televisores de la ciudad de Córdoba y de los peces en los océanos. La teoría de conjuntos es fundamental en matemática y de suma importancia en informática, donde encuentra aplicaciones en áreas tales como inteligencia artificial, bases de datos y lenguajes de programación.

1. Conjuntos y pertenencia

Un *conjunto* es una colección de elementos diferentes. Los objetos que integran un conjunto se llaman *elementos* de ese conjunto.

EJEMPLO 1.1. El conjunto de los números enteros.

EJEMPLO 1.2. El conjunto de los números naturales mayores que 5 y menores que 9.

EJEMPLO 1.3. El conjunto formado por los estudiantes de primer año de la FAMAFA.

EJEMPLO 1.4. El conjunto formado por un punto P en el plano y las rectas que pasan por él.

En general usaremos letras mayúsculas para designar a los conjuntos y letras minúsculas para designar a sus elementos. Si a es un elemento de un conjunto A se escribe $a \in A$ y se lee *a pertenece a A* o *a es un elemento de A*. Si a no es un elemento del conjunto A se escribe $a \notin A$ y se lee *a no pertenece a A* o *a no es elemento de A*. Los símbolos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} servirán para denotar a los siguientes conjuntos:

\mathbb{N} : el conjunto de los números naturales.

\mathbb{Z} : el conjunto de los números enteros.

\mathbb{Q} : el conjunto de los números racionales.

\mathbb{R} : el conjunto de los números reales.

Un conjunto puede ser definido de varias maneras. La forma más simple es por *extensión*, es decir listando todos sus elementos separados por comas y encerrados entre llaves:

EJEMPLO 1.5. $A = \{\text{FAMAFA}, \pi\}$

EJEMPLO 1.6. $U = \{a, e, i, o, u\}$

En algunos casos no se listan *todos* los elementos, pero se nombran los suficientes y se usan los puntos suspensivos “...” para sugerir los elementos faltantes:

EJEMPLO 1.7. $B = \{3, 5, 7, \dots\}$, $C_n = \{2, 4, \dots, 2^n\}$.

Sin embargo esta forma de nombrarlos puede resultar ambigua. Por ejemplo, B podría ser el conjunto de los números impares, o podría ser el conjunto de los números primos mayores que 2. Del mismo modo, C_n podrían ser todos los pares entre 2 y 2^n o bien todas las potencias de 2 comprendidas en el intervalo $[2, 2^n]$.

Una alternativa es definir al conjunto *por comprensión*, es decir dando una propiedad de los elementos que lo integran:

$$A = \{x \mid x \text{ cumple la propiedad } P\}.$$

Los conjuntos del ejemplo 1.7 se describen así: $B = \{x \mid x \text{ es impar y } x \geq 3\}$, $C_n = \{x \mid 2 \leq x \leq 2^n \text{ y } x \text{ es potencia de } 2\}$.

Es irrelevante el orden en el cual se nombran los elementos de un conjunto, y los elementos se consideran una sola vez.

EJEMPLO 1.8. $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, $\{a\} = \{a, a\}$.

El conjunto $\{x, y, z\}$ no es igual al conjunto $\{\{x, z\}, y\}$. ¿Por qué?

DEFINICIÓN 1.1. Dos conjuntos se dicen *iguales* si y sólo si poseen los mismos elementos. Si A es igual a B escribimos $A = B$.

Esto significa que para determinar si dos conjuntos A y B son iguales debemos probar que todo elemento de A es elemento de B y viceversa.

EJEMPLO 1.9. Sean $A = \{1, 3\}$ y $B = \{n \mid n^2 - 4n = -3\}$. Probar que $A = B$.

Primero probamos que $1 \in B$ y $3 \in B$. En efecto

$$1^2 - 4 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 \quad \text{y} \quad 3^2 - 4 \cdot 3 = 9 - 12 = -3$$

Para probar que todo elemento de B está en A , observemos que si $n \in B$,

$$n^2 - 4n + 3 = 0 \quad \text{o bien que} \quad (n - 3)(n - 1) = 0$$

Esta ecuación es satisfecha únicamente si $n = 3$ o si $n = 1$. Hemos concluido entonces que $A = B$.

No necesariamente los elementos de un conjunto son de la misma naturaleza, aunque usualmente se trabaja con conjuntos cuyos elementos tienen algo en común. Por ejemplo, *el conjunto C formado por la Torre Eiffel y el número π* es válido como conjunto, pero es poco interesante en la teoría. Normalmente las operaciones entre conjuntos que definiremos posteriormente (unión, intersección, etc.) se realizan entre conjuntos de la misma

naturaleza. Por ejemplo, conjuntos de números, conjuntos de números enteros, conjuntos de rectas, conjuntos de personas, etc. Resulta que es conveniente contar con la noción de *conjunto universal*, el cual se denotará con \mathcal{U} y que contendrá todos los conjuntos pertinentes a la teoría con la que se está trabajando.

EJEMPLO 1.10. Si nos estamos refiriendo a conjuntos de números pares, impares, divisores de n , múltiplos de p , entonces nuestro conjunto universal \mathcal{U} será \mathbb{N} o \mathbb{Z} .

EJEMPLO 1.11. Tomaremos $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ cuando estemos trabajando con números que son raíces de polinomios.

En cierto sentido, el conjunto universal es el conjunto “más grande”, por supuesto, dentro de cierto contexto. En el otro extremo está el *conjunto vacío*, que es el conjunto que no contiene ningún elemento. El conjunto vacío se denota \emptyset .

Los conjuntos pueden ser representados gráficamente mediante *diagramas de Venn*. En un diagrama de Venn el conjunto universal se denota con un rectángulo, y el conjunto que nos interesa representar, digamos A , se denota con una curva cerrada dentro del rectángulo. El siguiente dibujo ejemplifica lo anterior:

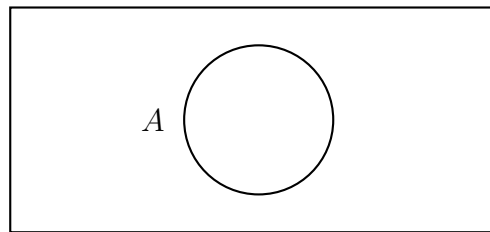


FIGURA 1. Representación del conjunto A mediante un diagrama de Venn.

Una de las propiedades más útiles de los diagramas de Venn es que dan una forma gráfica de visualizar las relaciones entre conjuntos, por ejemplo, en la Figura 2 representamos que todo elemento de B , es también elemento de A .

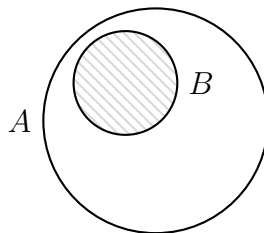


FIGURA 2. Los elementos de B también pertenecen a A .

Cuando en un diagrama de Venn se desea enfatizar un conjunto, es usual subrayar o sombrear el interior de la curva cerrada que lo denota.

2. Subconjuntos

DEFINICIÓN 2.1. Un conjunto A es un *subconjunto* del conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B . Se denota $A \subseteq B$ y se dice que A está contenido en B . Si A está contenido en B pero $A \neq B$ se dice que A es *subconjunto propio* de B y se suele denotar $A \subset B$.

En un diagrama de Venn, representamos el hecho de que B sea un subconjunto de A , encerrando a B con la curva que denota a A (ver Figura 2).

EJEMPLO 2.1. El conjunto \mathbb{N} de los números naturales es un subconjunto propio del conjunto \mathbb{Z} de los números enteros, y se escribe $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, aunque la notación $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ también es correcta.

EJEMPLO 2.2. $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo conjunto A , sin embargo no es cierto que $\emptyset \subset A$ para todo A puesto que A puede ser el conjunto vacío.

EJEMPLO 2.3. $\{a\} \subseteq \{a, b, d\}$, o también es correcto $\{a\} \subset \{a, b, d\}$.

Dejamos como ejercicio la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA 2.1. *Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.*

DEFINICIÓN 2.2. Dado un conjunto A llamamos *partes de A* al conjunto $\mathcal{P}(A)$ cuyos elementos son todos los subconjuntos de A .

EJEMPLO 2.4. $A = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

EJEMPLO 2.5. $B = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B\} = \{\emptyset, \{a\}\}$.

EJEMPLO 2.6. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{2, 3\}, \dots\}$, tiene infinitos elementos.

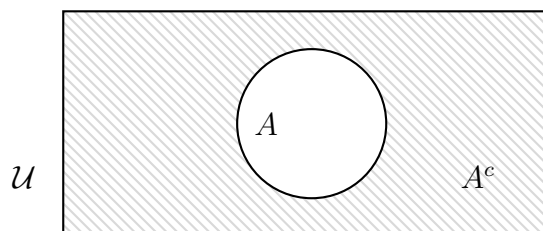
3. Operaciones entre conjuntos

Definiremos las siguientes operaciones elementales entre conjuntos: complemento, que es una operación unaria, y las operaciones binarias de unión, intersección y diferencia.

3.1. Complemento. Fijemos \mathcal{U} un conjunto universal. El *complemento* de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de \mathcal{U} que no pertenecen a A y se denota por A^c . En símbolos,

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}.$$

En un diagrama de Venn el complemento de A es la región exterior de la curva cerrada que determina A y lo destacamos con un subrayado o sombreado.

FIGURA 3. Complemento de A .

EJEMPLO 3.1. Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ y \mathbb{P} es el conjunto de los números pares, entonces \mathbb{P}^c es el conjunto de los números naturales impares.

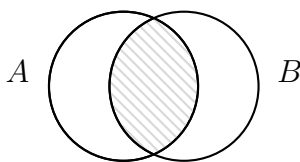
EJEMPLO 3.2. Si \mathcal{U} es un plano, y P es un punto en el plano, entonces P^c es el plano sin el punto P .

EJEMPLO 3.3. Sea $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$. Entonces $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.

3.2. Intersección. Sean A y B dos conjuntos. La *intersección* $A \cap B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y también a B . Dos conjuntos se dicen *disjuntos* si su intersección es vacía. En símbolos:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

En un diagrama de Venn la intersección de dos conjuntos se representa por la región que esta determinada por ser interior de las curvas cerradas que determinan los conjuntos. Esta región se la destaca con un sombreado o subrayado (ver Figura 4). Obsérvese que la intersección de dos conjuntos es vacía si y solo si no hay elementos comunes entre ellos. Esto se grafica con dos curvas cerrada que no se cortan.

FIGURA 4. Intersección de A y B .

EJEMPLO 3.4. Sean $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, $A = \{n \mid n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n \text{ es primo}\}$ y $B = \{n \mid n \text{ es impar y } n \leq 20\}$, entonces

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$A \cap P = \{3, 5, 7, 11\}$$

$$B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

EJEMPLO 3.5. Denotamos por $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$. Entonces $(0, 1) \cap \{0, 1\} = \emptyset$, es decir que $(0, 1)$ y $\{0, 1\}$ son conjuntos disjuntos.

3.3. Unión. Sean A y B dos conjuntos. La *unión* $A \cup B$ de A con B es el conjunto cuyos elementos son todos los elementos de A y todos los elementos de B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos subrayando o sombreado el área que cubren ambos conjuntos (ver Figura 5).

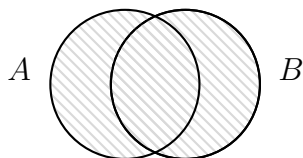


FIGURA 5. La unión de los conjuntos A y B .

EJEMPLO 3.6. $(0, 1) \cup \{0, 1\} = [0, 1]$

EJEMPLO 3.7. $\{1, 3, 5\} \cup \{2, 5\} = \{1, 2, 3, 5\}$

EJEMPLO 3.8. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

3.4. Diferencia. Sean A y B dos conjuntos. La *diferencia* o *complemento relativo* $A - B$ entre A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Observemos que $A^c = \mathcal{U} - A$. En un diagrama de Venn representamos la diferencia entre los conjuntos A y B , destacando la región que es interior a A y exterior a B (ver Figura 6).

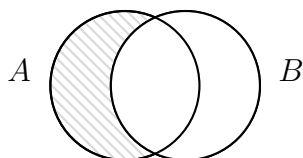


FIGURA 6. Diferencia entre el conjunto A y el conjunto B .

EJEMPLO 3.9. $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq 0\}$.

EJEMPLO 3.10. $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5\}$

EJEMPLO 3.11. $[-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1]$

La unión y la intersección pueden ser extendidas a una cantidad finita de conjuntos, A_1, A_2, \dots, A_n , de una manera natural:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1, x \in A_2, \dots, x \in A_n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ o } x \in A_2 \text{ o } \dots \text{ o } x \in A_n\}$$

EJEMPLO 3.12.

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\} = \{3\}$$

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

4. El álgebra de conjuntos

Dado un conjunto universal \mathcal{U} , sus subconjuntos y las operaciones de complemento, \cup y \cap entre sus subconjuntos determinan un álgebra de Boole. Esto significa que se cumplen determinadas leyes que son las que citamos a continuación:

Leyes idempotentes

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Leyes conmutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Leyes asociativas

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Leyes de absorción

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Leyes distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ley de involución

$$(A^c)^c = A$$

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Leyes de identidad

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \mathcal{U} = A$$

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Leyes de complemento

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$\emptyset^c = \mathcal{U}$$

$$\mathcal{U}^c = \emptyset$$

A continuación verificaremos que se cumple la ley distributiva y las leyes de De Morgan, dejando la demostración de las demás leyes como ejercicio.

LEYES DISTRIBUTIVAS:

Primero, observemos que no es complicado verificar las leyes distributivas con diagramas de Venn, sin embargo esto sólo nos da un indicio y de ninguna manera puede considerarse una demostración.

Veamos ahora la demostración de las leyes distributivas. Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Se cumple entonces que x es elemento de A y que x es elemento de B o de C . Es decir, o $x \in A$ y $x \in B$ o bien $x \in A$ y $x \in C$. Pero esto es lo mismo que decir que $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$, luego $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Recíprocamente, si $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces x está en $A \cap B$ o bien x está en $A \cap C$. Luego x es elemento de A y de B o x es elemento de A y de C , o lo que es lo

mismo, x es elemento de A y también es elemento de B o de C . Pero esto es equivalente a decir que $x \in A \cap (B \cup C)$.

Sea ahora $x \in A \cup (B \cap C)$. Luego x es elemento de A o bien x es elemento de B y de C . Si x está en A , entonces está en $A \cup B$ y en $A \cup C$, luego x está en $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Si x está en B y en C , entonces también x está en $A \cup B$ y en $A \cup C$. Luego x está en $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Recíprocamente, si $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, entonces x es elemento de $A \cup B$ y x es elemento de $A \cup C$. Luego, o bien x está en A , en cuyo caso $x \in A \cup (B \cap C)$, o bien si $x \notin A$ entonces x necesariamente está en B y en C . Luego $x \in B \cap C$, por lo cual $x \in A \cup (B \cap C)$.

LEYES DE DE MORGAN

Como en el caso anterior, las leyes de De Morgan son fáciles de visualizar usando diagramas de Venn, pero debemos hacer una demostración formal.

Si $x \notin (A \cup B)$, entonces x no pertenece a A y x no pertenece a B , luego x está en A^c y en B^c , es decir que $x \in A^c \cap B^c$.

Recíprocamente, si $x \in A^c \cap B^c$, entonces x no está en A ni en B , luego x no está en la unión de A con B , es decir que $x \in (A \cup B)^c$.

De manera análoga, si x no pertenece a $A \cap B$, entonces x no pertenece a A o x no pertenece a B . Luego x está en A^c o x está en B^c . Por lo tanto $x \in A^c \cup B^c$.

Recíprocamente, si $x \in A^c \cup B^c$, entonces x no está en A o bien x no está en B . Luego x no puede estar en $A \cap B$, por lo tanto $x \in (A \cap B)^c$.

5. Producto Cartesiano

Sean A y B dos conjuntos. Para cada elemento a en A y cada elemento b en B formamos el *par ordenado* (a, b) . Aquí a es el primer elemento del par ordenado y b es el segundo y el orden es importante. Para los pares ordenados se cumple que

$$(1) \quad (a, b) = (s, t) \text{ si y sólo si } a = s \text{ y } b = t.$$

OBSERVACIÓN 5.1. En realidad podemos definir los pares ordenados usando la teoría de conjuntos. Sean a y b dos elementos, entonces denotamos (a, b) al conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. De esta manera es sencillo demostrar la propiedad (1), que es la más importante de los pares ordenados: si $(a, b) = (s, t)$, entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{s\}, \{s, t\}\}$, por lo tanto, o bien $\{a\} = \{s\}$ y $\{a, b\} = \{s, t\}$, o bien $\{a\} = \{s, t\}$ y $\{a, b\} = \{s\}$. Pero esta última posibilidad no es factible debido a que $\{a\}$ tiene un elemento y $\{s, t\}$ tiene dos. Lo cual implica que $\{a\} = \{s\}$, lo que nos dice que $a = s$. Además $\{a, b\} = \{s, t\}$, debido a que $a = s$, deducimos que $b = t$. Hemos probado el “implica” de (1). La vuelta es trivial.

DEFINICIÓN 5.1. El *producto cartesiano* $A \times B$, de dos conjuntos A e B es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$.

EJEMPLO 5.1. Si $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$, entonces

$$A \times B = \{(2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

A veces importan los subconjuntos de un producto cartesiano:

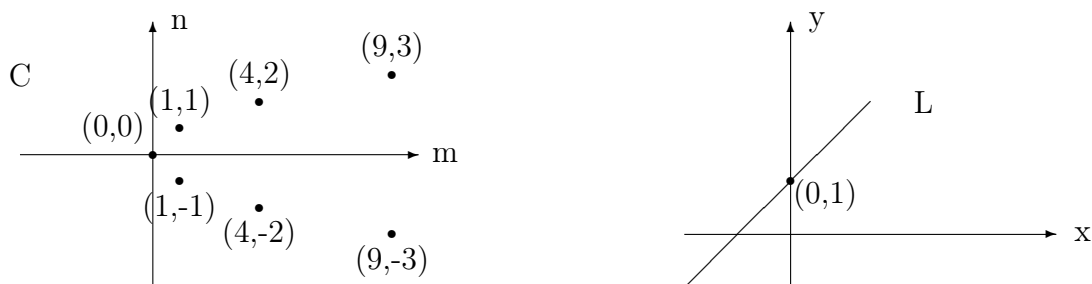
EJEMPLO 5.2.

$$C = \{(m, n) \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ y } m = n^2\}$$

o bien

$$L = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ e } y = x + 1\}$$

Estos ejemplos se ven claramente en un diagrama cartesiano.



El concepto de par ordenado (x, y) puede ser generalizado a n objetos, considerando las n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) , $n \geq 2$ donde se cumple entonces la propiedad que

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \text{ si y sólo si } x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots, x_n = x'_n$$

Se define el producto cartesiano entre n conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n como el conjunto

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

EJEMPLO 5.3.

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(m, n, p) \mid m, n, p \text{ son enteros}\}$$

EJEMPLO 5.4.

$$\{1, 2\} \times \{a, b, c\} \times \{x\} = \{(1, a, x), (1, b, x), (1, c, x), (2, a, x), (2, b, x), (2, c, x)\}$$

TEOREMA 5.1. Para todos los conjuntos A , X e Y se cumplen las siguientes leyes distributivas:

(a) *Ley distributiva sobre la intersección.*

$$A \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (A \times Y)$$

y

$$(X \cap Y) \times A = (X \times A) \cap (Y \times A).$$

(b) *Ley distributiva sobre la unión.*

$$A \times (X \cup Y) = (A \times X) \cup (A \times Y)$$

y

$$(X \cup Y) \times A = (X \times A) \cup (Y \times A)$$

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos la ley distributiva sobre la intersección y dejamos como ejercicio la demostración de la ley distributiva sobre la unión.

Sea $(a, u) \in A \times (X \cap Y)$. Luego a es elemento de A y u está en $X \cap Y$. Por definición de intersección de dos conjuntos, u es elemento de X y de Y , luego (a, u) está en $A \times X$ y (a, u) está en $A \times Y$, por lo tanto $(a, u) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$.

Recíprocamente, sea $(a, u) \in (A \times X) \cap (A \times Y)$. Luego (a, u) es elemento de $A \times X$ y (a, u) es elemento de $A \times Y$. Como $(a, u) \in A \times X$, por definición de producto cartesiano $a \in A$ y $u \in X$, pero como además $(a, u) \in A \times Y$ se cumple que $a \in A$ y $u \in Y$. Por lo tanto $u \in X \cap Y$ y se deduce que $(a, u) \in A \times (X \cap Y)$. \square

6. Ejercicios

- Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos, usando la notación ' \dots ' cuando sea necesario:
 - $\{x \mid x \text{ es entero y } -3 < x < 4\}$
 - $\{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es múltiplo de } 3\}$
 - $\{x \mid (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
 - $\{x \mid x \text{ es un entero y } (3x - 1)(x + 2) = 0\}$
 - $\{x \mid 2x \text{ es entero positivo}\}$
- Enumere cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
 - $\{n \mid n \text{ es natural y } n \text{ es divisible por } 5\}$
 - $\{\frac{1}{n} \mid n \text{ es primo}\}$
 - $\{2^n \mid n \text{ es natural}\}$
 - $\{r \mid r \text{ es racional y } 0 < r < 1\}$

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos liste sus elementos o escriba \emptyset si son vacíos:

- a) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n^2 = 9\}$
- b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2 = 9\}$
- c) $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ y } 3 < |n| < 7\}$
- d) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 1 \text{ y } x \geq 2\}$
- e) $\{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3\}$
- f) $\{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \text{ y } n \leq 6\}$.

4. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{z \mid z = 2x \text{ y } x \in X\}$
- b) $\{z \mid z = x + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$
- c) $\{z \mid z \in X \text{ o } -z \in X\}$
- d) $\{z \mid x = z + y \text{ donde } x \text{ e } y \text{ son elementos de } X\}$
- e) $\{z \mid z \text{ es entero y } z^2 \in X\}$

5. Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos:

- a) $\{x \mid x \text{ es entero y } 1/8 < x < 17/2\}$
- b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ y } \sqrt{x} \text{ es entero}\}$
- c) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 = 1 \text{ o } 2x^2 = 1\}$
- d) $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- e) $\{a, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

6. Describa por comprensión los siguientes conjuntos:

- a) El conjunto de todos los enteros que pueden ser escritos como suma de cuadrados de dos enteros.
- b) El conjunto de todos los enteros menores que 1000 que son cuadrados perfectos.
- c) El conjunto de todos los números que son múltiplos enteros de 13.
- d) $\{a, e, i, o, u\}$

7. En cada uno de los siguientes casos establezca si $x \in A$, $x \subseteq A$, ambas cosas o ninguna:

- a) $x = \{1\}$ $A = \{1, 2, 3\}$
- b) $x = \{1\}$ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
- c) $x = \{1\}$ $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- d) $x = \{1, 2\}$ $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
- e) $x = \{1\}$ $A = \{\{1, 2, 3\}\}$
- f) $x = 1$ $A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

8. Si $X = \{1, 2, 3, 4\}$, liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:
- $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 2 elementos}\}$
 - $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } A \text{ tiene 1 elemento}\}$
 - $\{A \mid A \text{ es subconjunto propio de } X\}$
 - $\{A \mid A \subseteq X \text{ y } 1 \in A\}$
9. En cada uno de los siguientes casos, pruebe que $A \subseteq B$:
- $A = \{x \mid 2x^2 + 5x = 3\}$
 $B = \{x \mid 2x^2 + 17x + 27 = 18/x\}$
 - $A = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x \text{ es par}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ es entero positivo y } x^2 \text{ es par}\}$
 - $A = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es un m\u00faltiplo de 6}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ es entero y } x \text{ es m\u00faltiplo de 3}\}$
10. Sea $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $C = \{2, 3, 6, 12\}$ y $D = \{2, 4, 8\}$. Determine los conjuntos
- $A \cup B$
 - $A \cap C$
 - $(A \cup B) \cap C^c$
 - $A - B$
 - $C - D$
 - $(B - D) \cup (D - B)$
11. Las siguientes afirmaciones utilizan subconjuntos de alg\u00fan conjunto universal \mathcal{U} , no vac\u00edo. Diga cu\u00e1les son verdaderas y cu\u00e1les son falsas, justifique su respuesta.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ para todo A, B, C .
 - $A \cup B \subseteq A \cap B$ implica que $A = B$
 - $(A \cap \emptyset) \cup B = B$ para todo A, B .
 - $A \cap (\emptyset \cup B) = A$ siempre que $A \subseteq B$.
 - $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ para todo A, B .
 - $A \cap B = A \cap C$ implica que $B = C$.
 - $A \cup B = A \cup C$ implica que $B = C$.
 - $A \cap B = A \cap C$ y $A \cup B = A \cup C$ implica que $B = C$.
 - $A \cup B \subseteq A \cap B$ implica que $A = B$.
 - $(A - B) \cup (B - A) = (A - C) \cup (C - A)$ implica que $B = C$.
12. Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, b, d\}$.
- Liste los pares ordenados de $A \times A$.
 - Liste los pares ordenados de $A \times B$.

c) Liste los elementos del conjunto $\{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ y } x = y\}$

13. Sea $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $T = \{0, 2, 4\}$.

a) ¿Cuántos pares ordenados hay en $S \times T$? ¿En $T \times S$?

b) Liste los elementos de

1) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m < n\}$

2) $\{(m, n) \mid (m, n) \in T \times S \text{ y } m < n\}$

3) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n \geq 3\}$

4) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m \cdot n \geq 4\}$

5) $\{(m, n) \mid (m, n) \in S \times T \text{ y } m + n = 10\}$

14. Liste cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $\{(m, n, p) \mid m, n, p \in \mathbb{N}, m + n = p\}$

b) $\{(m, n, p) \mid m, n, p \in \mathbb{N}, m = p = 1\}$

c) $\{(m, n, p, q) \mid m, n, p, q \in \mathbb{N}, m \cdot n \cdot p \cdot q = 0\}$

15. Considere los conjuntos:

$$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x - y = 4\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x + 3y = 9\} \text{ y}$$

$$C = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}.$$

Encuentre

(a) $A \cap B$

(b) $A \cap C$

(c) $B \cap C$

(d) $A^c \cup C^c$

16. Sea U un conjunto universal arbitrario. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo par de conjuntos A y B contenidos en U . Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo según corresponda:

a) $(A \cup B) \cap A^c \subseteq B$

b) $(A \cap B) \cup (A - B) = B$

c) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$

d) $(A - B) \cup B = A$.

e) $(A \cap B)^c \subseteq A$

f) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $B - A \subseteq C$.

g) $(A \cup B) - B = A$.

h) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

17. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas. No justifique haciendo referencia a leyes o resultados dados en el teórico.

- a) $A \cap (B \cup C^c) \subseteq (A - C)$.
- b) Si $A \cup B = B \cap C$ entonces $A \subseteq C$.
- c) $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$ si y sólo si $B = \emptyset$.
- d) Si $B \subseteq C$ entonces $(A - C) \cap (B - D) = \emptyset$, cualesquiera sean A y D .
- e) $(A \cup B^c)^c = B - C$
- f) $(X - Y) - W \subseteq X - (Y - W)$.

Capítulo 2

Nociones intuitivas de Lógica

La principal motivación de la lógica es modelar el razonamiento matemático. El caso del cálculo proposicional es el caso más simple debido a que las variables que aparecen, llamadas proposiciones, pueden tener solo dos valores: verdadero o falso. Sin embargo, el cálculo proposicional no es capaz de modelar todos los razonamientos matemáticos. Por ejemplo, en el cálculo proposicional no podemos expresar la existencia de un objeto teniendo una cierta propiedad. Por otro lado, el llamado cálculo de predicados puede expresar las propiedades de los objetos o las relaciones entre objetos, y puede formalizar el razonamiento matemático. En este capítulo daremos una aproximación informal al cálculo proposicional y, en las últimas dos secciones, una introducción al cálculo de predicados.

1. Propositiones

Una *proposición* es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. También podríamos decir que una proposición es una sentencia que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes. Por ejemplo:

EJEMPLO 1.1. Hoy es sábado

EJEMPLO 1.2. Los triángulos tienen cuatro vértices.

EJEMPLO 1.3. $25 + 24 = 49$.

EJEMPLO 1.4. Juan va al trabajo en tren .

Una misma proposición puede ser a veces verdadera y a veces falsa: *Hoy es sábado* es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábados. Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla $\langle ENTER \rangle$

no son proposiciones puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

La veracidad (V) o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad*.

2. Conectivos lógicos

En el cálculo proposicional se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r, \dots para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son: $\neg, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \Rightarrow$ y \Leftrightarrow . El primero de ellos modifica una proposición y por lo tanto se dice que es *1-ario*. Los otros se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

EJEMPLO 2.1. Consideremos las proposiciones p : “4 es positivo” y q : “ $\sqrt{2}$ es racional”. Algunas posibles combinaciones de p y q son:

$$\neg p : \text{ 4 no es positivo.}$$

$$p \wedge q : \text{ 4 es positivo y } \sqrt{2} \text{ es racional.}$$

$$\neg p \wedge q : \text{ 4 no es positivo y } \sqrt{2} \text{ es racional.}$$

$$p \vee q : \text{ 4 es positivo o } \sqrt{2} \text{ es racional.}$$

$$p \Rightarrow q : \text{ Si 4 es positivo entonces } \sqrt{2} \text{ es racional.}$$

$$p \Leftrightarrow q : \text{ 4 es positivo si y sólo si } \sqrt{2} \text{ es racional.}$$

2.1. Negación. La *negación* se efectúa a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.

EJEMPLO 2.2. Si p simboliza la proposición *Estamos en la clase de álgebra*, entonces $\neg p$ es *No estamos en la clase de álgebra*.

En la siguiente tabla mostramos la relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Una tabla de este tipo se llama *tabla de verdad*.

EJEMPLO 2.3. Por aritmética elemental sabemos que la proposición “10 es múltiplo de 5” es verdadera, por lo tanto su negación “10 no es múltiplo de 5” es falsa.

EJEMPLO 2.4. Supongamos que sabemos que Pedro nunca fue a Europa, entonces la proposición “Pedro fue a Italia” es falsa y en consecuencia su negación “Pedro no fue a Italia” es verdadera. También es falsa la oración “Pedro conoce todos los países de Europa” y por lo tanto su negación “Pedro no conoce todos los países de Europa” es verdadera. Observar que esta última proposición es verdadera, pero puede traer alguna confusión;

pues decir que Pedro no conoce todos los países de Europa, puede inducirnos a pensar que conoce al menos algunos, lo cual es falso. Tanto en matemática como en computación es importante no asumir más de lo que la frase dice, pues eso conlleva a confusiones.

EJEMPLO 2.5. “Todos los perros son blancos” es una frase que es obviamente falsa, por lo tanto su negación, que podría escribirse “no todos los perros son blancos” o “algunos perros no son blancos” o bien “hay perros que no son blancos”, es verdadera.

2.2. Conjunción. La *conjunción* de dos proposiciones se obtiene combinando dos proposiciones usando el nexo “y” o algún nexo que indique que las dos proposiciones ocurren. La conjunción se indica con el símbolo \wedge .

Es natural que la conjunción de dos proposiciones sea verdadera solamente si ambas son verdaderas. La siguiente tabla da los valores de verdad para la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 2.6. Si p es “algunas aves vuelan” y q es “el gato es un ave”, entonces $p \wedge q$ expresa “algunas aves vuelan y el gato es un ave”, que es obviamente falsa pues los gatos no son aves. Por otro lado la proposición $p \wedge \neg q$ que dice “algunas aves vuelan y el gato no es un ave” es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

2.3. Disyunción. La *disyunción* de dos proposiciones puede ser de dos tipos: *exclusiva* o *excluyente* e *inclusiva* o *incluyente*. La disyunción de tipo exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\underline{\vee}$. La disyunción de tipo inclusivo entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas y se indica con el símbolo \vee . En matemática y computación es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el “o inclusivo”, veremos en los siguientes capítulos que el uso del “o exclusivo” es casi inexistente. A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es excluyente o incluyente. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

“Los alumnos regularizan la materia si aprueban tres parciales o si aprueban dos parciales y un recuperatorio.”

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. El siguiente ejemplo sugiere una disyunción de tipo exclusivo ya que supuestamente sólo se cumplirá una de las dos proposiciones:

“Mañana iremos a clase o nos quedaremos en casa a estudiar.”

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es incluyente (excluyente respectivamente) terminando la frase con *o ambas* (respectivamente *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \underline{\vee} q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \underline{\vee} q$	p	q	$p \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	F

EJEMPLO 2.7. Supongamos que ayer llovió y que el suelo estaba mojado. Entonces la frase “ayer llovió o ayer el suelo estaba seco” es verdadera tanto si consideramos el o inclusivo e exclusivo. La frase “ayer llovió o ayer el suelo estaba mojado” es verdadera si el o es inclusivo y es falsa si el o es exclusivo. Este es otro ejemplo donde el formalismo matemático no necesariamente representa en forma fiel lo coloquial. Sin embargo, debemos recordar al lector que en el contexto de este libro nos debemos restringir al formalismo de la lógica matemática pese a que en muchos caso no puede ser aplicado al lenguaje natural.

2.4. Condicional o Implicación. Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: “si se cumple p entonces se cumple q ”, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con \Rightarrow .

EJEMPLO 2.8. p : He aprobado tres parciales,

q : Soy alumno regular.

$p \Rightarrow q$: Si he aprobado tres parciales entonces soy alumno regular.

o bien

$p \Rightarrow q$: Que haya regularizado la materia implica que soy alumno regular.

La implicación condicional $p \Rightarrow q$ significa que no es posible que ocurra p y no ocurra q . Es decir, la implicación es falsa si p es verdadero y q es falso.

La siguiente tabla corresponde a los valores de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En una implicación $p \Rightarrow q$, p es la *condición suficiente* para q y q es la *condición necesaria* para p .

Observemos si p es falso, no importa cuál sea el valor de q que $p \Rightarrow q$ será verdadero.

EJEMPLO 2.9. Si vemos en el ejemplo 2.8, si *no hemos aprobado tres parciales*, igual podríamos ser alumnos regulares o no, y no estaremos mintiendo.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*. Las tablas de verdad para $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$ y $\neg q \Rightarrow \neg p$ son:

p	q	$q \Rightarrow p$	p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$	p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles. Más adelante diremos que son lógicamente equivalentes.

2.5. Bicondicional o Doble implicación. Una proposición bicondicional será verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

EJEMPLO 2.10. p : Apruebo un parcial.

q : La nota es mayor que 4.

$p \Leftrightarrow q$: Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4.

La siguiente tabla corresponde a la doble implicación $p \Leftrightarrow q$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta tabla coincide con la tabla de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

2.6. Ni-ni y no-o-no [*]. El operador binario ni-ni es verdadero si y sólo si las dos proposiciones que lo componen son falsas. El operador no-o-no es falso si y sólo si las dos proposiciones que lo componen son verdaderas. Si p y q dos proposiciones, el operador ni-ni, es el que expresa “ni p , ni q ”, y lo denotamos $p \uparrow q$. El operador no-o-no expresa “o no p , o no q ” y se denota $p \downarrow q$. Las tablas de verdad de estos operadores son:

p	q	$p \uparrow q$	p	q	$p \downarrow q$
V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Observar que la tabla de verdad de $p \uparrow q$ es igual a la de $\neg p \wedge \neg q$ y la tabla de verdad de $p \downarrow q$ es igual a la de $\neg p \vee \neg q$.

2.7. Combinación de proposiciones con conectivos lógicos. Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$(2) \quad p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (2) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conexión tiene dada una prioridad, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. La conexión \neg tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de las conexiones binarias el orden de prioridades, de mayor a menor, es \wedge , \vee , \Rightarrow y \Leftrightarrow . Pese a que la prioridad de \wedge es mayor que la de \vee , suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre \Rightarrow y \Leftrightarrow . Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, usando las reglas de precedencia la expresión (2) puede reescribirse como $p \Rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$, lo cual es ambiguo, pues podría interpretarse como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien como $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos.

EJEMPLO 2.11. Sean

$$p : a \text{ es menor que } b, \quad q : b \text{ es menor que } c.$$

Veamos los posibles valores de verdad de $p \wedge q \Rightarrow (p \wedge \neg q)$, es decir “si a es menor que b y b es menor que c , entonces a es menor que b y b no es menor que c ”. La proposición anterior es de la forma $r \Rightarrow s$ donde r y s son proposiciones compuestas. Supongamos verdaderas p y q , entonces $p \wedge q$ es verdadera y $p \wedge \neg q$ es falsa, esto nos dice que en este caso la proposición original es falsa. Ahora supongamos que o bien p o q o ambas son falsas, entonces, por la definición de los valores de verdad del condicional, la proposición original es verdadera. Ejemplificando con números tenemos que “2 menor que 3 y 3 menor que 4, entonces 2 menor que 3 y 3 no es menor que 4” es falsa, pero “2 menor que 3 y 5 menor que 4, entonces 2 menor que 3 y 5 no es menor que 4” es verdadera.

No es difícil darse cuenta que el uso de la intuición en la búsqueda de la verdad o falsedad de una proposición compuesta, aunque sea de unas pocas combinaciones, es una tarea complicada, confusa y que a menudo lleva al error. Es debido a esto es que es muy recomendable el uso de tablas de verdad. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2.12. Sean $p : 2$ es menor que 3 y $q : 5$ es menor que 4, verifiquemos que es verdadera la proposición $(p \wedge q) \vee \neg(p \Rightarrow q) : 2$ es menor que 3 y 5 es menor que 4 o no es cierto que 2 es menor que 3 implique que 5 es menor que 4. Demos la tabla de verdad para la proposición compuesta:

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \Rightarrow q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F

La segunda línea (donde p es verdadera y q es falsa) nos dice que la proposición compuesta es verdadera.

EJEMPLO 2.13. Dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

3. Tautologías y Contradicciones

DEFINICIÓN 3.1. Una *tautología* es una proposición compuesta que siempre es verdadera cualquiera sea el valor de verdad de las proposiciones que la componen.

DEFINICIÓN 3.2. Una *contradicción* es una proposición compuesta que siempre es falsa cualquiera sea el valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Denotaremos con v a las tautologías y con f a las contradicciones.

EJEMPLO 3.1. Mostrar que $p \vee \neg p$ es una tautología.

Para probar esto, hacemos una tabla de verdad con los valores de p , $\neg p$ y $p \vee \neg p$:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Observemos que en la última columna correspondiente a los valores de $p \vee \neg p$ todos los valores de verdad son verdaderos. Por ello $p \vee \neg p$ es una tautología.

EJEMPLO 3.2. Probar que $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ es una contradicción.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	F	V	V	F

Nuevamente, cualquiera sean los valores de verdad de p y q , $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ es siempre falsa.

4. Álgebra de Proposiciones

Dos proposiciones se dicen *lógicamente equivalentes* si se obtienen los mismos valores de verdad para cada conjunto de valores de verdad de sus componentes. Si p y q son lógicamente equivalentes, denotamos $p \equiv q$. Para probar que dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes debemos desarrollar la tabla de verdad de cada una de ellas y ver que los valores de verdad coinciden fila a fila.

EJEMPLO 4.1. Demostrar que $p \vee (p \wedge \neg q)$ es lógicamente equivalente a $\neg p \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$. Hagamos la tabla de verdad de ambas proposiciones:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \vee (p \wedge \neg q)$	$\neg p \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F

Como vemos, los valores de verdad de las dos últimas columnas coinciden y por lo tanto está probado el resultado.

Como veremos en capítulos posteriores el universo de las proposiciones junto a las operaciones \neg , \wedge y \vee y las constantes V y F satisfacen ciertas propiedades que hacen que esta estructura sea llamada un *álgebra de Boole*. Las propiedades a que hacemos referencia se escriben a continuación:

Leyes idempotentes

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

Leyes conmutativas

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

Leyes asociativas

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Leyes de absorción

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Leyes distributivas

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Ley de involución

$$\neg \neg p \equiv p$$

Leyes de De Morgan

$$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Leyes de identidad

$$p \vee F \equiv p$$

$$p \wedge V \equiv p$$

$$p \vee V \equiv V$$

$$p \wedge F \equiv F$$

Leyes de complemento

$$p \vee \neg p \equiv V$$

$$p \wedge \neg p \equiv F$$

$$\neg F \equiv V$$

$$\neg V \equiv F$$

Observemos que la mayoría de las leyes son absolutamente intuitivas y el alumno debería manejarlas sin dificultad. Las leyes que no son intuitivas son las leyes de absorción, distributivas y de De Morgan. Siendo estas últimas dos de gran importancia y aplicación.

Todas estas propiedades pueden ser demostradas fácilmente con el uso de tablas de verdad. Damos a modo de ejemplo la demostración de la propiedad distributiva, e invitamos al lector a demostrar las demás propiedades.

EJEMPLO 4.2. Demostremos que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ y que $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Como hemos visto antes es solo una verificación en las tablas de verdad correspondientes.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

4.1. Generación del álgebra por un solo conectivo [*]. El siguiente resultado nos dice que la familia de conectivos lógicos que hemos definido hasta ahora es redundante, en el sentido que toda fórmula del cálculo proposicional es lógicamente equivalente a una fórmula generada por dos conectivos, e inclusive por uno solo.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea p una proposición compuesta generada por proposiciones p_1, \dots, p_n usando los conectivos $\wedge, \vee, \neg, \underline{\vee}, \Rightarrow$ y \Leftrightarrow . Entonces:*

- Existe una proposición q , generada por combinación de las proposiciones p_1, \dots, p_n y los conectivos \wedge, \vee y \neg , tal que $p \equiv q$.*
- Existe una proposición q , generada por combinación de las proposiciones p_1, \dots, p_n y los conectivos \wedge y \neg , y tal que $p \equiv q$.*
- Existe una proposición q , generada por combinación de las proposiciones p_1, \dots, p_n y el conectivo \uparrow (respectivamente \downarrow) tal que $p \equiv q$.*
- Los conectivos \uparrow y \downarrow son los únicos operadores binarios que por si solos alcanzan para construir proposiciones lógicamente equivalentes a una dada.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar (a) alcanza con verificar que dadas s y t proposiciones, entonces $s \vee t$, $s \Rightarrow t$ y $s \Leftrightarrow t$ son lógicamente equivalentes a fórmulas que usan los conectivos \wedge , \vee y \neg . Veamos primero que $s \vee t$ es lógicamente equivalente a $(\neg s \wedge t) \vee (s \wedge \neg t)$ o simbólicamente $s \vee t \equiv (\neg s \wedge t) \vee (s \wedge \neg t)$.

s	t	$\neg s$	$\neg t$	$\neg s \wedge t$	$s \wedge \neg t$	$(\neg s \wedge t) \vee (s \wedge \neg t)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F

Veamos ahora que $s \Rightarrow t$ es lógicamente equivalente a $\neg s \vee t$.

s	t	$\neg s$	$s \Rightarrow t$	$\neg s \vee t$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Debido a esto y al hecho que $(s \Leftrightarrow t) \equiv (s \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow s)$, obtenemos que:

$$(s \Leftrightarrow t) \equiv (\neg s \vee t) \wedge (\neg t \vee s).$$

Para demostrar (b), sólo debemos probar que $s \vee t$ es lógicamente equivalente a una expresión escrita con \wedge y \neg . Demostremos que $s \vee t$ es lógicamente equivalente a $\neg(\neg s \wedge \neg t)$.

s	t	$\neg s$	$\neg t$	$\neg s \wedge \neg t$	$\neg(\neg s \wedge \neg t)$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F

(c) Es claro que $\neg p = p \uparrow p$ y que $p \wedge q = \neg p \uparrow \neg q = (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$ (usar tablas de verdad en caso de duda). Por otro lado $\neg p = p \downarrow p$ y $p \wedge q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$. Usando (b) llegamos a las conclusiones que queríamos obtener.

(d) Sea \diamond un operador binario capaz de generar proposiciones lógicamente equivalentes a una dada. Debido a esto, dada p una proposición, con una combinación de p 's y \diamond 's, debemos obtener una proposición lógicamente equivalente a $\neg p$. Ahora bien, si $p \diamond p$ tiene el mismo valor de verdad que p , entonces cualquier combinación de p 's y \diamond 's tendrá el

mismo valor de verdad que p y por lo tanto nunca podremos generar una proposición equivalente a $\neg p$. Por lo tanto, sólo queda una posibilidad: $p \diamond p$ tiene un valor de verdad contrario a p y por lo tanto es lógicamente equivalente a $\neg p$. Por lo tanto ya hemos obtenido dos renglones de la tabla de verdad de $p \diamond q$:

p	q	$p \diamond q$
V	V	F
V	F	$?$
F	V	$?$
F	F	V

Supongamos ahora que la tabla de verdad de $p \diamond q$ es

p	q	$p \diamond q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Ahora bien, por la propiedad fundamental de \diamond tenemos que $p \wedge \neg p = s_1 \diamond s_2$ y $p \vee \neg p = t_1 \diamond t_2$. Donde s_1, s_2, t_1, t_2 se escriben en términos de p y \diamond . Como $p \wedge \neg p$ es siempre falso y $p \vee \neg p$ es siempre verdadero, por la tabla de verdad de \diamond obtenemos que s_2 es verdadero y t_2 es falso. Elijamos a s_2 y t_2 de tal forma que la cantidad de \diamond 's que aparecen en ellos sea mínima. Ahora supongamos que la cantidad de \diamond 's que aparecen en s_2 sea menor o igual que los que aparecen en t_2 . Ahora bien, como s_2 es verdadero tanto como si p es verdadero o falso, claramente $s_2 = p \vee \neg p$ y por lo tanto $s_2 = t_1 \diamond t_2$, por lo tanto la cantidad de \diamond 's que aparecen en s_2 es mayor que la los que aparecen en t_2 , lo cual es una contradicción. Nos queda solo otra posibilidad: la cantidad de \diamond 's que aparecen en t_2 sea menor que los que aparecen en s_2 . Como t_2 es falso para p verdadero o falso, entonces $t_2 = p \wedge \neg p$ y por lo tanto $t_2 = s_1 \diamond s_2$, por lo cual la cantidad de \diamond 's que aparecen en t_2 es mayor que los que aparecen en s_2 y llegamos nuevamente a una contradicción. Es decir que suponer que \diamond tiene como tabla de verdad a (3) nos lleva a un absurdo. Con un razonamiento análogo podemos demostrar que tampoco es posible que \diamond tenga la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \diamond q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Por lo tanto solo quedan dos tablas posibles:

p	q	$p \Diamond q$		p	q	$p \Diamond q$
V	V	F	y	V	V	F
V	F	F		V	F	V
F	V	F		F	V	V
F	F	V		F	F	V

que son las tablas de verdad de \uparrow y \downarrow respectivamente. \square

5. Razonamientos e implicaciones lógicas

Sean p_1, \dots, p_m y q proposiciones compuestas, decimos que p_1, \dots, p_m *implican lógicamente* a q , y se escribe $p_1, \dots, p_m \models q$, si siempre que p_1, \dots, p_m sean verdaderas, q también es verdadera. Las proposiciones p_1, \dots, p_m se llaman *premisas* y la proposición q es la *conclusión*. También diremos que $p_1, \dots, p_m \models q$ es un *razonamiento*. Observemos que $p_1, \dots, p_m \models q$ si y sólo si $p_1 \wedge \dots \wedge p_m \models q$.

EJEMPLO 5.1. $\neg q \models [(p \vee q) \Rightarrow p]$.

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$[(p \vee q) \Rightarrow p]$
V	V	V	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	V

Es claro que cuando $\neg q$ es verdadera, entonces $(p \vee q) \Rightarrow p$ también es verdadera, por lo tanto es una implicación lógica.

TEOREMA 5.1. $p_1, \dots, p_m \models q$ si y sólo si $p_1 \wedge \dots \wedge p_m \Rightarrow q$ es una tautología.

DEMOSTRACIÓN. Si p_1, \dots, p_m son verdaderos, entonces q es verdadero, luego $p_1 \wedge \dots \wedge p_m \Rightarrow q$ es verdadero. Por lo cual $p_1 \wedge \dots \wedge p_m \Rightarrow q$ es siempre verdadero.

Ahora, si $p_1 \wedge \dots \wedge p_m \Rightarrow q$ es una tautología, entonces si p_1, \dots, p_m es verdadero q no puede ser falso, luego siempre que p_1, \dots, p_m sean verdaderos q será verdadero. \square

Si $p_1, \dots, p_m \models q$ se suele escribir con la notación:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \\ \hline q \end{array}$$

Si la implicación lógica no es válida se dice que es una *falacia*.

EJEMPLO 5.2. Determinar si la implicación lógica :

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

es válida.

Vemos que si $p \Rightarrow q$ y p son verdaderas, entonces necesariamente q es verdadera, de lo contrario $p \Rightarrow q$ sería falsa.

Este tipo de razonamiento se llama *modus ponens*.

EJEMPLO 5.3. Consideremos el razonamiento:

Si $x \cdot y = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$. $x \neq 0$ e $y \neq 0$, luego $x \cdot y \neq 0$.

Llamemos $p_1 : x \cdot y = 0$, $p_2 : x = 0$ o $y = 0$. El razonamiento es:

$$\begin{array}{c} p_1 \Rightarrow p_2 \\ \neg p_2 \\ \hline \neg p_1 \end{array}$$

Si p_1 fuera verdadero, entonces como $p_1 \Rightarrow p_2$, obtenemos que p_2 es verdadera. Pero por el segundo renglón sabemos que p_2 es falsa, por lo tanto debe ser que p_1 es falso. Este tipo de razonamiento se llama *modus tollens*. Observemos que también podemos hacer la demostración usando tablas de verdad, es decir probando que $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$ es una tautología.

EJEMPLO 5.4. Consideremos el siguiente razonamiento:

Si llueve entonces uso paraguas. No llueve, luego no uso paraguas.

Llamemos p y q a las proposiciones:

p : llueve,

q : uso paraguas.

Estamos diciendo: $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p) \models \neg q$. Sin embargo, si hacemos la tabla de verdad vemos que:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p)$	$\neg q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V

Exactamente podemos ver que si p es falso, es decir si *no llueve* no es cierto que *no use paraguas*. Es decir que el razonamiento es una falacia.

EJEMPLO 5.5. Consideremos el razonamiento:

Si estudio aprobaré el curso. Si apruebo el curso entonces podré tomar el curso siguiente. Estudio, luego podré tomar el curso siguiente.

p : Estudio.

q : Aprobaré el curso.

r : Tomaré el curso siguiente.

El razonamiento es:

$$\frac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \end{array}}{p \Rightarrow r}$$

Si p es falsa, entonces $p \Rightarrow r$ es verdadera. Si p es verdadera, para que las premisas sean verdaderas es necesario que q y r sean verdaderas. Por lo tanto $p \Rightarrow r$ es verdadera. Este tipo de razonamiento se llama *silogismo hipotético*.

EJEMPLO 5.6. Determinar si el siguiente razonamiento es válido: "el programa tiene un error o la entrada de datos es errónea. Yo sé que la entrada de datos no es errónea, por lo tanto el programa tiene un error". Si

p : el programa tiene un error.

q : la entrada de datos es errónea.

El razonamiento es:

$$\frac{\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg q \end{array}}{p}$$

Al ser $\neg q$ verdadera, entonces q es falsa. Para que $p \vee q$ sea verdadera debe ser p verdadera. Este tipo de razonamiento se llama *silogismo disyuntivo*.

Podemos seguir varios métodos o técnicas para realizar una demostración: *directa* e *indirecta*. La demostración directa consiste en probar que la conjunción de las premisas

implica lógicamente la conclusión, es decir que

$$p_1, p_2, \dots, p_m \models q.$$

La demostración del Ejemplo 5.5 es una demostración directa.

Un tipo de demostración indirecta en cambio, es la demostración por la *contrarrecíproca*. Esto consiste en negar la conclusión y obtener la negación de las hipótesis. Es decir que

$$\neg q \models \neg (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m).$$

Esto se basa en el hecho que la proposición $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$.

EJEMPLO 5.7. Si $m \cdot n$ es par entonces m es par o n es par.

En este caso, la premisa es

p : $m \cdot n$ es par,

y la conclusión es $q \vee r$ donde

q : m es par, y

r : n es par.

Suponemos que la conclusión $q \vee r$ es falsa. Pero entonces q es falsa y r es falsa, es decir, $m = 2k + 1$ y $n = 2h + 1$ para ciertos k y h enteros. Luego $m \cdot n = (2k + 1)(2h + 1) = 2(2kh + k + h) + 1$, es decir que p es falsa.

EJEMPLO 5.8.

Si $x + y \geq 2$, entonces $x \geq 1$ o bien $y \geq 1$.

Aquí la premisa es:

p : $x + y \geq 2$, y la conclusión es:

q : $(x \geq 1) \vee (y \geq 1)$.

La negación de la conclusión es $\neg q$: $(x < 1) \wedge (y < 1)$. Observemos que si se cumple $\neg q$, entonces

$$x + y < 1 + 1 = 2$$

es decir, no se cumple p . Como $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg q \Rightarrow \neg p$ tenemos que el razonamiento es válido, es decir que la proposición es verdadera.

Otro tipo de demostración indirecta es la demostración por el absurdo o por contradicción. Este método consiste en aceptar las premisas como verdaderas y negar la conclusión y de este modo obtener una contradicción. Es decir demostrar $p_1, \dots, p_m \models q$ es equivalente a encontrar una proposición r adecuada y demostrar que:

$$\neg q, p_1, p_2, \dots, p_n \models r \wedge \neg r$$

En el Ejemplo 5.3 hicimos una demostración por el absurdo.

EJEMPLO 5.9. Probar que existen infinitos números primos.

En este caso, la premisa puede ser:

p : Si n es un entero entonces n es primo o n es producto de primos,

y la conclusión:

q : existen infinitos primos.

Negar la conclusión es equivalente a decir que existe un número finito de primos, sean p_1, p_2, \dots, p_k . Sea $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$. Entonces N es mayor que p_1, p_2, \dots, p_k por lo tanto no es primo. Si no es primo (aquí estamos aceptando las hipótesis) entonces es divisible por algún primo. Pero entonces existe alguno de estos primos, llamémosle p_j que divide a N , pero como p_j también divide a $N - 1$ concluimos que p_j divide a $N - (N - 1) = 1$, lo cual es una contradicción.

Para demostrar $p \Rightarrow q$ en matemática, se utiliza con frecuencia el siguiente argumento

1. Se supone p , y se añade a las premisas.
2. Se demuestra q utilizando p , si es necesario.
3. Se deja de suponer que p es cierto, pero por lo anterior se deduce que $p \Rightarrow q$. Pues si p es verdadera lo hemos probado arriba. Si p es falsa, se concluye trivialmente $p \Rightarrow q$.

Veamos un ejemplo:

EJEMPLO 5.10. Una pareja tiene un niño, y están esperando un segundo hijo. Demostrar que si el segundo hijo es una niña, entonces la pareja tendrá una niña y un niño.

DEMOSTRACIÓN. Sea p = “el primer hijo es un niño” y sea q = “el segundo hijo es una niña”. Queremos demostrar $q \Rightarrow p \wedge q$ usando la premisa p . De acuerdo con el método en discusión puede hacerse como sigue:

1. p es verdadero. La pareja tiene un niño.
2. Se supone q . Es decir, se supone que el segundo hijo es una niña.
3. A partir de p y q se concluye $p \wedge q$ por la ley de combinación.
4. Ahora podemos concluir $q \Rightarrow p \wedge q$.

□

La fundamentación de este método esta dada por el siguiente.

TEOREMA 5.2. (*Teorema de la deducción*). Sean p, q, p_1, \dots, p_m proposiciones. Entonces si p, p_1, \dots, p_m implican lógicamente q , tenemos que p_1, \dots, p_m implican lógicamente $p \Rightarrow q$. En símbolos

$$p, p_1, \dots, p_m \models q, \quad \text{entonces} \quad p_1, \dots, p_m \models p \Rightarrow q.$$

6. Predicados

Consideremos las siguientes proposiciones:

q : El perro es un animal.

r : La rosa es un animal.

s : La vaca es un animal.

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* “es un animal”, y tienen diferente el *sujeto*. La frase “es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

$P(x)$: x es un animal

obtenemos una oración que no es una proposición pero que si a x le damos el valor $x =$ “El perro” obtenemos la proposición

$P(\text{El perro})$: El perro es un animal.

En este ejemplo, *es un animal* es lo que en lógica llamaremos un predicado, $P(x)$ es una función proposicional y x es la variable libre del predicado. La variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso* que en este caso podría ser el universo de los seres vivos. Para cada valor de x se obtiene una proposición con valor de verdad verdadero o falso.

NOTA 6.1. Por abuso de notación usaremos $P(x)$ para simbolizar un predicado.

DEFINICIÓN 6.1. En lógica dar un *predicado* P es establecer una función con dominio en un universo de objetos U tal que para cada elemento a de U , $P(a)$ es una proposición.

También podemos tener predicados de dos o más argumentos. Por ejemplo

$Q(x, y)$: x es mayor que y .

$R(m, n, p)$: $m^2 + n^2 = p^2$.

En estos casos debemos darle valores a todas las variables para obtener una. Así $Q(2, 3)$ es una proposición falsa y $R(3, 4, 5)$ es verdadera. No necesariamente el dominio de una función proposicional de varias variables debe ser de la forma $A \times A$, o $A \times A \times A$, etc., un ejemplo de predicado de dos argumentos es:

$T(x, y)$: x es elemento de y .

En este caso el dominio de T es $U \times V$, donde V es un universo de conjuntos y U es el universo de los elementos de dichos conjuntos.

7. Cuantificadores

Otra forma de obtener proposiciones a partir de predicados es mediante el uso de cuantificadores. Consideremos la proposición:

2 es par y 4 es par y 6 es par y 8 es ...

Una forma más sintética de enunciar este hecho puede ser:

Para todo n , $2n$ es par.

Consideremos la proposición $P(x)$: *$2x$ es par*. Simbolizamos con $\forall n$ a la frase *para todo n* . Entonces considerando al universo $U = \mathbb{N}$, nuestra proposición puede escribirse así:

$$(\forall n) P(n)$$

y esto significa precisamente que $P(1)$ es verdadera y $P(2)$ es verdadera y ...

El símbolo \forall se llama *cuantificador universal* y se utiliza para construir proposiciones compuestas de la forma

$$(\forall x) P(x)$$

donde $P(x)$ es un predicado, y se lee *para toda x se cumple $P(x)$* . La proposición compuesta $(\forall x) P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadero para todo $x \in U$. $(\forall x) P(x)$ es falsa si para algún x $P(x)$ es falso.

EJEMPLO 7.1. Sean los predicados $P(x)$: x es primo e $I(x)$: x es impar. Entonces la proposición

$$(\forall x) [P(x) \Rightarrow I(x)]$$

es falsa, puesto que $P(2) \Rightarrow I(2)$ es falso.

EJEMPLO 7.2. Sea $M(x)$: x es divisible por 9, y $T(x)$: x es divisible por 3. Entonces la proposición:

$$(\forall x) [M(x) \Rightarrow T(x)]$$

es verdadera pues si $x = k \cdot 9$, es decir, si $M(x)$ es verdadero, entonces $x = (k \cdot 3) \cdot 3$; por lo tanto que $M(x) \Rightarrow T(x)$ es siempre verdadero.

Ahora consideremos la frase:

ó 2 es par ó 3 es par ó 5 es par ó 7 es par ó 11 es par ó ...

Es más claro referirse al universo de los números naturales y escribir la proposición:

Existe algún número x , tal que x es primo y x es par.

Denotando con $P(x)$: x es primo y con $Q(x)$: x es par, y usando el símbolo $\exists x$ para denotar *existe algún x* podemos reescribir nuestra proposición:

$$(\exists x) [P(x) \wedge Q(x)]$$

El símbolo \exists se llama *cuantificador existencial* y se utiliza para construir proposiciones compuestas de la forma

$$(\exists x) P(x)$$

donde $P(x)$ es un predicado, y se lee *existe algún x tal que se cumple $P(x)$* o también *existe al menos un x tal que se cumple $P(x)$* . La proposición $(\exists x) P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadero para al menos un x en U y $(\exists x) P(x)$ es falso si $P(x)$ es falso para todo x en U .

EJEMPLO 7.3. Sea $R(n) : n$ es un cuadrado, para $n \in \mathbb{N}$. La proposición

$$(\exists n) [R(n) \wedge R(n+1)]$$

es falsa pues no existe ningún natural tal que él y su sucesor sean cuadrados. ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición si consideramos $U = \mathbb{Z}$?

EJEMPLO 7.4. Si $P(x)$ e $I(x)$ son como en el ejemplo 7.1, entonces la proposición

$$(\exists x) [P(x) \Rightarrow I(x)]$$

es verdadera pues al menos $P(3) \Rightarrow I(3)$ es verdadera.

Para construir proposiciones a partir de predicados de dos o más variables necesitamos tantos cuantificadores como variables. Si $P(x, y)$ es un predicado de dos variables, podemos construir las siguientes proposiciones:

1. $(\forall x) (\forall y) P(x, y)$
2. $(\forall x) (\exists y) P(x, y)$
3. $(\exists x) (\forall y) P(x, y)$
4. $(\exists x) (\exists y) P(x, y)$
5. $(\forall y) (\forall x) P(x, y)$
6. $(\forall y) (\exists x) P(x, y)$
7. $(\exists y) (\forall x) P(x, y)$
8. $(\exists y) (\exists x) P(x, y)$

Observemos que $(\forall x) (\forall y) P(x, y) \equiv (\forall y) (\forall x) P(x, y)$, puesto que ambas son verdaderas únicamente cuando $P(x, y)$ es verdadero para cualquier par (x, y) . Del mismo modo, $(\exists x) (\exists y) P(x, y) \equiv (\exists y) (\exists x) P(x, y)$, ya que ambas son falsas si y sólo si $P(x, y)$ es falso para cualquier par (x, y) .

Sin embargo $(\forall x) (\exists y) P(x, y)$ no necesariamente es lógicamente equivalente a $(\exists y) (\forall x) P(x, y)$, y lo mismo ocurre con $(\exists x) (\forall y) P(x, y)$ y $(\forall y) (\exists x) P(x, y)$.

EJEMPLO 7.5. Consideremos $P(x, y) = x$ divide a y , x e y en el universo de los naturales. Luego,

$$(\forall x) (\exists y) P(x, y)$$

afirma que todo número natural x divide a algún número y .

$$(\exists y) (\forall x) P(x, y)$$

establece que existe un número natural y tal que todo número entero x lo divide.

$$(\forall y) (\exists x) P(x, y)$$

significa que todo número natural y existe un x que lo divide, y por último

$$(\exists x) (\forall y) P(x, y)$$

afirma que existe un número natural x que divide a todos los números naturales y .

¿Cuál es el valor de verdad de cada una de estas proposiciones?

Veamos qué ocurre si negamos una proposición cuantificada. La proposición $(\forall x)P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadero para todo x . Su negación será entonces verdadera si y sólo si existe al menos un x tal que $P(x)$ es falso. Luego

$$\neg (\forall x) P(x) \equiv (\exists x) \neg P(x)$$

Análogamente, la negación de la proposición $(\exists x) P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(x)$ es falso para todo x . Luego

$$\neg (\exists x) P(x) \equiv (\forall x) \neg P(x).$$

EJEMPLO 7.6. Sea $Q(x, y) : x + 2y$ es múltiplo de 3. La proposición $(\exists x) (\forall y) Q(x, y)$ establece que para algún x , $x + 2y$ es múltiplo de 3 para cualquier y .

La negación de esta proposición es:

$$\neg (\exists x) (\forall y) Q(x, y) \equiv (\forall x) (\neg (\forall y) Q(x, y)) \equiv (\forall x) (\exists y) \neg Q(x, y)$$

es decir que para todo x existe al menos un y tal que $x + 2y$ no es múltiplo de 3.

8. Ejercicios

- Sean p, q, r las proposiciones siguientes:

p : “está lloviendo”

q : “el sol está brillando”

r : “hay nubes en el cielo”.

Traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

- Está lloviendo y el Sol está brillando”.
- Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.

- c) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
 d) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
 e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.
2. Sean p , q y r como en el ejercicio anterior. Traduzca lo siguiente a oraciones en español.
- a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
 b) $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$
 c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
 d) $\neg(p \Leftrightarrow (q \vee r))$
 e) $\neg(p \vee q) \wedge r$
3. Evaluar cada proposición según los valores de verdad $p = F$, $q = V$, $r = F$.
- (a) $p \vee q$ (b) $\neg p \vee \neg q$
 (c) $\neg p \vee q$ (d) $p \vee \neg(q \wedge r)$ (e) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)$
4. Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:
- a) $\neg(p \wedge q)$
 b) $\neg(p \vee q)$
 c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \neg q) \Rightarrow (p \wedge q)]$
 d) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \neg q)$
 e) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg q \wedge p)$
 f) $\neg(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)$
 g) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
5. Suponga que a , b y c son números reales. Represente en forma simbólica los enunciados dados tomando:
- $$p : a < b, \quad q : b < c, \quad r : a < c.$$
- a) $a < b$ y $b < c$.
 b) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $a \geq c$.
 c) No es cierto que $(a < b$ y $a < c)$.
 d) (No es verdad que $(a < b$ y $(a < c$ o $b < c))$) o $(a \geq b$ y $a < c)$.
6. Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.
- a) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$.
 b) Si $2 + 2 = 5$, entonces $2 + 4 = 8$.

c) Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 6$.

d) Si $2 + 2 = 5$, entonces $2 + 4 = 6$.

7. Supóngase que sabemos que $p \Rightarrow q$ es falso. Proporcione los valores de verdad para

$$(a) \quad p \wedge q \qquad (b) \quad p \vee q \qquad (c) \quad q \Rightarrow p$$

8. Probar las siguientes implicaciones lógicas:

a) $p \wedge (q \Rightarrow r) \models (q \wedge r) \Rightarrow p$.

b) $(p \wedge q) \vee [\neg(p \Rightarrow q)] \models (q \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)$.

c) $(r \Rightarrow q) \wedge p \models (r \wedge q) \Rightarrow p$.

d) $(p \wedge r) \vee [\neg(p \Rightarrow r)] \models (r \wedge p) \vee (\neg r \wedge p)$.

e) $(p \wedge r) \models p \wedge (q \Rightarrow r)$.

f) $(p \Leftrightarrow q) \vee (r \wedge q) \Rightarrow p$.

9. Indique si las siguientes implicaciones lógicas son correctas o no:

a) $(p \wedge r) \models p \wedge (q \vee r)$.

b) $(p \Rightarrow \neg q) \models (q \Rightarrow p)$.

c) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \models p \vee \neg q$.

d) $(p \Rightarrow (q \vee \neg r)) \models q \Rightarrow (\neg p \wedge r)$

10. Pruebe que $P \models Q$, siendo:

a) $P = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r), \quad Q = p \Rightarrow r$.

b) $P = (p \vee q) \wedge \neg p, \quad Q = q$.

c) $P = (p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r), \quad Q = p \Leftrightarrow q$.

d) $P = p, \quad Q = q \Rightarrow (p \wedge q)$.

11. Encuentre proposiciones lógicamente equivalentes a las siguientes utilizando solamente la negación y la disyunción (\vee).

$$(a) \quad p \Leftrightarrow q \qquad (b) \quad (p \wedge q) \Rightarrow (\neg p \wedge r) \qquad (c) \quad p \not\leq q \qquad (d) \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \vee r)$$

12. Represente cada proposición en la forma de una proposición condicional. Enuncie la recíproca y la contrarrecíproca de cada una.

a) $|x| < 2$ siempre que $0 < x < 2$.

b) Una condición suficiente para que f sea integrable es que f sea continua.

13. Represente simbólicamente cada una de las proposiciones condicionales siguientes. Escriba su recíproca y su contrarrecíproca tanto con símbolos como en palabras. Determine también el valor de verdad para la proposición condicional, para su recíproca y para su contrarrecíproca.

- a) Si $4 < 6$, entonces $9 < 12$.
- b) Si $4 > 6$, entonces $9 > 12$.
- c) $|1| < 3$ si $-3 < 1 < 3$.
- d) $|4| < 3$ si $-3 < 4 < 3$.

14. Formule simbólicamente los siguientes razonamientos y determine cuáles son válidos siendo:

- p : Estudio mucho.
 q : Obtengo 10 como calificación.
 r : Me hago rico.

a)

Si estudio mucho entonces obtengo 10 como calificación.
 Estudio mucho.

 Obtengo 10 como calificación.

b)

Si estudio mucho entonces obtengo 10 como calificación.
 Si no me hago rico entonces obtengo 10 como calificación.

 Me hago rico.

c)

Estudio mucho si y sólo si me hago rico.
 Me hago rico.

 Estudio mucho.

d)

Si estudio mucho o me hago rico entonces obtengo 10 como calificación.
 Obtengo 10 como calificación.

 Si no estudio mucho entonces me hago rico.

e)

Si estudio mucho entonces obtengo 10 como calificación o me hago rico.
 No obtengo 10 como calificación y no me hago rico.

 No estudio mucho.

15. Testee la validez de los siguientes argumentos:

- a) Si abandono los estudios consigo un trabajo en el banco. No abandono mis estudios por lo tanto no consigo trabajo en el banco.
 - b) Juan es policía o es futbolista. Si es policía entonces tiene pies grandes. Juan no tiene pies grandes por lo tanto es futbolista.
 - c) Si esto te resulta difícil entonces eres un incapaz o no has estudiado. Has estudiado y no eres incapaz por lo tanto esto no te resulta difícil.
 - d) Puedes salir si y sólo si lavas los platos. Si sales entonces no mirarás televisión. Por lo tanto o miras televisión o lavas los platos pero no ambos.
 - e) Si no especifico las condiciones iniciales entonces mi programa no empezará. Si programo un ciclo infinito entonces mi programa no terminará. Si el programa no empieza o si no termina entonces el programa fallará. De ahí que si el programa falla entonces especifique las condiciones iniciales y no programé un ciclo infinito.
16. Considere las siguientes hipótesis. Si tomo el autobús o el subte, entonces llegaré tarde a mi cita. Si tomo un taxi entonces no llegaré tarde a mi cita y me quedaré sin dinero. Llegaré a tiempo a mi cita.
- ¿Cuáles de las siguientes conclusiones pueden deducirse de dichas hipótesis?
- a) Tomaré un taxi.
 - b) Me quedaré sin dinero.
 - c) No tomaré el subte.
 - d) Si me quedo sin dinero entonces tomé un taxi.
 - e) Si tomo el autobús entonces no me quedaré sin dinero.
17. Demuestre que $n^4 - n^2$ es divisible por 3 para todo n natural.
18. Muestre que si $n + 2$ es divisible por 4 entonces $n^2 - 4$ es divisible por 16.
19. Pruebe que si m, n son enteros positivos tales que $m \cdot n = 100$ entonces $m \leq 10$ o $n \leq 10$.
20. Pruebe que la suma de dos enteros consecutivos es impar.
21. Pruebe, usando la contrarrecíproca, que si n^2 no es divisible por 5 entonces n no es divisible por 5.
22. Pruebe, usando la contrarrecíproca que $\sqrt{2}$ es irracional.
23. Pruebe, por contradicción, que $1 + \sqrt{2}$ no es racional.

24. Pruebe o refute que si a , b y c son enteros tales que a divide a $b + c$ entonces a divide a b o a divide a c .
25. Pruebe por contradicción que si $x \cdot y = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$. Suponga que si a , b y c son reales y $ab = ac$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$.
26. Verifique, dando una prueba por contradicción que si 100 pelotas se colocan en 9 cajas alguna de ellas tiene por lo menos 12 pelotas.
27. Escriba las siguientes frases con notación lógica y escriba también sus negaciones. Cuando use cuantificadores especifique los universos, utilice \mathbb{R} si no se especifica ningún universo:
- Si $x < y$ y $y < z$, entonces $x < z$.
 - Para toda $x > 0$, existe n en \mathbb{N} tal que $n > x$ y $x > 1/n$.
 - Para toda $m, n \in \mathbb{N}$ existe p en \mathbb{N} tal que $m < p$ y $p < n$.
 - Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $un = n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
 - Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$.
 - Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n$ y $n < 2^{m+1}$.
28. Con el universo del discurso \mathbb{N} , sea $p(n) = "n \text{ es primo}"$ y $e(n) = "n \text{ es par}"$. Escriba lo siguiente en palabras:
- $\exists m \forall n [e(n) \wedge p(m + n)]$
 - $\forall n \exists m [\neg e(n) \Rightarrow e(m + n)]$.
- Traduzca lo siguiente a notación lógica utilizando p y e .
- Hay dos enteros primos cuya suma es par.
 - Si la suma de dos primos es par entonces ninguno de ellos es 2.
 - La suma de dos enteros primos es impar.

29. Considere los siguientes predicados:

$$P(x, y) : x > y$$

$$Q(x, y) : x \leq y$$

$$R(x) : x - 7 = 2$$

$$S(x) : x > 9$$

Si el universo del discurso son los números reales, dé el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- $\exists x [R(x)]$
- $\forall y [\neg S(y)]$

- c) $\forall x \exists y [P(x, y)]$
- d) $\exists y \forall x [Q(x, y)]$
- e) $\forall x \forall y [P(x, y) \vee Q(x, y)]$
- f) $\exists y \forall x [S(y) \wedge Q(x, y)]$
- g) $\forall x \forall y [\{R(x) \wedge S(y)\} \Rightarrow Q(x, y)]$.

30. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, donde el universo del discurso es \mathbb{N} .

- a) $\forall m \exists n [2n = m]$
- b) $\forall m \exists n [2m = n]$
- c) $\exists n \forall m [2m = n]$
- d) $\exists n \forall m [2n = m]$
- e) $\forall m \forall n [-(2n = m)]$

31. Escriba la negación de las siguientes proposiciones sin usar el conectivo \neg (negación).

- a) $\exists x \forall y \exists z [z > y \Rightarrow z < x^2]$.
- b) $\forall x \forall y \exists z [x < y \Rightarrow z > x]$.
- c) $\exists x \forall y (x + y^2 > 0 \Rightarrow y \geq x)$.
- d) $\exists x [\forall m \forall n (x^m > 1 \wedge (n < m \Rightarrow x^n > x^m))]$.

32. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones donde el universo del discurso es \mathbb{R} . Además niegue cada una de ellas y escriba la negación usando los cuantificadores \forall y \exists .

- a) $\forall x \exists y [xy = 1]$
- b) $\exists y \forall x [xy = 1]$
- c) $\exists x \exists y [xy = 1]$
- d) $\forall x \forall y [(x + y)^2 = x^2 + y^2]$
- e) $\forall x \exists y [(x + y)^2 = x^2 + y^2]$
- f) $\exists y \forall x [(x + y)^2 = x^2 + y^2]$
- g) $\exists x \exists y [(x + 2y = 4) \wedge (2y - y = 2)]$
- h) $\exists x \exists y [x^2 + y^2 + 1 = 2xy]$

33. En este problema $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y el universo del discurso es \mathbb{N} . Diga si es verdadero o falso:

- a) A es el conjunto de los enteros pares en \mathbb{N} menores que 12.
- b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n < 24\}$
- c) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m [2m = n \Rightarrow m < 6]\}$
- d) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m [2m = n \wedge m < 6]\}$

e) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m [2m = n \Rightarrow m < 6]\}$

f) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m [2m = n \wedge m < 6]\}$

g) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es par y } n^2 \leq 100\}$

h) $\forall n[n \in A \Rightarrow n \leq 10]$

i) $3 \in A \Rightarrow 3 < 10$

j) $12 \in A \Rightarrow 12 < 10$

k) $8 \in A \Rightarrow 8 < 10$.

Capítulo 3

Relaciones

1. Relaciones

Recordemos que una función proposicional o un predicado de dos argumentos establece una propiedad entre dos objetos, x e y . Por ejemplo:

$F(x, y) : x$ es mayor que y ,

$C(x, y) : x$ es la capital de y ,

$P(x, y) : x$ es subconjunto de y ,

$Q(x, y) : x$ es una recta paralela a y .

Nótese que es importante el *orden* de los objetos x e y , por un lado porque pueden pertenecer a universos distintos, y por otro lado porque al alterar el orden puede cambiar el valor de verdad de la proposición. Esto ocurre con los predicados F , C y P . Un caso distinto es el del predicado Q , donde el orden no importa.

EJEMPLO 1.1. Si F , C y P son los predicados dados anteriormente, entonces

$$\begin{aligned} F(2, 3) &= F & P(\emptyset, \{1\}) &= V & C(\text{El Cairo, Egipto}) &= V \\ F(3, 2) &= V & P(\{1\}, \emptyset) &= F \end{aligned}$$

Estaríamos tentados de decir que $C(\text{Egipto, El Cairo})$ es falso, sin embargo la expresión anterior no tiene sentido, pues el predicado requiere en la primera posición una ciudad y en la segunda un país.

Si $F(x, y)$ es un predicado y a y b son dos objetos, diremos que a está relacionado con b si $F(a, b)$ es verdadero y que el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $F(a, b)$ es verdadero es una *relación*. Una definición formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.1. Sean A y B conjuntos. Una *relación* de A a B (o entre A y B) es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Si R es una relación entre A y B decimos que a está relacionado con b y lo denotamos $a \sim_R b$ o simplemente $a \sim b$ si $(a, b) \in R$. Si $A = B$ solemos decir que R es una relación sobre A .

EJEMPLO 1.2. Sea $A = \{2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6\}$, y sea

$$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B \text{ y } a \text{ divide a } b\}$$

Luego $R = \{(2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6)\}$ y decimos que $2 \sim 4$, $2 \sim 6$, $3 \sim 3$ y $3 \sim 6$. También decimos 2 no está relacionado con 5 y que 3 no está relacionado con 4 y se escribe $2 \not\sim 5$ y $3 \not\sim 4$.

EJEMPLO 1.3. Sea F el predicado “ x es menor que y ” en el universo $\{1, 2, 3, 4\}$. Entonces F expresa la relación

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } a < b\}.$$

Es decir $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

EJEMPLO 1.4. Sea $A = B = \mathbb{Z}$, $R = \{(x, y) \mid y = x^2\}$. R es un subconjunto de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y con una cantidad infinita de elementos:

$$\begin{array}{ll} -1 \sim 1 & 1 \sim 1 \\ -2 \sim 4 & 2 \sim 4 \\ -3 \sim 9 & 3 \sim 9 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

DEFINICIÓN 1.2. Sea R una relación entre A y B , el *dominio de R* es el conjunto de los elementos de A que están relacionados con algún elemento de B . En símbolos

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

Análogamente, definimos el *rango de R* como el subconjunto de formado por los elementos de B que estén relacionados con elementos de A , simbólicamente

$$\text{Ran}(R) = \{b \in B \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

Por ejemplo si consideramos la relación R definida por “ x es padre de y ” en el universo de las personas vivas, entonces el dominio de R es el conjunto de personas que son hombres y tienen hijos. El rango de R es el conjunto de personas que tiene el padre vivo. Como práctica, presentemos lo anterior en una forma más simbólica: sea $A = \{a \mid a \text{ es una persona viva}\}$, entonces

$$R = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \text{ es el padre de } b\}$$

y

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \text{existe } b \in A \text{ tal que } (a, b) \in R\},$$

$$\text{Ran}(R) = \{b \in A \mid \text{existe } a \in A \text{ tal que } (a, b) \in R\}.$$

DEFINICIÓN 1.3. Sea R_1 una relación de A a B y sea R_2 una relación de B a C . La *composición* de R_2 con R_1 es la relación entre A y C dada por:

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \mid \text{existe algún } b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R_1 \text{ y } (b, c) \in R_2\}$$

DEFINICIÓN 1.4. Sea R una relación entre A y B . Entonces la relación *inversa*, es una relación entre B y A que está dada por:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A \text{ y } (a, b) \in R\}.$$

EJEMPLO 1.5. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y las siguientes relaciones sobre A : $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ es par}\}$ y $S = \{(a, b) \mid b - a = 3\}$. Describir por extensión los conjuntos R^{-1} , S^{-1} y $S \circ R$.

Por definición $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} = \{(b, a) \mid a - b \text{ es par}\} = R$, luego

$$R^{-1} = R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), \\ (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Por otro lado $S^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in S\} = \{(b, a) \mid b - a = 3\}$, es decir

$$S^{-1} = \{(5, 2), (4, 1)\}.$$

Finalmente, $S \circ R = \{(a, c) \mid \text{existe algún } b \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ y } (b, c) \in S\} = \{(a, c) \mid \text{existe algún } b \text{ tal que } a - b \text{ es par y } c - b = 3\}$, comprobando elemento por elemento, obtenemos

$$S \circ R = \{\}$$

Tres tipos de relaciones son las más relevantes: las funciones, las relaciones de orden y las de equivalencia. Las funciones son relaciones entre dos conjuntos que pueden ser distintos y no se incluirán en este texto debido a que es usual verlas en profundidad en otras materias. Las relaciones de orden y de equivalencia son relaciones sobre un mismo conjunto y veremos su definición y algunas propiedades en este capítulo.

2. Propiedades de las relaciones

Consideraremos de ahora en más relaciones sobre un mismo conjunto.

DEFINICIÓN 2.1. Sea R una relación sobre un conjunto A . Decimos que R es

- (a) *reflexiva* si y sólo si para todo a en A , $a \sim a$, en símbolos:

$$\forall a [a \sim a];$$

- (b) *simétrica* si y sólo si para todo $a, b \in A$, $a \sim b$ implica que $b \sim a$, en símbolos:

$$\forall a \forall b [a \sim b \Rightarrow b \sim a];$$

- (c) *antisimétrica* si y sólo si para todo $a, b \in A$ $a \sim b$ y $b \sim a$ implican que $a = b$, en símbolos:

$$\forall a \forall b [(a \sim b) \wedge (b \sim a) \Rightarrow a = b];$$

- (d) *transitiva* si y sólo si para todo a, b y c , $a \sim b$ y $b \sim c$ implican que $a \sim c$, en símbolos:

$$\forall a \forall b \forall c [(a \sim b) \wedge (b \sim c) \Rightarrow a \sim c].$$

EJEMPLO 2.1. Sea R la relación sobre \mathbb{N} dada por:

$$a \sim b \text{ si y sólo si } a \text{ divide a } b.$$

- (1) Es reflexiva:

$$a = a \cdot 1, \text{ luego } a \text{ divide a } a \text{ para todo } a \in \mathbb{N};$$

- (2) no es simétrica, pues

$$2 \text{ divide a } 4 \text{ pero } 4 \text{ no divide a } 2;$$

- (3) es antisimétrica, pues

$$\text{si } a \text{ divide a } b \text{ entonces } b = a \cdot m \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}, m > 0,$$

$$\text{si } b \text{ divide a } a \text{ entonces } a = b \cdot k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}, k > 0,$$

por lo tanto $a = b \cdot k = (a \cdot m) \cdot k = a \cdot (m \cdot k)$, de donde se deduce que $m = k = 1$ y entonces $a = b$.

- (4) es transitiva, pues

$$\text{si } a \text{ divide a } b \text{ entonces } b = a \cdot k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{si } b \text{ divide a } c \text{ entonces } c = b \cdot j, \text{ para algún } j \in \mathbb{Z},$$

$$\text{pero entonces } c = b \cdot j = a(k \cdot j), \text{ es decir que } a \text{ divide a } c.$$

EJEMPLO 2.2. Sea $A = \mathbb{Z}$, y sea R la relación dada por

$$a \sim b \text{ si y sólo si } a \text{ y } b \text{ tienen la misma paridad.}$$

Observemos que si a y b son ambos pares o ambos impares entonces $a - b$ es par y que si tienen distinta paridad entonces $a - b$ es impar. Luego

$$R = \{(m, n) \mid m - n \text{ es par} \}$$

- (1) es reflexiva,

$$m - m = 0, \text{ y } 0 \text{ es par};$$

(2) es simétrica

si $m - n$ es par, entonces $n - m = -(m - n)$ es par;

(3) no es antisimétrica

$2 \sim 4$ y $4 \sim 2$ pero $2 \neq 4$;

(4) es transitiva

si $m - n$ es par y $n - p$ es par entonces $m - p = (m - n) + (n - p)$ que es par.

EJEMPLO 2.3. Sea $A = \mathbb{R}$ y sea R la relación dada por $a \sim b$ si y sólo si $a \leq b$. Entonces R

(1) es reflexiva:

$a \leq a$ para todo $a \in \mathbb{R}$;

(2) no es simétrica:

$2 \leq 5$ y $5 \not\leq 2$;

(3) es antisimétrica:

si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces alguna de las siguientes proposiciones debe ser cierta:

$a < b$ y $b < a$,

$a < b$ y $b = a$,

$a = b$ y $b < a$ o

$a = b$ y $b = a$.

Los tres primeros casos no son posibles, luego si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

(4) es transitiva:

Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a - c = (a - b) + (b - c) \leq 0$, por lo tanto $a \leq c$.

EJEMPLO 2.4. Sea A el conjunto formado por las rectas de un plano, y sea R la relación dada por

$$R = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \text{ es perpendicular a } l_2\}.$$

(1) No es reflexiva pues ninguna recta es perpendicular a si misma;

(2) es simétrica pues si $l_1 \perp l_2$ entonces $l_2 \perp l_1$;

(3) no es antisimétrica, porque las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son perpendiculares entre sí pero son distintas; y

(4) no es transitiva, puesto que si $l_1 \perp l_2$ y $l_2 \perp l_3$ entonces l_1 es paralela a l_3 .

3. Relaciones de orden

3.1. Definición y propiedades básicas.

DEFINICIÓN 3.1. Un *orden parcial* R sobre un conjunto es una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Cuando R sea un orden parcial usaremos la notación $a \preceq b$ si $(a, b) \in R$. Un par (S, \preceq) donde S es un conjunto y \preceq es un orden parcial sobre S se llama *conjunto parcialmente ordenado*.

- EJEMPLO 3.1.
1. La relación \preceq sobre \mathbb{R} dada por $x \preceq y$ si y sólo si $x \geq y$ es un orden parcial.
 2. Si tomamos $x \sim y$ si y sólo si $x > y$ no es un orden parcial puesto que no es reflexiva.
 3. La relación sobre \mathbb{N} dada por $m \preceq n$ si y sólo si m divide a n es un orden parcial. Si en lugar de \mathbb{N} tomamos \mathbb{Z} , ¿es orden parcial?

El siguiente teorema dice que cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto parcialmente ordenado.

TEOREMA 3.1. *Sea R un orden parcial sobre A y sea B un subconjunto de A . Entonces $S = R \cap (B \times B)$ es un orden parcial sobre B .*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que S es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. Es reflexiva:

si $b \in B$, entonces $(b, b) \in B \times B$ y como además $B \subseteq A$ entonces también $(b, b) \in R$, por lo tanto $(b, b) \in S$.

2. Es antisimétrica:

si $b_1, b_2 \in B$ y (b_1, b_2) y $(b_2, b_1) \in S$, entonces (b_1, b_2) y $(b_2, b_1) \in R$. Como R es antisimétrica se cumple que $b_1 = b_2$.

3. Es transitiva:

sean b_1, b_2 y $b_3 \in B$ tales que $(b_1, b_2) \in S$ y $(b_2, b_3) \in S$. Entonces $(b_1, b_2) \in R$ y $(b_2, b_3) \in R$. Esto implica que $(b_1, b_3) \in R \cap (B \times B) = S$.

□

Decimos que S es la restricción de R a B y que B hereda la relación S de la relación R sobre A . Si \preceq es un orden parcial sobre \mathbb{R} entonces también lo es sobre \mathbb{Q} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} , $[0, 1]$, $\{-1, 1\}$ y cualquier otro subconjunto de \mathbb{R} .

3.2. Elementos maximales y minimales. En un subconjunto de \mathbb{R} ordenado por la relación \leq (menor o igual), podemos tener un elemento mínimo y uno máximo, o sólo uno de ellos o quizás ninguno.

EJEMPLO 3.2. (\mathbb{Z}, \leq) no tiene ningún elemento máximo ni ninguno mínimo.

(\mathbb{N}, \leq) tiene un elemento mínimo: el 1, pero no tiene elemento máximo.

$[0, 1]$ tiene un elemento mínimo que es el 0 y un elemento máximo que es el 1.

EJEMPLO 3.3. Ahora consideremos el conjunto $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de partes y \subseteq la relación de inclusión. Tomemos X el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ dado por

$$X = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$$

Podríamos decir que $\{a\}$ es *más chico* que $\{a, b\}$ y que $\{a, c\}$, o bien que $\{a\}$ es el elemento mínimo. Sin embargo, no podemos decir que haya un elemento máximo, pues $\{a, b\} \not\subseteq \{a, c\}$ y $\{a, c\} \not\subseteq \{a, b\}$, a pesar de que $\{a\} \subseteq \{a, b\}$ y $\{b\} \subseteq \{b, c\}$.

Para precisar todos estos conceptos daremos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 3.2. Sea \preceq un orden parcial sobre un conjunto A . El *elemento máximo* de A (si existe) es el elemento α en A que cumple que

$$a \preceq \alpha, \quad \text{para todo } a \in A.$$

El *elemento mínimo* de A (si existe) es el elemento β en A que cumple que

$$\beta \preceq a, \quad \text{para todo } a \in A.$$

Volviendo al ejemplo 3.3 podemos verificar que no hay *un* elemento máximo. Sin embargo no hay ningún elemento *más grande* que $\{a, b\}$ ni que $\{a, c\}$. Esto se formaliza en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.3. Sea A un conjunto parcialmente ordenado con orden parcial \preceq . Un elemento $x \in A$ se dice *maximal* si para todo a en A , $x \preceq a$ implica que $x = a$.

Un elemento $y \in A$ se dice *minimal* si para todo a en A , $a \preceq y$ implica que $a = y$.

EJEMPLO 3.4. Sea $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ordenado por divisibilidad, esto es $a \preceq b$ si y sólo si a divide a b . En este caso tenemos

4 elementos minimales: 2, 3, 5, 7;

4 elementos maximales: 5, 6, 7, 8;

y no hay elemento mínimo ni elemento máximo.

EJEMPLO 3.5. Sea $A = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ con la relación de inclusión: \subseteq . Entonces

hay 3 elementos minimales: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$;

hay 1 elemento maximal: $\{a, b, c\}$;

hay 1 elemento máximo: $\{a, b, c\}$;

y no hay elemento mínimo.

Observemos que un conjunto puede tener varios elementos maximales o varios elementos minimales. Sin embargo, si α es un elemento máximo de A entonces α es único, y si β es un elemento mínimo de A entonces β es también único. Enunciamos y probamos este hecho en el siguiente teorema:

TEOREMA 3.2. Sea \preceq un orden parcial sobre A .

1. Si A tiene un elemento máximo α entonces α es maximal y no existen otros elementos maximales.

2. Si A tiene un elemento mínimo β entonces β es minimal y no existen otros elementos minimales.

DEMOSTRACIÓN. Sea α un elemento máximo. Luego para todo $a \in A$ se cumple que $a \preceq \alpha$. Luego, si existe $b \in A$ tal que $\alpha \preceq b$ por la propiedad antisimétrica se cumple que $\alpha = b$.

Si γ es otro elemento maximal, entonces por ser γ y α ambos maximales se cumple que

$$\alpha \preceq \gamma \quad \text{y} \quad \gamma \preceq \alpha.$$

Como \preceq es antisimétrica se sigue que $\alpha = \gamma$.

La prueba de que β es único es similar y se deja como ejercicio para el lector. \square

En el caso del orden parcial \leq dado en \mathbb{R} tenemos que para todo x, y en \mathbb{R} se cumple que o bien $x \leq y$ o bien que $y \leq x$. Si ahora tomamos la relación \preceq sobre \mathbb{N} dada por: $a \sim b$ si y sólo si a divide a b entonces puede ocurrir que $a \not\preceq b$ y que $b \not\preceq a$, por ejemplo, 5 no divide a 8 y 8 no divide a 5.

DEFINICIÓN 3.4. Un *orden total* sobre un conjunto A es un orden parcial \preceq sobre A que satisface la *ley de dicotomía*: para todo $a, b \in A$, $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

EJEMPLO 3.6. Los siguientes órdenes son totales:

1. El orden \leq en \mathbb{R} y el orden \geq en \mathbb{R} .
2. El orden lexicográfico en un diccionario.
3. El orden “ a divide a b ” en el conjunto $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

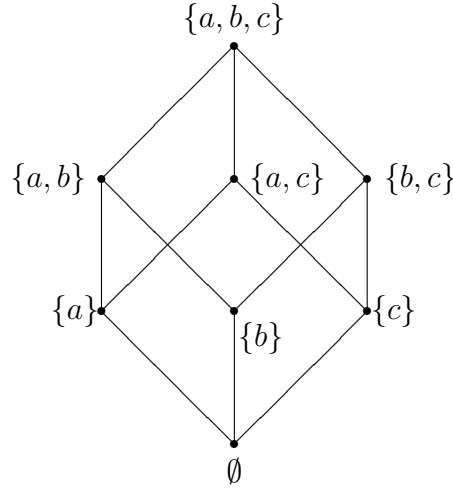
3.3. Diagramas de Hasse [*]. Sea A un conjunto finito parcialmente ordenado. Sean $a, b \in A$. Decimos que b *cubre* a a si $a \preceq b$ y no existe c tal que $a \preceq c$ y $c \preceq b$.

EJEMPLO 3.7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ con la relación \leq . Entonces 3 cubre a 2, pero 4 no cubre a 2 pues $2 \leq 3$ y $3 \leq 4$.

EJEMPLO 3.8. Sea $X = \{2, 3, 5, 6\}$ con la relación dada por “ a divide a b ”. Entonces 6 cubre a 2, y 6 cubre a 3.

Un *diagrama de Hasse* para un conjunto parcialmente ordenado finito consiste de puntos en el plano llamados *vértices* que representan los elementos del conjunto y de arcos o segmentos ascendentes que unen dos vértices a y b si y sólo si b cubre a a .

EJEMPLO 3.9. El diagrama de Hasse para $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ ordenado por inclusión es el siguiente.



EJEMPLO 3.10. Sea A un conjunto finito con orden total. Un elemento de A no puede cubrir a dos. Pues, si $c \in A$ cubre a a y a b entonces o $a \preceq b$, en cuyo caso c no cubre a a , o bien $b \preceq a$, y entonces c no cubre a b .

En un diagrama de Hasse se ven claramente los elementos maximales, los minimales, los máximos y los mínimos, si es que existen.

Si un elemento es minimal entonces no cubre a ningún otro, y si un elemento es maximal ningún elemento lo cubre. Un elemento es mínimo si cualquier otro elemento puede ser alcanzado a partir de él a través de una sucesión de segmentos ascendentes. Un elemento es máximo si puede ser alcanzado desde cualquier otro a través de una sucesión de arcos ascendentes.

TEOREMA 3.3. 1. Sea A un conjunto finito no vacío. Entonces A contiene al menos un elemento minimal y si existe sólo uno entonces es el mínimo.
2. Sea A un conjunto finito no vacío. Entonces A contiene al menos un elemento maximal y si existe sólo uno entonces es el máximo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_1 \in A$. Si x_1 es minimal, ya está probado. Si no lo es, entonces existe un x_2 tal que $x_2 \preceq x_1$ y $x_2 \neq x_1$.

O x_2 es minimal o existe un x_3 tal que $x_3 \preceq x_2$ y $x_3 \neq x_2$. Como A tiene finitos elementos la sucesión x_1, x_2, \dots deberá terminar en algún x_k , y x_k es entonces el elemento minimal.

Si además β es el único elemento minimal y a es otro elemento de A entonces como a no es minimal existe una cadena $a = a_1, a_2, \dots$ que termina con un elemento minimal a_n . Pero entonces $a_n = \beta$ y por lo tanto $\beta \preceq a$. Como esto se cumple para cualquier $a \in A$ se sigue que β es mínimo. \square

4. Relaciones de equivalencia

DEFINICIÓN 4.1. Una relación \simeq sobre un conjunto A es de *equivalencia* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

EJEMPLO 4.1. Sea \simeq la relación en \mathbb{R} dada por $x \simeq y$ si y sólo si $x^3 = y^3$. Entonces \simeq es:

1. reflexiva:

$$x^3 = x^3 \text{ para todo } x \in \mathbb{R};$$

2. simétrica:

$$\text{si } x^3 = y^3, \text{ entonces } y^3 = x^3 \text{ y}$$

3. transitiva:

$$\text{si } x^3 = y^3 \text{ y } y^3 = z^3 \text{ entonces } x^3 = z^3.$$

EJEMPLO 4.2. Sea \simeq la relación dada en \mathbb{Z} por $x \simeq y$ si y sólo si 5 divide a $x - y$. Entonces \simeq es:

1. reflexiva:

$$5 \text{ divide a } x - x = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{Z};$$

2. simétrica:

si 5 divide a $m - n$, entonces $m - n = k5$. Por lo tanto, $n - m = -(m - n) = -k5$, es decir que 5 divide a $n - m$. Por último

3. es transitiva:

si 5 divide a $(m - n)$ y 5 divide a $(n - p)$ entonces 5 divide a $(m - n) + (n - p) = (m - p)$.

EJEMPLO 4.3. Sea X un conjunto y sea $A = \mathcal{P}(X)$. Sea \simeq la relación en A dada por

$$U \simeq V \text{ si y sólo si } |U| = |V|.$$

Entonces \simeq es:

1. reflexiva: pues para todo $U \subset X$ se cumple que $|U| = |U|$;

2. simétrica: pues si $|U| = |V|$ entonces $|V| = |U|$; y

3. transitiva: pues si $|U| = |V|$ y $|V| = |W|$ entonces $|U| = |V| = |W|$.

Las relaciones de equivalencia están ligadas a las particiones de un conjunto. Recordamos entonces la definición de partición de un conjunto:

DEFINICIÓN 4.2. Una *partición* de un conjunto A es una familia de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos entre sí y cuya unión es todo A .

EJEMPLO 4.4. Las siguientes son particiones de $A = \{a, b, c\}$:

$$P_1 : \quad \{a\}, \{b\}, \{c\};$$

$$P_2 : \quad \{a\}, \{b, c\};$$

$$P_3 : \{a, b, c\}.$$

Si \simeq es una relación de equivalencia sobre A podemos agrupar a los elementos de A en subconjuntos de tal manera que en un mismo subconjunto todos los elementos sean equivalentes entre sí:

EJEMPLO 4.5. Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sea \simeq la relación dada por:

$$a \simeq b \text{ si y sólo si } 3 \text{ divide a } (a - b).$$

Esta relación conduce a la siguiente partición:

$$\{0, 3, 6\}, \quad \{1, 4\}, \quad \{2, 5\}.$$

DEFINICIÓN 4.3. Sea \simeq una relación de equivalencia sobre un conjunto A y sea x un elemento de A . La *clase de equivalencia de x* se denota por $[x]$ y es el conjunto

$$[x] = \{y \mid y \in A \text{ y } x \simeq y\}.$$

TEOREMA 4.1. Sea \simeq una relación de equivalencia en un conjunto A y sean x, y elementos de A . Entonces $[x] = [y]$ si y sólo si $x \simeq y$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $[x]$ e $[y]$ dos clases de equivalencia, tales que $[x] = [y]$. Eso significa que

$$\{a \mid x \simeq a\} = \{a \mid y \simeq a\}.$$

Puesto que $x \simeq x$ eso significa que $x \in [x]$ y por lo tanto $x \in [y]$. Luego $x \simeq y$.

Recíprocamente, si $x \simeq y$ queremos ver que $[x] = [y]$. Probaremos entonces que $[y] \subseteq [x]$ y que $[x] \subseteq [y]$. Ahora bien, $a \in [x]$ si y sólo si $a \simeq x$. Como $x \simeq y$ por transitividad se sigue que $a \simeq y$ y por lo tanto $a \in [y]$.

Análogamente, $a \in [y]$ si y sólo si $a \simeq y$. Pero entonces $a \simeq y$ e $y \simeq x$ de donde se sigue que $a \simeq x$ y por lo tanto $a \in [x]$. \square

TEOREMA 4.2. Sea \simeq una relación de equivalencia sobre un conjunto A no vacío. La familia de clases de equivalencia es una partición de A .

- DEMOSTRACIÓN.
1. Probamos que la unión de las clases es A . Efectivamente, para todo x elemento de A se cumple que $x \in [x]$, por lo tanto todo elemento de A pertenece a alguna clase de equivalencia.
 2. Probamos que la intersección de dos clases distintas es vacía. Pues si $[x] \neq [y]$ y $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ significa que existe un elemento a en $[x] \cap [y]$. Por lo tanto $a \simeq x$ y $a \simeq y$ y por transitividad $x \simeq y$. Pero entonces, por el teorema anterior $[x] = [y]$, lo cual es una contradicción.

\square

5. Cardinales

Si un conjunto tiene una cantidad finita de elementos se dice que el conjunto es *finito*, de lo contrario se dice que el conjunto es *infinito*. Si un conjunto A es finito y posee m elementos, entonces existe una función biyectiva entre el intervalo natural $[1, m]$ y A . Luego se dice que el *cardinal* de A es m y se escribe $|A| = m$. Intuitivamente, el cardinal de un conjunto es el número de elementos de dicho conjunto.

Si A es infinito, el cardinal de A no se puede determinar con un número, pero se pueden comparar los cardinales de dos conjuntos. Si A y B son dos conjuntos, (finitos o infinitos), y existe una función biyectiva $f : A \mapsto B$, se dice que el cardinal de A es igual al cardinal de B y se escribe $|A| = |B|$. Si existe una función inyectiva $f : A \mapsto B$ pero no existe ninguna biyectiva, se dice que el cardinal de A es menor que el cardinal de B y se escribe $|A| < |B|$.

EJEMPLO 5.1. Si $A = \{a, b, c\}$, entonces podemos definir $f : \{1, 2, 3\} \mapsto A$ como $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, que es una función biyectiva. Luego $|A| = 3$, lo cual es fácil de determinar contando el número de elementos de A .

EJEMPLO 5.2. \mathbb{N} y \mathbb{Z} son conjuntos infinitos, pero ambos con el mismo cardinal. En efecto, la función $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ -(n-1)/2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

es biyectiva.

\mathbb{Q} también posee el cardinal de los naturales pero $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

El $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ para todo conjunto A . Si un conjunto A es finito y $|A| = n$ entonces $\mathcal{P}(A)$ es finito y $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, aunque no hemos de probar este hecho.

6. Ejercicios

- Determine si las siguientes relaciones sobre \mathbb{N} son reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:
 - $(x, y) \in R$ sii $x = y^2$
 - $(x, y) \in R$ sii $x > y$
 - $(x, y) \in R$ sii $x \geq y$
 - $(x, y) \in R$ sii $x = y$
 - $(x, y) \in R$ sii si el mcd de x e y es 1
 - $(x, y) \in R$ sii si 3 divide a $(x - y)$
 - $(x, y) \in R$ sii $x = 3^k y$ para algún $k \in \mathbb{N}$

- h) $(x, y) \in R$ sii $n \neq m$
 i) $(x, y) \in R$ sii m divide a n .

2. Sea $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$ una relación sobre el conjunto $\{a, b, c, d\}$. Agregue elementos a la relación R para que sea:
- reflexiva,
 - simétrica,
 - transitiva.

3. Sean R_1 y R_2 las relaciones dadas sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ por:

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4), (2, 2)\}$$

- Liste los elementos de $R_2 \circ R_1$ y de $R_1 \circ R_2$.
- Dé ejemplos de relaciones sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ que cumplan las propiedades:
 - Reflexiva, simétrica, no transitiva.
 - Reflexiva, no simétrica, no transitiva.
 - Reflexiva, antisimétrica, no transitiva.
 - No reflexiva, simétrica, no antisimétrica, transitiva.
 - No reflexiva, no simétrica, transitiva.

4. Sea R la relación en $D_{60} = \{d \mid d \text{ divide a } 60\}$ dada por:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow 5 \text{ divide a } (a - b)$$

- Probar que es de equivalencia.
- Hallar todas las clases de equivalencia.
- Hacer la composición $S \circ R$ donde $S = \{(a, b) \mid a = 3\}$.

5. Sea $S = P\{a, b, c\} = \{A \mid A \subseteq \{a, b, c\}\}$. Sea R la relación en S dada por:

$$(A, B) \in R \Leftrightarrow (A = \{a\} \text{ y } a \notin B) \text{ o } A \subset B.$$

- Probar que es una relación de orden.
- Hacer el diagrama de Hasse correspondiente.
- Hacer la composición $T \circ R$ donde $T = \{(\{a\}, \{b\}), (\{a, b\}, \{a, b, c\})\}$.

6. Sea S un conjunto de proposiciones lógicas no todas con el mismo valor de verdad. Sea R la relación en S dada por:

$$(p, q) \in R \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \text{ es verdadero.}$$

Determine qué propiedades satisface R y diga qué tipo de relación es (de orden o de equivalencia).

7. Sean R y S las relaciones en $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dadas por:

$$(x, y) \in R \text{ si y sólo si } x + y \leq 6,$$

$$(x, y) \in S \text{ si y sólo si } x = y - 1.$$

- a) Decida si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.
b) Describa $R \circ S$.

8. Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$, y sean R y S las relaciones en A dadas por:

$$R = \{(a, b) \mid 3a + 2b \text{ es impar}\} \quad S = \{(a, b) \mid a - b \text{ es par}\}$$

- a) Determine cuáles son las propiedades de R y S .
b) Escriba todos los pares ordenados de la composición $S \circ R$.

9. Sea R la relación en $D_{90} = \{d \mid d \text{ divide a } 90\}$ dada por:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow 5 \text{ divide a } (a - b)$$

- a) Probar que es de equivalencia.
b) Hallar todas las clases de equivalencia.
c) Hacer la composición $R \circ S$ donde $S = \{(a, b) \mid a = 2\}$.

10. ¿Es posible que una relación R sea simétrica y antisimétrica? Si es así, ¿qué característica tienen los pares ordenados de R ?

11. Sea A un conjunto de proposiciones las cuales no tienen todas el mismo valor de verdad. Defina una relación R sobre A por:

$$p \sim q \text{ si y sólo si } p \Rightarrow q \text{ es verdadero.}$$

¿Qué propiedades satisface esta relación?

12. Sean R y S las relaciones sobre un conjunto A de personas definidas por:

$(x, y) \in R$ si y sólo si x es la madre de y ;

$(x, y) \in S$ si y sólo si x es el padre de y .

Describa las relaciones $S \circ R$ y $R \circ S$.

13. Sea R la relación sobre \mathbb{N} dada por:

$$n \sim m \text{ si y sólo si } m = n^2.$$

Describa la relación $R^2 = R \circ R$ sobre \mathbb{N} .

14. Sea R una relación de A a B , y sea S una relación de B a C , y sea T una relación de C a D . Muestre que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

15. Muestre que la relación R sobre el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ si y sólo si } (x_1 < x_2) \text{ o } (x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2)$$

es un orden parcial.

16. Pruebe que si \mathcal{F} es una familia cualquiera de conjuntos finitos tales que no hay dos conjuntos con la misma cardinalidad, entonces la relación R definida sobre \mathcal{F} por

$$A \preceq B \text{ si y sólo si } |A| \leq |B|$$

es un orden total. Describa los elementos maximales y los elementos minimales.

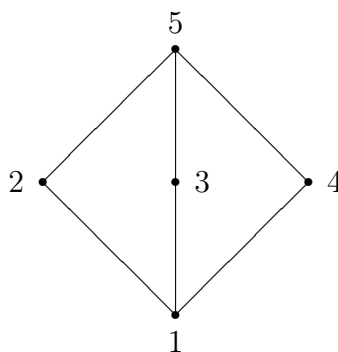
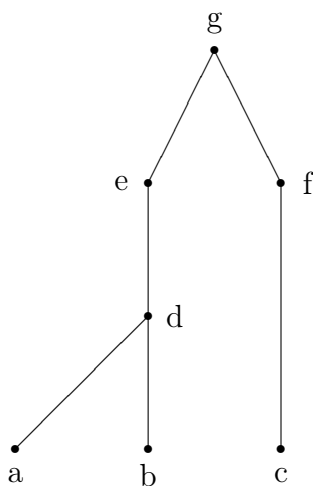
17. Sea A un conjunto de personas. >Bajo qué circunstancias la relación

$$x \preceq y \text{ si y sólo si } x \text{ es más joven o tiene la misma edad que } y$$

define un orden parcial sobre A ? Muestre que si R es un orden parcial entonces es además un orden total. >Cuáles son los elementos máximos y mínimos?

18. Un orden total R sobre un conjunto A se dice que es una *buen ordenación* si cada subconjunto no vacío de A tiene un elemento mínimo con respecto a R .
- Muestre que todo orden total sobre un conjunto A *finito* es una buena ordenación.
 - Encuentre un ejemplo de un conjunto infinito con una buena ordenación.
 - Muestre que la relación de orden usual \leq no es una buena ordenación ni sobre el conjunto \mathbb{Z} de enteros ni sobre el conjunto \mathbb{R}^+ de los reales positivos.

19. Dibuje los diagramas de Hasse para cada uno de los siguientes conjuntos con la relación de divisibilidad: $n \sim m$ si y sólo si n divide a m :
- $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
 - $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$
 - $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
 - $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
20. Sea A un conjunto de tres elementos parcialmente ordenado. >Cuántos tipos diferentes de diagramas de Hasse de A son posibles? De esta manera sabemos cuántos órdenes parciales diferentes pueden ser definidos sobre un conjunto con tres elementos.
Repita el ejercicio para conjuntos parcialmente ordenados de cuatro elementos.
21. Dibuje el diagrama de Hasse para el conjunto de subconjuntos propios de $\{a, b, c, d\}$ ordenado por inclusión. Identifique los elementos maximales y minimales.
22. Dados los siguientes diagramas de Hasse, liste todos los pares ordenados de la relación:



23. Determine si la relación dada es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si la relación es de equivalencia, indique las clases de equivalencia.
- $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1)\}$
 - $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
 - $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

- d) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (5, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 3), (3, 1)\}$
- e) $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 5\}$
- f) $\{(x, y) \mid 4 \text{ divide a } x - y\}$
- g) $\{(x, y) \mid 4 \text{ divide a } x + y\}$
- h) $\{(x, y) \mid x \text{ divide a } 2 - y\}$
24. Nombre los elementos de la relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ definida por la partición dada. También señale las clases de equivalencia $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$.
- a) $\{1, 2\}, \{3, 4\}$
- b) $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
- c) $\{1, 2, 3, 4\}$
- d) $\{1\}, \{2, 4\}, \{3\}$
25. Sea A un conjunto finito, y sean I_A y U_A las relaciones en A dadas por:
- $$(a, b) \in I_A \text{ si y sólo si } a = b$$
- $$(a, b) \in U_A \text{ para todo } a, b \in A.$$
- Verifique que ambas son relaciones de equivalencia sobre un conjunto A . ¿Cuáles son las correspondientes clases de equivalencia?
26. Verifique que cada una de las siguientes son relaciones de equivalencia sobre el plano \mathbb{R}^2 y describa las clases de equivalencia:
- a) $(x_1, y_1) \simeq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 = x_2$.
- b) $(x_1, y_1) \simeq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$.
- c) $(x_1, y_1) \simeq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.
27. Verifique que $x \simeq y$ si y sólo si $(x - y) \in \mathbb{Z}$ define una relación de equivalencia sobre el conjunto \mathbb{Q} de los números racionales. Describa las clases de equivalencia de 2 , $1/4$ y $-1/4$.
28. ¿Cuántas relaciones de equivalencia diferentes hay sobre los conjuntos (i) $\{a, b, c\}$, y (ii) $\{a, b, c, d\}$?
29. Sea A algún conjunto de proposiciones y sea \simeq la relación sobre A dada por:

$$p \simeq q \text{ si y sólo si } p \Leftrightarrow q \text{ es verdadero.}$$

Muestre que \simeq determina una relación de equivalencia sobre A . ¿Cuáles son las clases de equivalencia?