Matematično-fizikalni praktikum 2021/22

6. naloga: Enačbe hoda

Gregor Žunič

Za opis najpreprostejših fizikalnih procesov uporabljamo navadne diferencialne enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je na primer enačba za časovno odvisnost temperature v stanovanju, ki je obdano s stenami z neko toplotno prevodnostjo in določeno zunanjo temperaturo. V najpreprostejšem primeru ima enačba obliko

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\left(T - T_{\mathrm{zun}}\right) \tag{1}$$

z analitično rešitvijo

$$T(t) = T_{\mathrm{zun}} + \mathrm{e}^{-kt}\left(T(0) - T_{\mathrm{zun}}\right) \ .$$

Enačbam, ki opisujejo razvoj spremenljivk sistema y po času ali drugi neodvisni spremenljivki x, pravimo *enačbe hoda*. Pri tej nalogi bomo proučili uporabnost različnih numeričnih metod za reševanje enačbe hoda oblike $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f(x,y)$, kot na primer (1). Najbolj groba prva inačica, tako imenovana osnovna Eulerjeva metoda, je le prepisana aproksimacija za prvi odvod $y' \approx (y(x+h) - y(x))/h$, torej

$$y(x+h) = y(x) + h \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x \ . \tag{2}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v ekvidistantnih korakih dolžine h. Metoda je večinoma stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo ustrezno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$, t.j. lokalna natančnost drugega reda) je simetrizirana Eulerjeva (ali sredinska) formula, ki sledi iz simetriziranega približka za prvi odvod, $y' \approx (y(x+h) - y(x-h))/2h$. Računamo po shemi

$$y(x+h) = y(x-h) + 2h \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x \ , \tag{3}$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}\left[\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_x + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x+h}\right] \ , \tag{4}$$

le da to pot ne poznamo odvoda v končni točki intervala (shema je implicitna). Pomagamo si lahko z iteracijo. Zapišimo odvod kot:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_x = f(x,y)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_n = y(x_n)$$

Heunova metoda ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno) je približek idealne formule z:

$$\hat{y}_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{5}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})\right] \tag{6}$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (tudi $\mathcal{O}\left(h^3\right)$ lokalno):

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{7}$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}\,h\,k_1) \tag{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\,k_2 \tag{9}$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd...

V praksi zahtevamo natančnost in numerično učinkovitost, ki sta neprimerno boljši kot pri opisanih preprostih metodah. Uporabimo metode, zasnovane na algoritmih prediktor-korektor, metode višjih redov iz družine Runge-Kutta (z adaptivnimi koraki), ali ekstrapolacijske metode. Brez dvoma ena najbolj priljubljenih je metoda RK4,

$$\begin{aligned} k_1 &= f\left(x,\, y(x)\right)\ , \\ k_2 &= f\left(x+\tfrac{1}{2}h,\, y(x)+\tfrac{h}{2}k_1\right)\ , \\ k_3 &= f\left(x+\tfrac{1}{2}h,\, y(x)+\tfrac{h}{2}k_2\right)\ , \\ k_4 &= f\left(x+h,\, y(x)+hk_3\right)\ , \\ y(x+h) &= y(x)+\tfrac{h}{6}\ \left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)+\mathcal{O}(h^5)\ . \end{aligned} \tag{10}$$

Naloga: preizkusi preprosto Eulerjevo metodo ter nato še čim več naprednejših metod(Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor ...) na primeru z začetnima temperaturama $y(0) = 21$ ali $y(0) = -15$, zunanjo temperaturo $y_{\rm zun} = -5$ in parametrom $k = 0.1$. Kako velik (ali majhen) korak h je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri različnih vrednostih parametra k.

Dodatna naloga: temperatura prostora se lahko še dodatno spreminja zaradi denimo sončevega segrevanja skozi okna, s 24-urno periodo in nekim faznim zamikom δ, kar opišemo z dva- ali triparametrično enačbo

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k\left(T - T_{\rm zun}\right) + A\sin\left(\frac{2\pi}{24}(t-\delta)\right)\ . \tag{11}$$

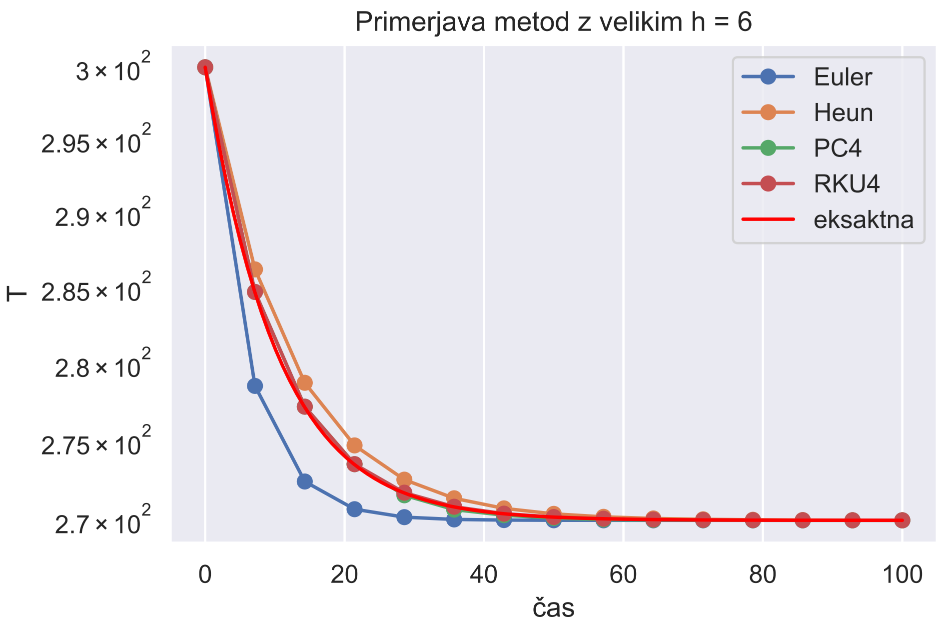
Poišči še družino rešitev te enačbe pri $k = 0.1$ in $\delta = 10$! Začni z $A = 1$, kasneje spreminjaj tudi to vrednost. V premislek: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?

1 Reševanje

Primerjal in od zdaj najprej označeval metode

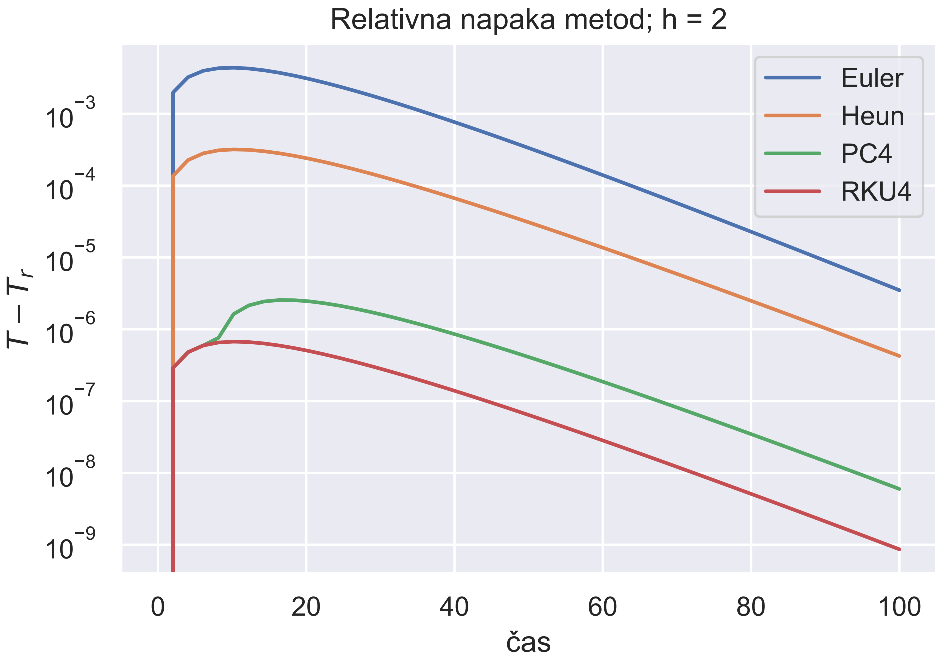
Metoda	Oznaka
Euler	Eulerjeva metoda
Heun	Heunova metoda
RKU4	Runga Kutta 4. reda
PC4	Adams-Bashforth-Moulton 4. reda predictor-corrector

Najprej poskusimo osnovno enačbo rešiti z vsemi metodami z velikim h, da vizualno predstavimo natančnost metod.



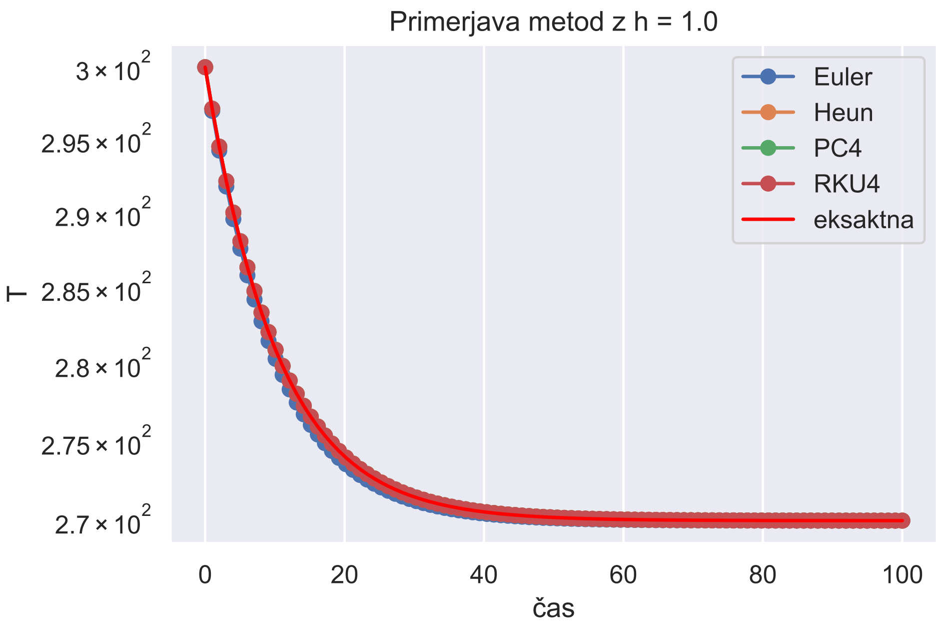
Slika 1: Primerjava vseh metod z velikim $h = 6$ in $k = 0,1$, $T_{zun} = 270$, $T_0 = 300$

Smiselno, je tudi primerjati (relativne, vbistvu je vseeno katero, ker so normalizirane z isto vrednostjo) napake od dejanske analitične vrednosti.



Slika 2: Napake vseh metod z velikim $h = 2$ in $k = 0,1$, $T_{zun} = 270$, $T_0 = 300$

Opazimo lahko, da je napaka pri vseh metodah največja nekje okoli 15s. Zanimiva in zelo relevantna analiza je, s kakšno potenco se napaka pri tej vrednosti dejansko povečuje ko spreminjamo vrednost h. Če bi dovolj zmanjšal h, dobimo precej lep graf, kot lahko opazimo naprej.

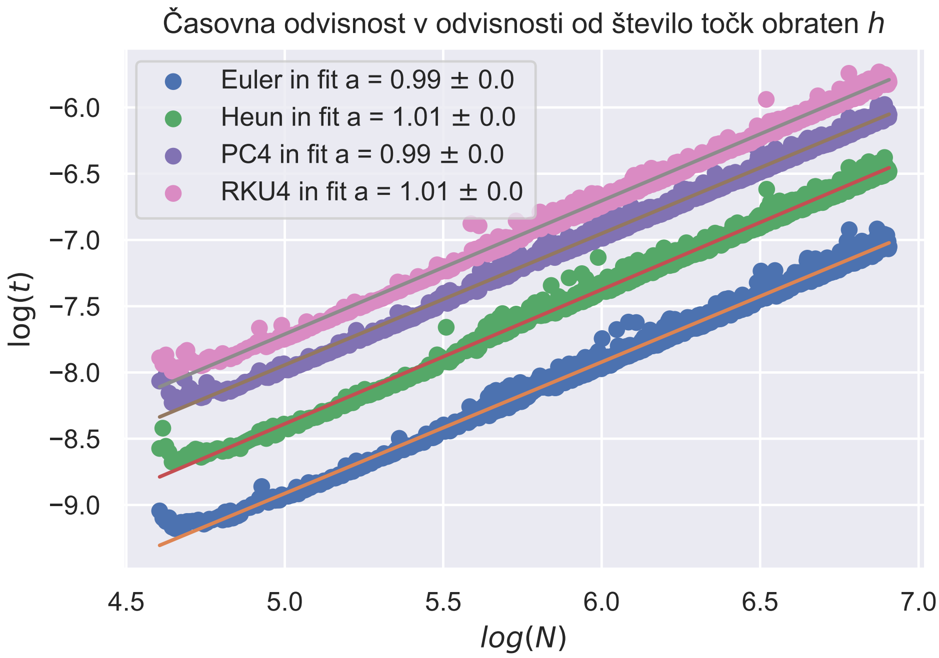


Slika 3: Primerjava vseh metod z malim $h = 1$ in $k = 0,1$, $T_{zun} = 270$, $T_0 = 300$

Že če damo $h = 1$ se grafi skoraj popolnoma ujemajo, kar pomeni, da metode znajo rešiti to vrednost (so stabilne (do neke mere)).

1.1 Časovna zahtevnost metod

Torej, vse metode so vbistvu linearne v časovni zahtevnosti, vendar je število korakov (in torej čas računanja) različen. Najmanjši je seveda za Eurlerjevo metodo, ker ima samo en korak - torej najhitrejša.

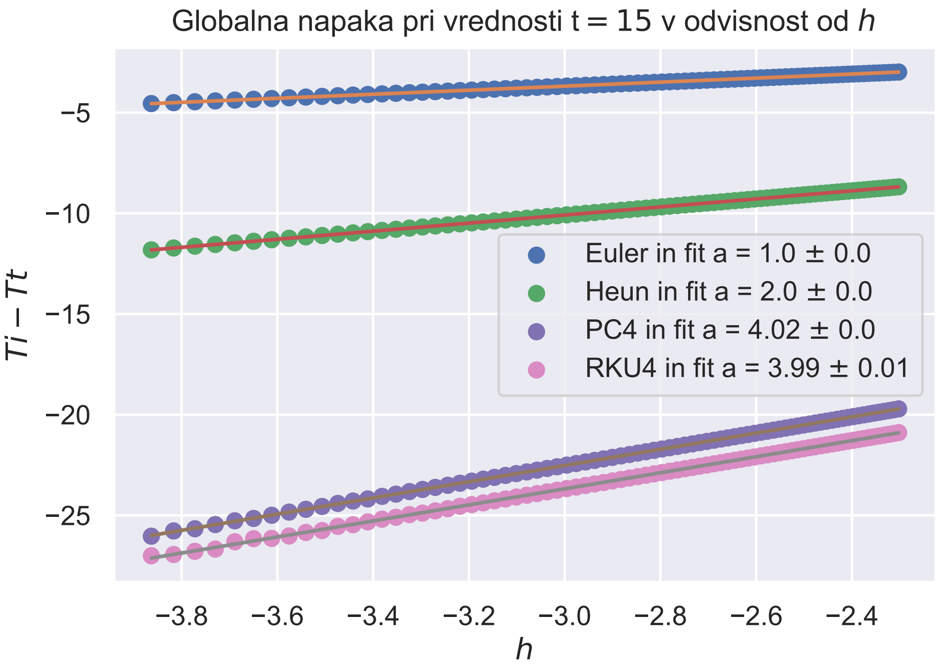


Slika 4: Primerjava časovne zahtevnosti metod.

Vidno je tudi, da časovna zahtevnost narašča linearno z zahtevnostjo metod (kar je precej ne presenetljivo).

1.2 Napake

S kakšnim polinomom maksimalne stopnje naraščajo napake? Teoretične vrednosti, se kot bomo videli, zares ujemajo s tem, kar bomo dobili numerično.



Slika 5: Primerjava globalnih napak vseh metod

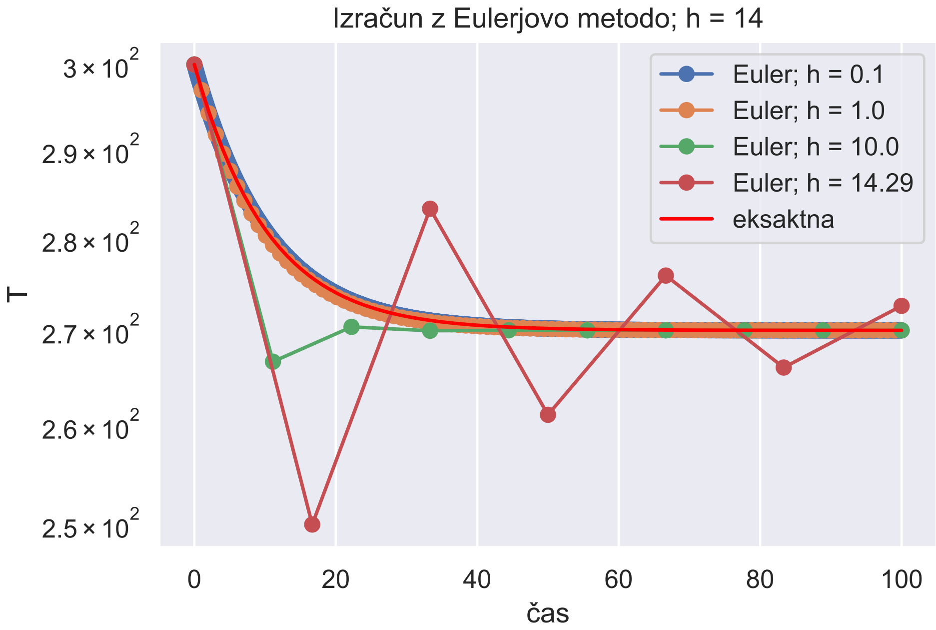
Graf prikazuje, da so napake zares pravilne oblike, kot smo jih napovedali pri teoretični napovedi. Torej tabela 1.3

Opazimo tudi, da je seveda napaka pri RKU4 in PC4 precej manjša ne presenetljivo bistveno manjša pri vsaki vrednosti, in tudi natančna na bolj natančen polinomski razvoj. Eulerjevo metodo je smiselno uporabljati zgolj, če imamo zelo zelo veliko podatkov (ker ima linearno zahtevnost) in je funkcije zelo pohlevna, kar pomeni, da jo bomo res dobro zadeli tudi z večjimi h, ali pa če nam je važna samo hitrost programa ne pa tudi kakšna je natančnost (seveda govorim do neke mere, ni ravno smiselno, da je napaka več kot 100 odstotna).

1.3 Stabilnost

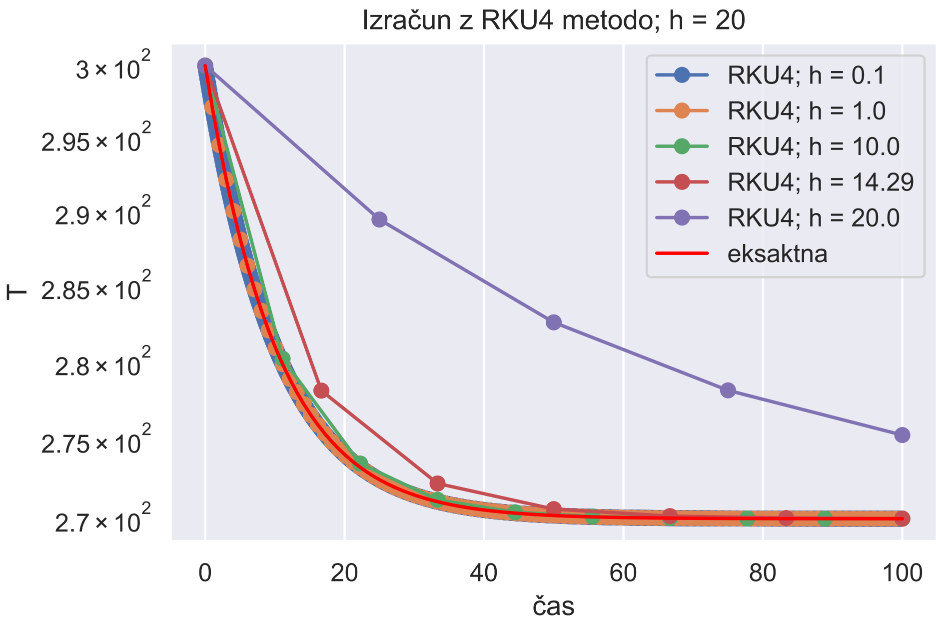
Stabilnost sem implementiral tako, da sem pogledal zadnjih nekaj členov ter jih primerjal, da je njihova skupna vsota absolutnih vrednosti manjša kot neka vrednost (postavil sem na 0.01, ker nas zanimajo zgolj vrednosti, ki precej odstopajo - težko odstopajo malo).

Zanima nas torej, kakšen je največji koeficient kh do katerega enačbe še delujejo. Najprej je fino pokazat kaj se zgodi, če ni stabilno - oziroma, kaj pomeni, da ni stabilno. Pri fiksnem k lahko to dosežemo s spreminjanjem h.



Slika 6: Nestabilnost Eulerjeve metode

enak graf narišemo tudi za RKU4 metodo.



Slika 7: Nestabilnost RKU4 metode

Pri tem je seveda precej smiselno povdariti, da se že zelo hitro vidi, da mora biti nek smiseln h drugače metoda zares nima nekega smisla. Seveda bomo dobili slabo odvisnost z vsako metodo, če bo h prevelik.

Če izračunamo do katere vrednosti so po zgornjem postopku stabilne (natančne v limiti) dobimo lahko narišemo naslednjo tabelo.

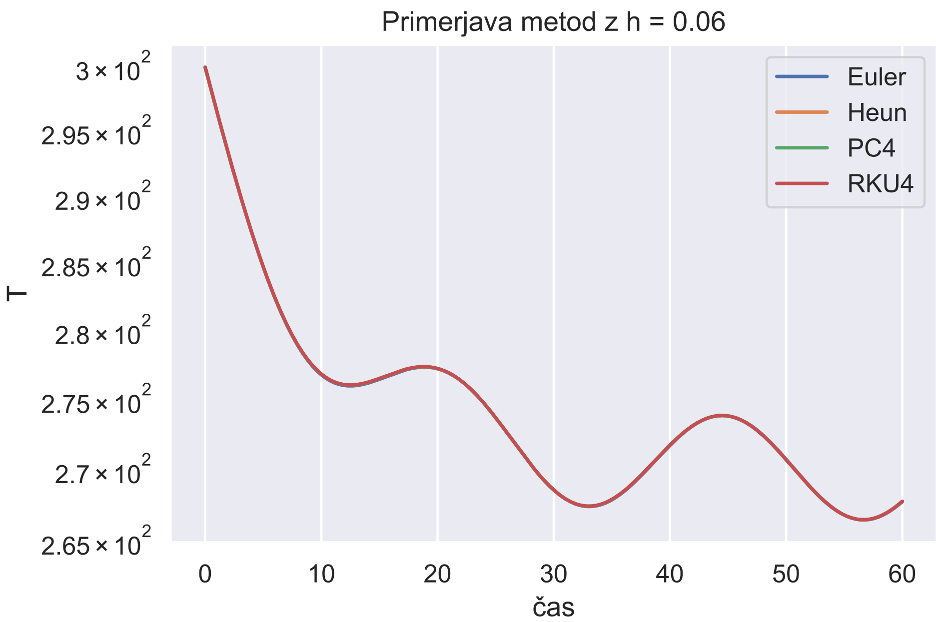
metoda	$o(h)_{globalna}$	$o(h)_{global}^{theory}$	hk_max
Euler	1	1	1.92
Heun	2	1	1.819
PC4	4.02	4	1.213
RKU4	3.99	4	2.62

ki prikazuje globalno napako pri zadnji vrednosti in maksimalen produkt hk do katerega je enačba še stabilna. Kaj tabela v praksi pomeni? Da moramo izbrati za nek določen h ali k izbrati nek k oziroma h, da bo skupen produkt manjši od vrednosti v tabeli, drugače bomo dobili popolnoma napaćen rezultat.

1.4 Dodatna enačba

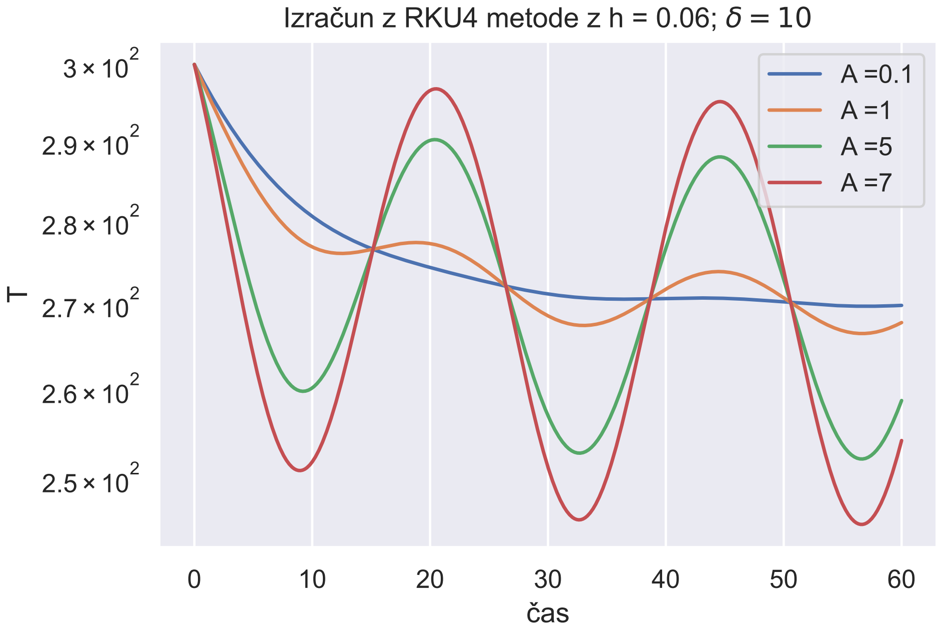
Kakšen je graf obnašanja po dnevih (perioda 24h)?

Če zgolj na enačbo delujemo z vsemi metodami in to narišemo, vidimo, da vse metode znajo izračunati pri majhnem h.



Slika 8: Graf za modificirano diferencialno enačbo.

Kaj pa se zgodi, če malo spreminjamo vrednosti A (zgolj poveča ali zmanjša se amplituda).



Slika 9: Graf za modificirano diferencialno enačbo z nekaj vrednostmi A.

Kako izračunati kje je vrh? Najbolje je da vzamemo kakšno metodo, ki ima čim manjšo napako v y smeri in izberemo čim večji A, da bo napaka v y čim manjša. Čisto dovolj primerna je RKU4 metoda, ki nam seveda poda lokalno napako $o(h^5)$. Druga možnost je samo, da izračunamo vrednost z zelo majhnih h (kolikor natančno pač hočemo). Če pa imamo zgolj funkcijo, pa se seveda lahko poslužimo Fourierove transformacije.