University of Ljubljana
Faculty of Mathematics and Physics

7. naloga - Newtonov zakon

Ma-Fi praktikum 2021/22

Newtonov zakon

- Danes bomo naše znanje o reševanju diferencialnih enačb z začetnimi pogoji razširili na diferencialne enačbe 2. reda.
  - Med te spada tudi Newtonov zakon, zato si lahko na tem primeru tudi največ predstavljamo (v fizikalnem smislu).
  - Pravzaprav nam današnja razširitev pomaga pri reševanju diferencialnih enačb poljubnega reda, kot bomo v kratkem videli.
    - … in v poljubno dimenzijah!

Podrobnosti...

- Torej, 2. Newtonov zakon je popolnoma splošno zapisan kot:

$$\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

- Ne gre pa pozabiti, da za specifično rešitev le-tega potrebujemo tudi ustrezne začetne pogoje:

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$$
$$\dot{\vec{r}}(t=0) = \vec{v}_0$$

- Če upoštevamo tri prostorske dimenzije, imamo torej tu:
  - Sistem **treh diferencialnih enačb 2. reda** in
  - **šest** začetnih pogojev.
- Sila je seveda lahko **funkcija lege, časa in tudi hitrosti (ali gibalne količine)**, zato 2. N. Z. tudi ni v splošnem tako enostavno rešljiv!

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})}{m}$$

Podrobnosti...

- Bistven korak v numeričnem (in pogosto tudi analitičnem) reševanju je, da vpeljemo raje novo vmesno spremenljivko:
  - v fizikalnem smislu je to lahko ali hitrost (**v**) ali pa gibalna količina (**p**):

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{p}(t) = m\,\dot{\vec{r}}(t)$$

  - Recimo, da se odločimo za slednjo: Naš 2. N.Z. potem postane:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{p}(t)/m$$

$$\dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{p})$$

- Po tej transformaciji imamo torej tu:
  - Sistem **šestih (sklopljenih) diferencialnih enačb 1. reda** in
  - **šest** začetnih pogojev.

$$\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{p}(t=0) = \vec{p}_0$$

Podrobnosti…

- Formalno gledano, lahko naš sistem zapišemo tudi z šest-dimenzionalnim vektorjem **y:**

$$\vec{y} = (\vec{r}, \vec{p})$$

$$\vec{f} = (\vec{p}/m, \vec{F})$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}(t, \vec{y})$$

- Dodamo še začetne pogoje v novem zapisu:

$$\vec{y}(t=0) = \vec{y}_0$$

- Takoj lahko opazimo, da se nam je problem (vsaj na videz) zelo poenostavil.
  - Z izjemo vektorjev zgleda povsem enako, kot naš problem 'hoda' iz prejšnjega tedna!

$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \,.$$

- **Dejansko lahko tudi vse metode iz prejšnjega tedna kar neposredno uporabimo!**

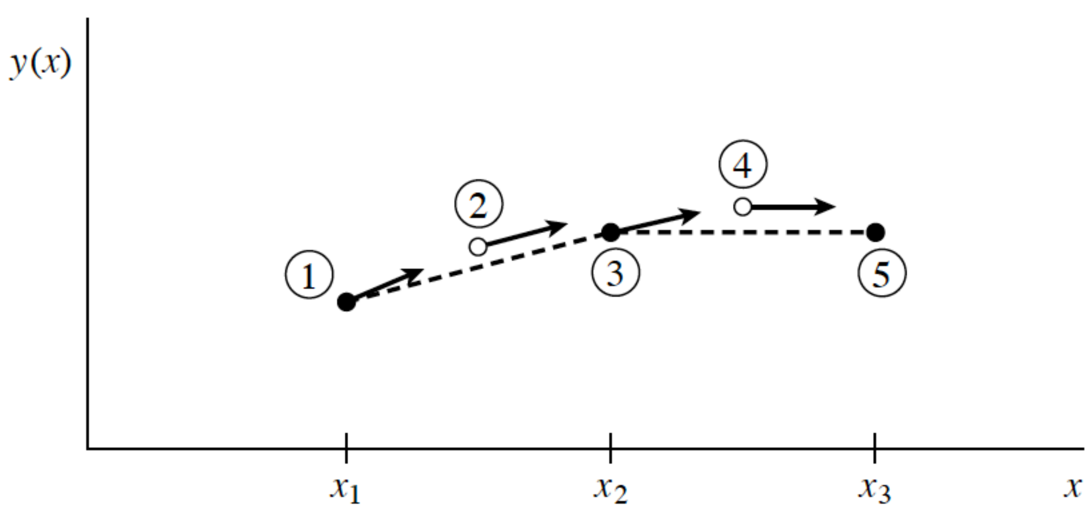
Midpoint metoda

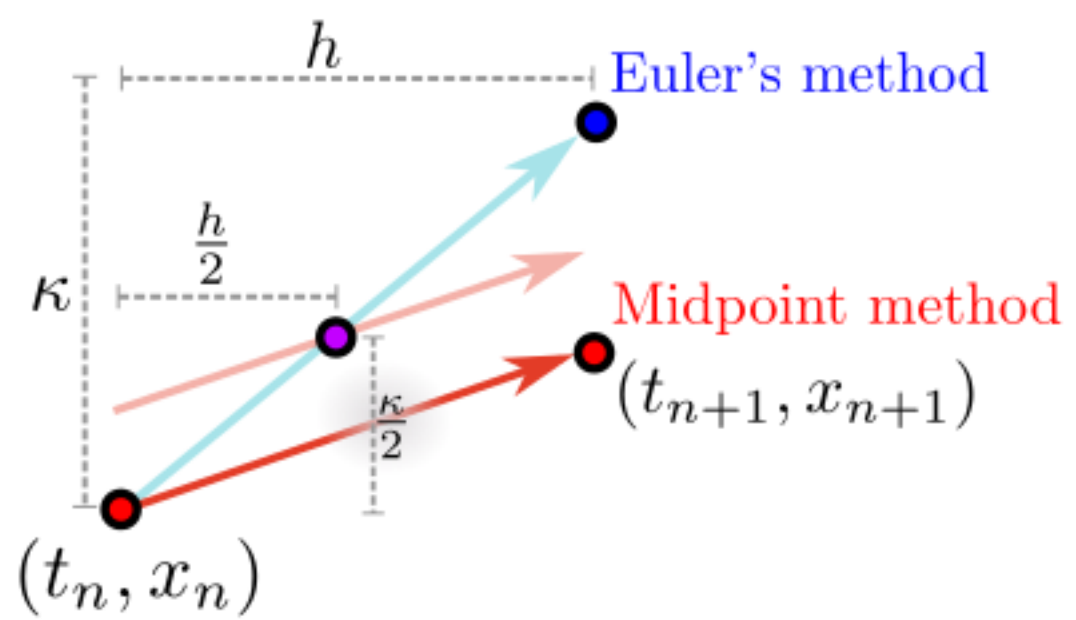
$$y'(x) = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \,.$$

- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke…**

$$Y_0 = y_0,$$
$$Y_{i+\frac{1}{2}} = Y_i + \frac{h}{2} f(x_i, Y_i),$$
$$Y_{i+1} = Y_i + hf\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

- Izboljšava z oceno odvoda na **sredi intervala enega koraka.**
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





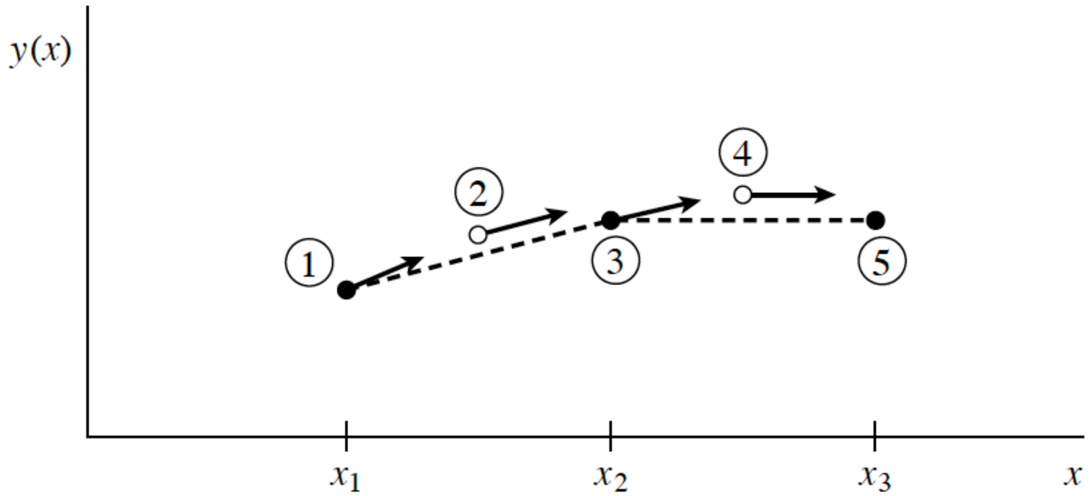
Midpoint metoda v N-dim

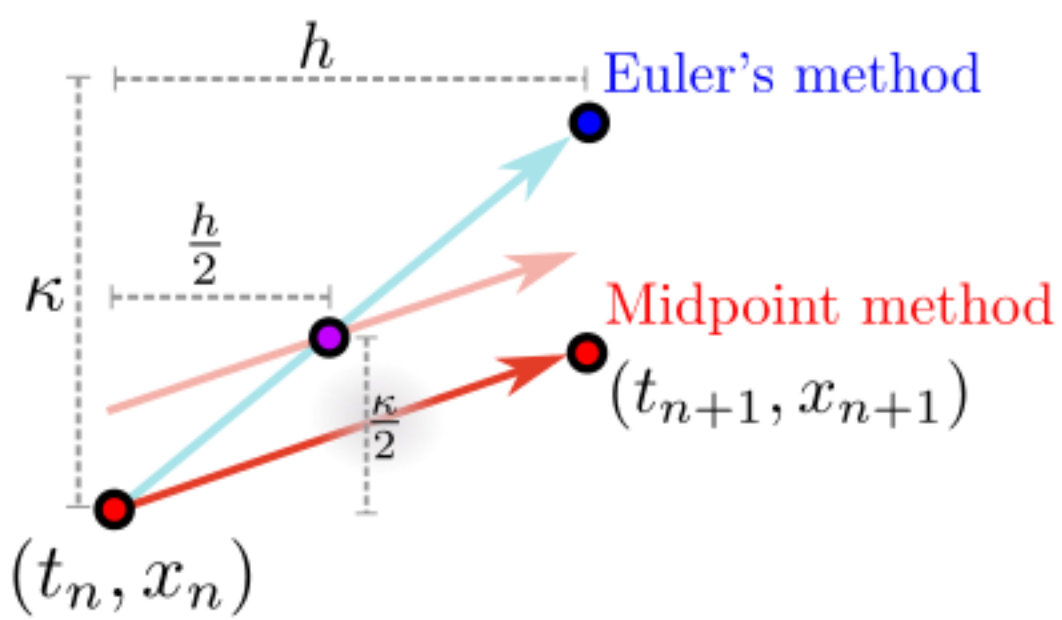
$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}\,), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke…**

$$\vec{Y}_0 = \vec{y}_0,$$
$$\vec{Y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{Y}_i + \frac{h}{2}\vec{f}(x_i, \vec{Y}_i),$$
$$\vec{Y}_{i+1} = \vec{Y}_i + h\vec{f}(x_i + \frac{h}{2}, \vec{Y}_{i+\frac{1}{2}})$$

- Izboljšava z oceno odvoda na **sredi intervala enega koraka.**
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





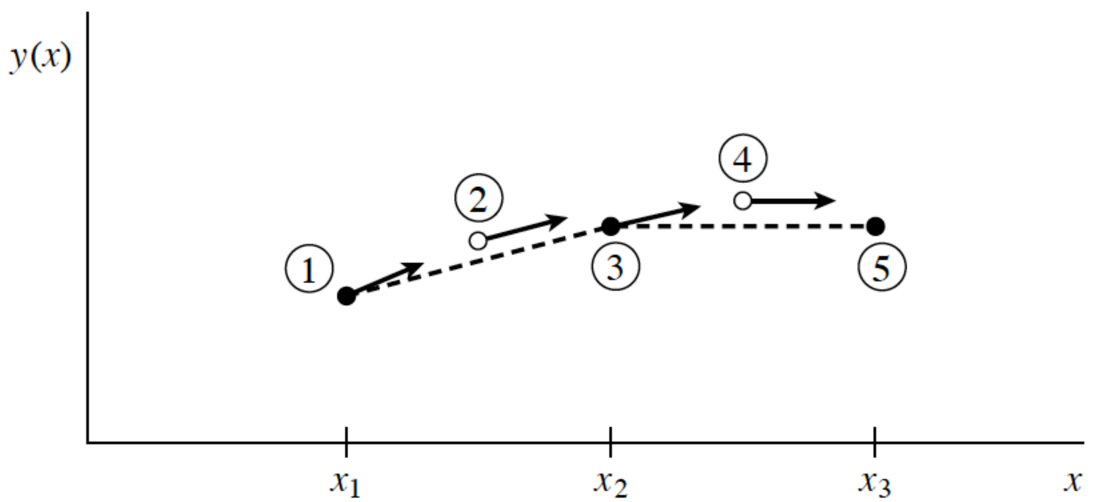
Midpoint metoda v N-dim

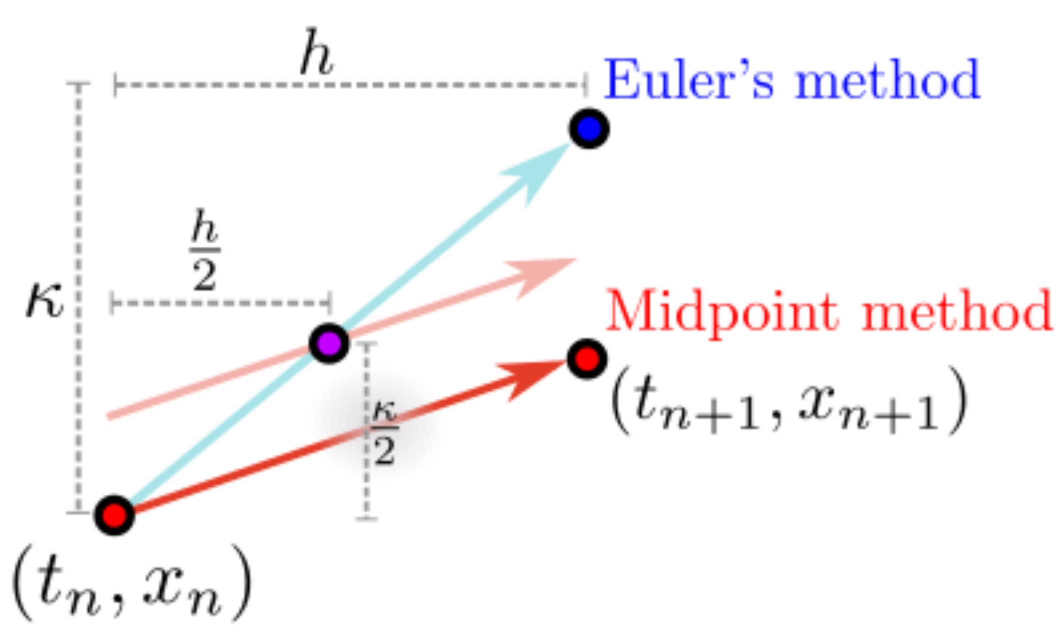
$$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}\,), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke…**

$$\vec{Y}_0 = \vec{y}_0,$$
$$\vec{Y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{Y}_i + \frac{h}{2}\vec{f}(x_i, \vec{Y}_i),$$
$$\vec{Y}_{i+1} = \vec{Y}_i + h\vec{f}(x_i + \frac{h}{2}, \vec{Y}_{i+\frac{1}{2}})$$

- Razlika z eno-dimenzionalno metodo je torej samo ustrezna uporaba vektorjev.
  - … kar na primer Pythonov NumPy paket počne že **avtomatsko!**





V splošnem torej…

$$\vec{y}\,'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}\,), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

- Zgornji sistem enačb lahko dobimo za poljubno kombinacijo dimenzij in/ali reda diferencialne enačbe. Na primer:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

- Lahko prevedemo na zgornji zapis z vpeljavo novih spremenljivk:

$$v = y', \;\; z = v' = y'', \ldots$$
$$\vec{y} = (y, v, z, \ldots)$$

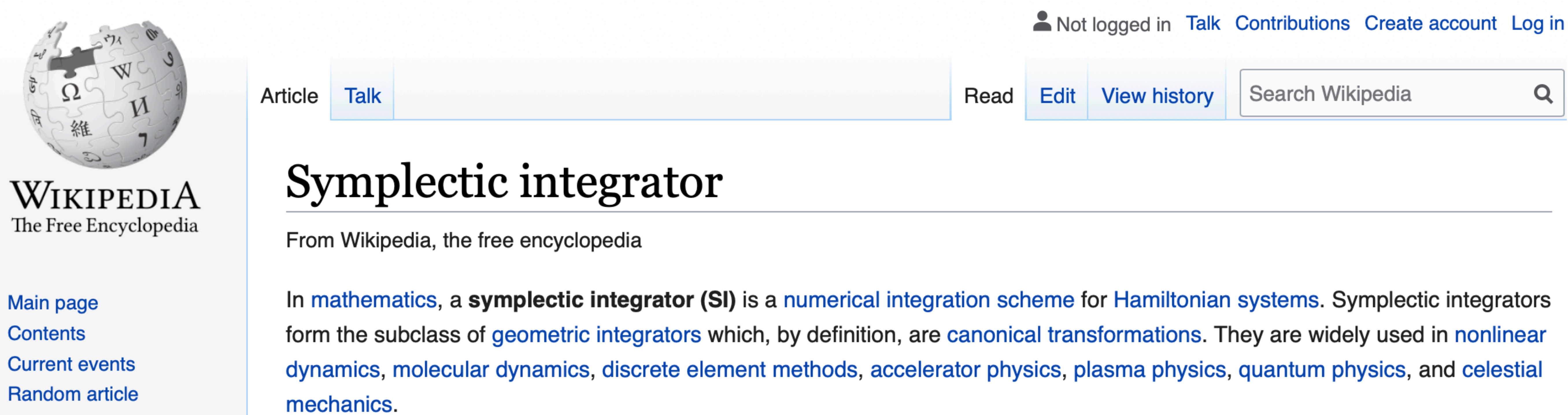
- … in seveda ustrezno prevedbo začetnih pogojev.

- **Tu bi lahko tudi končali, vendar obstaja še ena posebnost, ki nam pride še posebej prav v fiziki, in vodi v novo kategorijo metod…**

Simplektične metode

- Tu nam spet za predstavo pride prav fizika: Pogosto v naših primerih veljajo **ohranitveni izreki (zakoni), npr. energija, vrtilna in gibalna količina ipd.**
  - Nobena od numeričnih metod ni bila namensko izpeljana z zahtevo o tovrstnih ohranitvah…
  - Metodam, ki ohranjajo energijo, rečemo **simplektične metode** (zgodba je matematično malce bolj komplicirana, ampak za nas je to kar v redu interpretacija).

- Vse naše izpeljave bodo zdaj eno-dimenzionalne zaradi preglednosti…
  - … več-dim. razširitev je preprosta, kot smo se že naučili…



Symplectic integrator

From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematics, a **symplectic integrator (SI)** is a numerical integration scheme for Hamiltonian systems. Symplectic integrators form the subclass of geometric integrators which, by definition, are canonical transformations. They are widely used in nonlinear dynamics, molecular dynamics, discrete element methods, accelerator physics, plasma physics, quantum physics, and celestial mechanics.

Simplektične metode

- Najbolj preprosta, a kar učinkovita je **metoda Verlet (1967)/Störmer(1907)/ Encke(~1850).**
  - Globalno natančna do **drugega reda.**
  - **Ena** evaluacija funkcije na korak.
  - Točno ohranja **energijo in tudi vrtilno količino sistema** (če je ta v danem problemu smiselna).
  - Kot da imen ni dovolj, je metoda poznana tudi kot **leapfrog** metoda (skakanje žabice…).

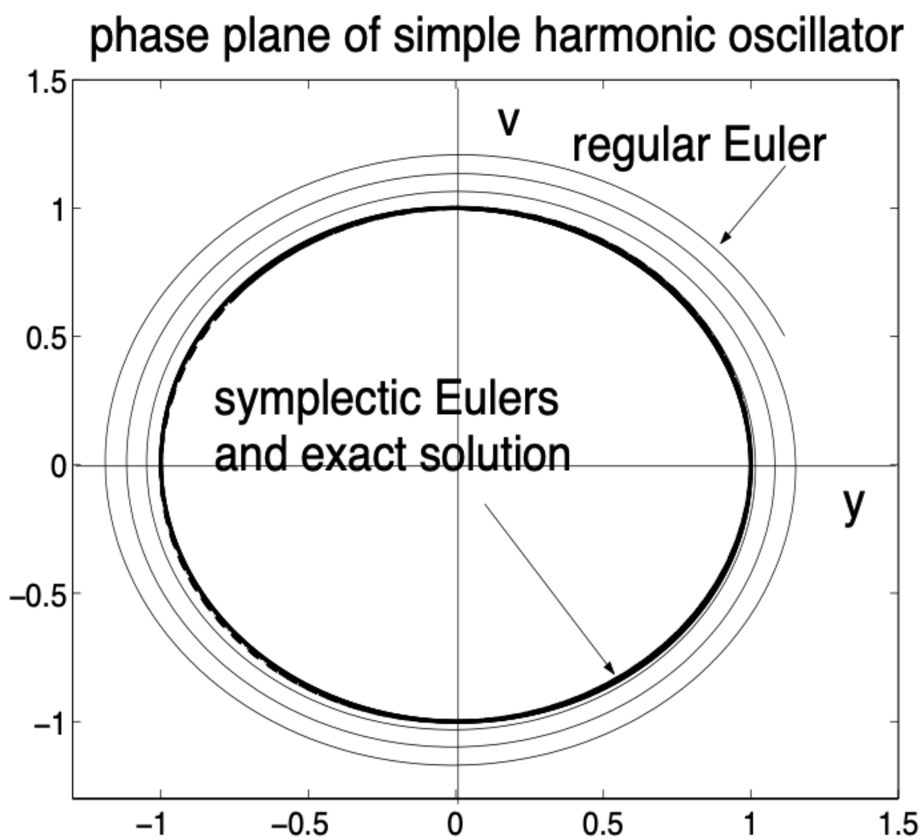
- Naša eno-dimenzionalne izpeljava izhaja tako iz enačbe 2. reda:

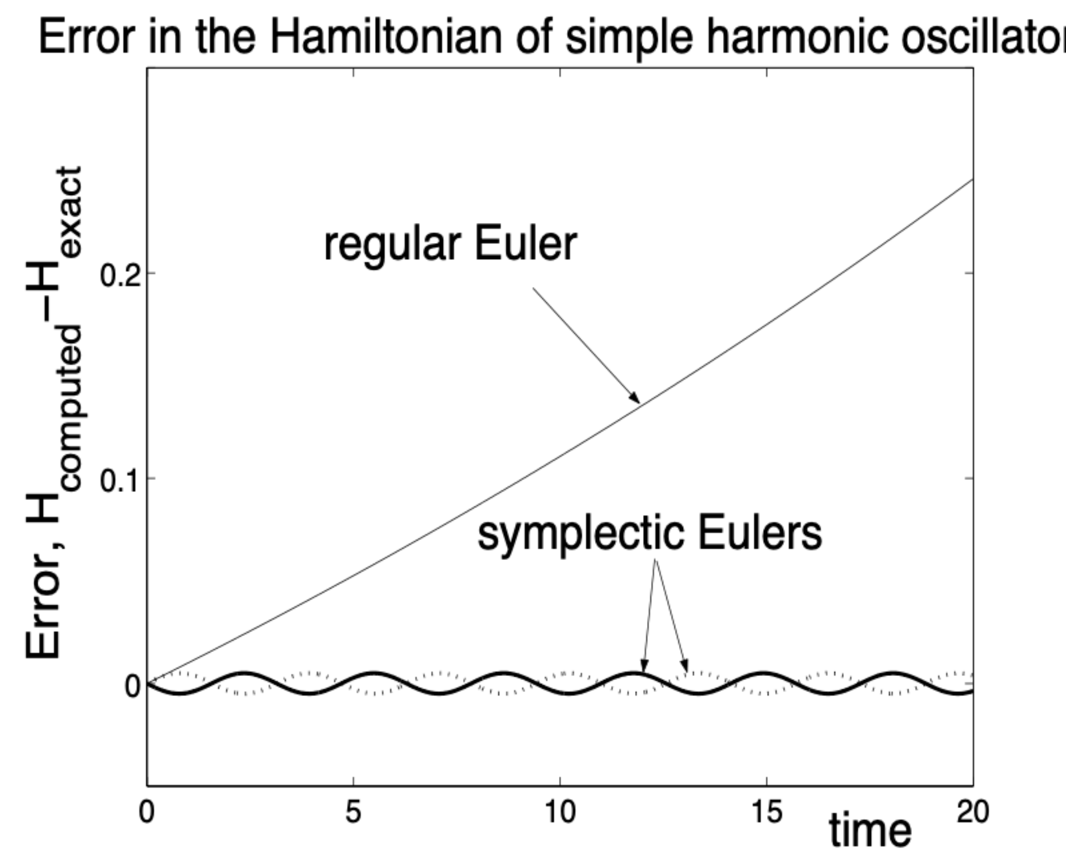
$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = v_0$$

- …kjer je f(y) le funkcija koordinate, zaradi ohranitve energije…

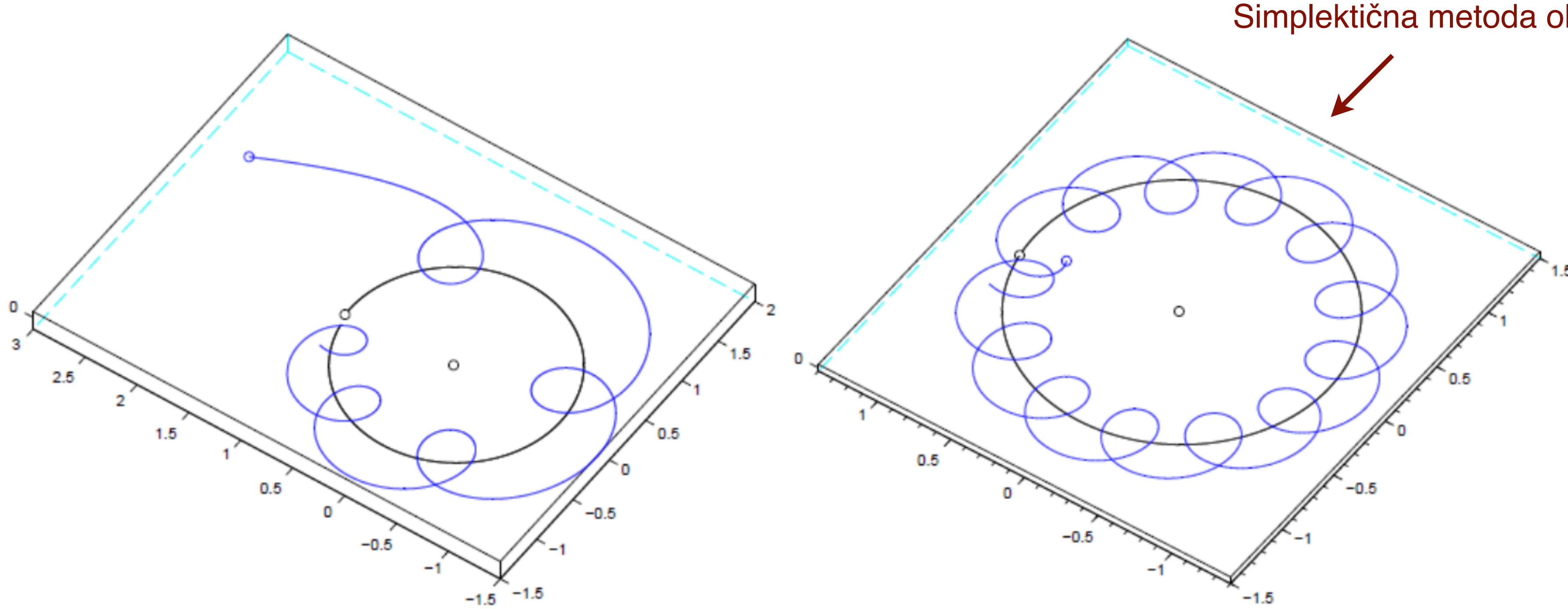
Simplektične metode

- Grafično, v faznem prostoru (lege in hitrosti ali gibalne količine):





The Sun-Earth-Moon System



Simplektična metoda ohranja stabilno orbito….

Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = v_0$$

- Izpeljav je več. Najhitrejša (ali vsaj najlepša) je, če najprej zopet vpeljemo **hitrost v** kot novo vmesno spremenljivko:

$$\begin{aligned} y' &= v, \\ v' &= f(y), \\ y(x_0) &= y_0,\; v(x_0) = v_0 \end{aligned}$$

- .. in nato razbijemo korak v dve polovici. V prvi izboljšamo oceno za hitrost:

$$x_n \to x_{n+\frac{1}{2}}: \quad \begin{aligned} v_{n+\frac{1}{2}} &= v_n + \frac{h}{2} f(y_n) \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- V drugi pa oceno za lego (in pospešek).

$$x_{n+\frac{1}{2}} \to x_{n+1}: \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}} \\ v_{n+1} &= v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1}) \end{aligned}$$

- Pazi, en izračun f je iz prejšnjega koraka!

Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = v_0$$

- ‘Skakljanje’ (in namen izpeljave) postane očitno, če nas v vmesnih točkah ne zanima lega, v mrežnih točkah pa ne hitrost, ker lahko račun poenostavimo. Namesto:

$$x_n \to x_{n+\frac{1}{2}} : \quad v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{h}{2} f(y_n)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

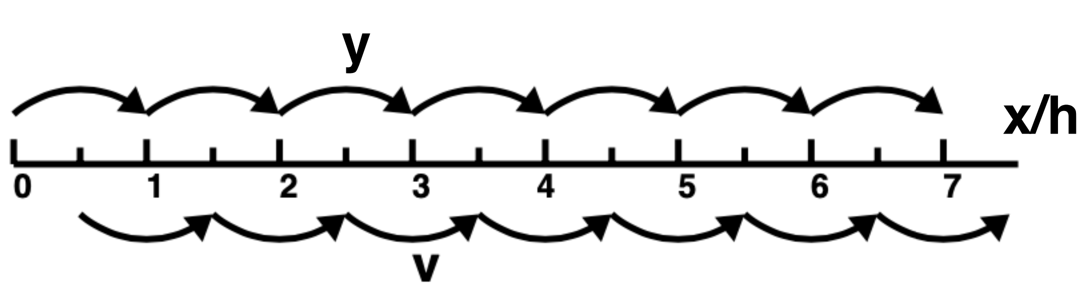
$$x_{n+\frac{1}{2}} \to x_{n+1} : \quad y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1})$$

- Dobimo samo:

$$y_{n+1} = y_n + h\, v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+\frac{3}{2}} = v_{n+\frac{1}{2}} + h\, f(y_{n+1})$$



Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = v_0$$

- Alternativno lahko ta sistem zapišemo tudi samo 'na mreži' vrednosti…

$$x_n \to x_{n+\frac{1}{2}} : \quad v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{h}{2} f(y_n)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$x_{n+\frac{1}{2}} \to x_{n+1} : \quad y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1})$$

- Pa dobimo:

$$y_{n+1} = y_n + h\, v_n + \frac{h^2}{2} f(y_n) \qquad y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \left[f(y_n) + f(y_{n+1}) \right] \qquad \text{...povprečni pospešek ...}$$

Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = v_0$$

- Še tretji zapis pa dobimo, če se v enačbi znebimo še hitrosti. Vzamemo:

$$y_{n+1} = y_n + h\, v_n + \frac{h^2}{2} f(y_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2}\left[f(y_n) + f(y_{n+1})\right]$$

- Ter prejšnji korak:

$$y_n = y_{n-1} + h\, v_{n-1} + \frac{h^2}{2} f(y_{n-1})$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{h}{2}\left[f(y_{n-1}) + f(y_n)\right]$$

- Pa se nam veliko členov zgledno pokrajša in dobimo:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

Henrici: raje zapiši kot:

$$\Delta_n = y_n - y_{n-1}$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + h^2 f(x, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta_{n+1}$$

Central Difference Method

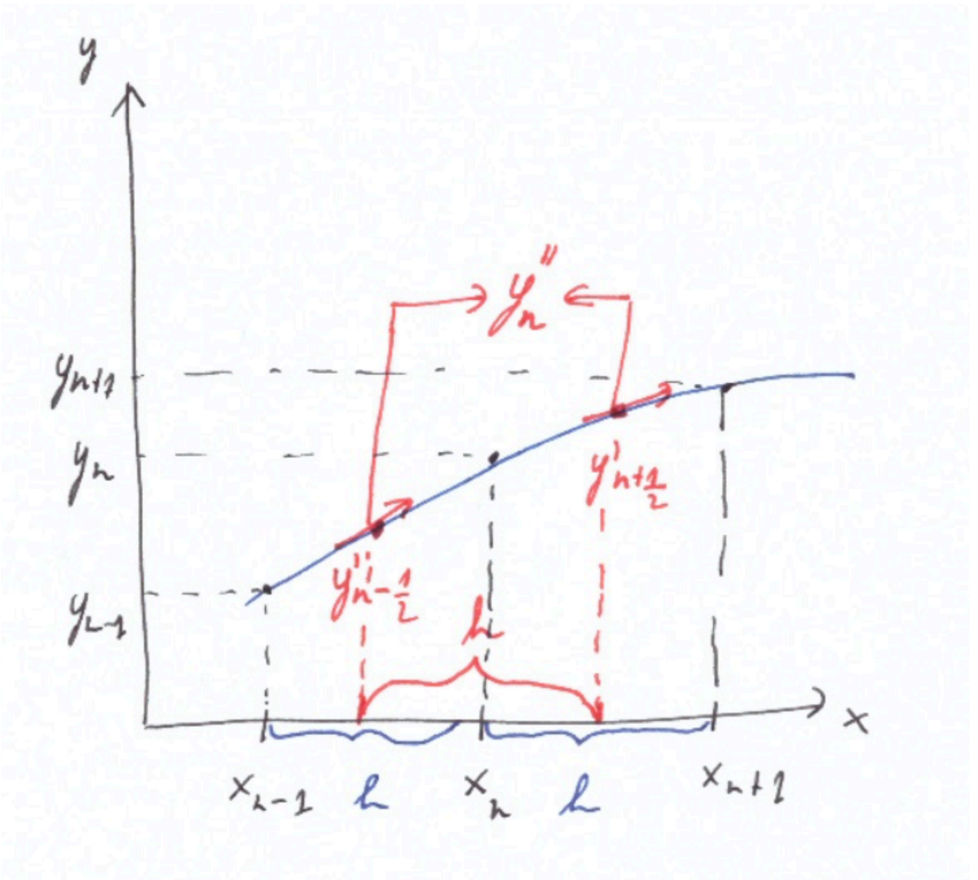
$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

- Novi zapis bi lahko dobili tudi po povsem drugi poti, namreč s približkom drugega odvoda:

$$y''_n = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2)\,;$$

- Le-tega imenujemo tudi središčna razlika (central difference), od tod še eno ime metode..
- CDM razvita neodvisno od simplektične debate.

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{dy}{dx}(x+h/2) - \frac{dy}{dx}(x-h/2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)\right]\end{aligned}$$



Central Difference Method

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

- Novi zapis bi lahko dobili tudi po povsem drugi poti, namreč s približkom drugega odvoda:

$$y_n'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2)\,;$$

- Le-tega imenujemo tudi središčna razlika (central difference), od tod še eno ime metode..
- CDM razvita neodvisno od simplektične debate.

- **Dodatno potrebno začetno točko y_1 dobimo iz začetnih pogojev.**
  - po Taylorju (ali pospešenem gibanju):

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot h + f(y_0) \cdot \frac{h^2}{2}$$

- Brez te naše izpeljave pa ne bi vedeli, da je tudi CDM v resnici simplektična (pač identična leapfrog metodi).

PEFRL

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = v_0$$

- Obstajajo tudi simplektične metode višjih redov. Ena najboljših je Position Extended Forest-Ruth-Like method (PEFRL).
  - Ime primer, kako včasih ne znamo najti dobrega akronima…
  - **Globalno četrtega reda, štiri vrednotenja funkcije na korak…**

$$
\begin{aligned}
x &= x + \xi h v \\
v &= v + (1-2\lambda)\frac{h}{2}F(x) \\
x &= x + \chi h v \\
v &= v + \lambda h F(x) \\
x &= x + (1-2(\chi+\xi))hv \qquad \text{(PEFRL algorithm)} \\
v &= v + \lambda h F(x) \\
x &= x + \chi h v \\
v &= v + (1-2\lambda)\frac{h}{2}F(x) \\
x &= x + \xi h v
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\xi &= +0.1786178958448091\mathrm{E}{+}00 \\
\lambda &= -0.2123418310626054\mathrm{E}{+}00 \\
\chi &= -0.6626458266981849\mathrm{E}{-}01
\end{aligned}
$$

Naloga

- Čim več metod uporabi za izračun nedušenega nihanja matematičnega nihala z začetnim pogojem $\theta(0) = \theta_0 = 1$, $\dot{\theta}(0) = 0$.
  - Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo.
  - Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo:
$$E \propto 1 - \cos\theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2\omega_0^2}$$
  - **Nariši tudi ustrezne fazne portrete!**
  - Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas $\frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$, kjer je K(m) popolni eliptični integral prve vrste, definiran z:
$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-m\sin^2 u)}}$$
Pazi, obstaja tudi definicija z m², v Scipy je tale !!
  - Analitična rešitev za matematično nihalo je potem:
$$\theta(t) = 2\arcsin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{sn}\left[K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t\,;\,\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}$$
  - Dodatno lahko tudi sprogramirate eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe ali pa ga vzamete iz ustreznih programskih knjižnjic.

Dodatni nalogi

- **Dodatna naloga**: Razišči še resonančno krivuljo vzbujenega dušenega matematičnega nihala:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \sin x = v\cos(\omega_0 t)\ ,$$

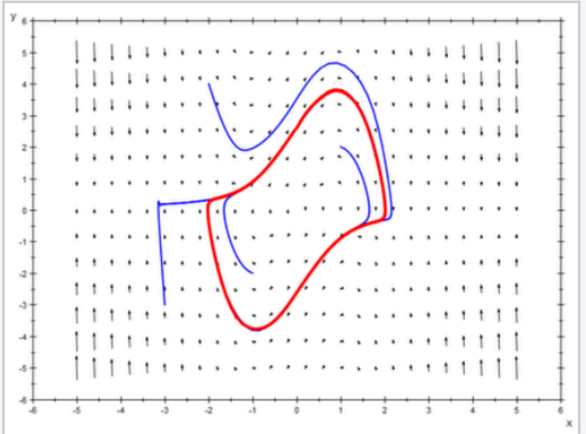
- Opazuj obnašanje odklonov in hitrosti nihala
- pri dušenju β=0.5, vzbujevalni frekvenci ω_0=2/3 in amplitudo vzbujanja na območju 0.5 < v < 1.5.
- Poskusi opaziti **histerezno** obnašanje resonančne krivulje pri velikih amplitudah vzbujanja.

- **Dodatna dodatna naloga**: Oglej si še odmike in hitrosti (fazne portrete) van der Polovega oscilatorja:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda\frac{dx}{dt}\left(1 - x^2\right) + x = v\cos(\omega_0 t)\ ,$$

s parametri ω_0=1 v=10 ter λ=1 ali λ=100.

- Tu se ne trudi s preprostimi diferenčnimi shemami temveč uporabi napredne metode …



Phase portrait of the unforced Van der Pol oscillator, showing a limit cycle and the direction field