EL PAIS

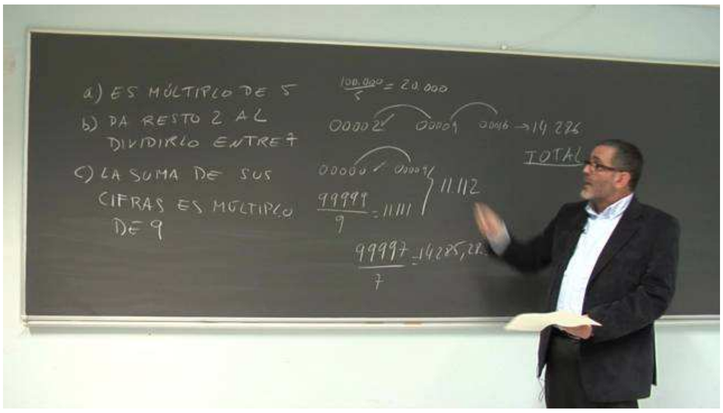
SOCIEDAD

Casi un tercio de números bonitos

El ganador de una biblioteca matemática y el libro 'Desafíos matemáticos' es

EL PAÍS | Madrid | 22 DIC 2012 - 17:30 CET 60

Archivado en: Lotería Navidad Lotería nacional Matemáticas Lotería Juegos azar Juego Ciencias exactas Sociedad Ciencia



PAULA CASADO / JOSÉ LUIS ARANDA

Ya hay solución para el desafío matemático extraordinario de Navidad presentado por EL PAÍS y la Real Sociedad Matemática Española con motivo del sorteo de la lotería. Adolfo Quirós Gracián, profesor de la Universidad Autónoma de Madrid y Vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española, presentó el desafío (pincha aquí para ver el enunciado completo) que consistía en decidir cuántos de los números que participan en el sorteo de Lotería de Navidad -recordad, del 00000 al 99999- cumplen **una y solo una de estas tres condiciones**:

a) es divisible entre 5;

b) da resto 2 al dividirlo entre 7;

c) la suma de sus cifras es divisible entre 9.

Estos eran los números que llamábamos *bonitos*. Se han recibido 670 soluciones, procedentes de al menos 14 países distintos, de las que un 57 % han dado con la respuesta correcta, que es que **33.016 números son bonitos**. El ganador de una biblioteca matemática como la que ofreció EL PAÍS en el quiosco durante 2011, así como, por cortesía de la RSME, del libro 'Desafíos Matemáticos', una publicación de SM en la que se recogen los 40 desafíos que ofrecimos en la web semana a semana, ha sido Gustavo Lau, que, aunque es de Cardedeu (Barcelona), vive en Londres.

Antes de presentar la solución queremos señalar que ha habido una **cierta confusión sobre si el 00000 era o no múltiplo de 5 y de 9** (dicho de otra manera, si da resto 0 al dividirlo entre 5 y 9). Los matemáticos consideran que sí, dado que 0=5x0=9x0, y una vez que se introduce el 0 en el sistema no hay motivo para excluirlo como factor de un producto o cociente de una división. Pero, en cualquier caso, la solución al desafío no cambia dado que, bien por exceso o por defecto, el 0 no es en ningún caso un número bonito. Tras esta aclaración, veamos la solución propuesta por el profesor Quirós.

Un cálculo paso a paso

Puesto que no es del todo fácil calcular directamente cuántos números satisfacen una condición pero no las otras dos, el primer paso es calcular cuántos números cumplen cada una de las condiciones.

Tenemos 100.000 números, y uno de cada cinco es múltiplo de 5. Así que **la condición a) la cumplen 100.000/5=20.000**. El primero es el 00000 y el último el 99995.

Con respecto a la condición c), quizás recordéis que la suma de las cifras es divisible entre nueve exactamente cuando el número es divisible entre 9. Esto lo cumple uno de cada nueve números, pero como 100.000/9 no es un número entero hay que tener un poquito de cuidado. El primero que cumple la condición es el 00000, y después de él la condición se va cumpliendo de nueve en nueve números. Es decir, **tenemos en total 1+(99.999/9)=1+11.111=11.112 números que satisfacen la**

condición c). El primero es el 00000 y el último es el 99999.

Para la condición b) procedemos del mismo modo: a partir del primer número que la cumpla iremos saltando de siete en siete para ver cuántos tenemos en total. El primer número que nos sirve es el 00002, y después nos quedan 99997 números más, en los que **caben 99997/7=14.285,28… ciclos de siete números**. Los decimales indican que no llegamos a completar un nuevo ciclo, así que en total tenemos 1+14.285=14.286 números de Lotería que satisfacen la condición b).

Ahora la tentación sería decir que la respuesta es que en total son bonitos 20.000+11.112+14.286=45.398 números. Pero hay que vencer esa tentación, porque **en esa suma hemos contado los números que satisfacen más de una de las condiciones**, y esos números son feos. De hecho hemos contado dos veces los números que satisfacen dos de la condiciones, ¡y tres veces los que satisfacen las tres condiciones!. Hay que restarlos.

¿Cuántos números satisfacen a la vez a) y c)? Son los números que son a la vez múltiplos de 5 y de 9. Como lo primero se produce en ciclos de cinco números y lo segundo en ciclos de nueve, los ciclos coincidirán tras un número de pasos igual al mínimo común múltiplo de 5 y 9, que es 45 (podíamos haber dicho directamente que si un número es múltiplo de 5 y de 9 es que es múltiplo de 45, pero usaremos luego el argumento con los ciclos, por lo que preferimos presentarlo así). El primer número válido es el 00000, y luego nos caben 99.999/45=2222,2 ciclos. Luego hay 1+2.222=2.223 números que satisfacen simultáneamente las condiciones a) y c).

Respecto a los números que satisfacen a la vez a) y b), empezamos por buscar el primero. 00002 no sirve, así que vamos sumando 7 hasta encontrar uno valido: 00009 no, 00016 no, 00023 no, 00030 sí. Y a partir de 00030 los múltiplos de 5 aparecen en ciclos de cinco y los que dan resto 2 al dividir entre 7 en ciclos de siete. Luego las dos condiciones se vuelven a repetir en ciclos de 35 números, de los que, tras el 00030, tenemos 99.969/35=2.856,25… Por tanto **los números que satisfacen a) y b) son 1+2.856=2.857**.

Para ver cuántos satisfacen b) y c) procedemos de manera análoga. El primero que nos sirve es el 00009, y **después las condiciones se repiten cada 63 números** (63 es el mínimo común múltiplo de 7 y 9). Nos caben por tanto 99.990/63=1.587,14…, por lo que hay 1+1.587=1.588 números de Lotería que satisfacen las condiciones b) y c).

Así pues, para eliminar los números que son feos porque satisfacen dos de las condiciones había que restar al resultado anterior: 2x(2.223+2.857+1.588)=13.336

Volver a sumar

¡Pero cuidado! Si hacemos esto **habremos restado seis veces los números que satisfacen las tres condiciones**, y sólo teníamos que restarlos tres veces. Para arreglarlo, vamos a volver a sumar las tres veces que los hemos restado de más.

Así que calculamos cuántos números satisfacen las tres condiciones. Buscamos entre los múltiplos de 5 y de 9, es decir, múltiplos de 45, cuál es el primero que da resto 2 al dividirlo entre 7. 00000 no, 00045 no, 00090 no, 00135 sí. Y ahora, **como el mínimo común múltiplo de 5, 9 y 7 es 315, esta es la longitud de los ciclos en los que van apareciendo los números** que satisfacen las tres condiciones. Después de 00135 tenemos 99.864/315=317,02… de estos ciclos, y por tanto hay 1+317=318 números que satisfagan a la vez las tres condiciones.

Poniendo todo esto junto, resulta que, con la definición dada en el desafío, **los números de lotería bonitos son:** 20.000+11.112+14.286-2x(2.223+2.857+1.588)+3x318=**33.016 números.** Estamos hablando pues de casi casi un tercio del total.

La técnica que hemos seguido para el cálculo s**e conoce como principio de 'inclusión-exclusión'**. Y, aunque no lo hayamos utilizado directamente, un resultado muy útil para trabajar con números que satisfacen distintas condiciones de divisibilidad es el llamado *Teorema chino del resto*.

Soluciones decimonónicas

La mayoría de las respuestas, tanto correctas como incorrectas, han dado argumentos similares al presentado por Adolfo Quirós. **Manuel Pantoja** incluso ha dibujado los ciclos. Muchas de las soluciones incorrectas fallan por muy poco. Los dos motivos más frecuentes son, o bien que el lector se ha hecho un pequeño lío con el 00000 (contándolo unas veces sí y otras no), o bien que ha seguido las reglas usuales de redondeo sin observar que aquí las *colas* del problema había que tratarlas con cuidado.

Estudiar las *colas* es lo que han hecho algunos lectores, la primera de ellos **Jana González Morala**. Quienes lo han hecho se han dado cuenta de que el patrón se repetía en bloques de 315 números, han encontrado cuántos números bonitos hay en cada uno de estos bloques y han añadido los números bonitos que quedaban fuera de los bloques completos (100.000 no es divisible entre 315). Este es un procedimiento elemental, quizás algo más trabajoso que el presentado en el vídeo, pero muy natural. Y ciertamente al alcance de los gaditanos de 1812.

El método más eficaz de los presentados utiliza cálculo de probabilidades. Es más rápido que los otros pero requiere un cuidado exquisito en el tratamiento de los decimales, como el que ha tenido, entre otros, **Juan José Gallardo Crespo**.

Varios lectores han redactado sus respuestas en estilo decimonónico. Nos ha hecho sonreír especialmente **Diego A. Martínez Vidal**, que se presenta como "viejo ingeniero" y relata que ha empleado para escribir los cálculos que requería su solución un rollo de papel higiénico ya que, según nos informa, se inventó en 1798 (aunque no se comercializó hasta medio siglo después) y por tanto estaba ya a disposición de los más avanzados entre los participantes en el primer sorteo de lotería, celebrado en Cádiz el 4 de marzo de 1812.

Si Diego Martínez es un *viejo ingeniero*, también han enviado soluciones varios lectores en edad escolar. A ellos y a todos los que han tenido la amabilidad de participar, les deseamos felices fiestas en nombre de El País y de la RSME.