Análisis Numérico / Análisis Numérico I

Clase 1

En esta clase veremos algunas definiciones básicas, presentaremos algunos problemas que estudiaremos durante el curso y repasaremos algunos conceptos matemáticos que serán necesarios para las clases siguientes.

Preliminares y definiciones básicas

Los **modelos matemáticos** son la herramienta básica para resolver problemas científicos. Generalmente, tales problemas se originan en situaciones o “problemas de la vida real” de las más variadas áreas o disciplinas. Características propias del problema a estudiar permiten definir ecuaciones y/o inecuaciones que ayudan a formular el modelo matemático.

problema de la “vida real” $\rightleftarrows$ modelo matemático

Es fácil imaginar que, frecuentemente, en problemas complejos se realizan algunas simplificaciones al construir el modelo. De allí que el modelo matemático no es necesariamente una descripción exacta de la realidad y que las respuestas que se obtienen deben ser chequeadas y comparadas con resultados experimentales.

Así, un modelo matemático es una buena descripción del problema a estudiar, pero en general no siempre da una respuesta directa al problema considerado. Una primera posibilidad podría ser realizar muchas más simplificaciones en el modelo de manera de poder obtener una solución analítica. La desventaja de esto es que el modelo matemático podría diferir mucho del problema real. En lugar de esto, se pueden realizar aproximaciones numéricas del problema, que si bien pueden introducir errores, es posible estudiar y estimar cómo estas aproximaciones afectan a la precisión de la solución.

modelo matemático 1

problema matemático
$\downarrow$
solución analítica

modelo matemático 2

problema matemático
$\downarrow$ aproximaciones
problema numérico
$\downarrow$
solución numérica

Definición 1 *Un* **problema numérico** *es una clara y nada ambigua descripción de la conexión funcional entre datos de entrada (variables independientes del problema o input) y los datos de salida (resultados deseados o output). Estos datos, input y output, consisten en un conjunto finito de cantidades reales.*

Para resolver un problema numérico se disponen, además de la teoría matemática, de 2 herramientas fundamentales: las **computadoras** y los **algoritmos**.

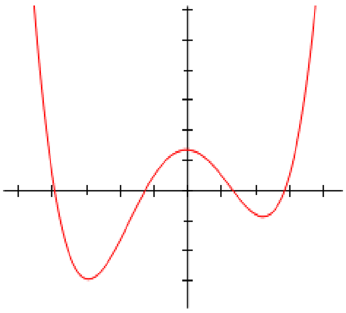
Definición 2 *Un* **algoritmo** *para un problema numérico es una completa descripción de un número finito de pasos con operaciones bien definidas, y sin ambigüedades, a través de las cuales una lista de datos de entrada se convierte en una lista de datos de salida.*

El **objetivo del Análisis Numérico** es formular y estudiar métodos numéricos y algoritmos para obtener la solución de problemas provenientes de la vida real y/o de diversas áreas, modelizados matemáticamente.

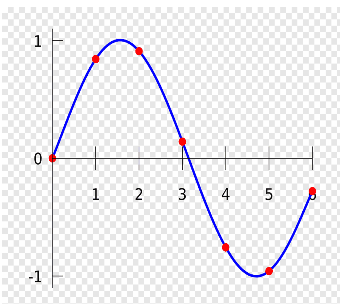
Temario y algunos problemas:

1. **Teoría de errores.** Fuentes de error, aritmética finita, artimética del computador.

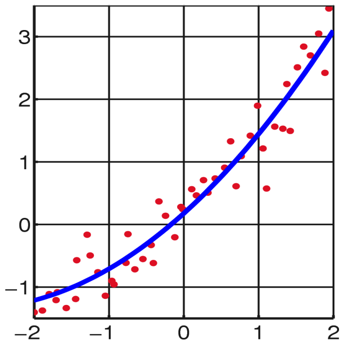
2. **Ecuaciones no lineales.**
   Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ hallar x_* solución de $f(x)=0$.



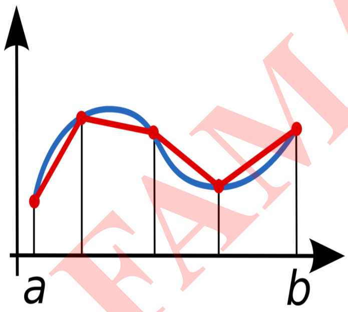
3. **Interpolación polinomial.**



4. **Teoría de mejor aproximación.** Método de cuadrados mínimos.

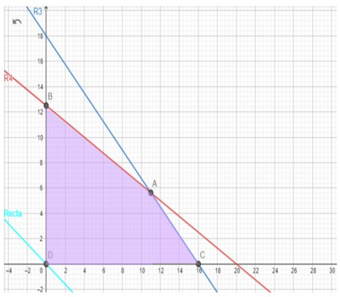


5. **Integración numérica.**



6. **Resolución numérica de sistemas lineales.** Resolver numéricamente sistemas lineales de la forma $Ax = b$.

7. **Programación lineal.**



Preliminares matemáticos

Teorema 1 **(Valor intermedio para funciones continuas).** *Sea f continua en $[a,b]$. Sea d entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$.*

Teorema 2 **(Valor medio).** *Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces para todo par $x, c \in [a,b]$ se cumple que*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi), \qquad \text{para algún } \xi \text{ entre } x \text{ y } c.$$

Esto dice que $f(x) = f(c) + f'(\xi)(x - c)$.

Teorema 3 (Taylor). *Si $f \in C^{(n)}[a,b]$ y existe $f^{(n+1)}(a,b)$ entonces para todo par $x,c \in [a,b]$ se tiene que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x),$$

donde

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}, \qquad \text{para algún } \xi \text{ entre } x \text{ y } c.$$

Observación: tomando $y = c$, $(x-c) = h$ y por lo tanto $x = y+h$, entonces

$$f(y+h) = f(y) + hf'(y) + \frac{h^2}{2} f''(y) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(y) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

para algún ξ entre y e $(y+h)$.

Teorema 4 (Taylor con resto integral). *Si $f \in C^{(n)}[a,b]$ y existe $f^{(n+1)}(a,b)$ entonces para todo par $x,c \in [a,b]$ se tiene que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + R_n(x),$$

donde

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt.$$

Órdenes de convergencia

Al resolver un problema numérico generalmente no es usual obtener una solución en forma directa o con una fórmula cerrada. Por el contrario, se suele obtener una sucesión de aproximaciones cuya precisión aumenta progresivamente. De allí que es muy importante el concepto de convergencia de sucesiones y velocidad de esta convergencia.

Consideremos, por ejemplo, la sucesión dada por $x_n = 3^{-n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$x_n = 3^{-n} = \frac{1}{3^n} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Luego

$$\frac{|x_{n+1} - 0|}{|x_n - 0|} = \frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \longrightarrow \frac{1}{3} = C.$$

En este caso, cuando C es menor que 1, se dice la convergencia es **lineal**. En breve formalizaremos esta definición. Notar que en este ejemplo particular se tiene que

$$|x_{n+1} - 0| = \frac{1}{3}|x_n - 0| \quad \text{para todo } n.$$

Ahora consideremos la sucesión dada por $x_n = \frac{1}{n!}$, la que claramente converge a 0. Luego,

$$\frac{|x_{n+1} - 0|}{|x_n - 0|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0, \ \text{cuando } n \to \infty.$$

En este caso se dice que la convergencia es **superlineal**. Veamos formalmente estas definiciones.

Definición 3 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales que converge a x_*.*

Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiene tasa de convergencia (al menos) **lineal** *si existe una constante c tal que $0 < c < 1$ y un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*| \quad \textit{para todo} \quad n \geq N.$$

Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **superlineal** *si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que converge a 0 y un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_{n+1} - x_*| \leq \varepsilon_n|x_n - x_*| \quad \textit{para todo} \quad n \geq N.$$

Se dice que la tasa de convergencia es (al menos) **cuadrática** *si existe una constante positiva c y un $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$|x_{n+1} - x_*| \leq c|x_n - x_*|^2 \quad \textit{para todo} \quad n \geq N.$$

Notación $\mathscr{O}$ grande y o chica

Veremos ahora una notación usual para comparar sucesiones y funciones.

Sean $\{x_n\}$ y $\{\alpha_n\}$ dos sucesiones distintas. Se dice que

$$x_n = \mathscr{O}(\alpha_n)$$

si existen una constante $C > 0$ y $r \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \leq C|\alpha_n|$ para todo $n \geq r$.

Se dice que

$$x_n = o(\alpha_n)$$

si existe una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ que converge a 0, con $\varepsilon_n \geq 0$ y un $r \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \leq \varepsilon_n|\alpha_n|$ para todo $n \geq r$. Intuitivamente, esto dice que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/\alpha_n) = 0$.

Ejemplo 1:

$$\frac{n+1}{n^2} = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si

$$\frac{n+1}{n^2} \leq C\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{n+1}{n} \leq C,$$

por lo tanto basta tomar $C = 2$ y $r = 1$.

Ejemplo 2:

$$\frac{1}{n\ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si

$$\frac{1}{n\ln n} \leq \varepsilon_n\frac{1}{n},$$

basta tomar $\varepsilon_n = 1/\ln n$.

Esta notación también se puede usar para comparar funciones. Se dice que

$$f(x) = \mathscr{O}(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

si existen una constante $C > 0$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo $x \geq r$.

Análogamente, se dice que $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to \infty$ si $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)/g(x)) = 0$.

Ejemplo 3:
$\sqrt{x^2+1} = \mathcal{O}(x)$ si $x \to \infty$, pues $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} \leq C$, luego basta tomar $C = 2$ y $r = 1$.

Ejemplo 4:
$\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pues

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0,$$

si $x \to \infty$.

Por último, consideremos el caso de comparación de dos funciones cuando $x \to x_*$.

Se dice que

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{cuando} \quad x \to x_*$$

si existen una constante $C > 0$ y un entorno alrededor de x_* tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo x en ese entorno.

Análogamente, se dice que $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to x_*$ si $\lim\limits_{x \to x_*} (f(x)/g(x)) = 0$.

Ejemplo 5: (Ejercicio)
Ver que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5), \qquad \text{si } x \to 0.$$