

Vrtavka

Gregor Žunič

7.3.2020

1 Teorija

V splošnem je gibanje vrtavke ena najtežjih nalog mehanike. Vrtavka je rotirajoče telo, katera lahko spreminja smer osi v prostoru in je v eni točki vpeta. Pri analizi so važne tri različne osi:

1. Geometrijska os vrtavke \vec{z} . V našem primeru je to telo, ki ima eno glavno os tenzorja J_{33} v smeri simetrijske osi, druga dve glavni pa sta nanjo pravokotni in enaki ($J_{11} = J_{22}$). Ostale komponente tenzorja so 0.
2. Vektor $\vec{\omega}$ določa trenutno smer osi vrtenja.
3. Tretja os je vektor vrtilne količine $\vec{\Gamma}$, ki je s kotno hitrostjo povezano preko vztrajnostnega tenzorja J_{ij} in sicer kot $\Gamma_i = J_{ij}\omega_{ij}$. Najlažje to vrtenje opišemo v lastnem koordinatnem sistemu.

Simetrična vrtavka nam delo poenostavi, saj so vektorji $\vec{z}, \vec{\omega}$ in $\vec{\Gamma}$ v isti ravnini.

Na ne ravno postavljeno vrtavko deluje navor: $M = mgl \sin \theta$, kjer so m masa vrtavke, g težnostni pospešek in l razdalja do težišča ter θ kot pod katerim je vrtavka. Vektor $\vec{\Gamma}$ ni konstanten, ohranja se energija in tudi ω_z je konstanta, saj okoli osi z ni navora.

Lažja je obravnava hitre vrtavke oziroma $E_k \gg E_p$, kjer je ničla potencialne energije na dnu vrtavke. Gibanje podamo na naslednji način. Točka na osi opisuje neko trajektorijo na krogli s središčem v točki, kjer je os fiksirana. Naklonski kot θ se zaradi nutacije spreminja in jo pri hitri vrtavki opišemo kot

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} \sin^2 \theta_0$$

Dejansko gibanje kota θ je odvisno od robnih pogojev in dušenja. Vrtavka ima nutacijsko kotno hitrost

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}} \omega_z, \quad (1)$$

in se giblje okrog z' (lab. navpične osi) s precesijsko hitrostjo

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}. \quad (2)$$

V splošnem imamo precesijo in nutacijo. Frekvenca nutacije je po enačbi (1) primerljiva z kotno hitrostjo vrtavke.

2 Naloga

Izmeri precesijsko (ω_{pr}) in nutacijsko kotno hitrost (ω_N) v odvisnosti od kotne hitrosti (ω_z) vrtavke. Izvedi meritev pri vsaj treh frekvencah ν_z . Na primer pri približno 600, 500 in 400 obratov na minuto (kratica rpm – angl. rotations per minute). Gornjo meritev izvedi pri naslednjih nastavitvah vrtavke:

1. vrtavka z utežjo blizu krogle
2. utež na sredini palice
3. utež na koncu palice (pusti si prostor za oprijem)

Meritve z različnimi nastavitvami vrtavke izvedi pri podobnih frekvencah ν_z kot prej, da so rezultati lažje primerljivi. Izmerjene vrednosti ω_{pr} in ω_N primerjaj z izračunanimi iz formul in naredi tabelo.

3 Meritve in izračuni

Podatke o vrtavki kar direktno lahko prepišemo iz navodil:

Krogla: masa $m_k = 512$ g, premer $2r_k = 50.7$ mm

Ploščica: masa $m_o = 19$ g, premer $2r_o = 58$ mm, debelina $h_o = 1$ mm

Palica: masa $m_p = 23$ g, premer $2r_p = 6.3$ mm, dolžina $h_p = 89.8$ mm

Utež: masa $m_u = 19$ g, premer $2r_u = 19.3$ mm, dolžina $h_u = 25.2$ mm

To nam poda skupno maso $m = 573$ g.

Pri vseh izračunih precesijske frekvence, sem uporabil že izračunane vztrajnostne momente, v katere sem ustavil oddaljenost uteži (diska) od središča vrtenja L . To so

$$J_{\text{krogla}} = 2/5 mr^2$$

$$J_{\text{valja,z}} = 1/2 mr^2$$

pri vrtenju valja v x ali y smeri pa

$$J_{\text{valja,x}} = J_{\text{valja,y}} = m(r^2/4 + h^2/12)$$

Iz teh enačb sedaj lahko izračunam dejanske vztrajnostne momente J_{33} in J_{11} (in jih tako preverim iz navodil).

Izračuna brez uteži ne bom preverjal, ker moji postopki vključujejo tudi izračune brez uteži in zato, ker jih v izračunih ne bom uporabljal. Predmete sem označeval enako, kot so tudi označeni na vrhu podatkov. Indeks z pomoje rotacije okoli z osi, oziroma po definiciji povprečna vrednost $x^2 + y^2$.

$$\begin{aligned}
J_{33} &= J_k + J_0^z + J_p^z + J_u^z \\
&= 2/5 m_k r_k^2 + 1/2 m_0 r_0^2 + 1/2 m_p r_p^2 + 1/2 m_u r_u^2 \\
&= \left(\frac{2 \cdot 512}{5} \left(\frac{5.07}{2}\right)^2 + \frac{19}{2} \left(\frac{5.8}{2}\right)^2 + \frac{23}{2} \left(\frac{1.93}{2}\right)^2 + \frac{19}{2} \left(\frac{1.93}{2}\right)^2\right) \text{ gcm}^2 \\
&= 1416 \text{ gcm}^2
\end{aligned}$$

Izračun za vztrajnostni moment J_{11} je kar precej daljši. Vse indekse x (okoli x) bi lahko zamenjali z y in bi bilo vse isto zaradi simetrije.

$$\begin{aligned}
J_{11} &= J_k + J_0^x + m_0(r_k + h_0/2)^2 + J_p^x + m_p(r_k + h_0 + h_p/2)^2 + J_u^x + m_u L^2 \\
&= 3/5 m_k r_k^2 + m_0(r_0^2/4 + h_0^2/12) + m_0(r_k + h_0/2)^2 \\
&\quad + m_p(r_p^2/4 + h_p^2/12) + m_p(r_k + h_0 + h_p/2)^2 \\
&\quad + J_u^x + m_u L^2 \\
&= (2820 + 19(L^2[\text{cm}^2])) \text{ gcm}^2
\end{aligned}$$

K obema vztrajnostnima momentoma, daleč najbolj prispeva J krogle, k J_{11} pa očitno prispeva tudi oddaljenost uteži od vrtilišča. Za izračun l enačimo navore okoli težišča.

$$\begin{aligned}
M_k &= M_0 + M_p + M_u \\
m_k l &= m_0(r_k + h_0/2 - l) + m_p(r_k + h_0 + h_p/2 - l) + m_u(L - l) \\
l &= \frac{m_0(r_k + h_0/2) + m_p(r_k + h_0 + h_p/2) + m_u L}{m_k + m_p + m_0 + m_u} \\
l &= (0.372 + 0.0332 L) \text{ cm}
\end{aligned}$$

Rezultati so malo drugačni kot v rešitvah, zato bom raje uporabil svoje izraze.

3.1 Vrtavka z utežjo blizu krogle ($x = 0$)

Meritve frekvence in obhodnih časov, bom združil skupaj v tabelo z rezultati. Pretvorba RPM v 1/s lahko izračunamo kot $\frac{2\pi}{60}[\text{RPM}] = [1/\text{s}]$.

Zdaj samo vsako meritev posebej vstavim v izraz (1) oziroma (2), da izračunam kotne hitrosti. To sem storil s pomočjo `pandas` modula v Python-u.

Pri razdalji je treba upoštevati, da je v meritvah napisan odmik od krogle torej $L = r_k + x$, kjer je x napisana razdalja v navodilih.

ν [rpm]	1. kot [1/s]	2. kot [1/s]	ω_z [1/s]	ω_{pr} [1/s]	ω_{pr}^{teor} [1/s]	Napaka [%]
1386	4,70	5,00	145,14	1,30	1,25	3
1415	5,20	4,90	148,18	1,24	1,22	2
1475	5,20	5,40	154,46	1,19	1,17	1
1518	4,80	5,10	158,96	1,27	1,14	3
1550	5,30	5,00	162,32	1,22	1,12	2
1570	5,20	5,30	164,41	1,20	1,10	0

Sedaj po enakem principu izračunamo tudi ω_N .

Frekvenca [rpm]	Frekvenca ω_N [rpm]	ω_z [1/s]	ω_N [1/s]	ω_N^{teor} [1/s]
830	363	86,9	38,0	43,6
996	391	104,3	40,9	52,4
1393	644	145,9	67,4	73,2

3.2 Vrtavka z utežjo pri $x = 1.5\text{cm}$

Postopek je čisto identičen, kot pri poglavju (3.1), samo da vse izraze popravimo tako, da je zdaj $L = (r_k + 1.5)\text{cm}$.

ν [rpm]	1. kot [1/s]	2. kot [1/s]	ω_z [1/s]	ω_{pr} [1/s]	ω_{pr}^{teor} [1/s]	Napaka [%]
1073	3,40	3,60	112,36	1,80	1,79	2
1140	3,70	3,50	119,38	1,75	1,68	2
1191	3,70	3,50	124,72	1,75	1,61	2
1211	3,80	3,60	126,82	1,70	1,58	2

Frekvenca [rpm]	Frekvenca ω_N [rpm]	ω_z [1/s]	ω_N [1/s]	ω_N^{teor} [1/s]
1220	631	127,8	66,1	63,5
1467	709	153,6	74,2	76,4
938	480	98,2	50,3	48,8

3.3 Vrtavka z utežjo pri $x = 2.5\text{ cm}$

Spet ponovimo isto stvar, za $L = (r_k + 2.5)\text{ cm}$

ν [rpm]	1. kot [1/s]	2. kot [1/s]	ω_z [1/s]	ω_{pr} [1/s]	ω_{pr}^{teor} [1/s]	Napaka [%]
1100	2,90	3,10	115,19	2,09	1,86	3
1224	3,50	3,70	128,18	1,75	1,67	2
1270	3,70	3,60	132,99	1,72	1,61	1
1465	4,00	4,20	153,41	1,53	1,40	2

Frekvenca [rpm]	Frekvenca ω_N [rpm]	ω_z [1/s]	ω_N [1/s]	ω_N^{teor} [1/s]
1220	631	127,8	66,1	63,5
1467	709	153,6	74,2	76,4
938	480	98,2	50,3	48,8

3.4 Napake

O napakah pri vseh meritvah težko govorim, ker nisem sam izmeril ničesar, vendar ni kompleksnih (koreliranih) napak, zato bi se samo kvadratno seštele. Najveji prispevek lahko brez problema rečemo, da pride iz radija krogle - ker je največji prispevek h komponentama vztrajnostnih momentom, ter tudi k oddaljenosti uteži od vrtilišča. Ta napaka je težko ocenljiva, ker nisem bil tam, vendar recimo da napake ni in da so zelo dobro izračunane.

Edina napaka, ki je zares povsod dobro izračunljiva iz podatkov je napaka obhodnega časa. Te so izmerjene na 0,1 s natančno.

4 Zaključek

Ker se vse meritve kar precej dobro ujemajo, lahko kar za vse skupaj komentiram, da so teoretične vrednosti zelo blizu izmerjenim. To pokaže, da je trenja dokaj malo. Najbolj važno, je to, da so rezultati smiselni, saj izmerjena precesijska hitrost pada, ko se povečuje hitrost kroženja, izmerjena nutacijska kotna hitrost pa linearno narašča. Smiselno je tudi naraščanje precesijske hitrosti, ko povečujemo J_{33} (oziroma razdaljo uteži od vrtilišča).