Matematično-fizikalni praktikum

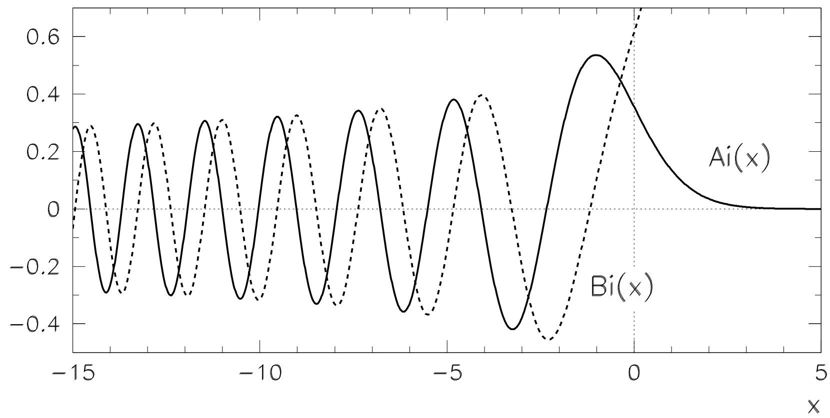
1. naloga: Airyjevi funkciji

Airyjevi funkciji Ai in Bi (slika 1) se v fiziki pojavljata predvsem v optiki in kvantni mehaniki [1]. Definirani sta kot neodvisni rešitvi enačbe

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

in sta predstavljivi v integralski obliki

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(t^3/3 + xt)\,\mathrm{d}t\,, \quad \mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{-t^3/3+xt} + \sin(t^3/3 + xt)\right]\,\mathrm{d}t\,.$$



Slika 1: Graf Airyevih funkcij Ai in Bi za realne argumente. Funkcija Ai je povsod omejena, medtem ko Bi divergira na pozitivni polosi. Ničle imata le na negativni polosi.

Za majhne x lahko funkciji Ai in Bi izrazimo z Maclaurinovima vrstama

$$\mathrm{Ai}(x) = \alpha f(x) - \beta g(x)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \sqrt{3}\left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right]\,,$$

kjer v $x = 0$ veljata zvezi $\alpha = \mathrm{Ai}(0) = \mathrm{Bi}(0)/\sqrt{3} \approx 0.355028053887817239$ in $\beta = -\mathrm{Ai}'(0) = \mathrm{Bi}'(0)/\sqrt{3} \approx 0.258819403792806798$. Vrsti za f in g sta

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k}}{(3k)!}\,, \qquad g(x) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{3^k x^{3k+1}}{(3k+1)!}\,,$$

kjer je

$$(z)_n = \Gamma(z+n)/\Gamma(z)\,, \qquad (z)_0 = 1\,.$$

Za velike vrednosti $|x|$ Airyjevi funkciji aproksimiramo z njunima asimptotskima razvojema. Z novo spremenljivko $\xi = \frac{2}{3}|x|^{3/2}$ in asimptotskimi vrstami

$$L(z) \sim \sum_{s=0}^\infty \frac{u_s}{z^s}\,, \qquad P(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s}}{z^{2s}}\,, \qquad Q(z) \sim \sum_{s=0}^\infty (-1)^s \frac{u_{2s+1}}{z^{2s+1}}\,,$$

s koeficienti

$$u_s = \frac{\Gamma(3s+\frac{1}{2})}{54^s s!\,\Gamma(s+\frac{1}{2})}$$

za velike pozitivne x izrazimo

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(-\xi)\,, \qquad \mathrm{Bi}(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{\pi}x^{1/4}}\,L(\xi)\,,$$

za po absolutni vrednosti velike negativne x pa

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\Big[\sin(\xi-\pi/4)\,Q(\xi) + \cos(\xi-\pi/4)\,P(\xi)\Big]\,, \\
\mathrm{Bi}(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}(-x)^{1/4}}\Big[-\sin(\xi-\pi/4)\,P(\xi) + \cos(\xi-\pi/4)\,Q(\xi)\Big]\,.
\end{aligned}$$

Naloga: Z uporabo kombinacije Maclaurinove vrste in asimptotskega razvoja poišči čim učinkovitejši postopek za izračun vrednosti Airyjevih funkcij Ai in Bi na vsej realni osi z **absolutno** napako, manjšo od 10^{-10}. Enako naredi tudi z **relativno** napako in ugotovi, ali je tudi pri le-tej dosegljiva natančnost, manjša od 10^{-10}. Pri oceni napak si pomagaj s programi, ki znajo računati s poljubno natančnostjo, na primer z Mathematico in/ali paketi mpmath in decimal v programskem jeziku Python.

Dodatna naloga: Ničle funkcije Ai pogosto srečamo v matematični analizi pri določitvi intervalov ničel specialnih funkcij in ortogonalnih polinomov [2] ter v fiziki pri računu energijskih spektrov kvantnomehanskih sistemov [3]. Poišči prvih sto ničel $\{a_s\}_{s=1}^{100}$ Airyjeve funkcije Ai in prvih sto ničel $\{b_s\}_{s=1}^{100}$ funkcije Bi pri $x<0$ ter dobljene vrednosti primerjaj s formulama

$$a_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-1)}{8}\right)\,, \qquad b_s = -f\left(\frac{3\pi(4s-3)}{8}\right)\,, \qquad s = 1,2,\ldots\,,$$

kjer ima funkcija f asimptotski razvoj [4]

$$f(z) \sim z^{2/3}\left(1 + \frac{5}{48}\,z^{-2} - \frac{5}{36}\,z^{-4} + \frac{77125}{82944}\,z^{-6} - \frac{108056875}{6967296}\,z^{-8} + \ldots\right)\,.$$

Literatura

[1] O. Vallée, M. Soares, *Airy functions and applications to physics*, Imperial College Press, London 2004.

[2] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, Providence 1939.

[3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course in theoretical physics, Vol. 3: Quantum mechanics*, 3rd edition, Pergamon Press, Oxford 1991.

[4] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, 10th edition, Dover Publications, Mineola 1972.