



11. naloga

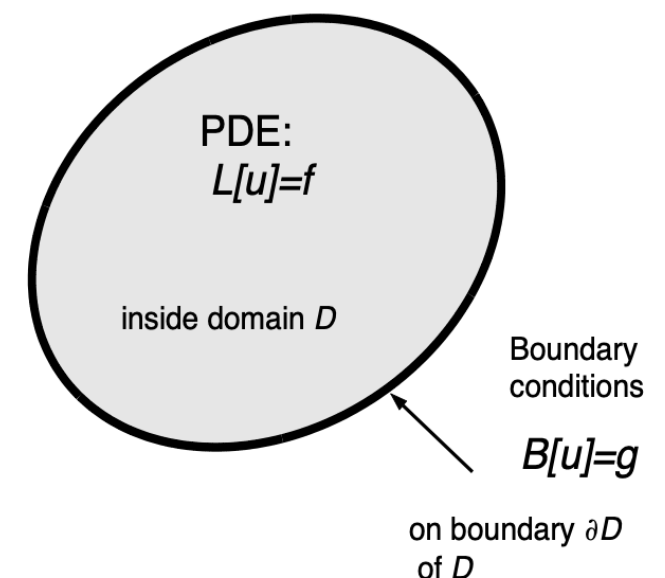
Reševanje PDE z metodo Galerkina

Ma-Fi praktikum 2021/22



Eliptične PDE z RP

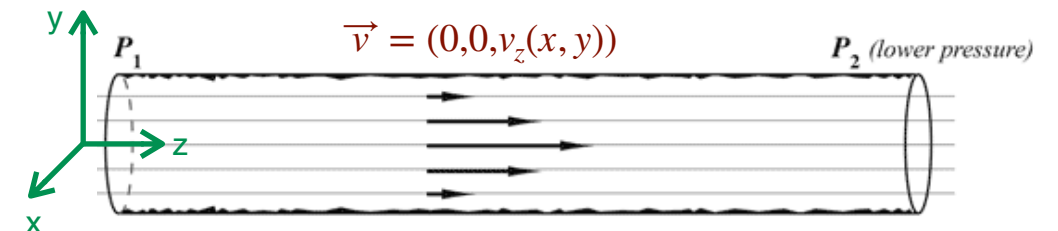
- Danes bomo nabor naših metod za reševanje PDE razširili še **na PDE eliptičnega tipa z robnimi pogoji**:
 - Med te spadata **Poissonova** $\Delta u = f(\vec{r})$ in **Laplaceova enačba** $\Delta u = 0$ ter še na primer **Helmholzova PDE** $\Delta u = \lambda u$.
 - Vsekakor se bomo zdaj omejili na **stacionarne primere** (časovno neodvisne).
 - Za domačo nalogo boste dobili problem pretoka skozi cev...
 - Konkretnije si bomo pogledali **metodo Galerkina** za reševanje tovrstnih problemov.
 - **Obstaja cel kup drugih metod** (npr. običajne diferenčne), ki pa jih ne bomo eksplicitno obravnavali (ali se ponavljajo, ali pa so bolj zahtevne) - lep pregled je v prispevku na spletni učilnici ...





Poissonova enačba

- Naš današnji zgled za PDE z BVP bo tok tekočin:
 - Natančneje **laminarni tok nestisljive, viskozne tekočine po cevi s konstantnim tlačnim gradientom p'** .
 - V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2 v = \Delta v = -\frac{p'}{\eta},$$


kjer je v tem konkretnem primeru relevantno samo hitrostno polje v eni smeri $v = v_z(x, y)$, odvisno od prečnih koordinat glede na tok...

- Zaradi viskoznosti je hitrost tekočine na stenah cevi enaka nič (**Dirichletov r.p.**)
- Za pretok velja **Poiseuillov zakon**:

$$\Phi = \int_S v \, dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta},$$

ki opisuje pretok po takšni cevi.

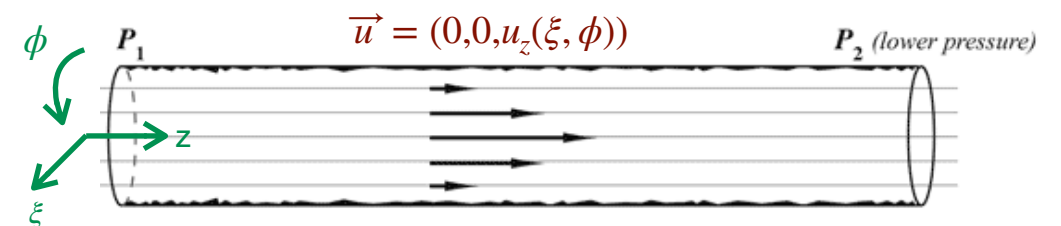
C odvisen od oblike preseka cevi, $C=1$ za krožno cev...



Poissonova enačba

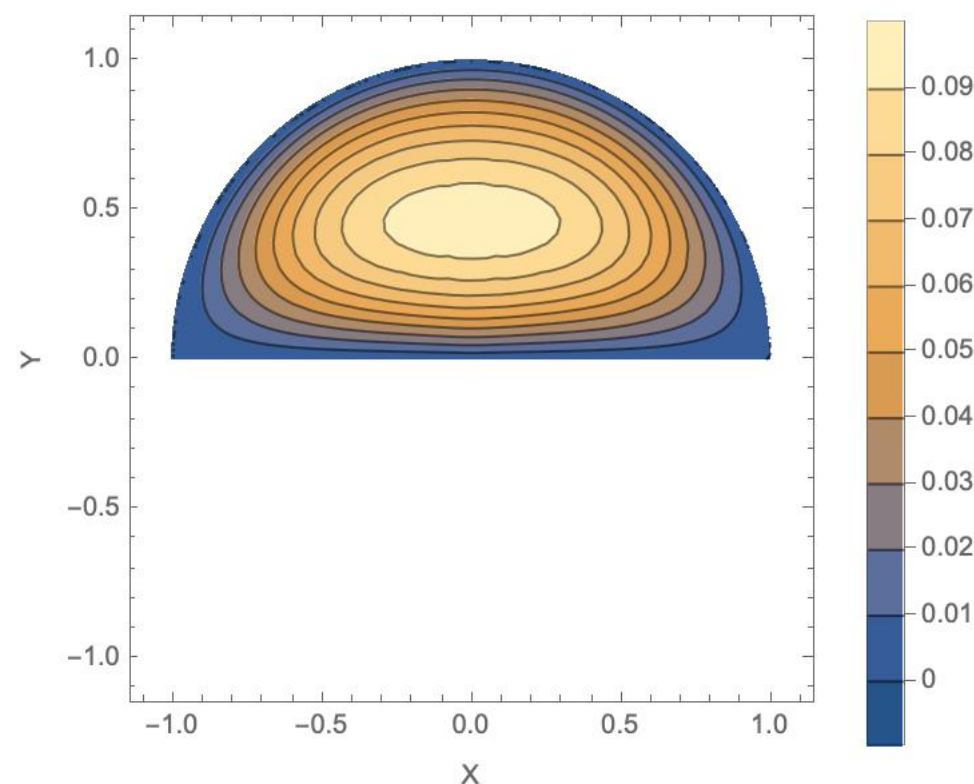
- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \phi &\in [0, \pi] \\ u &= \frac{v\eta}{p'R^2} \end{aligned} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1$$

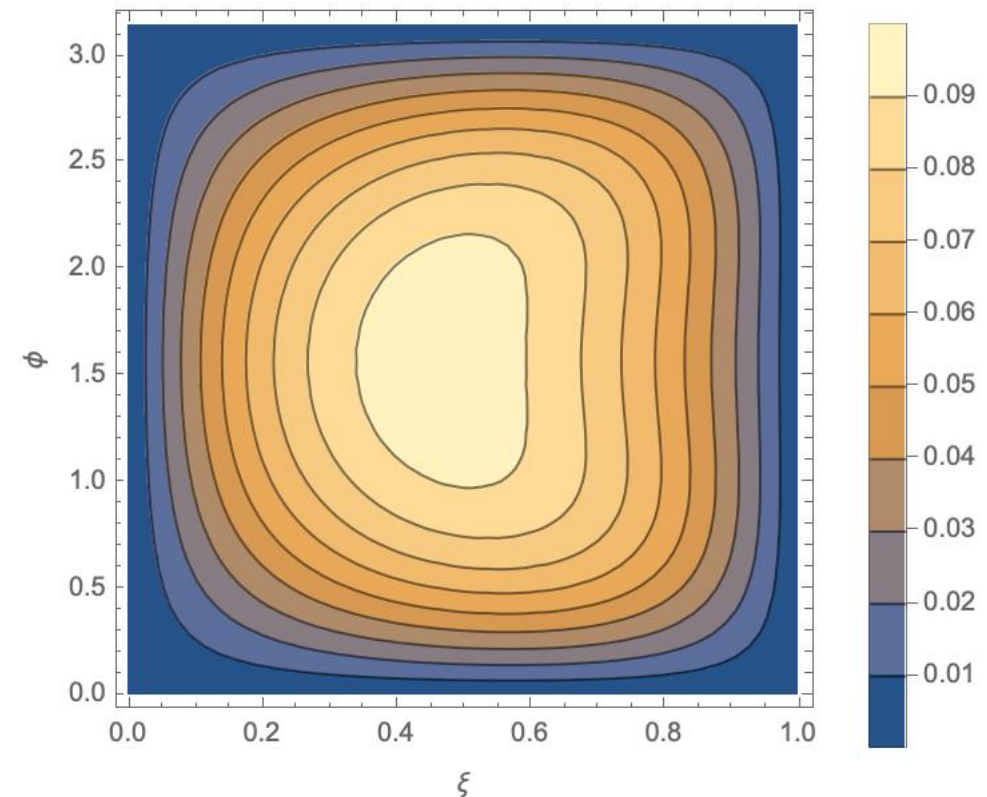


kjer smo uvedli cilindrične koordinate in nekaj (re)skaliranja...

- Hitrostni profil seveda ne bo več preprosta parabola (!)



4





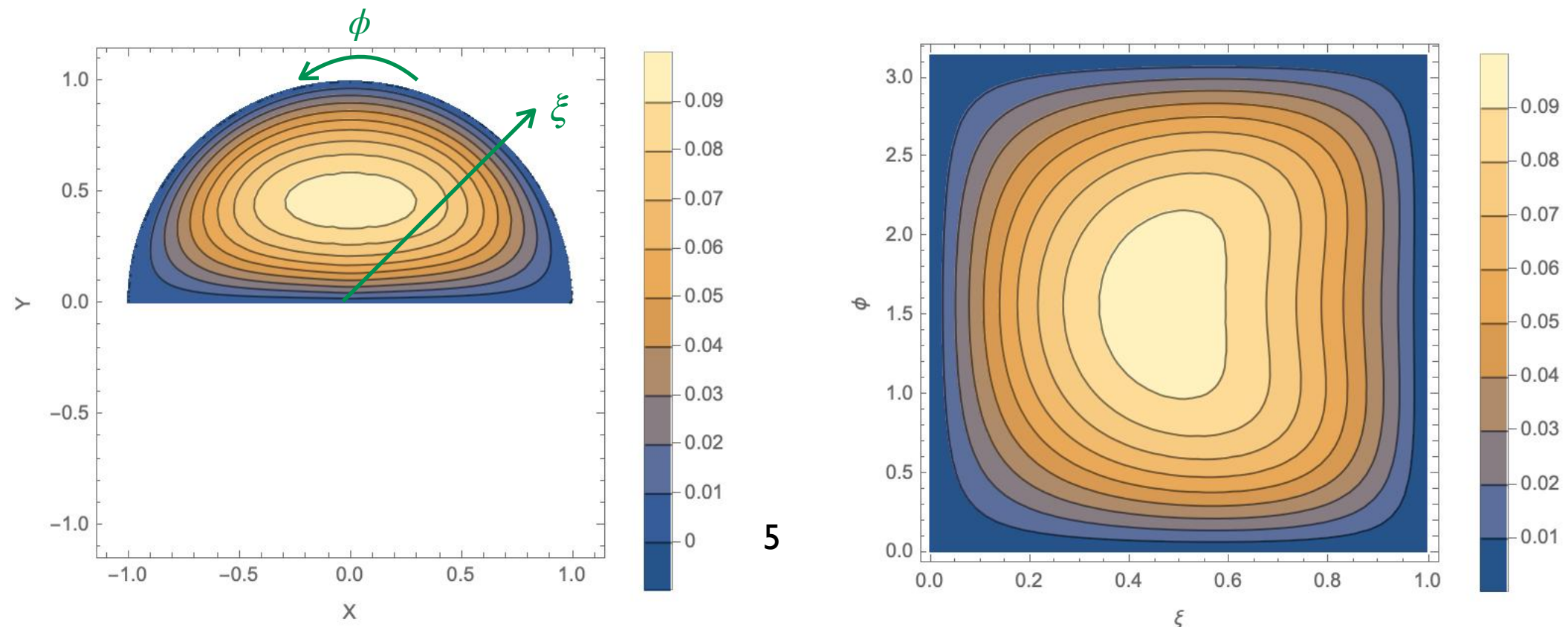
Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R}, & \xi &\in [0, 1] \\ \phi &\in [0, \pi] \\ u &= \frac{v\eta}{p'R^2} \end{aligned} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1 \quad \left. \begin{aligned} u(\xi = 1, \phi) &= 0, & \phi &\in [0, \pi] \\ u(\xi, \phi = 0) &= 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) &= 0, \end{aligned} \right\} \xi \in [0, 1]$$

kjer smo uvedli cilindrične koordinate in nekaj (re)skaliranja...

- Hitrostni profil seveda ne bo več preprosta parabola (!)



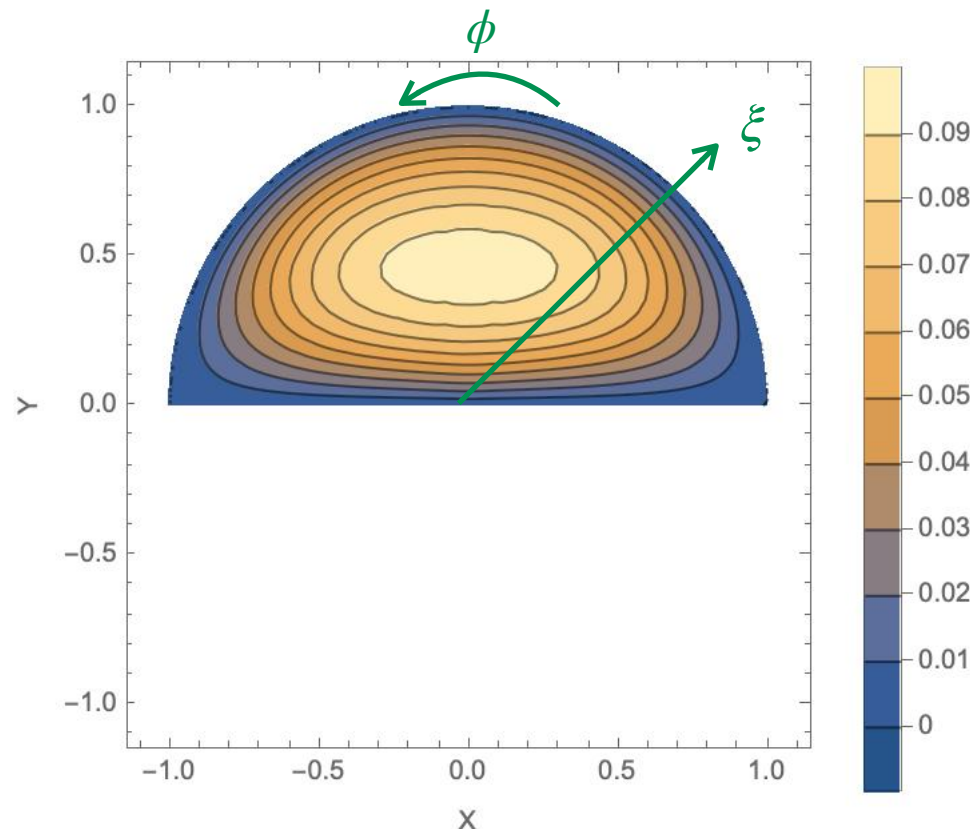


Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \phi \in [0, \pi] \\ u = \frac{v\eta}{p'R^2} \end{array} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1 \quad \left. \begin{array}{l} u(\xi = 1, \phi) = 0, \quad \phi \in [0, \pi] \\ u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{array} \right\} \xi \in [0, 1]$$

- Koeficient C s Poiseuillovim zakonom zdaj zapišemo z:



$$C = 8\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{u(\xi, \varphi) \xi \, d\xi \, d\varphi}{(\pi/2)^2}.$$

Preostali faktor od S^2

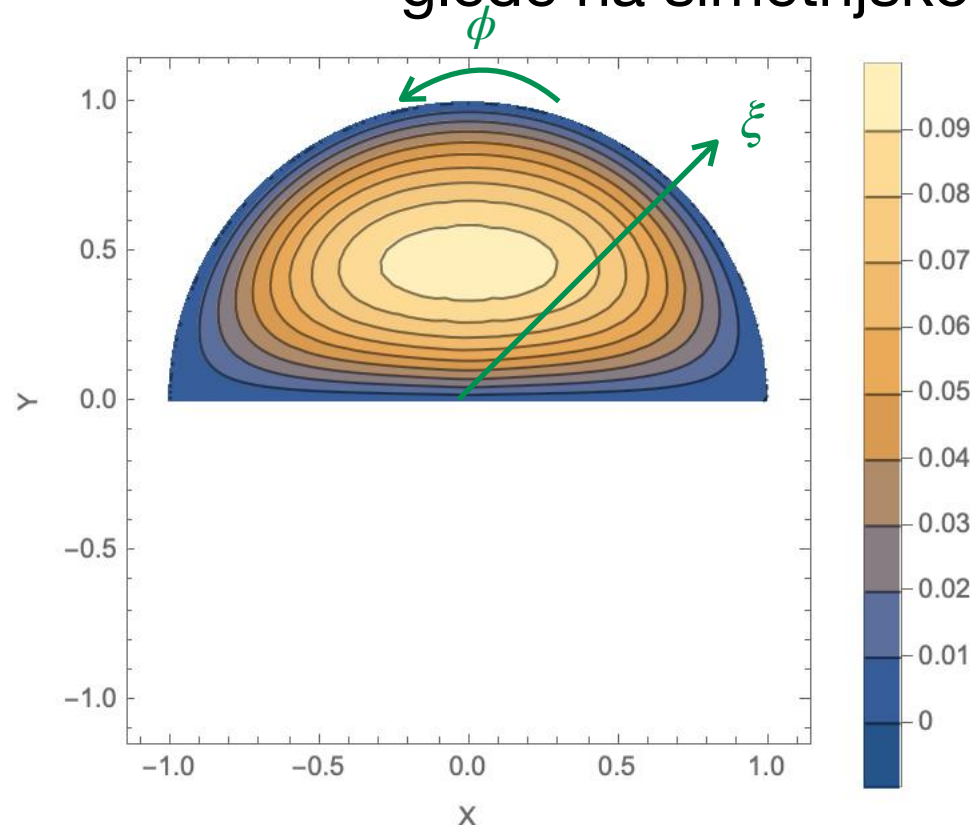


Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \phi \in [0, \pi] \\ u = \frac{v\eta}{p'R^2} \end{array} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1 \quad \left. \begin{array}{l} u(\xi = 1, \phi) = 0, \quad \phi \in [0, \pi] \\ u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{array} \right\} \xi \in [0, 1]$$

- Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in ‘**sodih**’ sinusov glede na simetrijsko os pri $\pi/2$:



koeficienti, dobimo iz razvoja ‘ $f = -1$ ’ v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{ms} J_{2m+1}(y_{(2m+1)s}\xi) \sin((2m+1)\phi)$$

dvojna vsota

s-te ničle Besselovih f.

‘sodi sinusi’ glede na $\phi_0 = \pi/2$

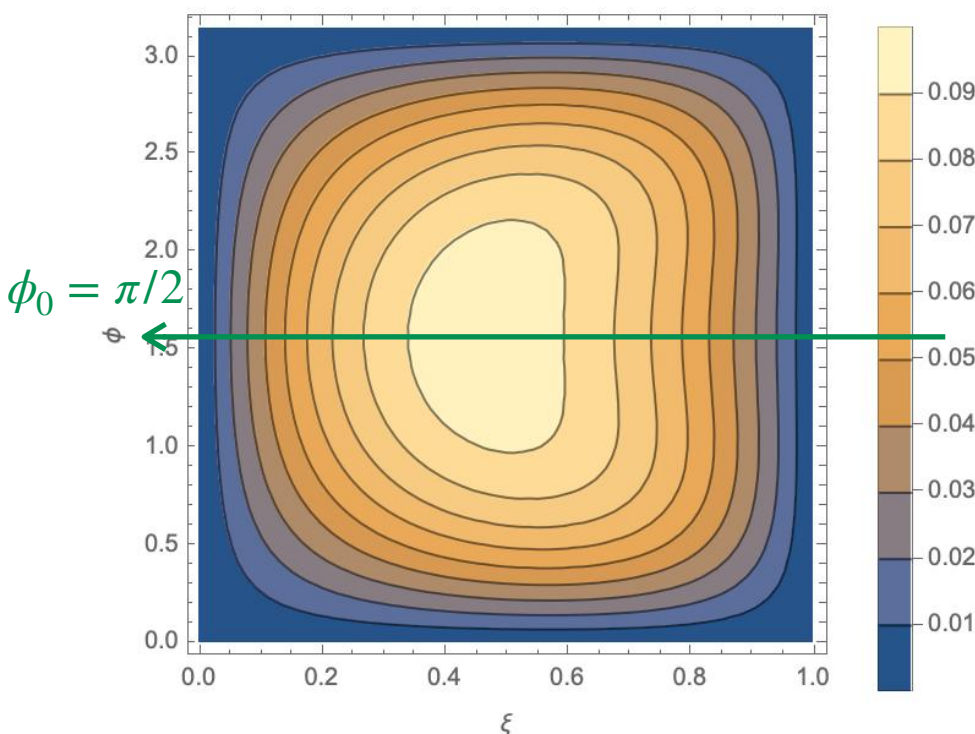


Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \phi \in [0, \pi] \\ u = \frac{v\eta}{p'R^2} \end{array} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1 \quad \left. \begin{array}{l} u(\xi = 1, \phi) = 0, \quad \phi \in [0, \pi] \\ u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{array} \right\} \xi \in [0, 1]$$

- Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in ‘**sodih**’ sinusov glede na **simetrijsko os pri $\pi/2$** :



koeficienti, dobimo iz razvoja ‘ $f = -1$ ’ v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{ms} J_{2m+1}(y_{(2m+1)s}\xi) \sin((2m+1)\phi)$$

dvojna vsota

s-te ničle Besselovih f.

‘sodi sinusi’
glede na
 $\phi_0 = \pi/2$

- Rešitev sestavljena iz funkcij, ki **izpolnijo r.p. (in simetrijo).**
 - Lastne funkcije DE: $\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$

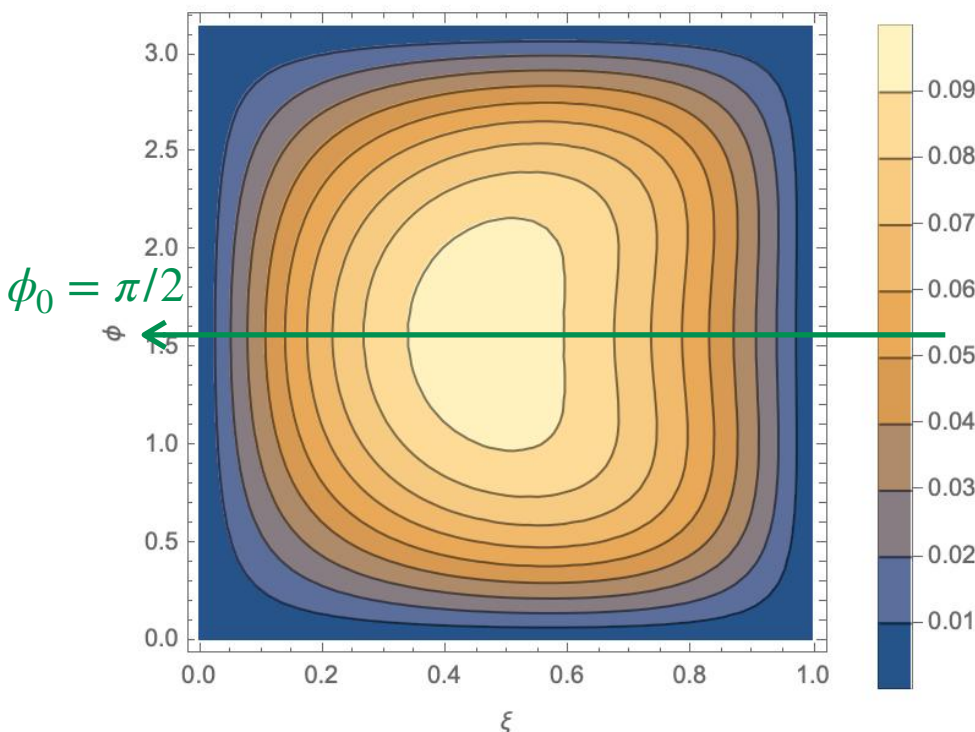


Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo **določili koeficient C za polkrožno cev.**
 - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left. \begin{array}{l} \xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0, 1] \\ \phi \in [0, \pi] \\ u = \frac{v\eta}{p'R^2} \end{array} \right\} \Delta u(\xi, \phi) = -1 \quad \left. \begin{array}{l} u(\xi = 1, \phi) = 0, \quad \phi \in [0, \pi] \\ u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{array} \right\} \xi \in [0, 1]$$

- Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in ‘**sodih**’ sinusov glede na **simetrijsko os pri $\pi/2$** :



koeficienti, dobimo iz razvoja ‘ $f = -1$ ’ v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{ms} J_{2m+1}(y_{(2m+1)s}\xi) \sin((2m+1)\phi)$$

↑
↑
↑

dvojna vsota
s-te ničle Besselovih f.
‘sodi sinusi’ glede na $\phi_0 = \pi/2$

- Predpostavljam, da ste te veščine dobili drugje...**

Spet spektralne (FEM) metode



- Seveda nam tovrstne analitične rešitve takoj nakažejo smer implementacije ustreznih numeričnih metod:
 - Močno spominjajo na spektralne metode oziroma metode končnih elementov (Finite Element Method, FEM).
- V 1D smo to spoznali kot:

$$y(x) = \sum_{k=1}^M c_k \Psi_k(x)$$

- Z razmislekom, da je smiselno, da imajo funkcije $\Psi_k(x)$ nekaj koristnih lastnosti, kot so:
 - So **linearno neodvisne**,
 - odlično, če tvorijo ortogonalno bazo glede na nek dobro definiran skalarni produkt (**takoj lahko pomislimo na (D)FT ...**).
 - Imamo **dovolj gradnikov, da funkcijo poljubno natančno opišemo** (**alternativna 'definicija' baze**)
 - **Ustrezajo robnim pogojem** 'avtomatsko' (**lastne funkcije danega problema...**).



Galerkinova metoda

- Za naš problem v več dimenzijah potem lahko zapišemo naš približek rešitve z nastavkom:

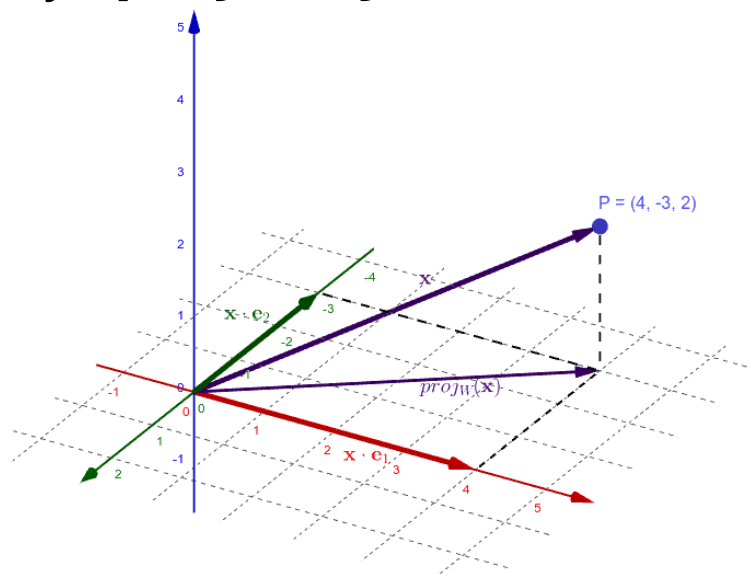
$$\tilde{u}(\xi, \phi) = \sum_{i=1}^N a_i \Psi_i(\xi, \phi),$$

↑ izpolnijo robne pogoje, a preproste ...

kar nam seveda ne reši naše Poissonove enačbe popolnoma točno, temveč **ostane majhen ostanek (residual) $\varepsilon(\xi, \phi)$** :

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \phi) + 1 = \varepsilon(\xi, \phi)$$

- Cilj naše numerične metode je spraviti ta ostanek čim bližje ničli....
- Ideja **Galerkina** je bila **geometrijska**: definirati najmanjši možni ostanek s pomočjo **projekcij**.





Galerkinova metoda

- Ob predpostavki, da so naši gradniki Ψ_i **ortogonalne funkcije z definiranim skalarnim produktom**:

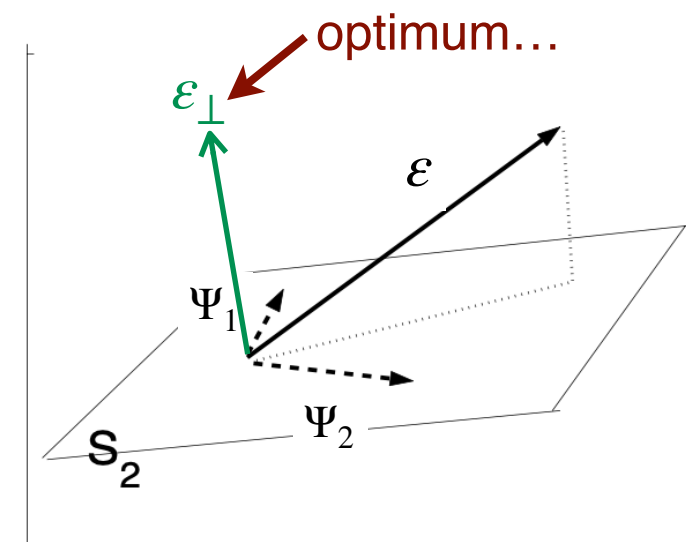
$$(\Psi_i, \Psi_k) = \int_V \Psi_i \Psi_k dV = \delta_{ik}$$

↖ realni funkciji v skalarnem produktu

- To pomeni, da nam teh N funkcij razpenja nek funkcijski (pod)prostor. Kar lahko izberemo (optimiziramo) je, da je $\varepsilon(\xi, \phi)$ **ortogonalen na ta podprostor** (v samem podprostoru ni napak...):

$$(\varepsilon, \Psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

- S tem smo zmanjšali napako v danem podprostoru funkcij na minimum...
- To je samo ena možnost iz razreda metod **Weighted Residuals Methods**.
 - Lahko bi izbrali druge funkcije Ω_k z
 $(\varepsilon, \Omega_k) = 0, \quad k = 1, M$
 - ... je pa Galerkinova metoda elegantna..





Galerkinova metoda

- Za rešitev naše PDE torej vstavimo poskusno funkcijo v PDE:

$$\Delta \tilde{u}(\xi, \phi) + 1 = \sum_{j=1}^N a_j \Delta \Psi_j + 1 = \varepsilon(\xi, \phi) .$$

- Da uvedemo Galerkinov pogoj, zgornji izraz skalarno množimo z funkcijo Ψ_i ter zapišemo:

$$\sum_{j=1}^N a_j (\Delta \Psi_j, \Psi_i) + (1, \Psi_i) = (\varepsilon, \Psi_i), \quad i = 1, \dots, N$$

↖ $(\varepsilon, \Psi_i) = 0!$

- Izraz lahko (spet) zapišemo matrično:

$$A \vec{a} = \vec{b} \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i), \quad b_i = (-1, \Psi_i)$

↖ $N \times N$ matrika
↖ N -dim vektor



Galerkinova metoda

- Seveda se pojavi vprašanje, zakaj je ta metoda dobra v primerjavi z drugimi FEM (npr kolokacijsko ipd..).
- Tako kot pri kolokacijski metodi lahko numerično močno 'profitiramo', če so naše 'bazne' funkcije **lokalizirane**. Potem postane sistem

$$A \vec{a} = \vec{b} \quad \sum_{j=1}^N A_{ij} a_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i), \quad b_i = (-1, \Psi_i)$$

tri (ali nekaj) diagonalen - in zahtevnosti reda N za reševanje.

- Dodatna prednost proti kolokacijski metodi pa je v (nekoliko skriti) lastnosti:

- Zapišimo skalarni produkt v A_{ij} z integralom in uporabimo znane zveze:

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i) = \int_V \Delta \Psi_j \Psi_i dV = \int_V \nabla \cdot [\nabla \Psi_j \Psi_i] dV - \int_V [\nabla \Psi_j \cdot \nabla \Psi_i] dV$$

- Tako dobimo:

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i) = - \int_V [\nabla \Psi_j \cdot \nabla \Psi_i] dV \quad \int_{\partial V} (\nabla \Psi_j) \Psi_i dS$$

Površinski člen, funkcija Ψ_i je na robu nič!

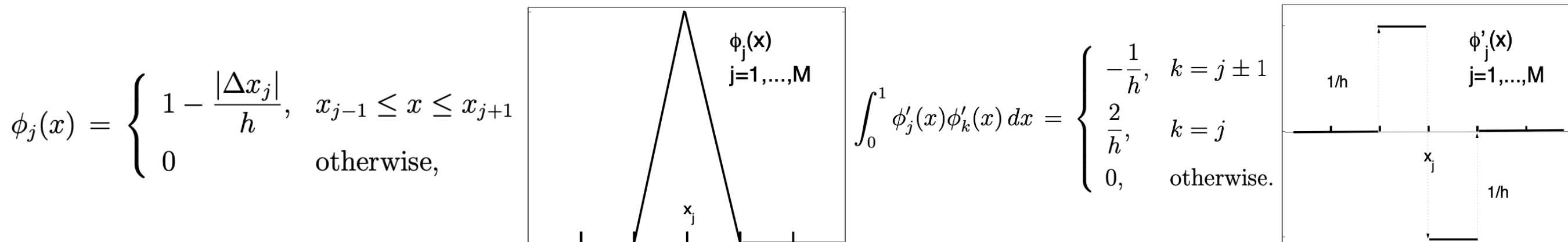


Galerkinova metoda

- Dobljena zveza:

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i) = - \int_V \left[\nabla \Psi_j \cdot \nabla \Psi_i \right] dV$$

- ima več **dobrodošlih** pomenov:
 - očitno je matrika **simetrična**,
 - .. uporabimo lahko močne metode numeričnega reševanja...
 - narediti **nekaj-diagonalno** matriko je preprosto,
 - ...poznati moramo **samo prve odvode** funkcij Ψ_i !
 - funkcije Ψ_i so lahko celo **nezvezne**, morajo biti le integrabilne...
- Metoda torej lahko **uporabi preprostejše funkcije od kolokacijske**, kar je sploh dobrodošlo v več dimenzijah!
 - Tipična uporaba različnih 'trikotnih' funkcij:



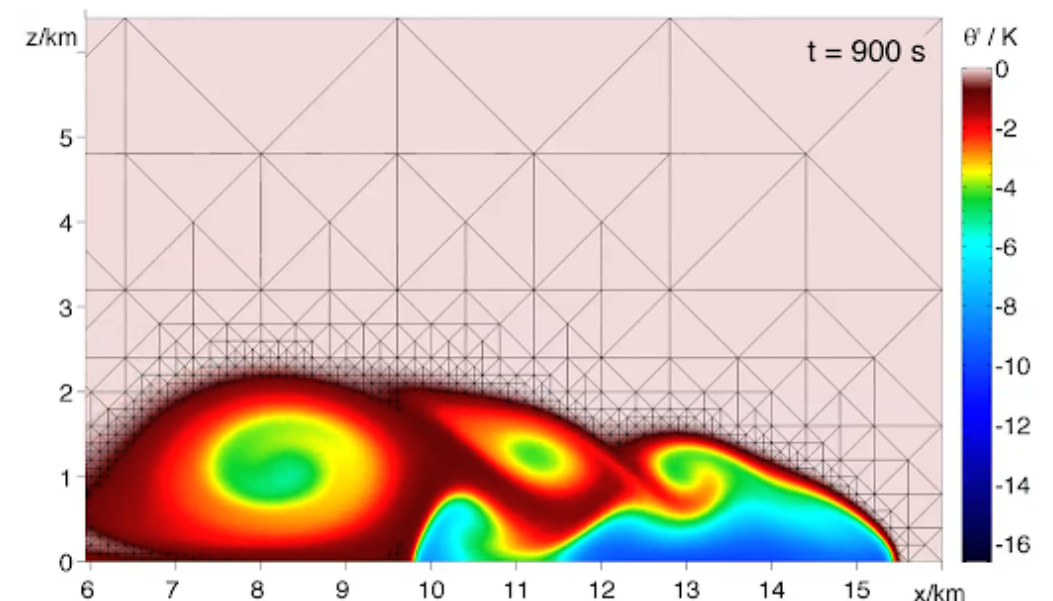
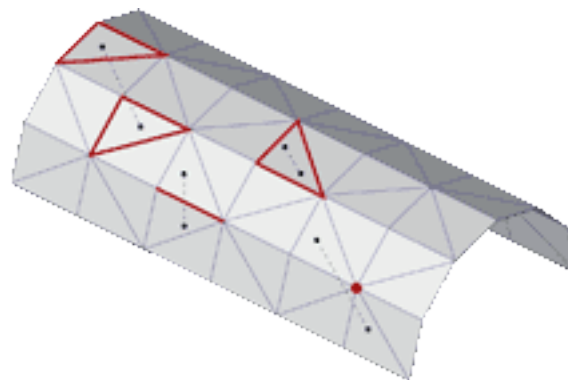
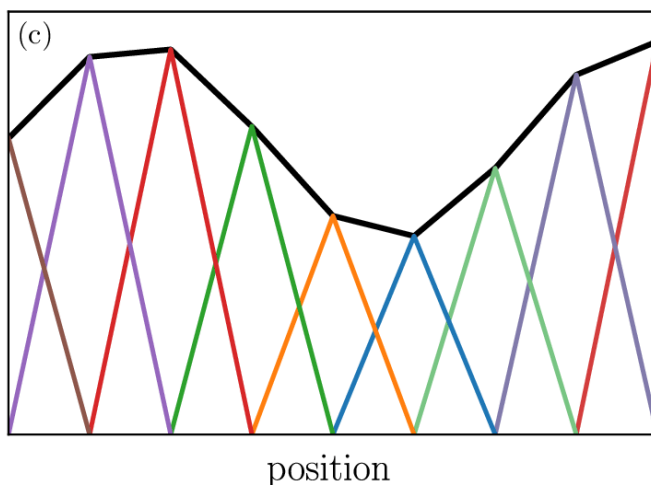


Galerkinova metoda

- Dobljena zveza:

$$A_{ij} = (\Delta \Psi_j, \Psi_i) = - \int_V \left[\nabla \Psi_j \cdot \nabla \Psi_i \right] dV$$

- ima več **dobrodošlih** pomenov:
 - očitno je matrika **simetrična**,
 - .. uporabimo lahko močne metode numeričnega reševanja...
 - narediti **nekaj-diagonalno** matriko je preprosto,
 - ...poznati moramo **samo prve odvode** funkcij Ψ_i !
 - funkcije Ψ_i so lahko celo **nezvezne**, morajo biti le integrabilne...
- Metoda torej lahko **uporabi preprostejše funkcije od kolokacijske**, kar je sploh dobrodošlo v več dimenzijah!
 - Tipična uporaba različnih 'trikotnih' funkcij:



Naloga



- S pomočjo Galerkinove metode tako dobimo za naš iskani parameter C:

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j = -\frac{32}{\pi} \vec{b} \cdot \left(A^{-1} \vec{b} \right) = -\frac{32}{\pi} \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- V praksi lahko pogledamo le zadnji zapis, pa ugotovimo, da nam **ni potrebno** obračati matrike A, temveč le **rešimo sistem** $A \vec{a} = \vec{b}$ (ceneje)!
- Kar nam še preostane, je **izbrati ustrezne bazne funkcije** za naš nastavek.
 - **Zgledujmo se po analitični rešitvi**, pa zapišimo ($m \geq 0, n \geq 1$):

$$\Psi_{mn}(\xi, \phi) = \xi^{2m+1} (1 - \xi)^n \sin((2m + 1)\phi)$$

↖ Dvojni indeks!

- Funkcije so **ortogonalne po indeksu m**, skalarni produkt nam da:

$$(\Psi_{m'n'}, \Psi_{mn}) = \int_0^1 \int_0^\pi \Psi_{m'n'} \Psi_{mn} \xi \, d\xi \, d\phi = \frac{\pi}{2} \delta_{m'm} B(4 + 4m, 1 + n + n')$$

↖ Beta funkcija: `scipy.special.beta`

$$B(p, q) = \int_0^1 \xi^{p-1} (1 - \xi)^{q-1} d\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$



Naloga

- Analogno lahko poračunamo tudi ostala dva skalarna produkta:

$$A_{(m'n')(mn)} = (\Delta \Psi_{mn}, \Psi_{m'n'}) = -\frac{\pi}{2} \delta_{m'm} \frac{n n' (3 + 4m)}{2 + 4m + n + n'} B(n + n' - 1, 3 + 4m)$$

ter:

$$b_{(m'n')} = (-1, \Psi_{m'n'}) = -\frac{2}{2m' + 1} B(2m' + 3, n' + 1)$$

ortogonalnost po m!

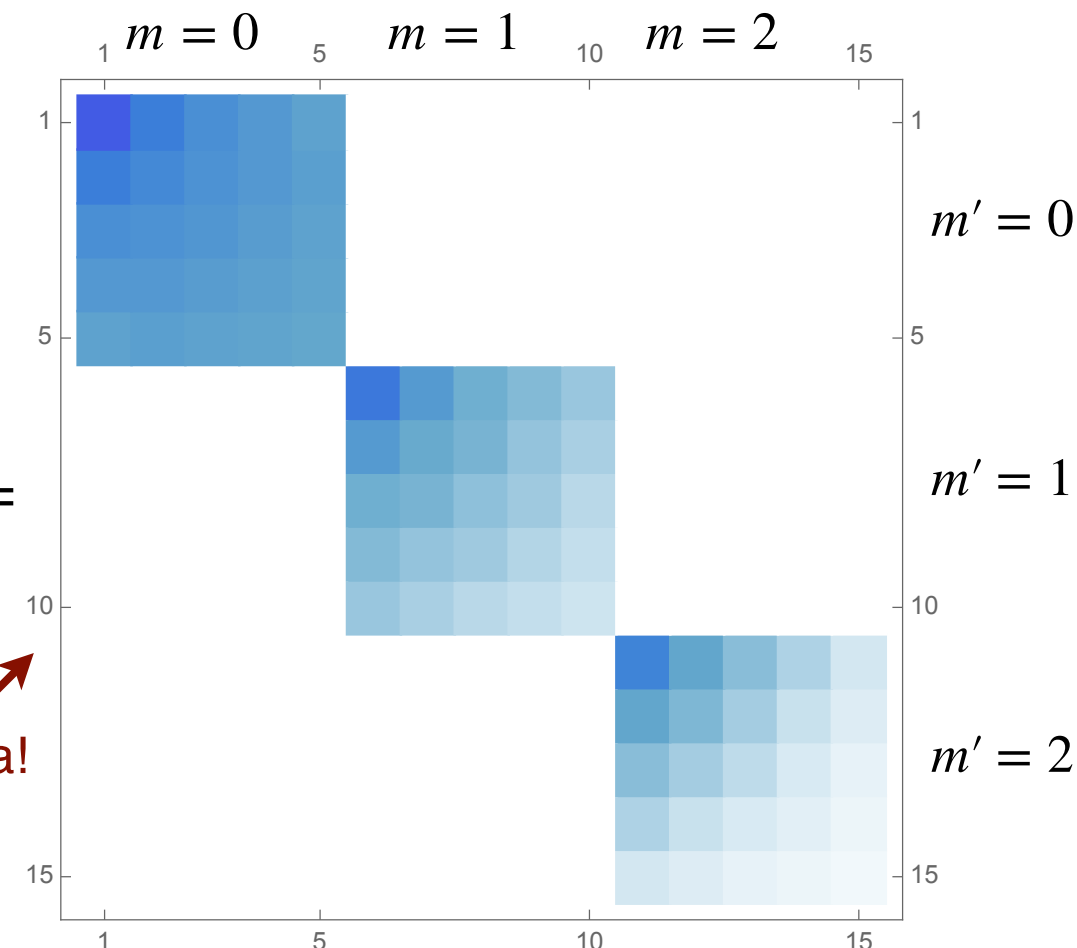
- Sedaj previdno uredimo indekse v eno-dimenzionalne parametre:

$$(mn) \mapsto j, (m'n') \mapsto i \quad (m \geq 0, n \geq 1)$$

$$\vec{b} = [b_i] = [b_{(m'n')}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{01} \\ \vdots \\ b_{0N} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} b_{(M-1)1} \\ \vdots \\ b_{(M-1)N} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{i=1}^{i=M \times N}$$

$$A = A_{ij} = A_{(m'n')(mn)} =$$

blok-diagonalna!
(za vsak m)





Naloga

- Analogno lahko poračunamo tudi ostala dva skalarna produkta:

$$A_{(m'n')(mn)} = (\Delta \Psi_{mn}, \Psi_{m'n'}) = -\frac{\pi}{2} \delta_{m'm} \frac{n n' (3 + 4m)}{2 + 4m + n + n'} B(n + n' - 1, 3 + 4m)$$

ter:

$$b_{(m'n')} = (-1, \Psi_{m'n'}) = -\frac{2}{2m' + 1} B(2m' + 3, n' + 1)$$

ortogonalnost po m!

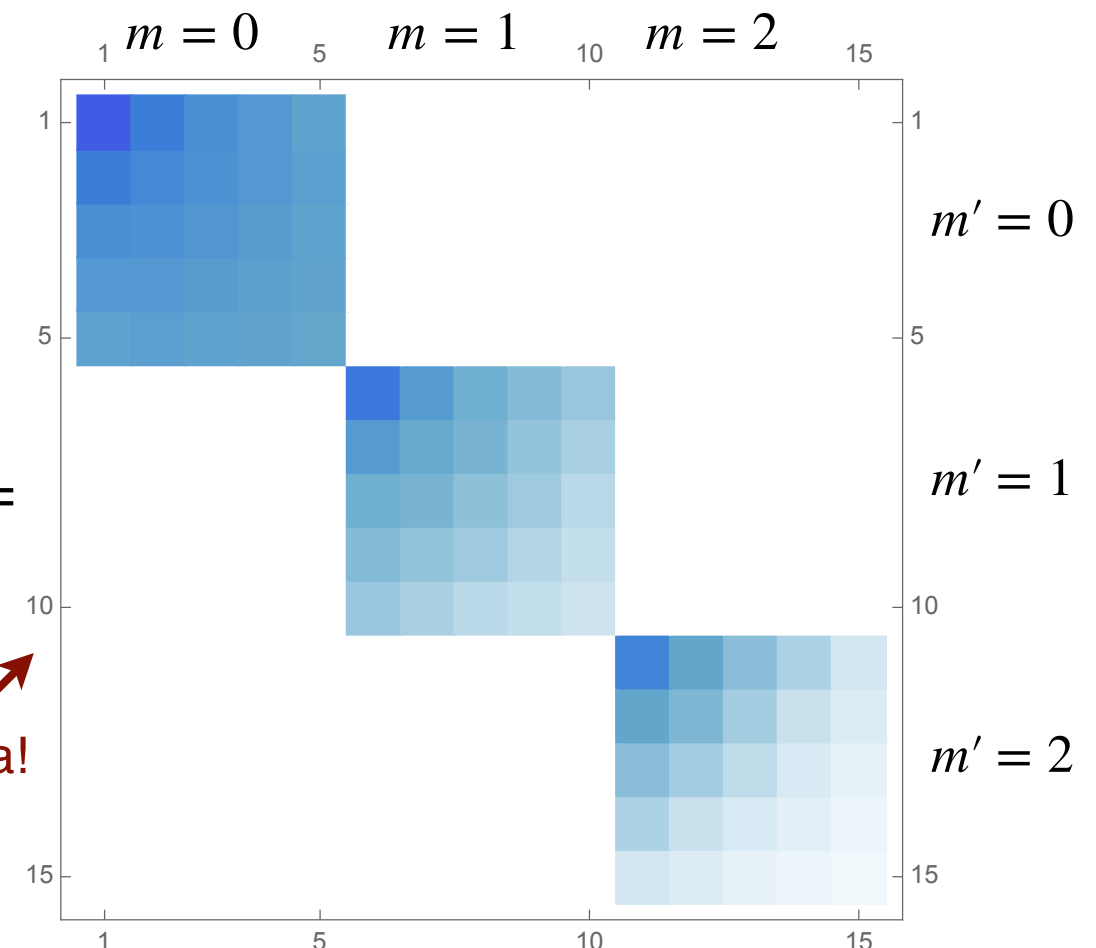
- Sedaj previdno uredimo indekse v eno-dimenzionalne parametre:

$$(mn) \mapsto j, (m'n') \mapsto i \quad (m \geq 0, n \geq 1)$$

$$\vec{b} = [b_i] = [b_{(mn)}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix}_{m=0} \\ \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix}_{m=1} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix}_{m=M-1} \end{bmatrix}_{i=1}^{i=M \times N}$$

$$A = A_{ij} = A_{(m'n')(mn)} =$$

blok-diagonalna!
(za vsak m)




Opomba



- Za eliptični (Poissonov) tip PDE, lahko učinkovito **razdelimo** problem na:
 - reševanje laplaceove enačbe ob nehomogenih robnih pogojih in
 - reševanje Poissonove enačbe ob homogenih robnih pogojih.
- Če PDE in RP zapišemo v 2D malo splošneje:

$$\Delta u(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\mathcal{B}u(x, y) \equiv \alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y) + \beta(x, y)u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$


 von Neumannov člen ($\vec{n} \cdot \nabla u$)

- Lahko razdelimo problem na:
 - Homogena PDE (Laplace) z nehomogenimi r.p. :

$$\Delta v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\mathcal{B} v(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

- Nehomogena PDE (Poisson) s homogenimi r.p.:

$$\Delta w(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

$$\mathcal{B} w(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

- S končno rešitvijo $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$! (Pač LDE)



Dodatna naloga

- Za dodatno nalogo je reševanje **linearne hiperbolične valovne enačbe** v 1D, ki ga rešujete z Galerkinovo metodo (lahko primerjate še s čim drugim...).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

- Začetni pogoj naj bo **$u(\xi, 0) = \sin(\pi \cos \xi)$** za $\xi \in [0, 2\pi]$ in s **periodičnimi** robnimi pogoji.
- Analitična rešitev enačbe je **$u(\xi, t) = \sin(\pi \cos(\xi + t))$** .
- Nastavek za rešitev je kar končen nabor ravnih valov po kraju (analogno interpretiramo kot DFT):

$$\tilde{u}(\xi, t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} a_j(t) \Psi_j(\xi), \quad \Psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\xi}$$

- S skalarnim produktom:

$$(\Psi_k, \Psi_j) = \int_0^{2\pi} \Psi_k^*(\xi) \Psi_j(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\xi} e^{ij\xi} d\xi = \delta_{jk}$$

dobimo tudi **Galerkinov pogoj**:

$$\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \right] \Psi_k^*(\xi) d\xi = 0$$

Dodatna naloga



- Iz Galerkinovega pogoja s pomočjo ortonormalnosti takoj dobimo DE za koeficiente $a_k(t)$, ki so preprosto rešljivi:

$$\frac{da_k}{dt} - ika_k = 0, \quad k = -N/2, \dots, N/2.$$

- Začetni pogoj inkorporiramo v zgornjo enačbo iz razvoja/projekcije:

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(\xi, 0) \Psi_k^*(\xi) d\xi.$$

- Slednjo lahko izračunaš numerično, končna analitična rešitev pa je:

$$a_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi) e^{ikt}.$$

Besselovi funkciji 1. vrste ... in 2. vrste

- Za negativne indekse Besselovih funkcij uporabi: $J_{-\nu} = \cos(\nu\pi)J_\nu - \sin(\nu\pi)Y_\nu$
- Dobljeni rezultat lahko primerjaš tudi s kakšnim diferenčnim pristopom, na primer kar:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + (k/h)(u_{i,j+1} - u_{i,j})$$