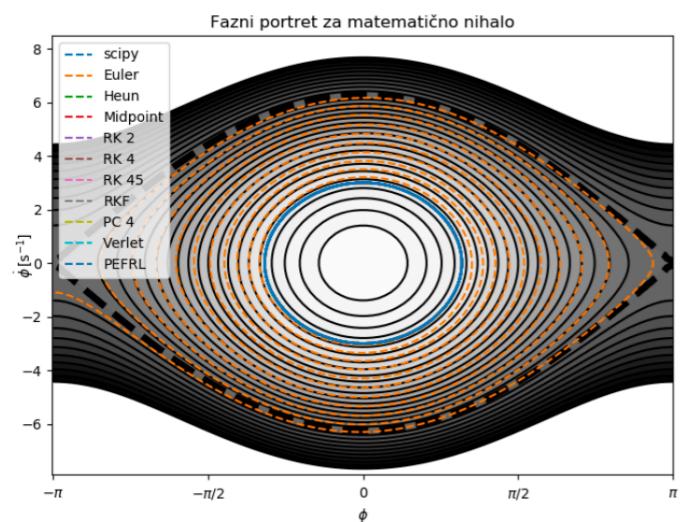




7. naloga

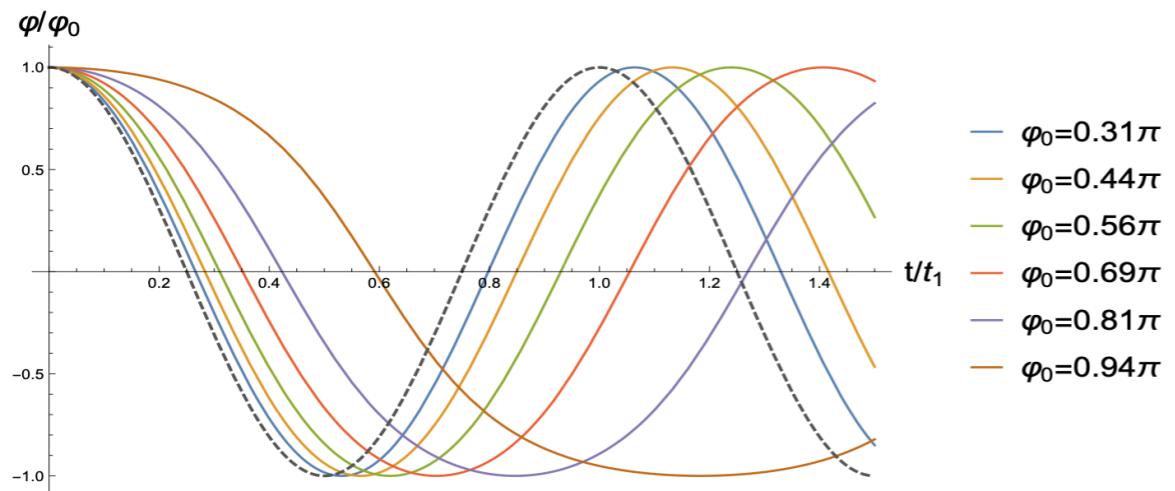
2020/21



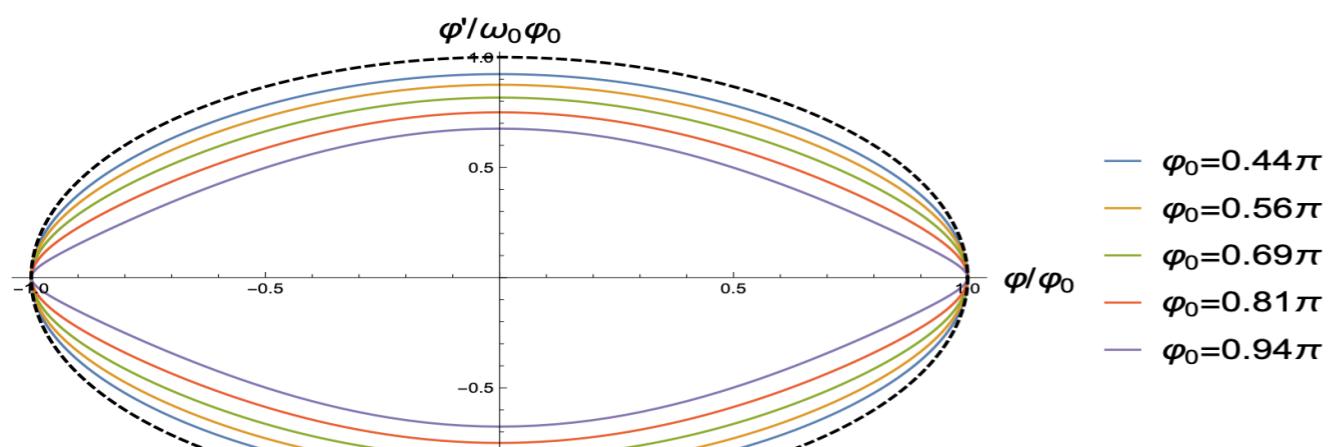


Začetni koraki

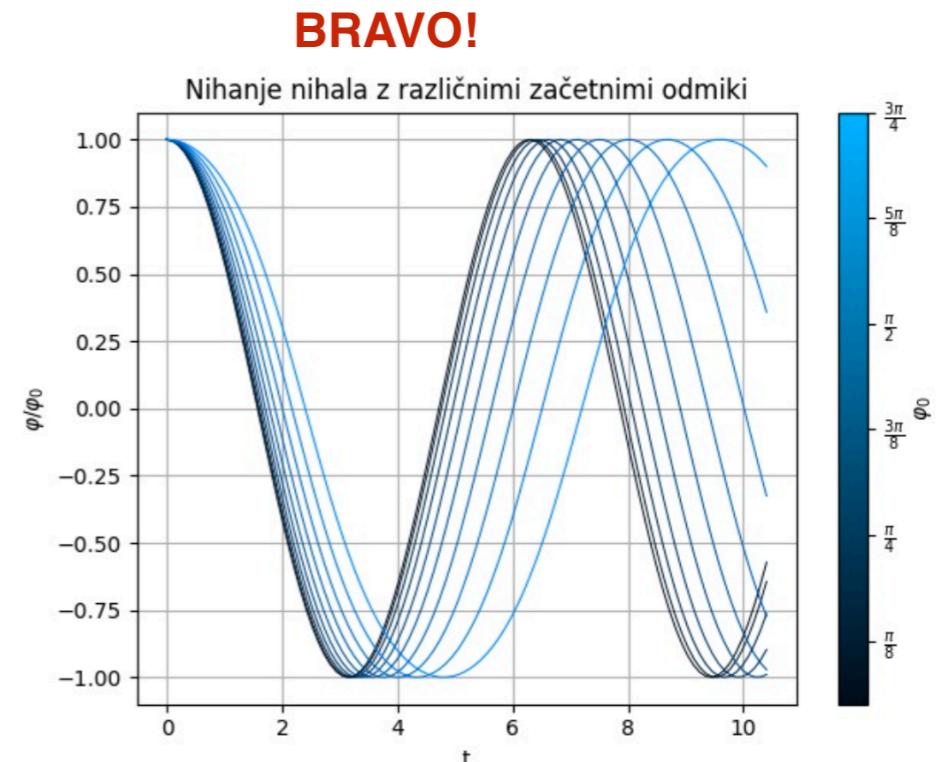
- Smiselno je preveriti metodo s preprostimi testi!
 - Oglej si analitično rešitev...



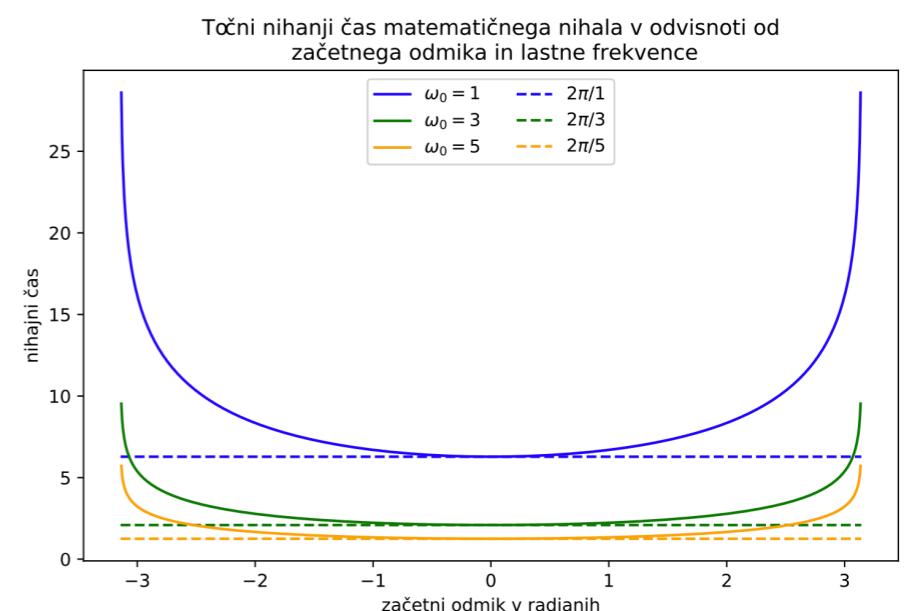
Slika 1: Časovne odvisnosti normiranega odmika φ/φ_0 od časa t/t_1 (t_1 je nihajni čas harmoničnega nihala z isto ω_0) za različne začetne amplitude φ_0 . Z črtkano črto je podana še rešitev za harmonični približek



Slika 2: Zaključene trajektorije v faznem prostoru matematičnega nihala za različne začetne vrednosti začetne amplitudne faze φ_0 . Opazimo, da je trajektorija (ni ravno elipsa) vedno bolj sploščena z naraščajočim φ_0 . Podana je še primerjava z harmoničnim rezultatom s črtkano črto



Slika 1: Nihanje matematičnega nihala z različnimi začetnimi odmiki



Slika 1: Na grafu je prikazana odvisnost nihajnega časa od začetnega odmika in lastne frekvence. Vidimo lahko kako zelo različen je glede na vrednost, ki jo uporabljam pri majhnih odmikih. Divergiranje nihajnega časa pri $\pm\pi$ je zaradi labilne lege, ko je nihalo točno nad mirovno lego.



Natančnost/zahtevnost

- Bolj natančen pogled v kodiranje iste metode...

Lepo! (Henrici)

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je f le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak n velikosti h , $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak y_n in $v_n = y'_n$:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \quad (1)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} \cdot [f(y_n) + f(y_{n+1})]. \quad (2)$$

Alternativno lahko to shemo zapišemo tudi s pomočjo dodatnih vmesnih točk in preskakujemo med lego in hitrostjo z zamikom $h/2$ (od tod angleško ime 'leapfrog' za ta zapis):

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot v_{n+1/2} \quad (3)$$

$$v_{n+3/2} = v_{n+1/2} + h \cdot f(y_{n+1}). \quad (4)$$

V še enem drugačnem zapisu je metoda poznana tudi kot metoda "Središčne razlike" (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

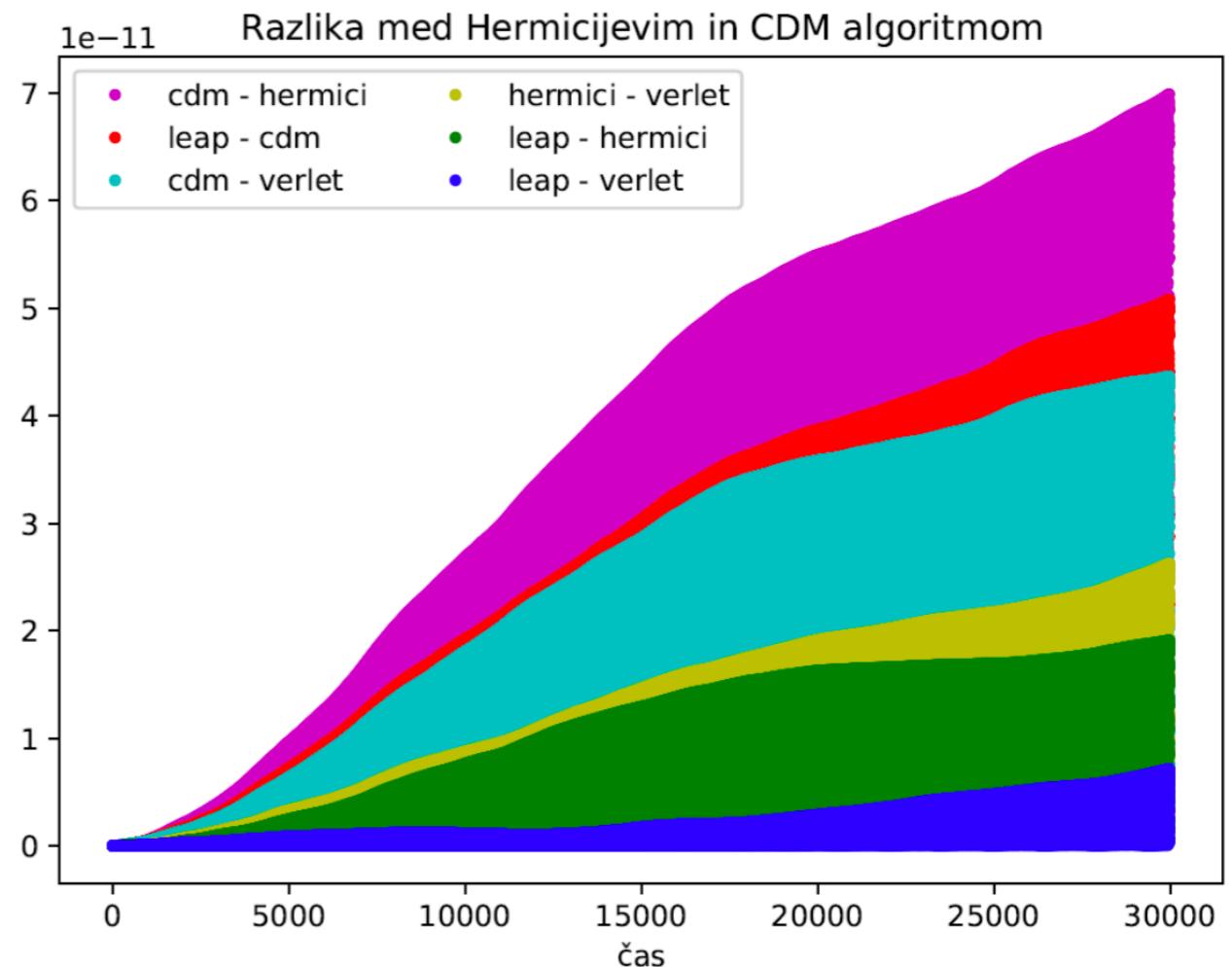
$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n), \quad (5)$$

kjer prvo točko y_1 izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija 'časa' x , $f(x,y)$, le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Obstaja še četrti zapis Verletove metode, ki jo je vpeljal Hermici in je le drugačen zapis CDM metode:

$$\Delta_n = y_n - y_{n-1} \quad (6)$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + h^2 f(y_n) \quad (7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta_{n+1} \quad (8)$$



Slika 7: Na grafu so prikazane absolutne vrednosti razlik med pari 4 različnih interpretacij Verletove metode opisanih v poglavju 1. Na grafu ni nič polnjeno z barvami, prikazanih je le toliko točk, da se jih ne loči več med sabo. Razlike so seveda precej majhne glede na ostale napake, ki sem jih računal, a so zaznavne in niso posledica končne natančnosti računalnika, saj so za 3-4 rede večje kot natančnost računanja računalnika.

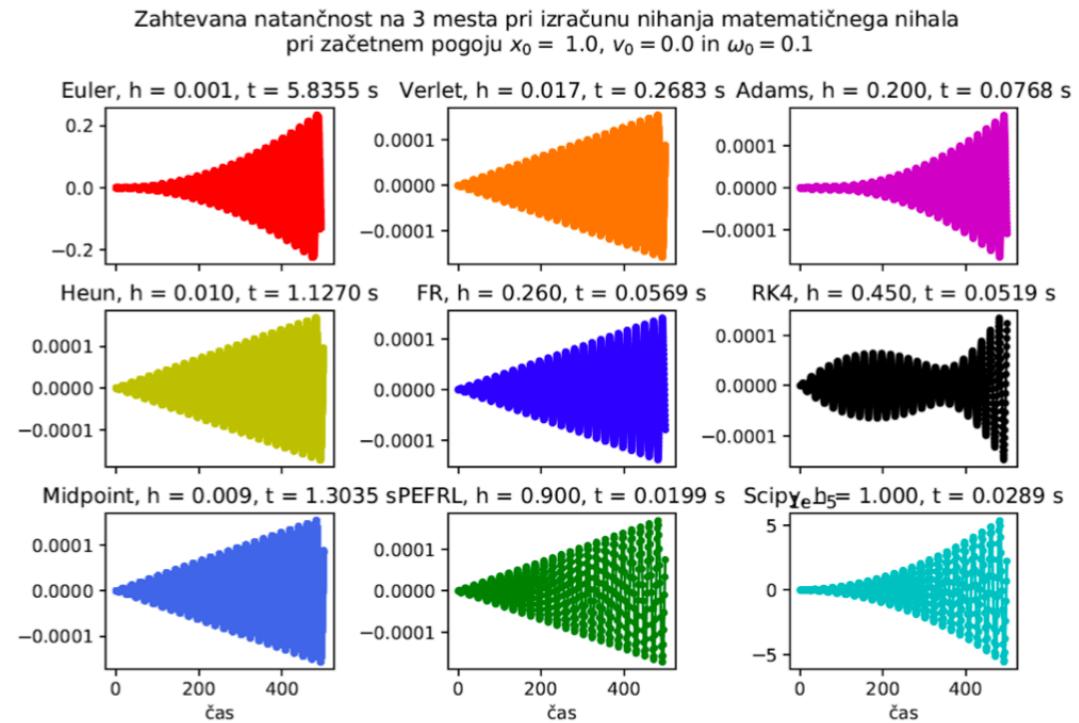
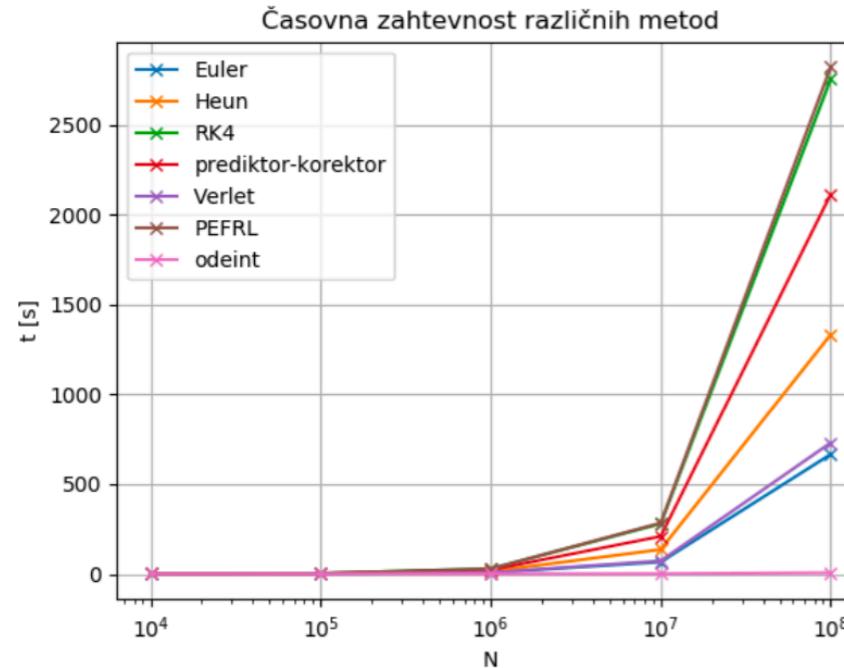
Na grafu je prikazana razlika med pari 4 različnih interpretacij Verletove metode. 'cdm' metoda je po enačbi (5), 'leap' metoda je po enačbi (3) in (4), 'hermici' je po enačbah (6)-(8) in verlet je po enačbah (1) in (2).

Na grafu (7) lahko vidimo, da izračuni po teh interpretacijah niso identični. Ko sem skušal ugotoviti, katera metoda je najbolj natančena glede na analitično rešitev, je pri različnih začetnih pogojih in časovnem intervalu bila najboljša drugačna metoda. Tudi to me je zelo presenetilo. Skladnost metode in analitične rešitve sem gledal kot vsoto absolutnih vrednosti razlik po točkah na določenem intervalu.

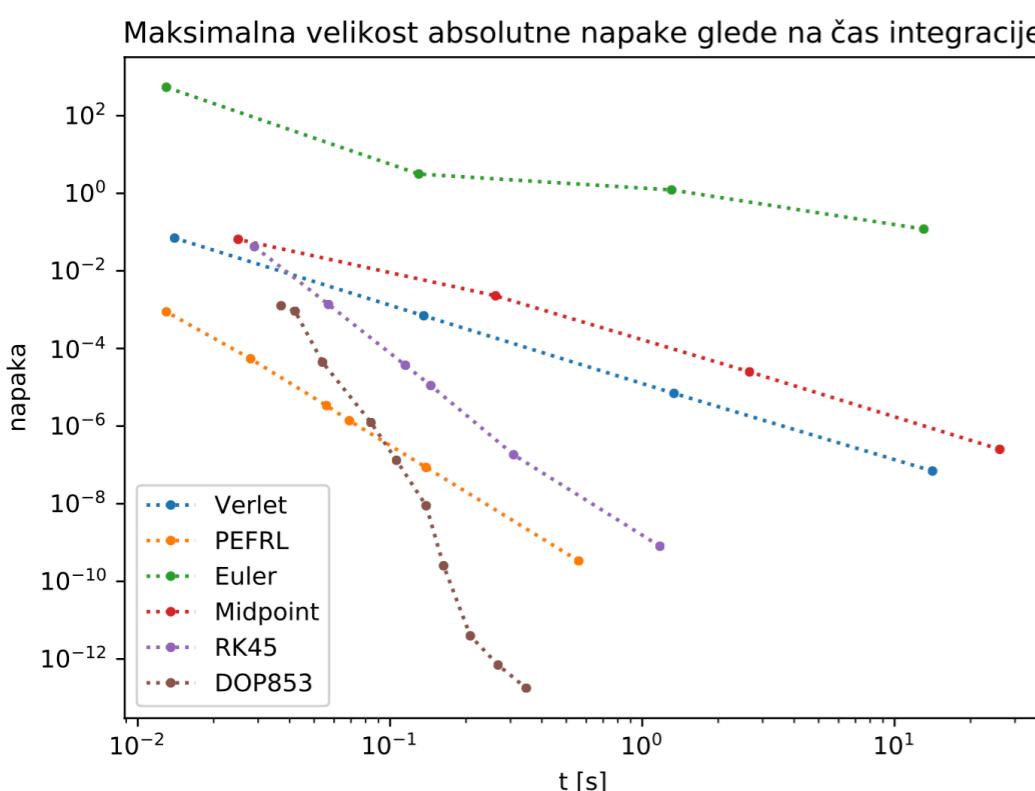


Natančnost/zahtevnost

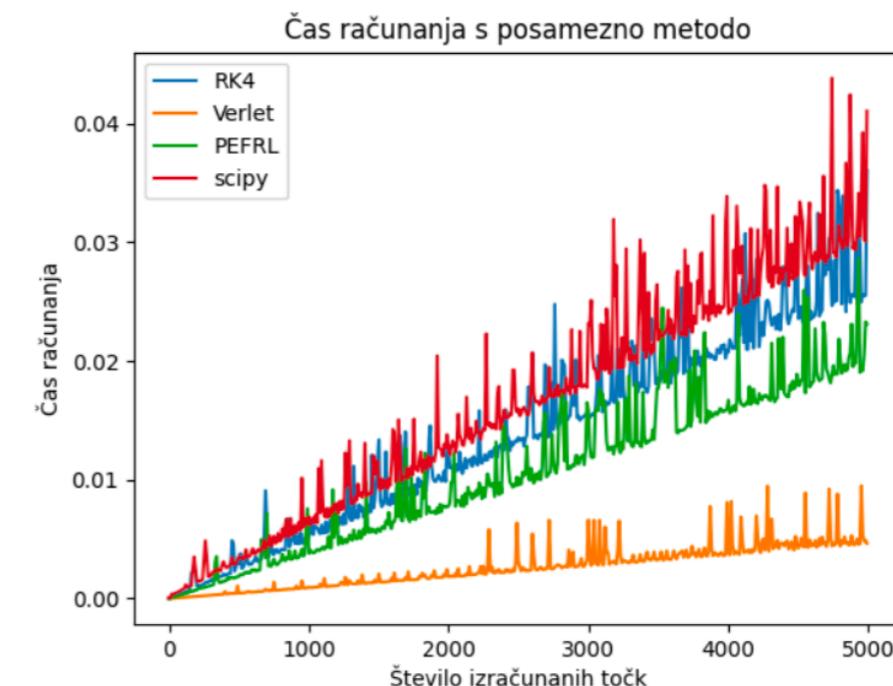
- Še vedno je dobrodošla tudi ocena računske zahtevnosti!



Slika 11: Časovna zahtevnost različnih metod, x os je v logaritmično skali.



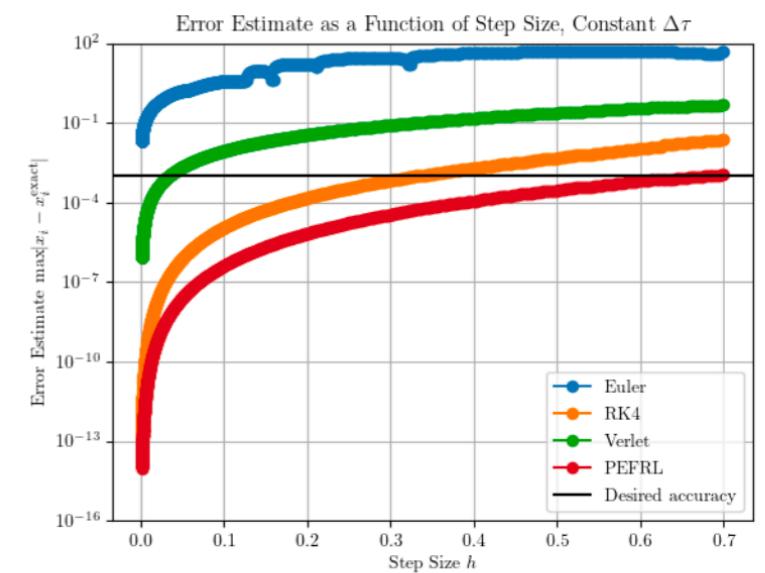
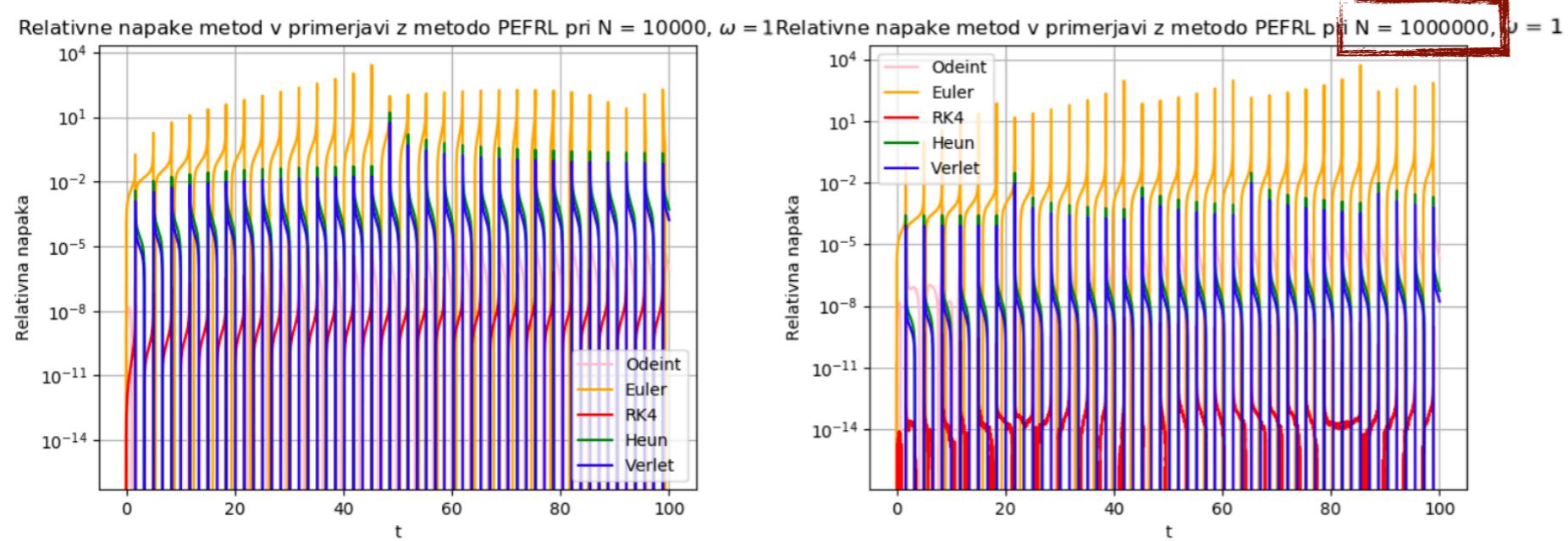
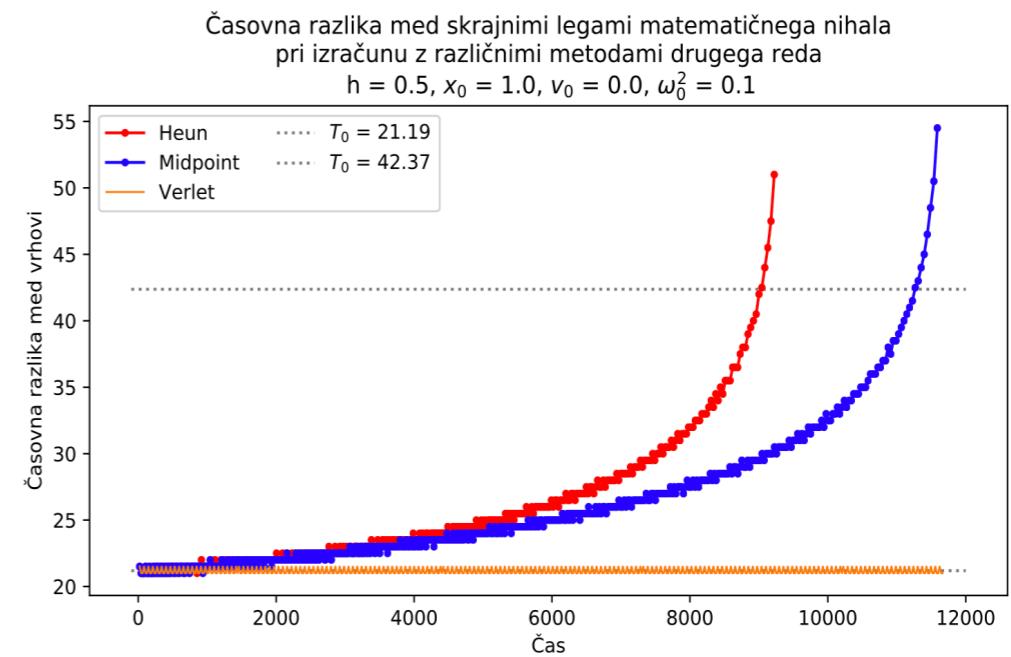
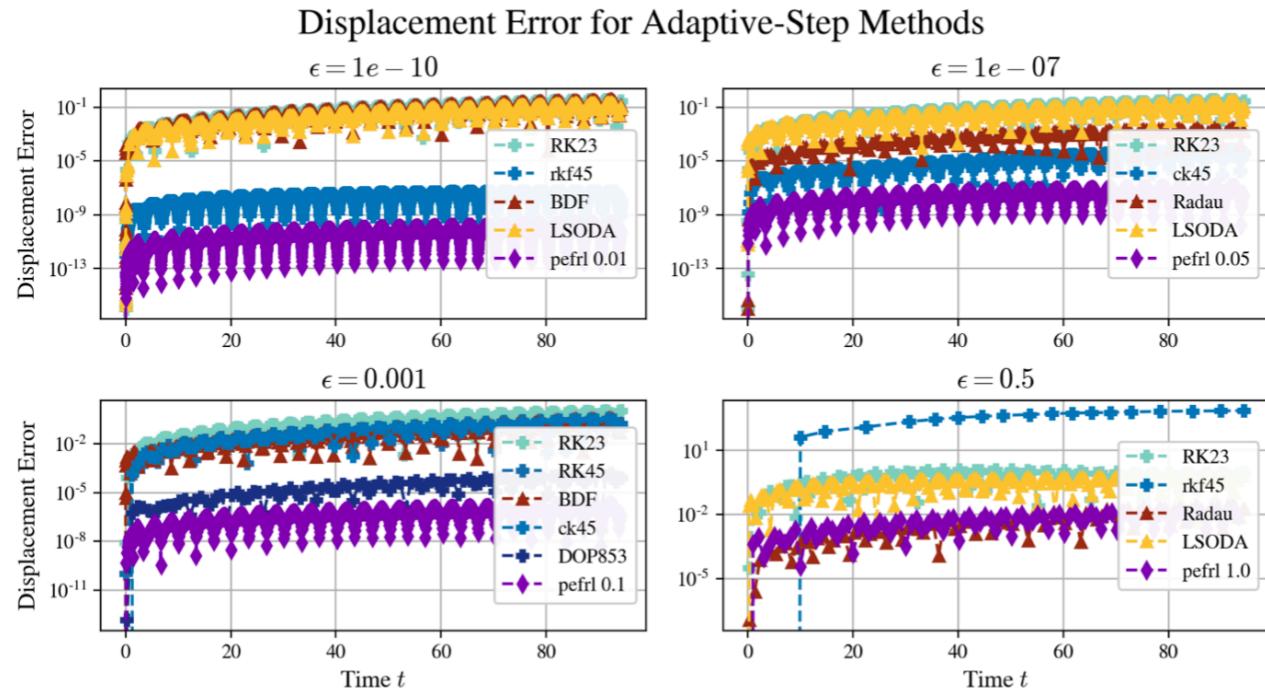
Slika 8: Na grafih so prikazane razlike med izračunom z izbrano metodo in analitično rešitvijo. Pri različnih metodah sem spremenjal korak izračuna, da sem prišel do približno enake natančnosti za vse metode. V naslovih posameznih grafov je prikazan tudi čas, ki ga je metoda potrebovala. Omeniti velja, da vgrajena metoda računa nekoliko drugače, saj je pri vseh korakih imela enako napako. Pri Eulerjevi metodi koraka nisem nižal več, saj bi predolgo časa trajalo in zavzelo še več prostora.





Natančnost/zahtevnost

- Ocene natančnosti v različnih oblikah:
 - tipično meritev odstopanja glede na referenco po nekem časovnem intervalu.



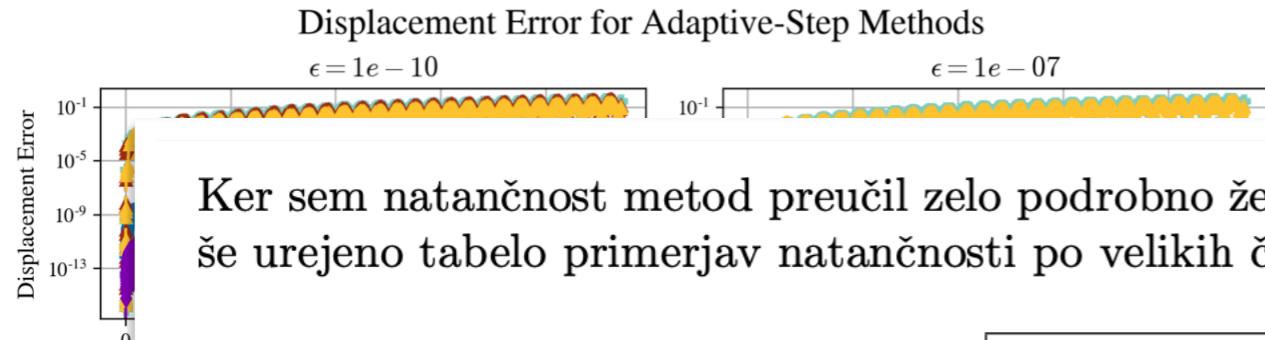
Slika 3: Napake metod v primerjavi z metodo PEFRL

Figure 2: Error of the different constant-step methods as a function of step size h for the initial condition $\theta_0 = 1$, keeping the time interval constant. Also shown is the desired accuracy of 10^{-3} .



Natančnost/zahtevnost

- Ocene natančnosti v različnih oblikah:
 - tipično meritev odstopanja glede na referenco po nekem časovnem intervalu.



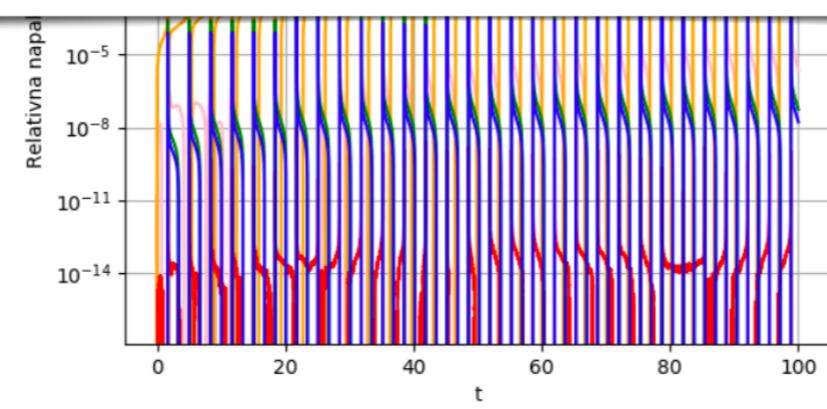
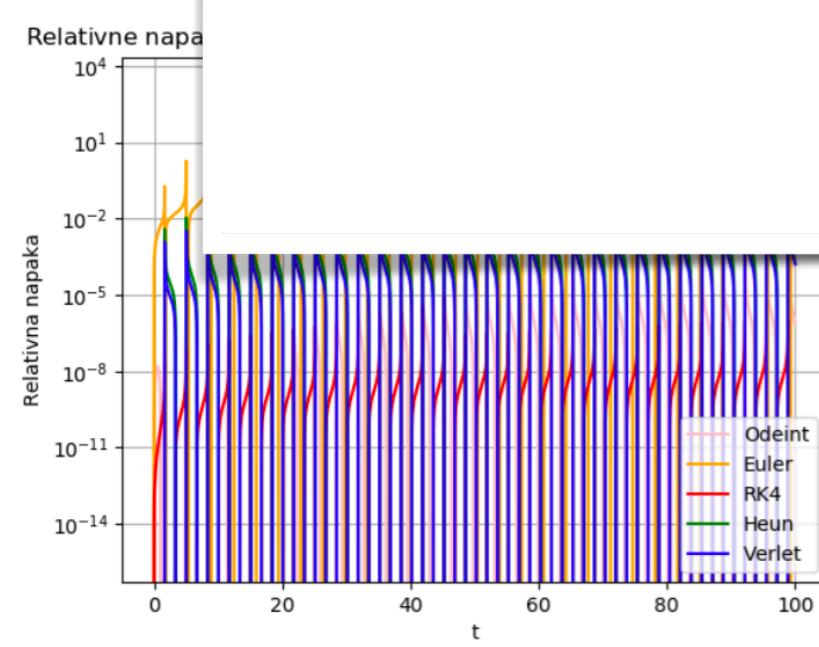
Časovna razlika med skrajnimi legami matematičnega nihala pri izračunu z različnimi metodami drugega reda
 $h = 0.5, x_0 = 1.0, v_0 = 0.0, \omega_0^2 = 0.1$

Ker sem natančnost metod preučil zelo podrobno že pri prejšnji nalogi, bom tokrat poleg grafov podal zgolj še urejeno tabelo primerjav natančnosti po velikih časih.

Zakaj pa ne tabela?

Metoda	$\Delta\phi$ [s]
Euler	$2 \cdot 10^4$
Midpoint in RK 2	$1 \cdot 10^0$
Verlet	$1 \cdot 10^{-1}$
PC 4	$3 \cdot 10^{-1}$
odeint	$2 \cdot 10^{-1}$
RK 4	$9 \cdot 10^{-5}$
RK 45	$4 \cdot 10^{-5}$
PEFRL	$5 \cdot 10^{-7}$

Tabela 1: Za $dt=0.01$ s in $t=1000$ s.



Slika 3: Napake metod v primerjavi z metodo PEFRL

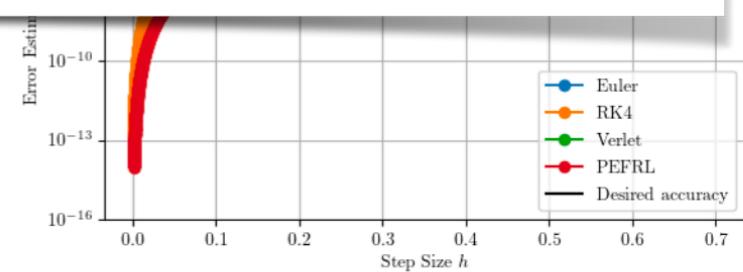
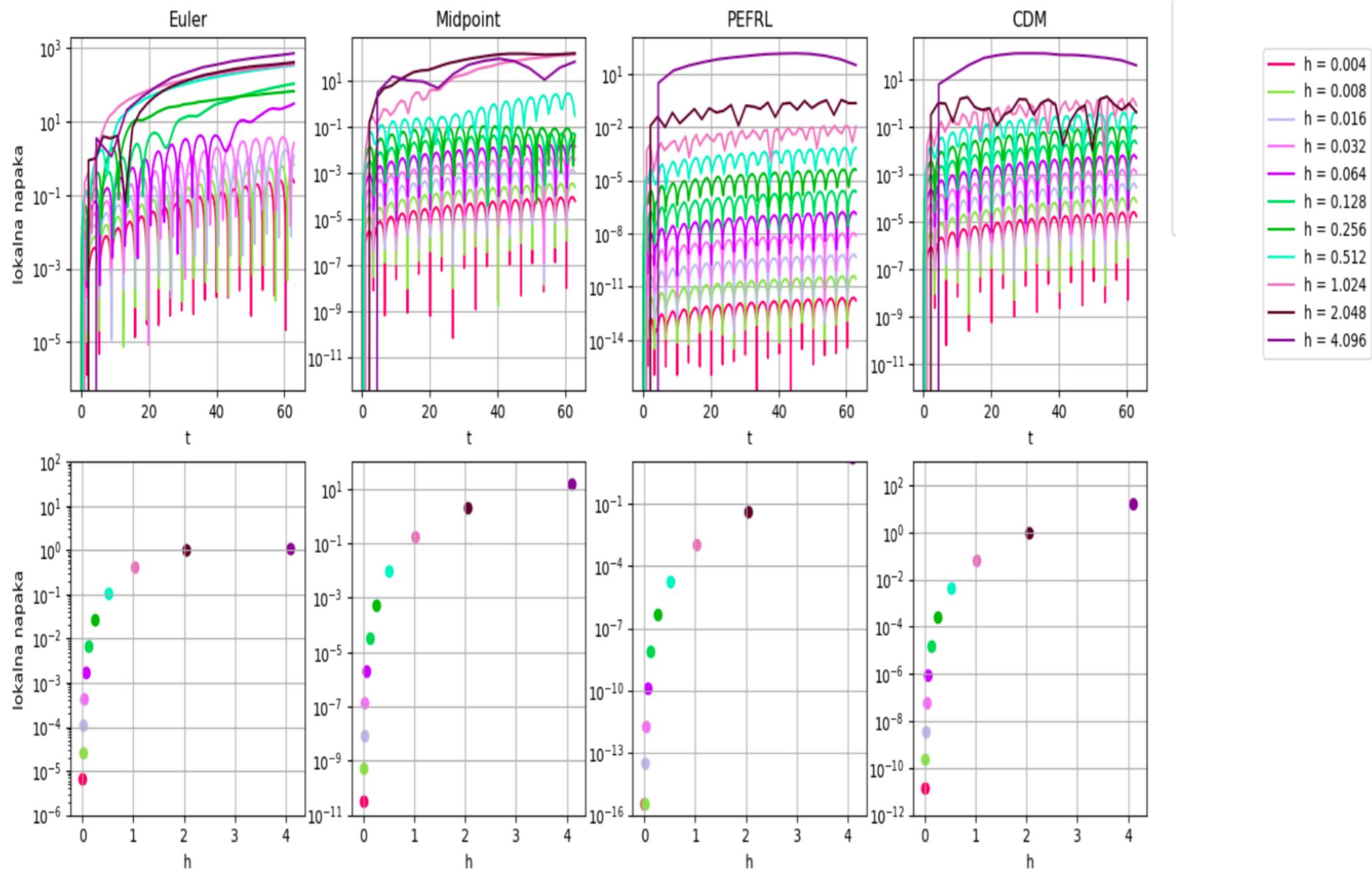


Figure 2: Error of the different constant-step methods as a function of step size h for the initial condition $\theta_0 = 1$, keeping the time interval constant. Also shown is the desired accuracy of 10^{-3} .



Natančnost/zahtevnost

BEST-OF-THE-DAY



Slika 2: Primerjava lokalnih napak v času in po korakih za različne metode

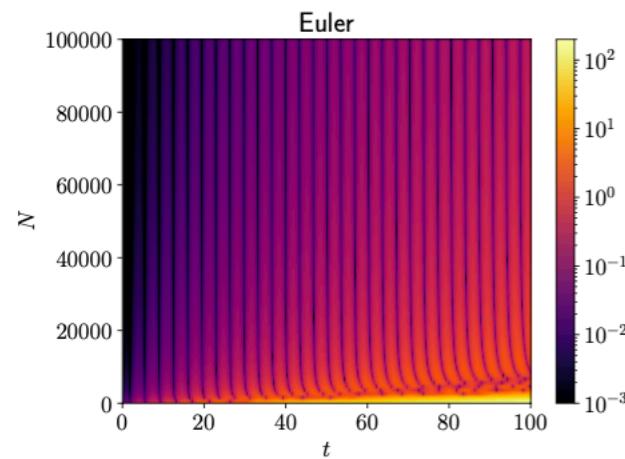


Stabilnost

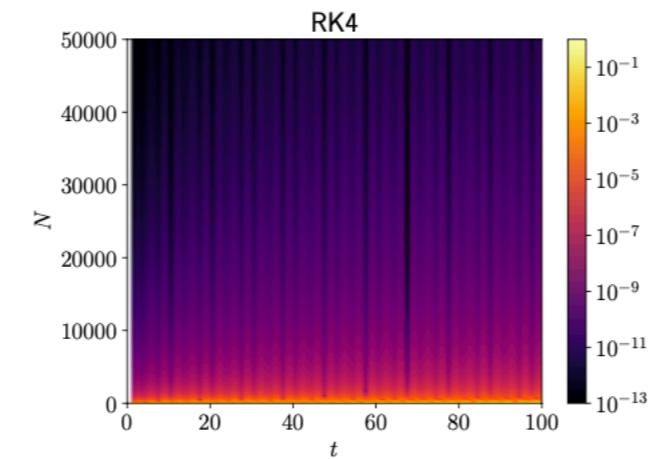
BEST-OF-THE-DAY

4.2 Stabilnost metod

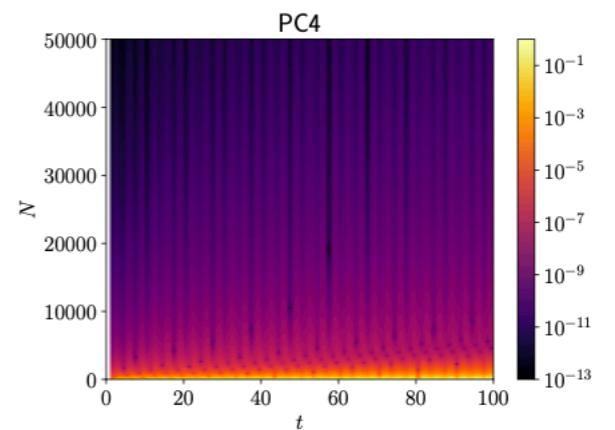
Preveril sem tudi kakšna je periodična stabilnost metod v odvisnosti od števila korakov N na intervalu od $t = 0$ do $t = 100$.



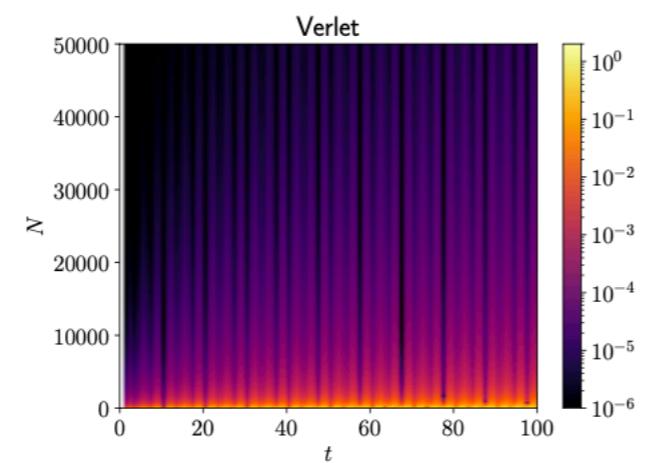
Graf 2: Odstopanje Eulerjeve metode od analitične rešitve.



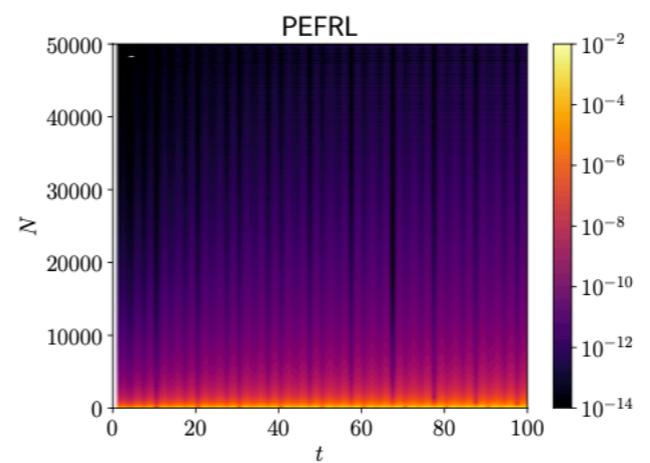
Graf 3: Odstopanje metode Runge-Kutta 4. reda od analitične rešitve.



Graf 4: Odstopanje metode prediktor-korektor 4. reda od analitične rešitve.



Graf 5: Odstopanje simplekтиčne metode Verlet od analitične rešitve.

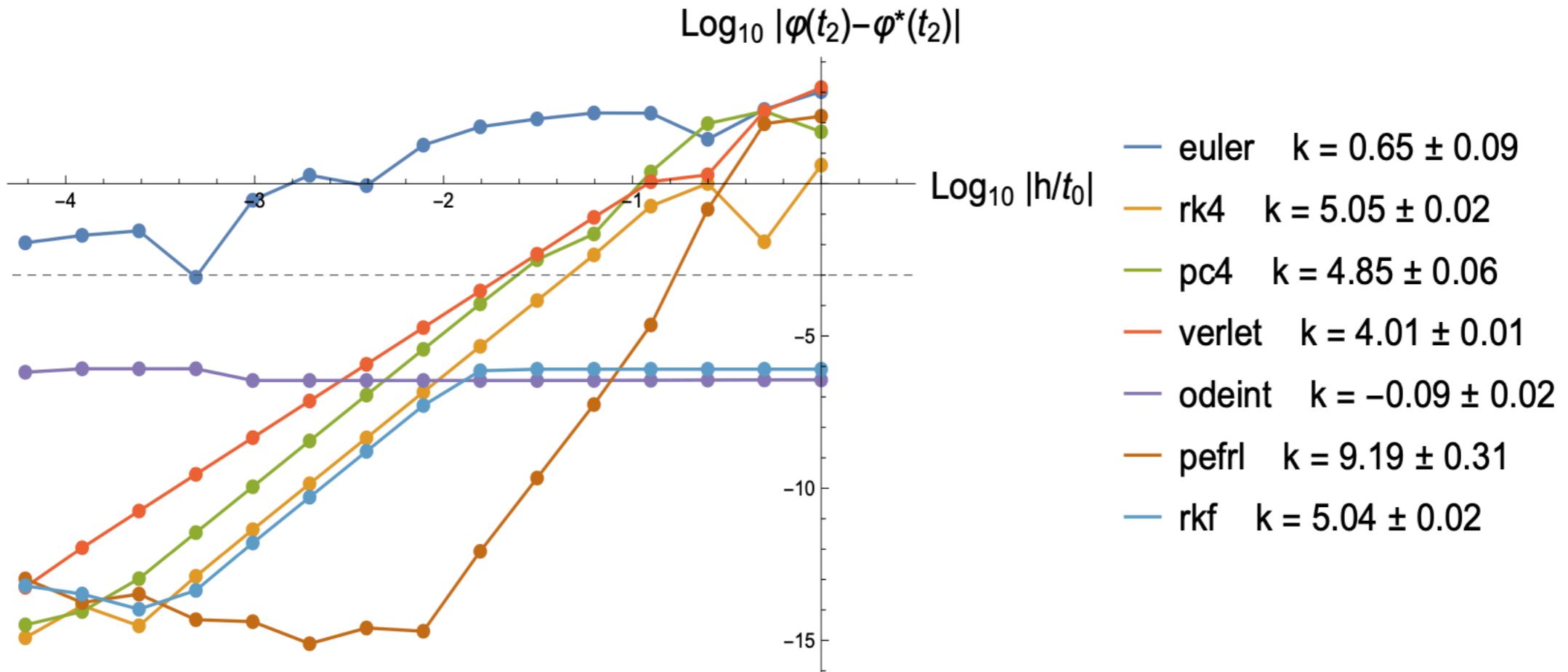


Graf 6: Odstopanje metode PEFRL od analitične rešitve.



Studije napak in ohranitve energije

BEST-OF-THE-DAY

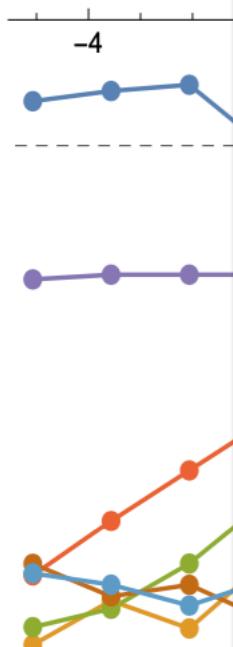


Slika 3: Odvisnost globalne natančnosti (logaritem odstopanja po $n = 10$ nihajih od točne vrednosti) od logaritma dolžine koraka h (normiranega na nihajni čas nihala t_0) za različne numerične metode. Opazimo različne rede konvergencije različnih metod. S črtkano vodoravno črto je označena ciljna toleranca $\varepsilon = 10^{-3}$.

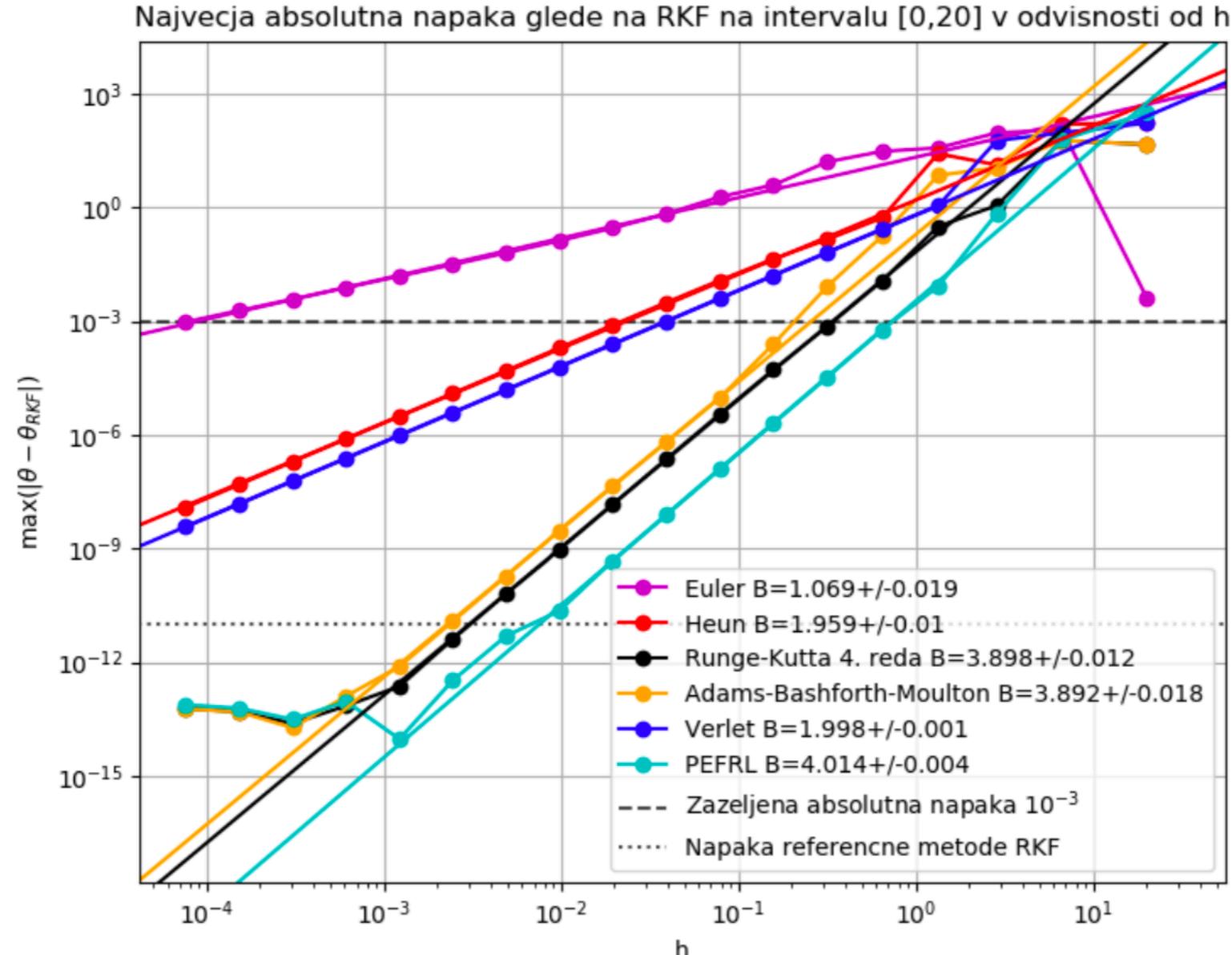


Studije napak in ohranitve energije

BEST-OF-THE-DAY



Slika 3: Odvisnost absolutne napake od logaritma koraka. Opazimo razlike med metodami pri majhnih tolerancah $\varepsilon = 10^{-15}$.



0.09
0.2
0.06
± 0.01
9 ± 0.02
0.31
0.02

vrednosti)
ne metode.
čena ciljna

Študije napak in ohranitve energije

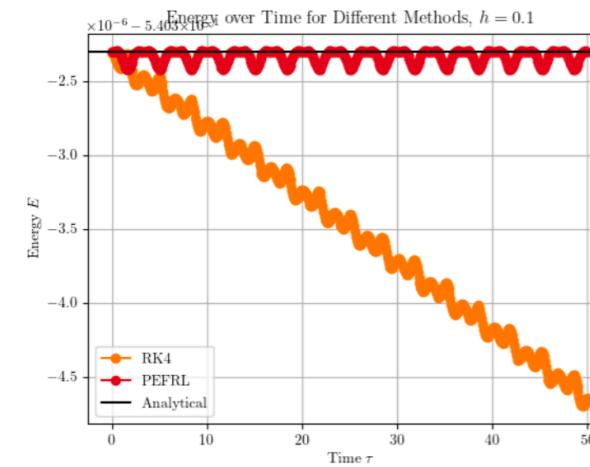
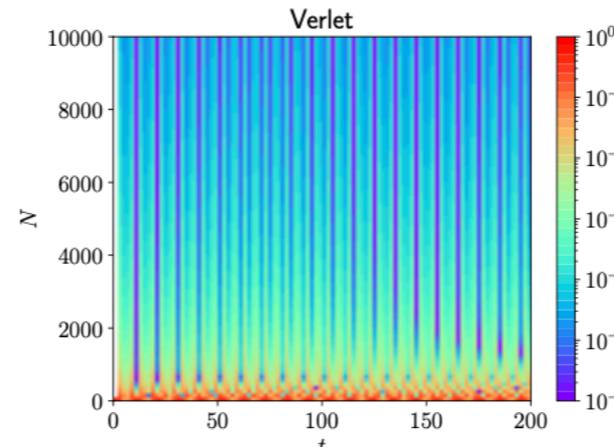
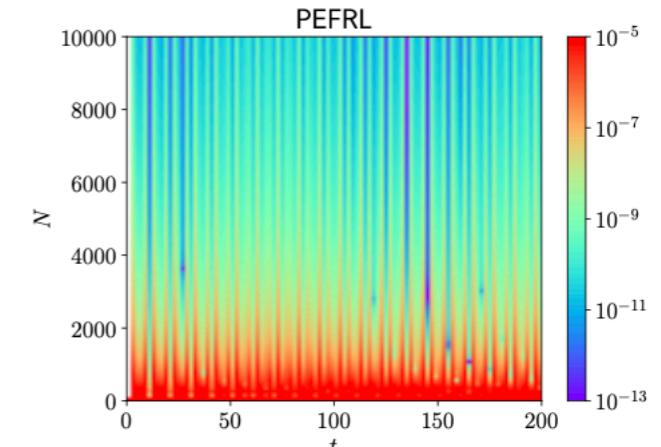


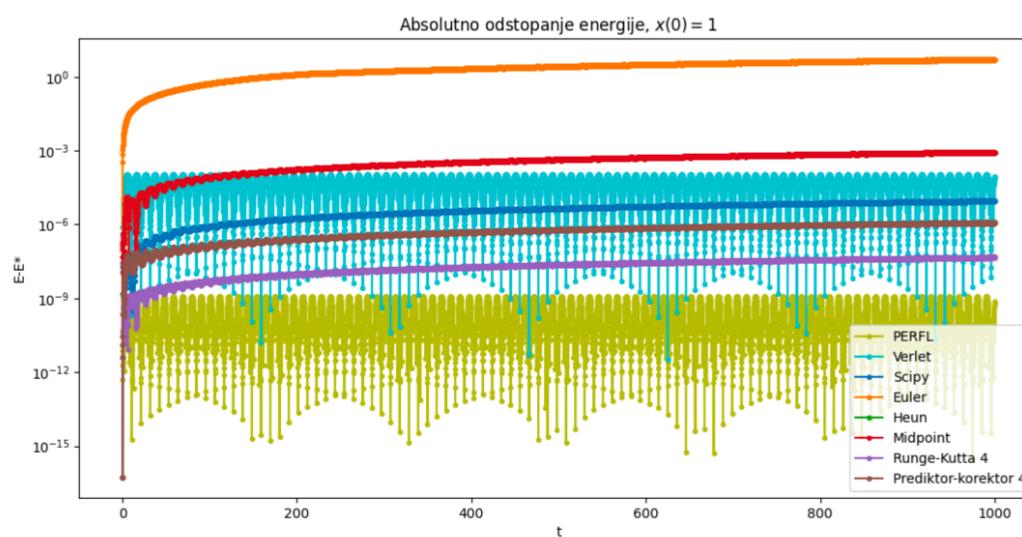
Figure 9: Energy over time for some of the constant step methods with a step size of $h = 0.1$.



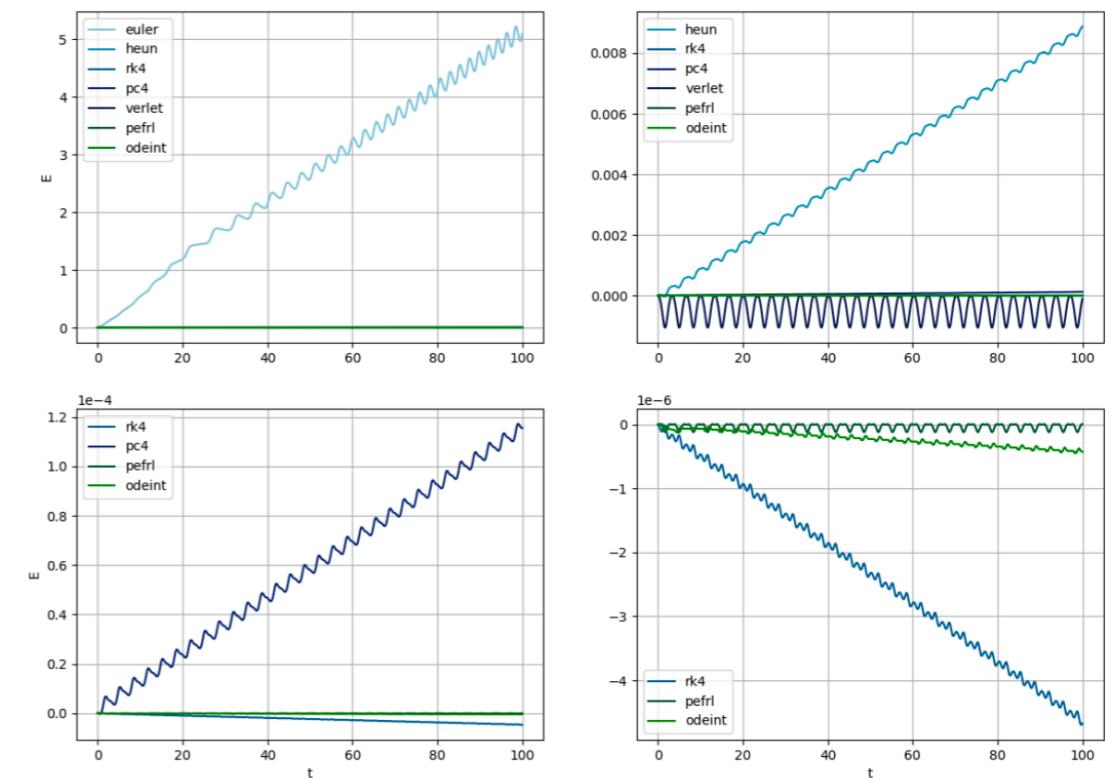
Graf 10: Relativno odstopanje energije od začetne pri metodi Verlet.



Graf 11: Relativno odstopanje energije od začetne pri metodi PEFRL.



Slika 11: Odstopanje energije v logaritemski skali pri različnih metodah, $t = 1000$ in $h = 0.1$

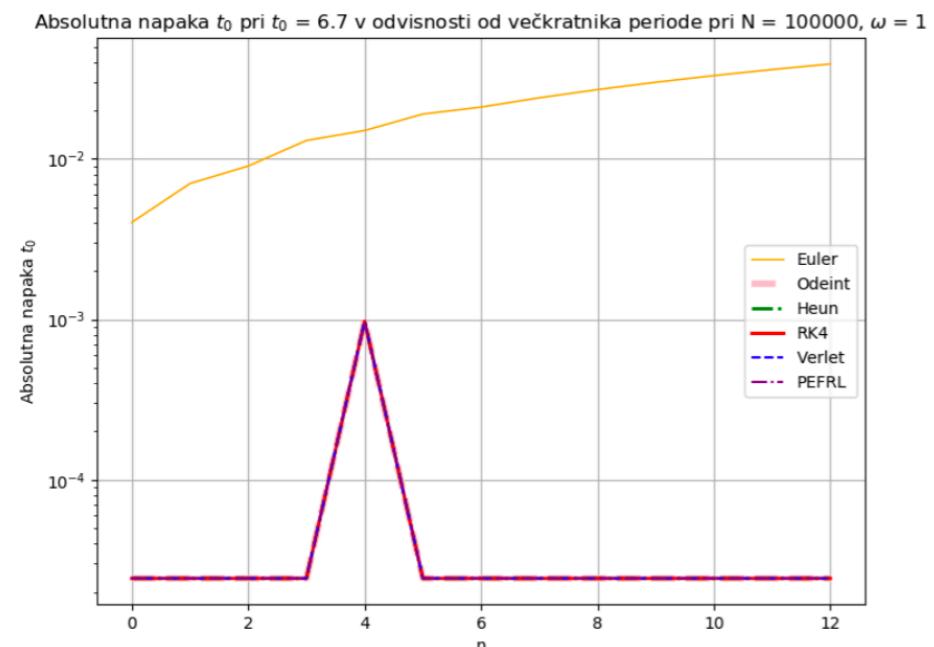


Slika 2: Energije različnih metod za število korakov $N = 1000$, na intervalu $t \in [0, 100]$. Vidimo, da je najbolj natančna metoda PEFRL, kjer se energija poleg osciliranja ne spreminja, sledi ji vgrajena metoda odeint, njej pa metoda RK4. Najmanj natančna metoda je Eulerjeva.



Nihajni čas

- kot dobra mera za natančnost služi tudi merjenje nihajnega časa med dvema točkama v fazi (lega=0 ipd..).



Slika 8: Absolutna napaka nihanjega časa glede na teoretično vrednost

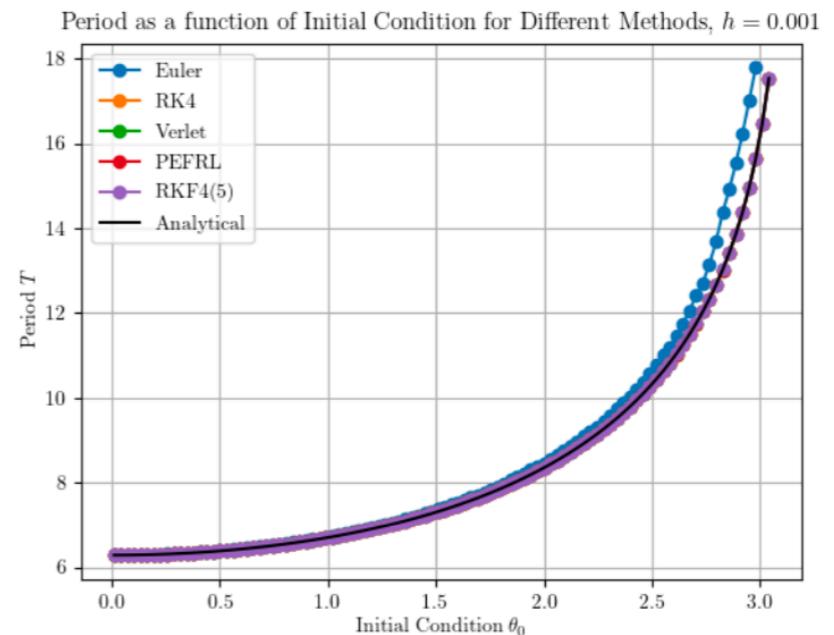
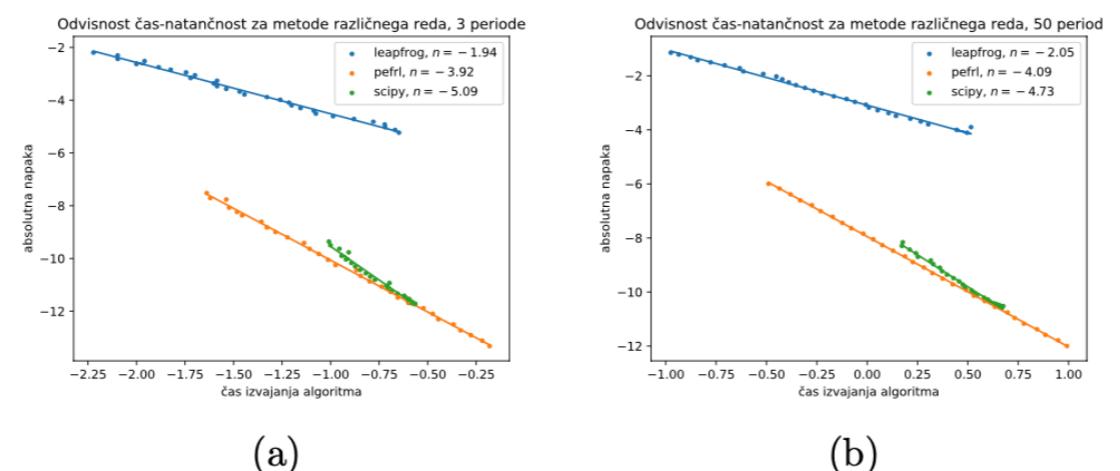
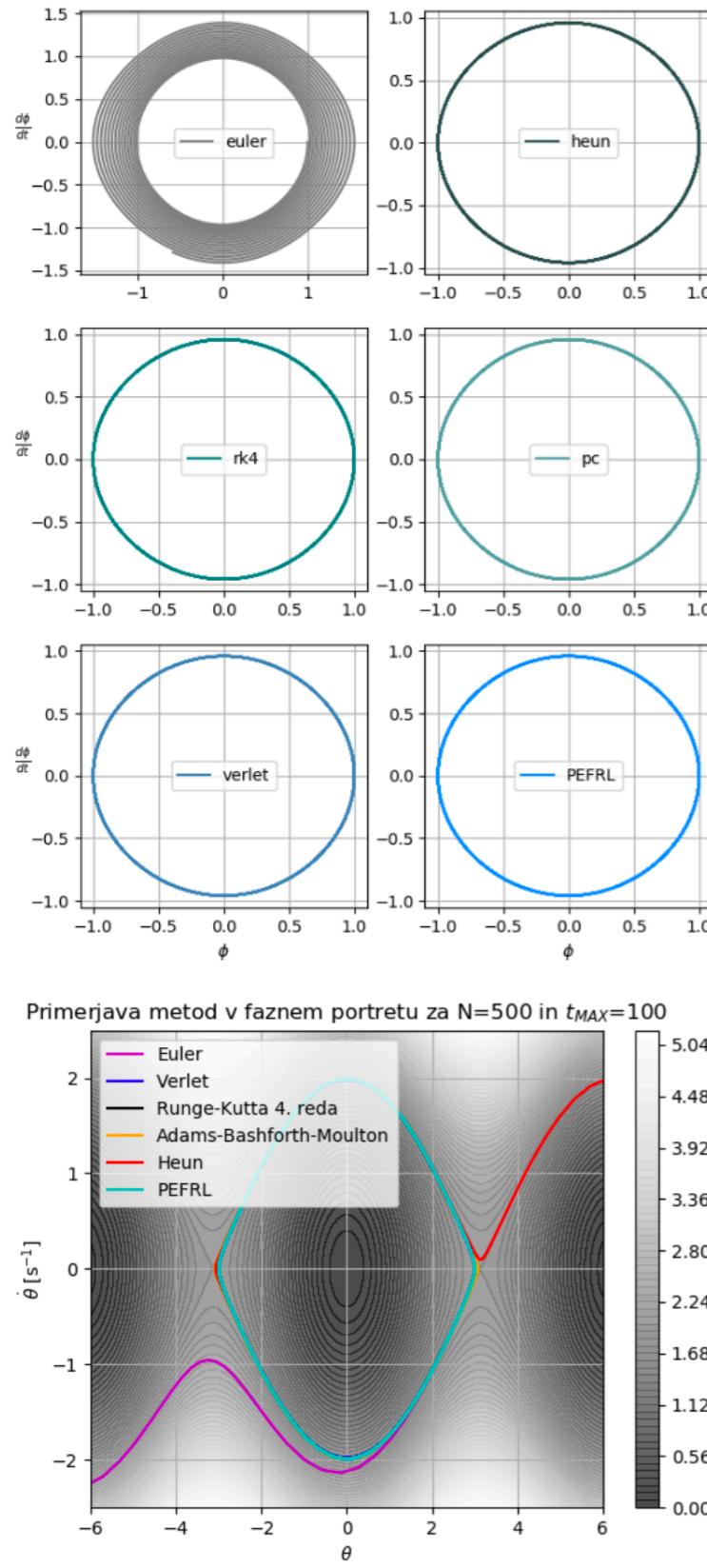


Figure 13: Period as a function of initial condition θ_0 .



Slika 1: Natančnost metode po (a) 3 periodah, (b) 50 periodah v logaritemski skali

Fazni portreti



Slika 12: Tiri niso niti približno več elipse.

A JE SCIPY.INTEGRATE.ODEINT?

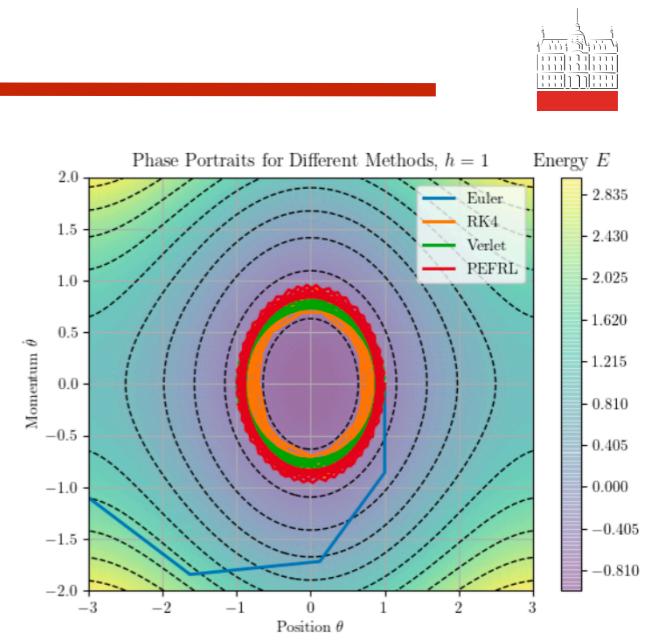
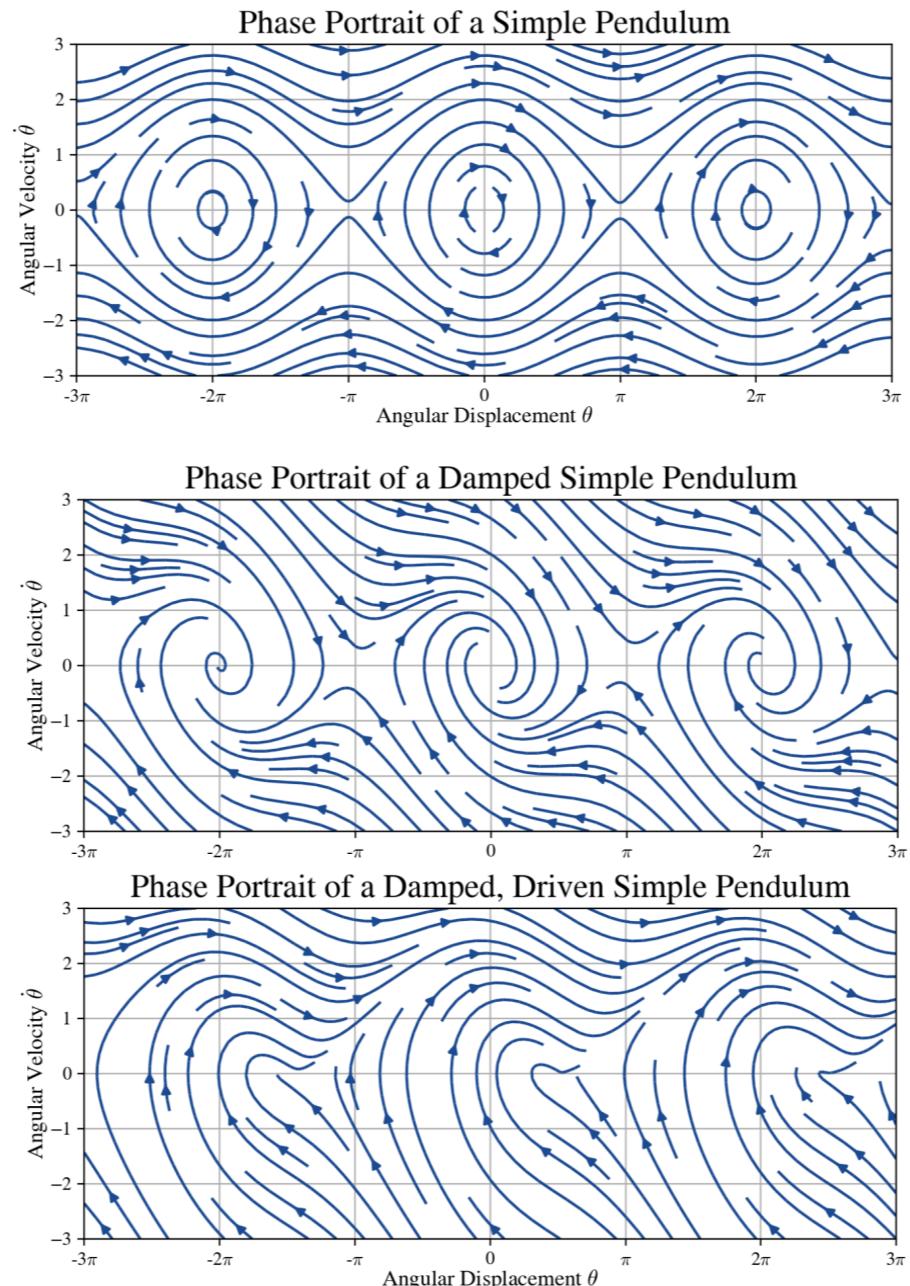
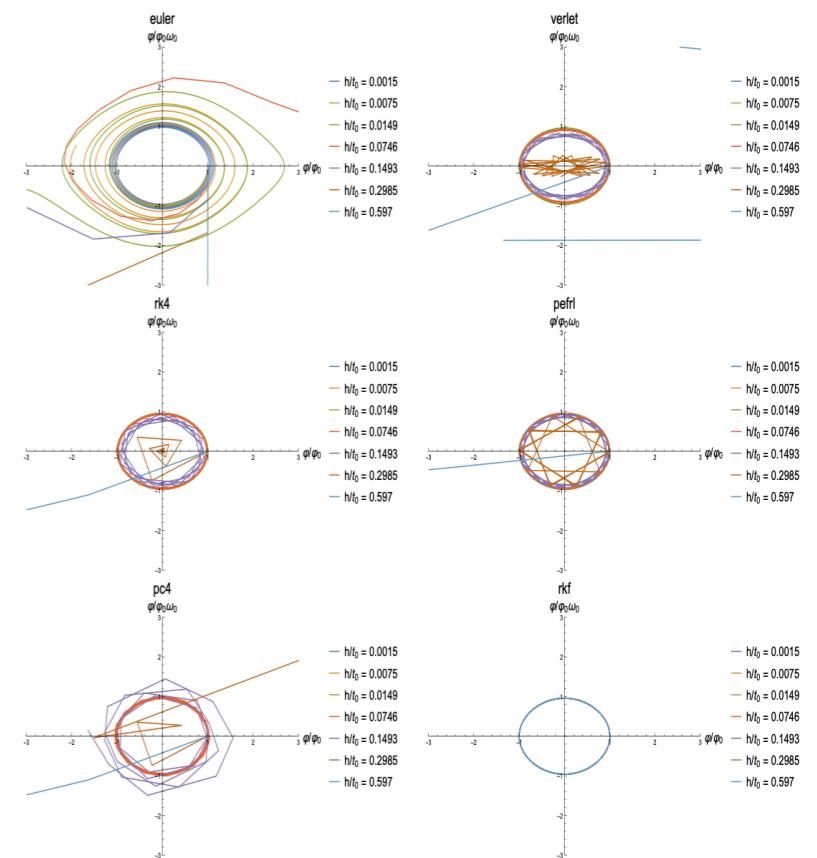


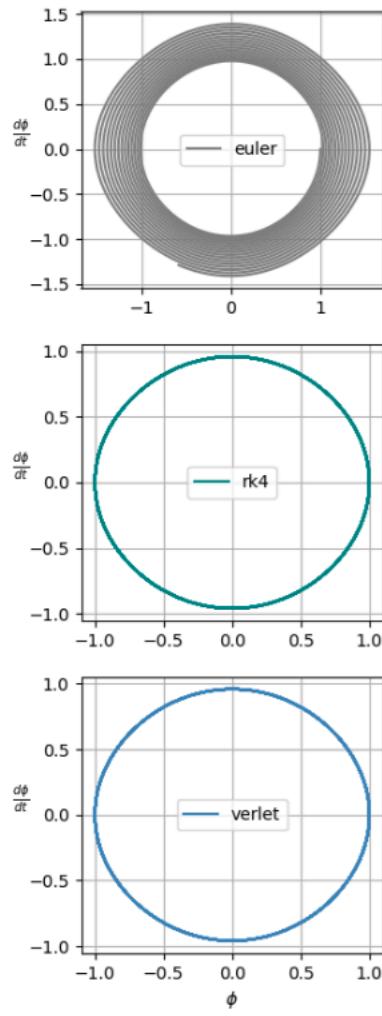
Figure 11: Phase portrait for the different constant step methods using a step of $h = 1.0$.



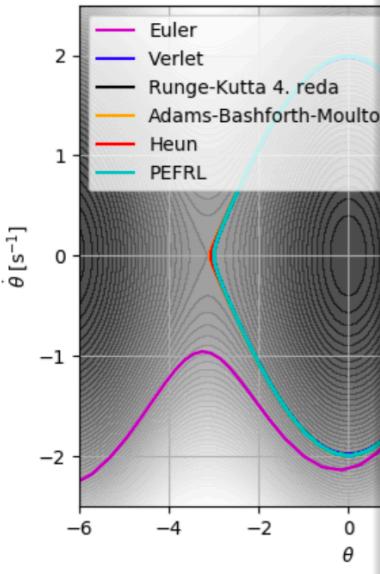
Slika 4: Trajektorije v faznem prostoru matematičnega nihala za $\varphi_0 = 1$ in $t \in [0, 5 \cdot t_0]$ za različne numerične metode in različne dolžine koraka h

2.2 Opaženi tipi fiksnih točk

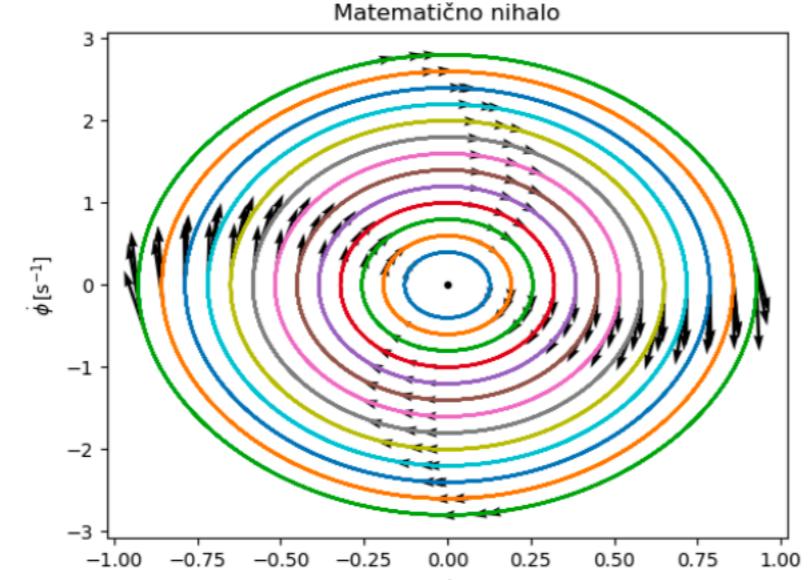
Ob spremenjanju parametrov opazim nekatere fiksne točke sistema. Iskanje fiksnih točk se preveda na iskanje lastnih vektorjev in lastnih vrednosti, kar nam v tem primeru da $\phi = \pm\pi$ kot je razvidno iz slike 12a.



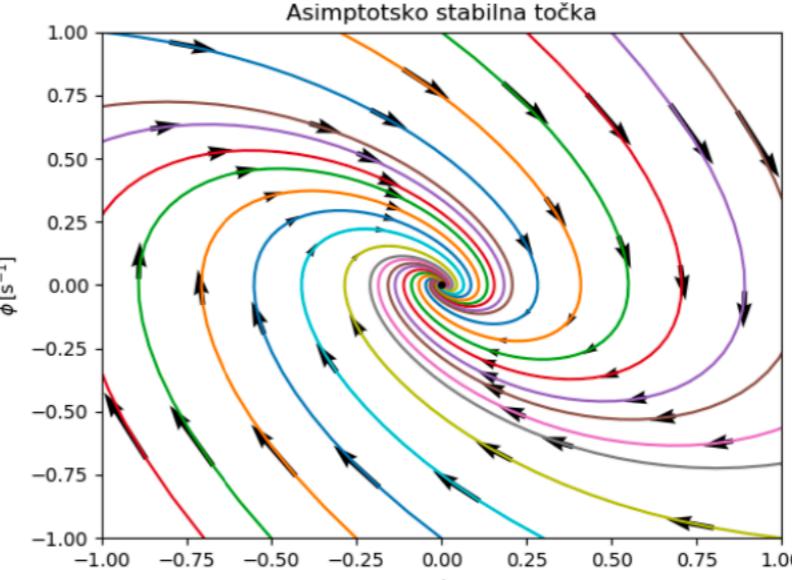
Primerjava metod v faznem portalu



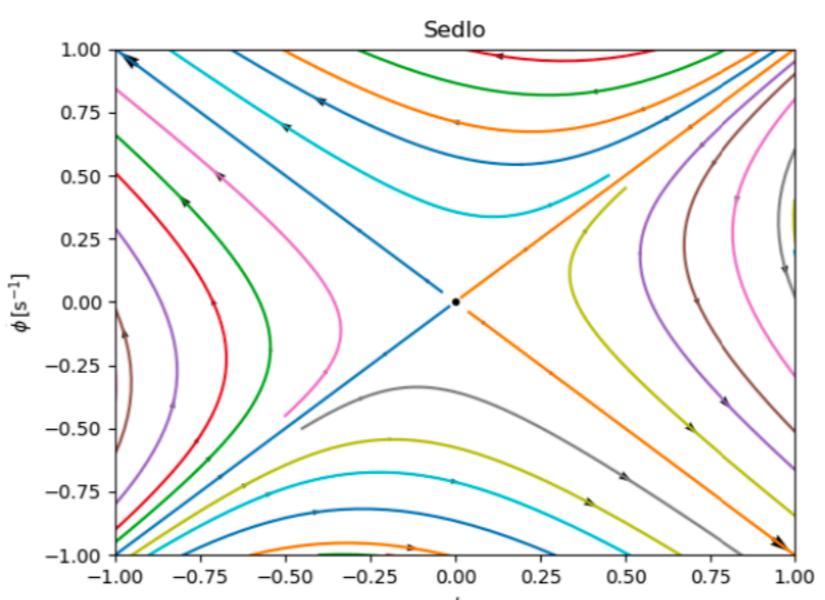
Slika 12: Tiri niso kar preprosto več elipse.



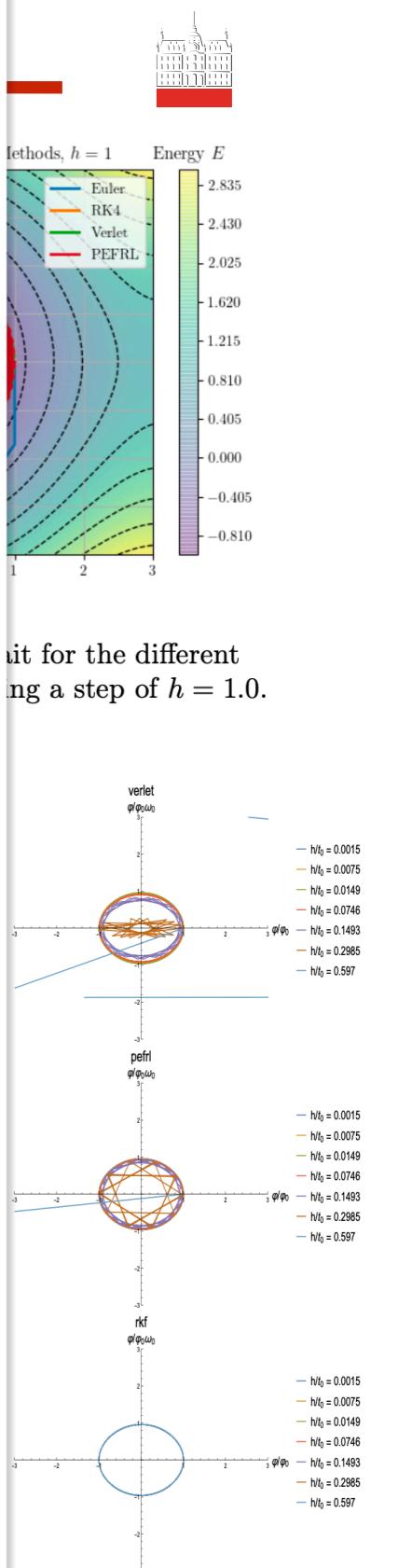
(a) Lyapunovo stabilna točka (ne asimptotsko).



(b) Asimptotsko stabilna točka



(c) Sedlo.

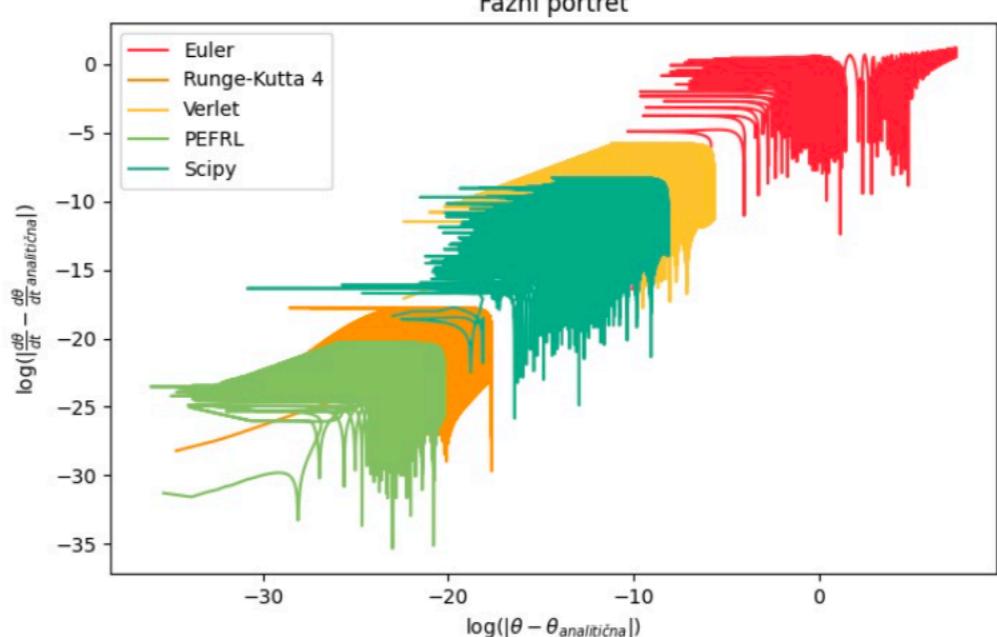
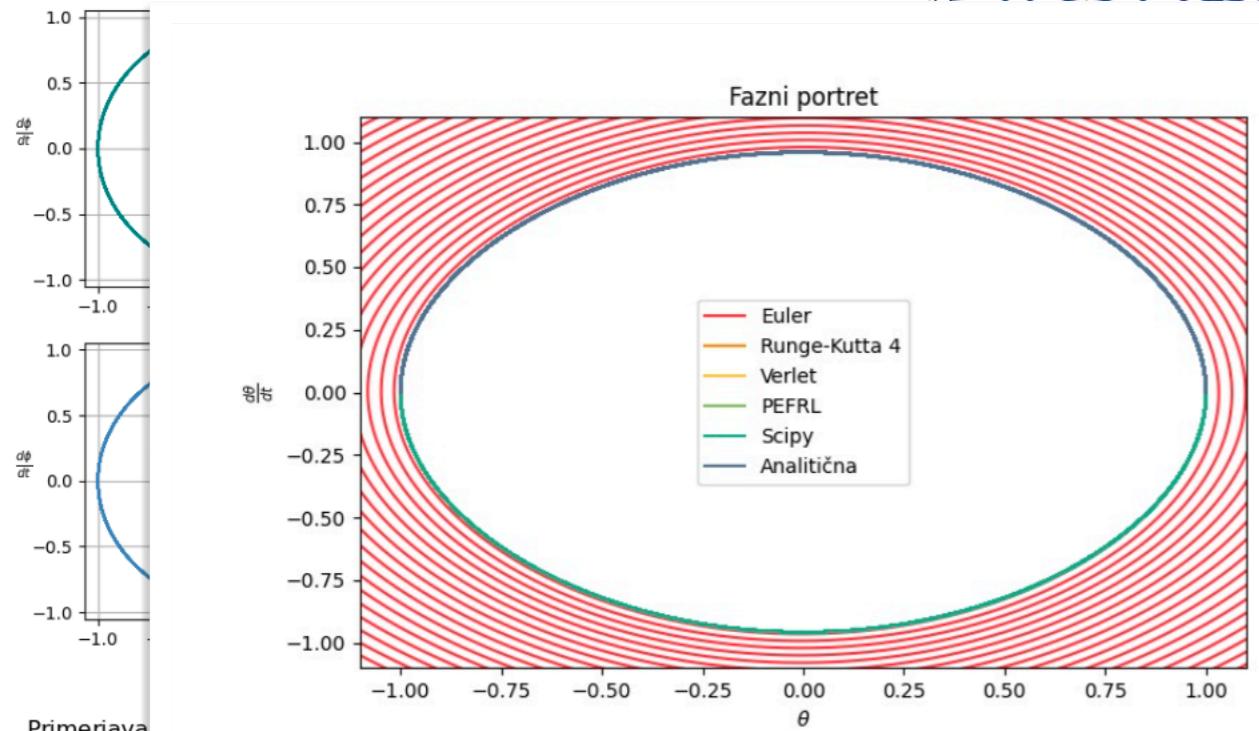
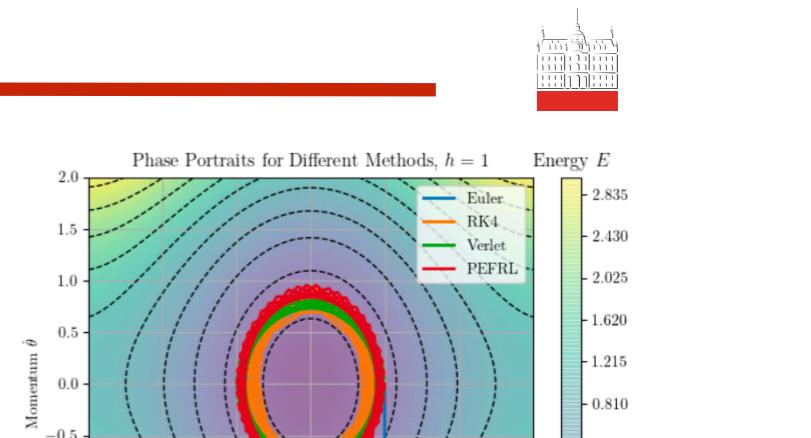
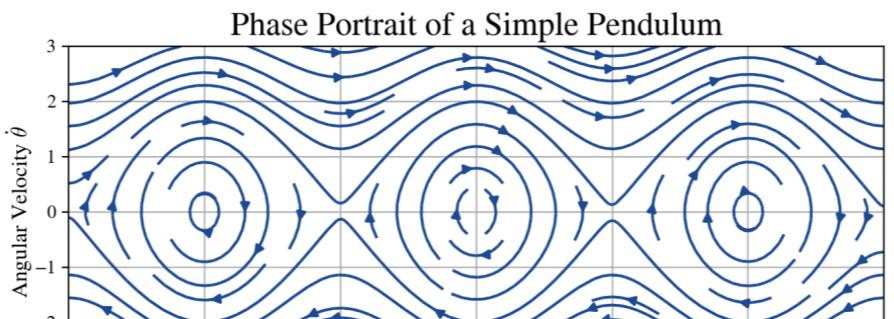
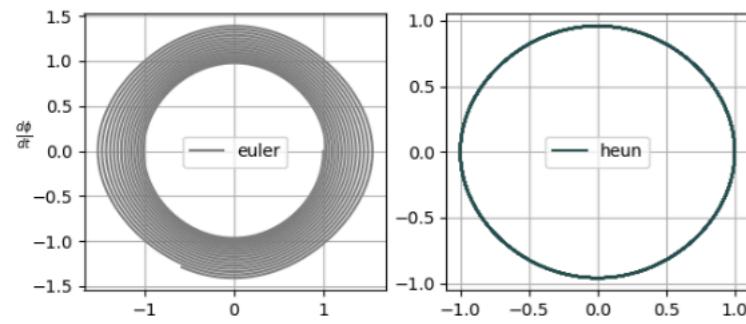


uit for the different
ng a step of $h = 1.0$.

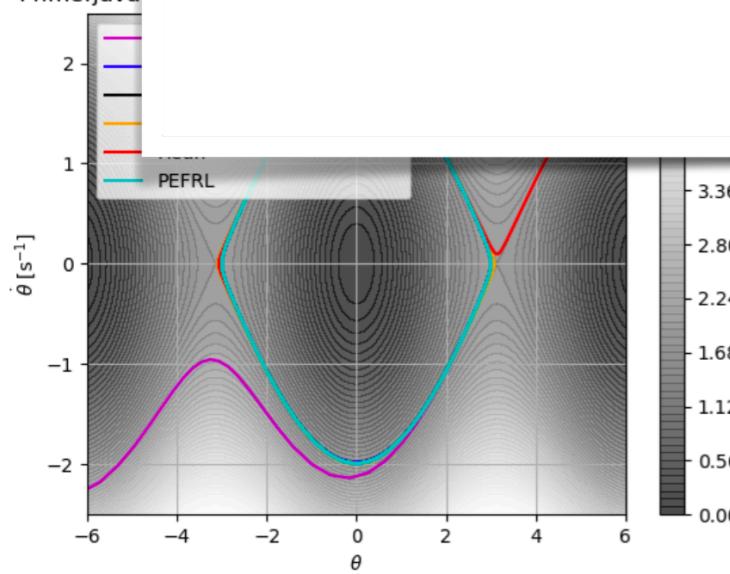
Slika 11: Predstavljeni so trije tipi opaženih fiksnih točk a) pri matematičnem nihalu in b), c) pri dušenem matematičnem nihalu. a) in b) sta stabilni , medtem ko je c) labilna točka.

nega nihala za $\varphi_0 = 1$ in $t \in [0, 0.5 \cdot t_0]$ za različne

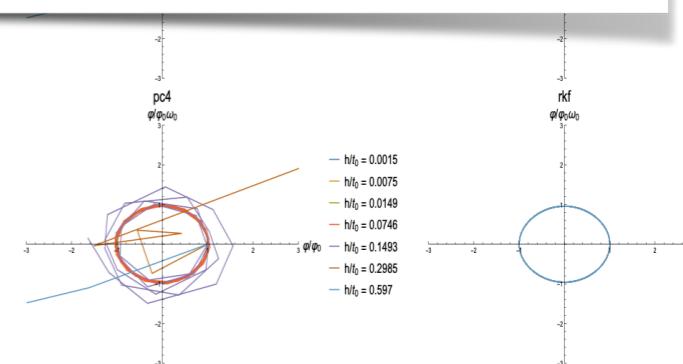
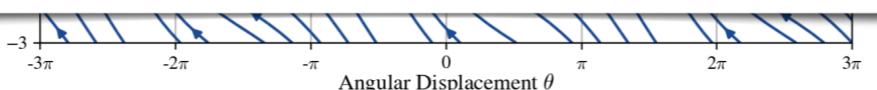
Fazni portreti



Primerjava



Slika 9: Fazni portret na večjem območju



Slika 4: Trajektorije v faznem prostoru matematičnega nihala za $\varphi_0 = 1$ in $t \in [0, 5 \cdot t_0]$ za različne numerične metode in različne dolžine koraka h

Slika 12: Tiri niso niti približno več elipse.

A JE SCIPY.INTEGRATE.ODEINT?

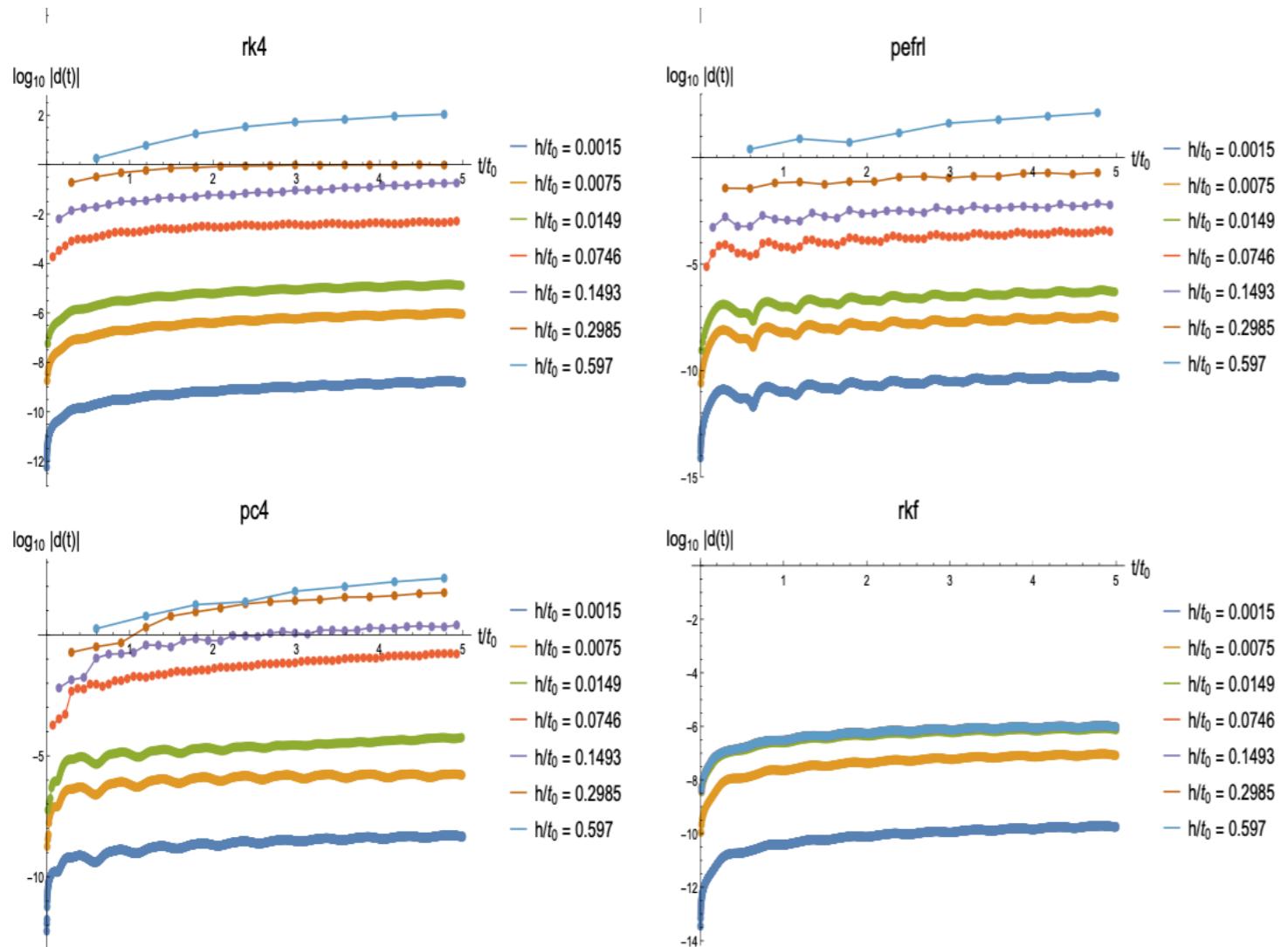
Fazni portreti



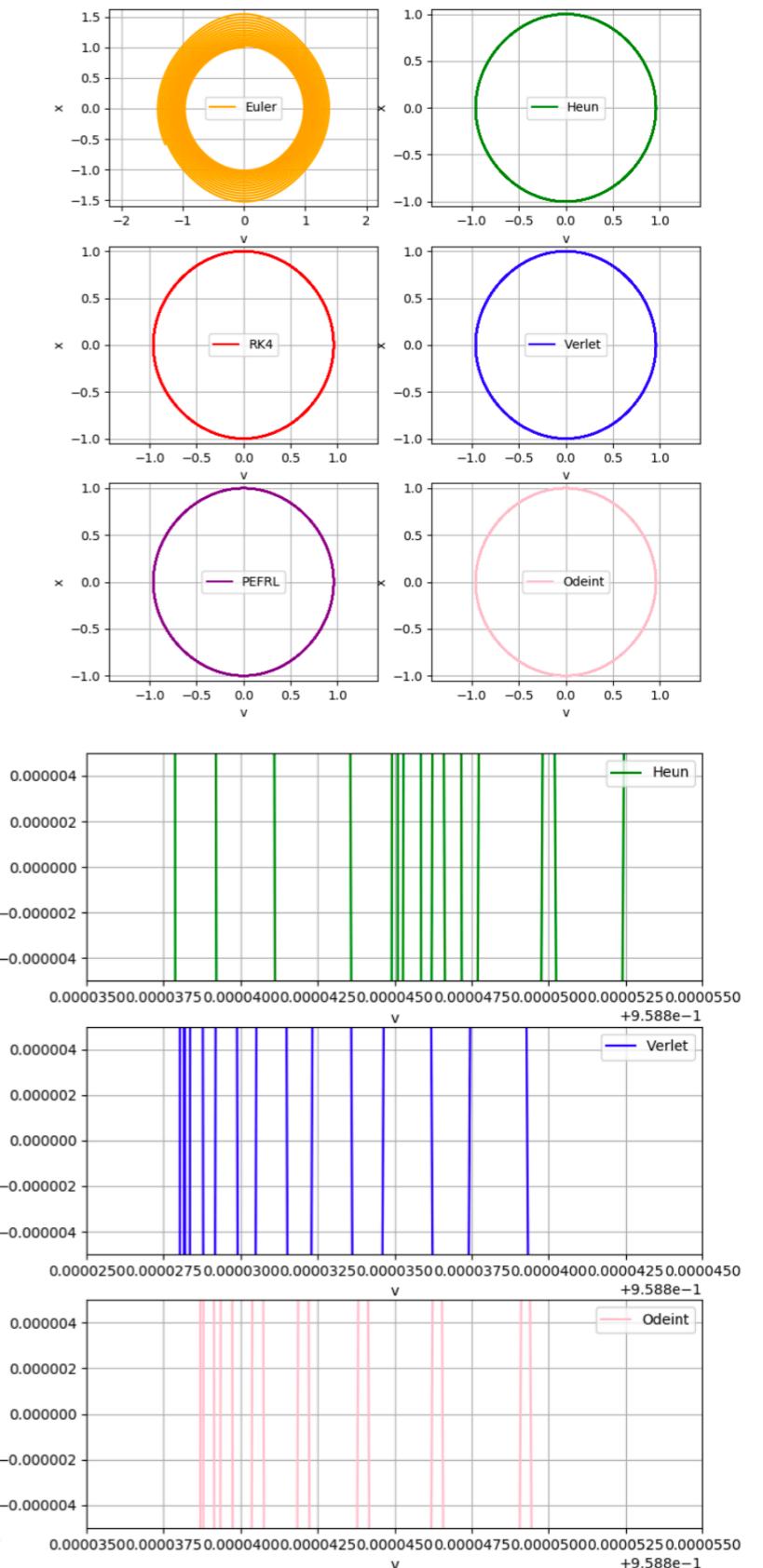
Dodatno me je zanimalo odstopanje faznih diagramov različnih metod od točnega faznega diagrama za matematično nihalo (analitično funkcijo za kotno hitrost sem izračunal s programom *Mathematica*). Kot merilo za odstopanje sem si izbral evklidsko oddaljenost med točko na fazni trajektoriji numeričnega približka in točko na fazni trajektoriji točne rešitve ob nekem času.

$$d_i(t) = \|\vec{r}_i(t) - \vec{r}^*(t)\|$$

Za enak izbor vrednosti h sem prikazal odstopanja na sliki 5. Slika je tudi priročna za analizo vpliva dolžine koraka na odstopanje numerične metode od točne vrednosti.



Slika 5: Odstopanje od eksaktne trajektorije v faznem prostoru, prikazana so odstopanja različnih numeričnih metod za različne dolžine koraka h .

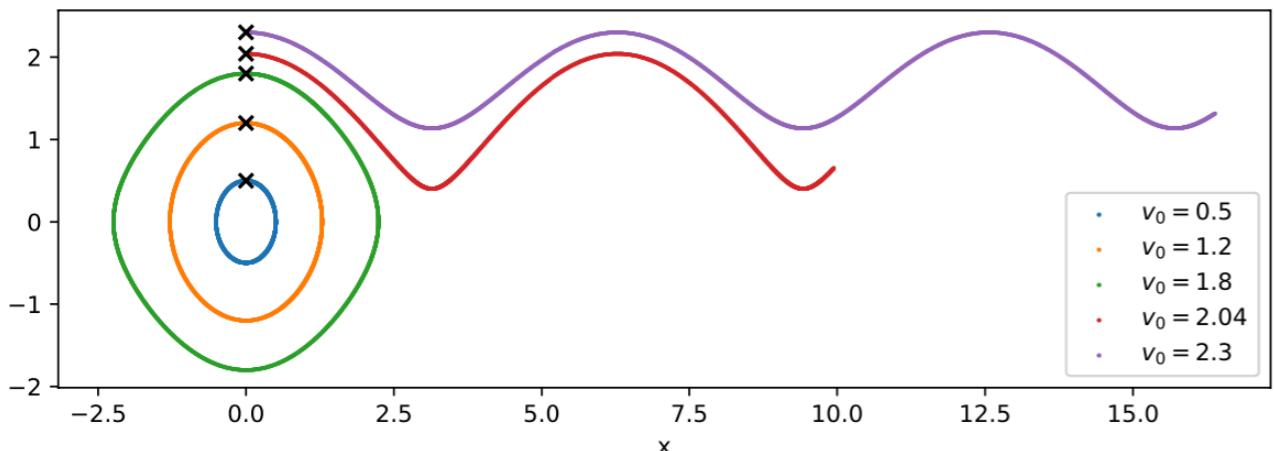


Slika 7: Približani fazni portret pri $N = 10000$



Fazni portreti

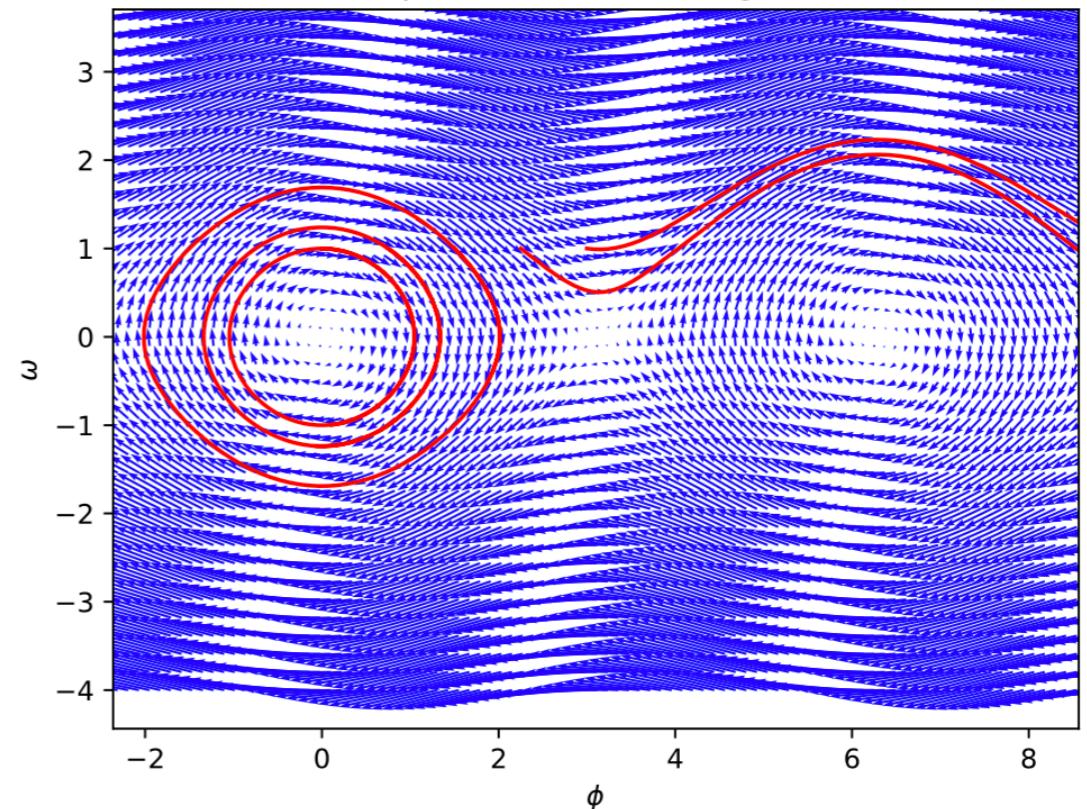
Lani: nazoren prikaz ekstremnega nihanja z zač. pogoji...



Slika 5: Tipični fazni portret matematičnega nihala.

Letos (lepo!) ...

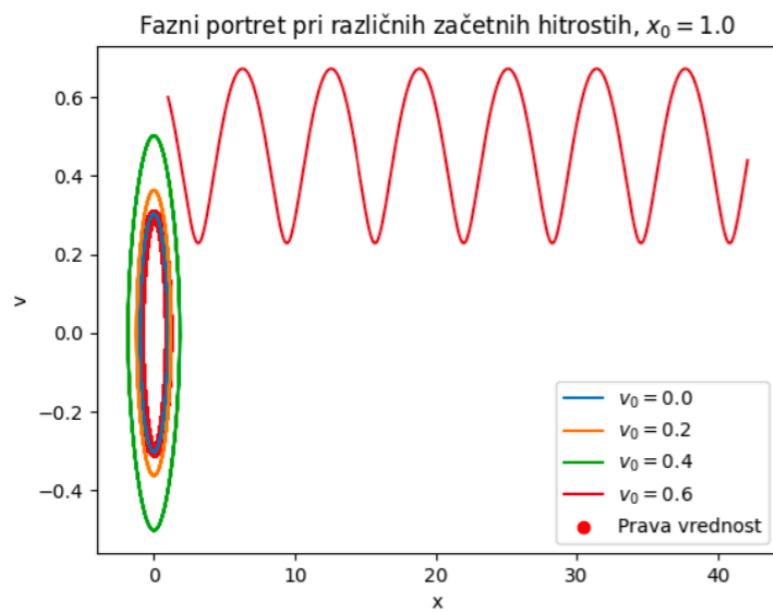
Fazni portret matematičnega nihala



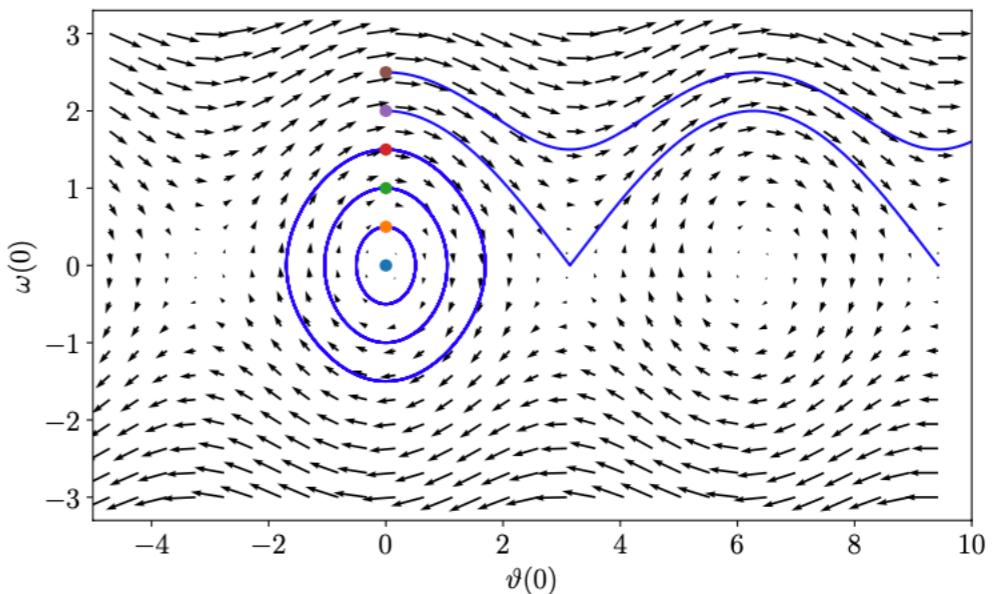
Slika 6: Fazni portret nedušenega matematičnega nihala

Letos (lepo!) ...

BRAVO!



Slika 12: Fazni portret pri različnih začetnih hitrostih z metodo PEFRL.





Zacetna natancnost!

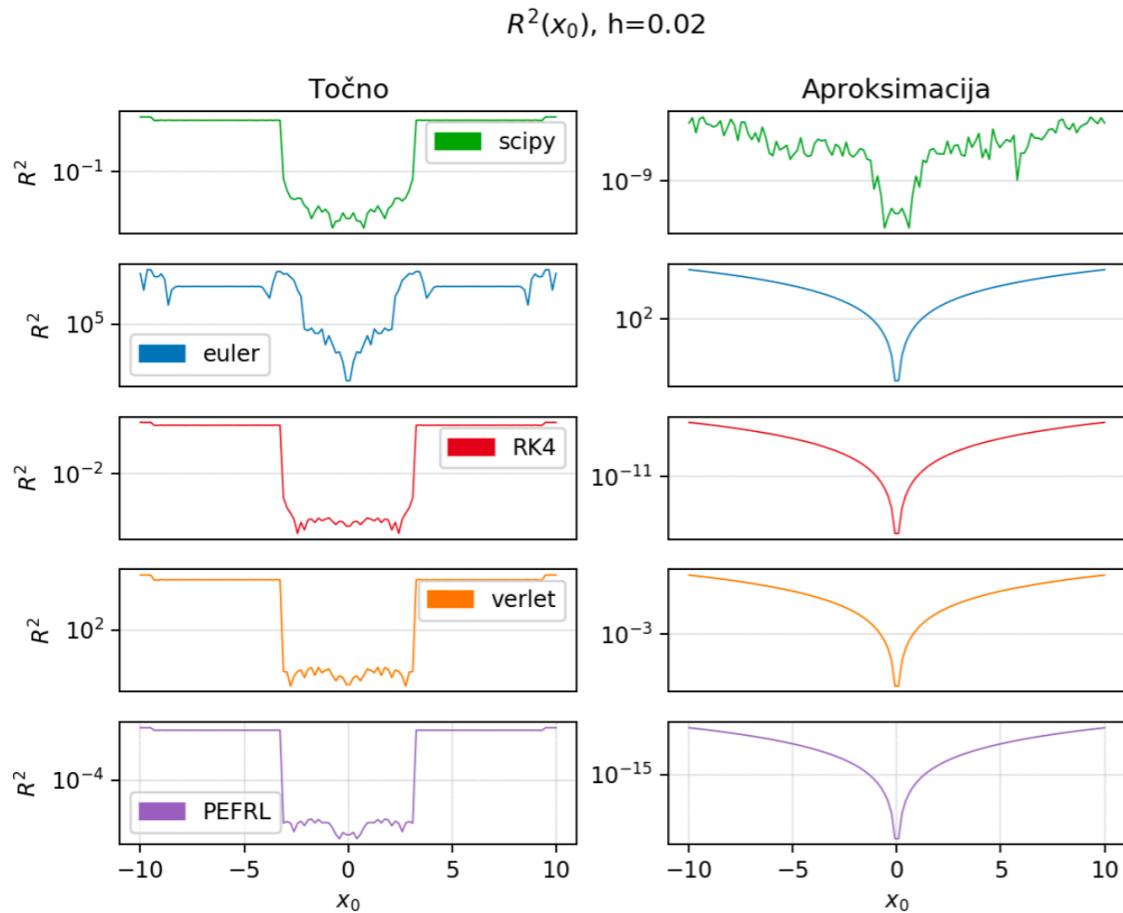
- Pomemben detajl...

Med obdelovanjem podatkov, sem parkrat spremenil začetne pogoje in dobil zanimive rezultate, zato sem se odločil narediti grafe vrednosti R^2 v odvisnosti od začetnih pogojev in velikosti koraka h , kjer je

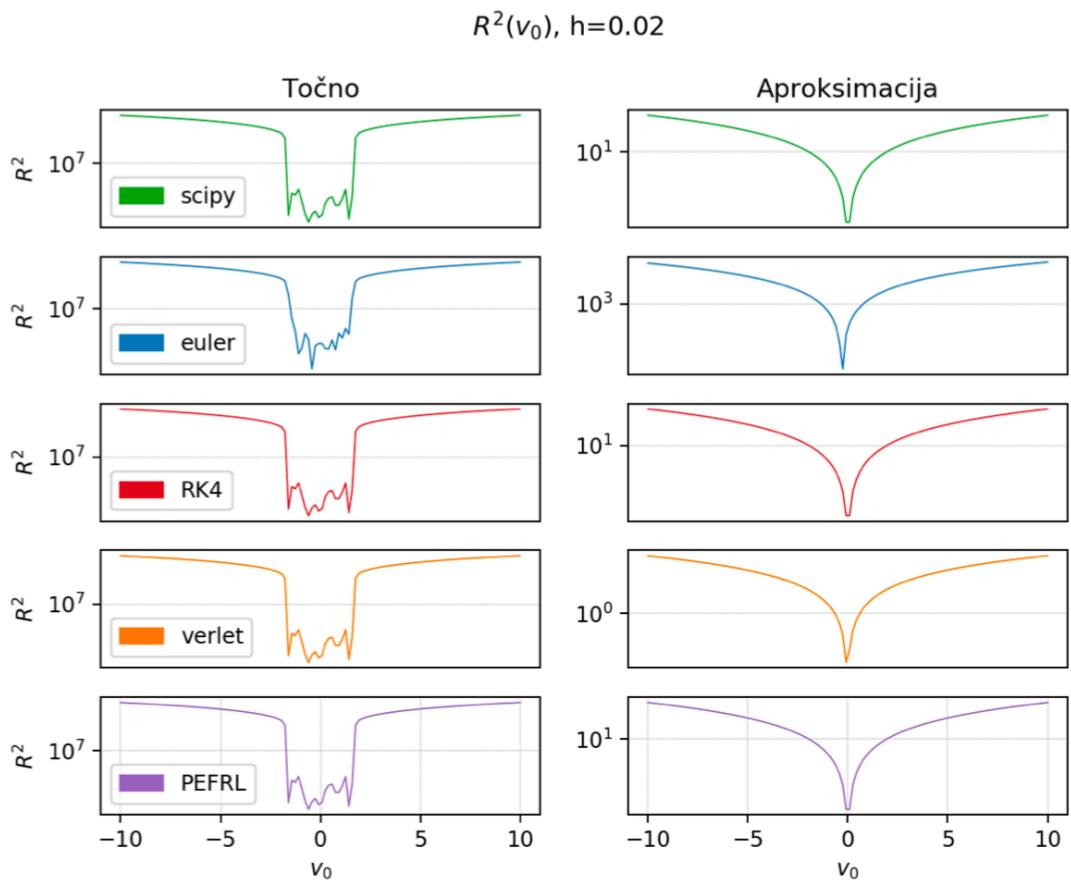
Lani...

$$R^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (y_{a,n} - y_n)^2. \quad (3)$$

$y_{a,n}$ je vrednost analitične rešitve, $y_{E,n}$ pa je vrednost, ki sem jo dobil pri numerični metodi.



Slika 39: Vrednost $R^2(x_0)$.



Slika 40: Vrednost $R^2(v_0)$.



Dodatna

- Samo-iniciativnost....

As an extra, in the spirit of Newton's second law, I tried simulating the Earth-Moon-Sun three-body system using the differential equation methods in this report. As a simplification, I assumed the sun was fixed in inertial space, and solved only for the motion of the earth and moon around the sun, which reduces the problem to a system of 12 equations (2 bodies \times 3 spatial dimensions \times 2nd order differential equation). The corresponding code is included in the file `newton-ems.py`. Figure 14 shows the earth and moon's orbit around the sun over the course of one year with Figure 15 shows the moon's 18.6 year nodal precession period. The attached files `ems-animated-365.mp4` and `moon-precession.mp4` show animated versions of the same graphs.

BRAVO!

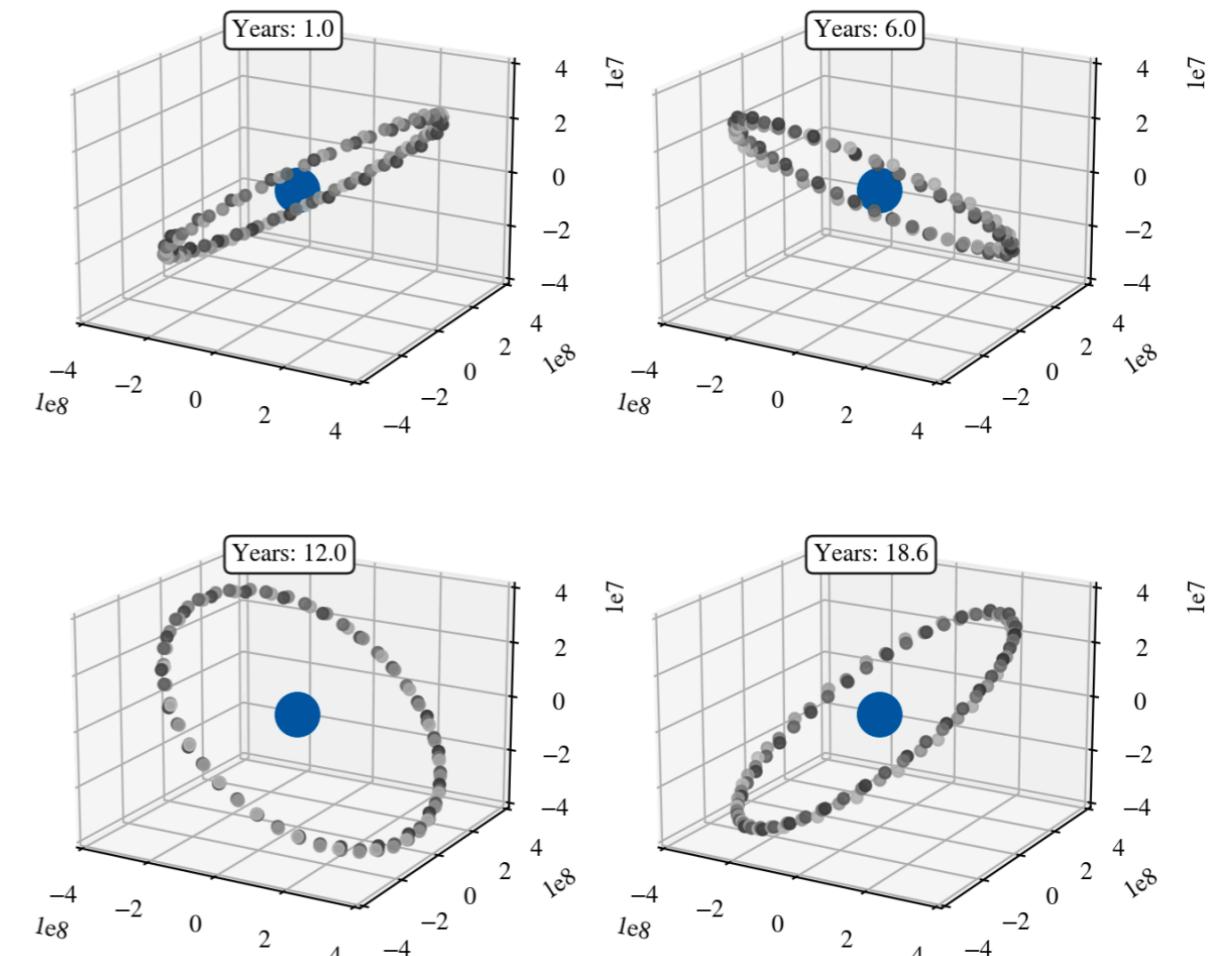
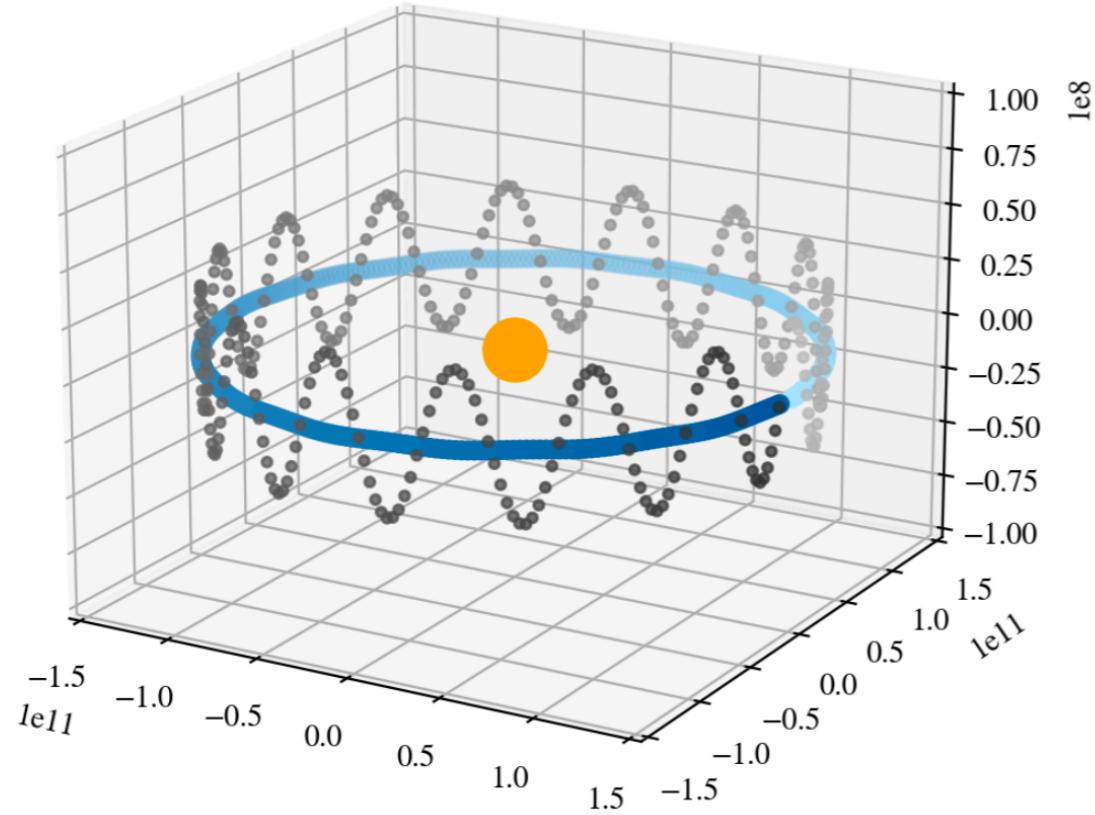
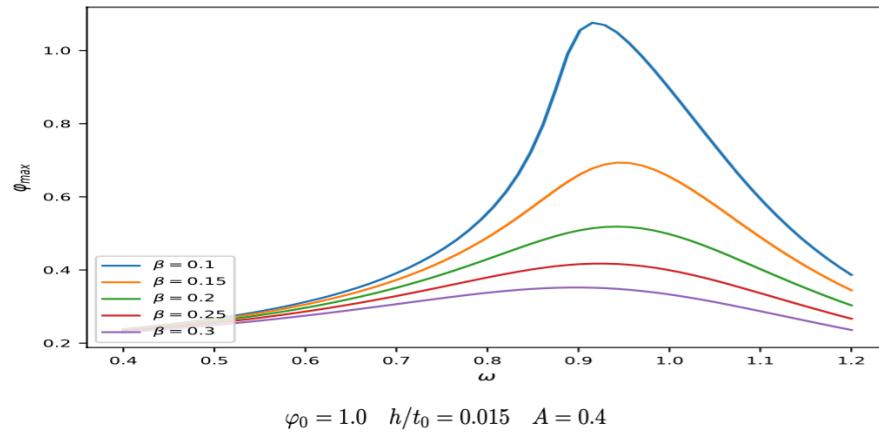


Figure 15: Visualizing the moon's 18.6 year nodal precession as it orbits the earth.

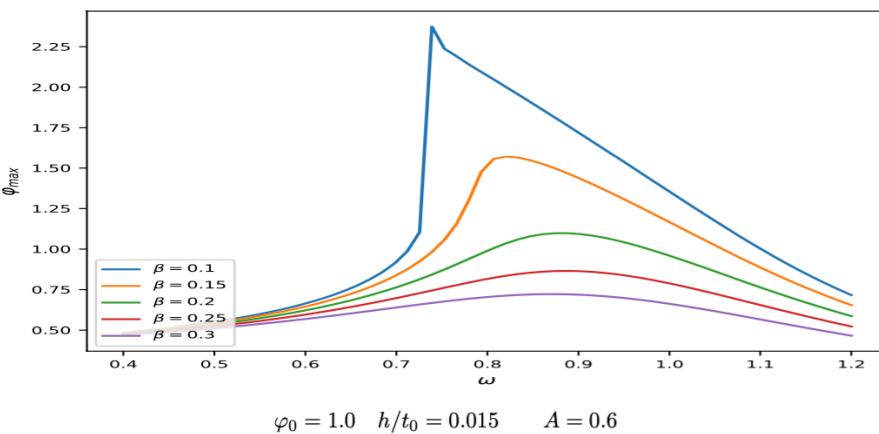


Dodatna...

$$\varphi_0 = 1.0 \quad h/t_0 = 0.015 \quad A = 0.2$$



$$\varphi_0 = 1.0 \quad h/t_0 = 0.015 \quad A = 0.4$$

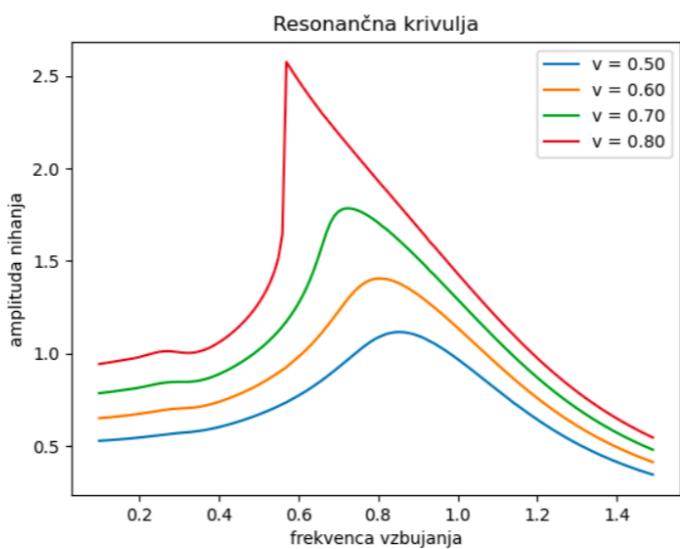


Pri Duffingovem modelu imamo enčbo

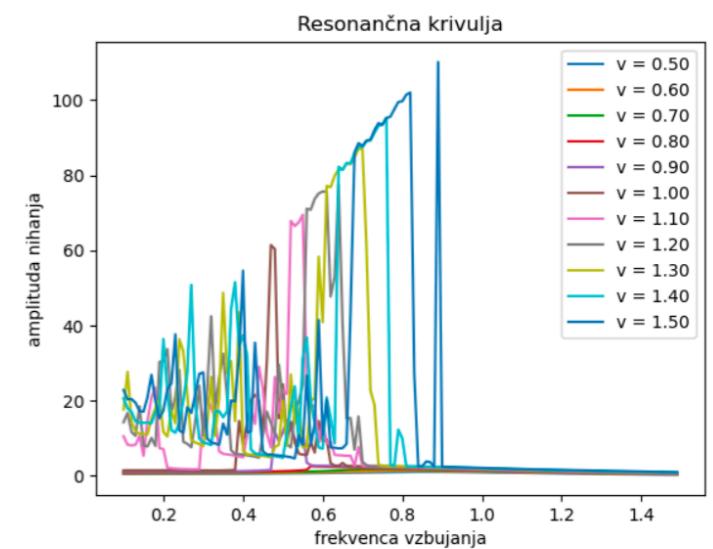
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (4)$$

Brez parametra β bi dobili navadno enačbo, ki jo uporabljamo v približku malih nihanj in jo znamo rešiti analitično. Tudi v primeru Duffingovega modela analitična rešitev obstaja in jo zapišemo z eliptičnimi integrali. Bolj zanimivo je, da obstaja tudi analitična zveza, ki opisuje resonančno obnašanje takšnega oscilatorja:

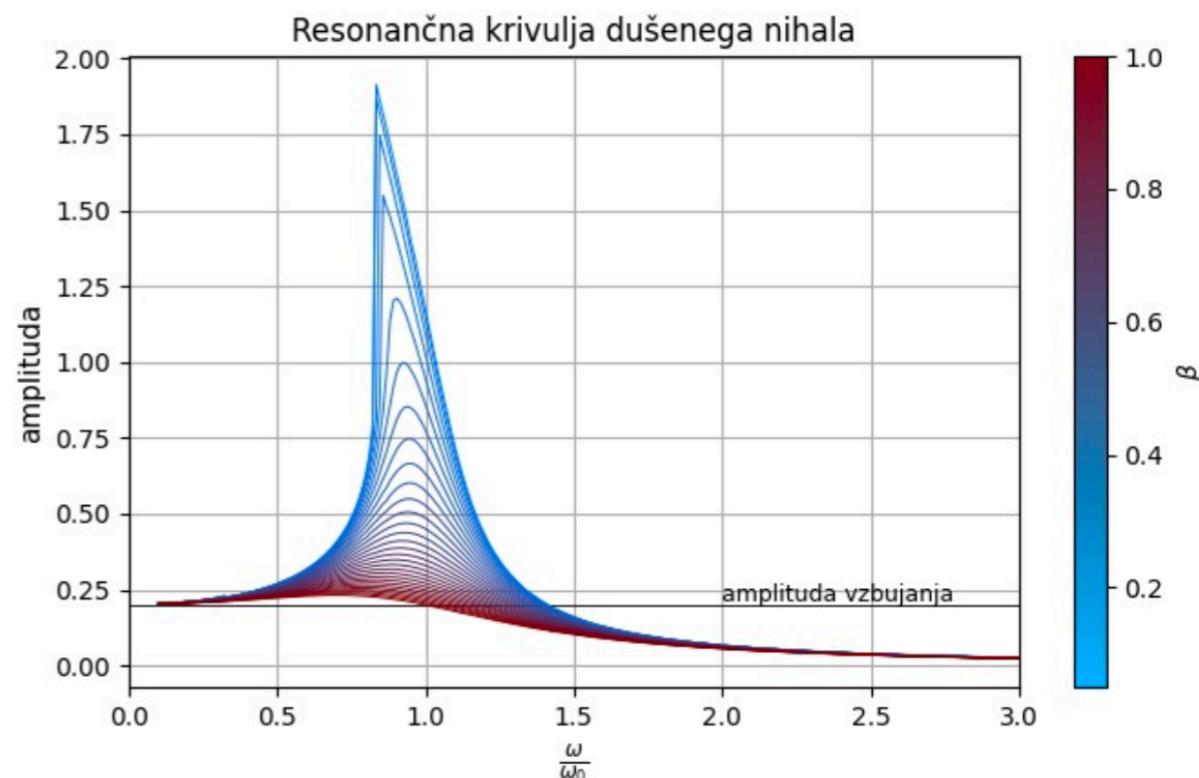
$$\left[\left(\omega^2 - \alpha - \frac{3}{4}\beta x^2 \right)^2 + (\delta\omega)^2 \right] x^2 = \gamma^2 \quad (5)$$



Slika 17: Resonančna krivulja za različne vrednosti v na intervalu $0.5 < v < 0.8$.



Slika 18: Resonančna krivulja za različne vrednosti v na intervalu $0.5 < v < 1.5$.



Slika 7: Resonančna krivulja dušenega matematičnega nihala

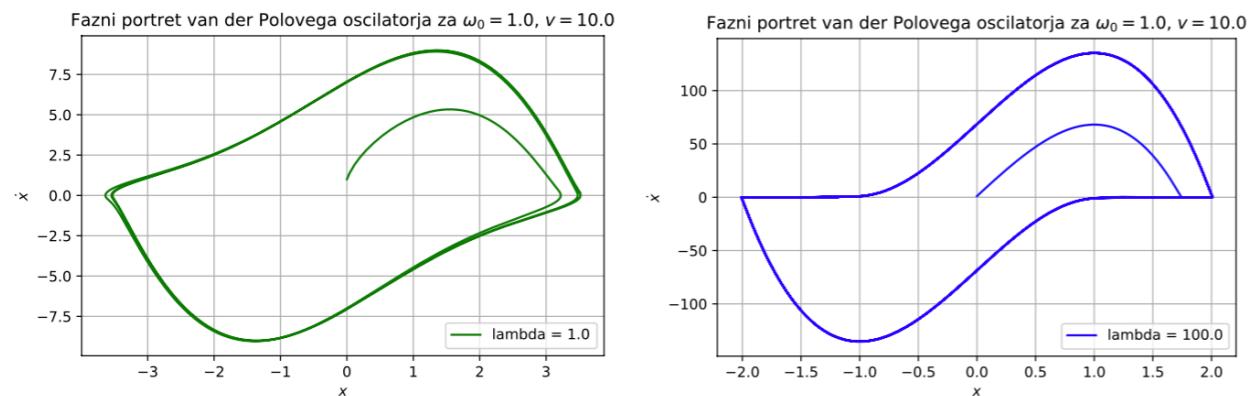


Van der Polov oscilator

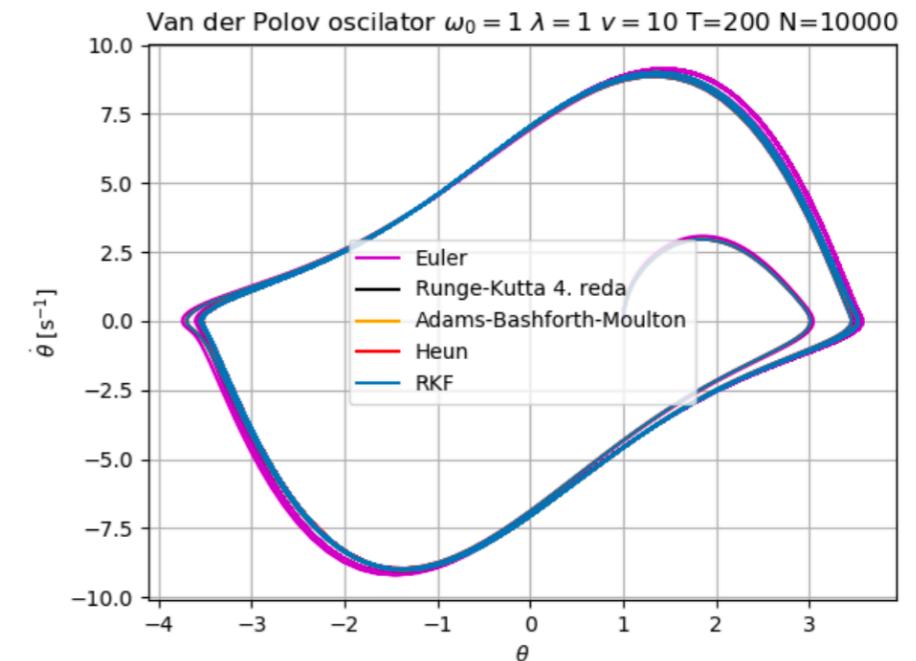
- Lepi primeri

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} (1 - x^2) + x = v \cos \omega_0 t.$$

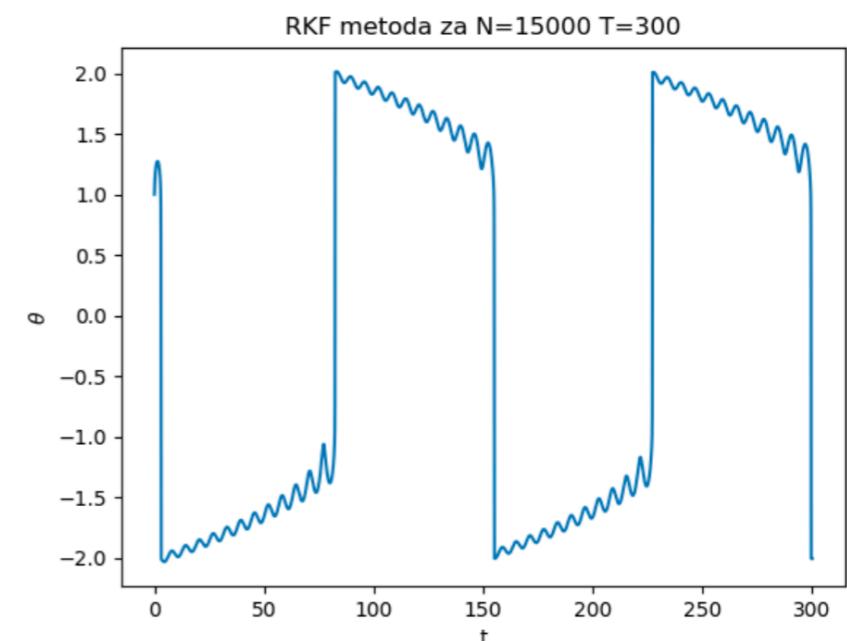
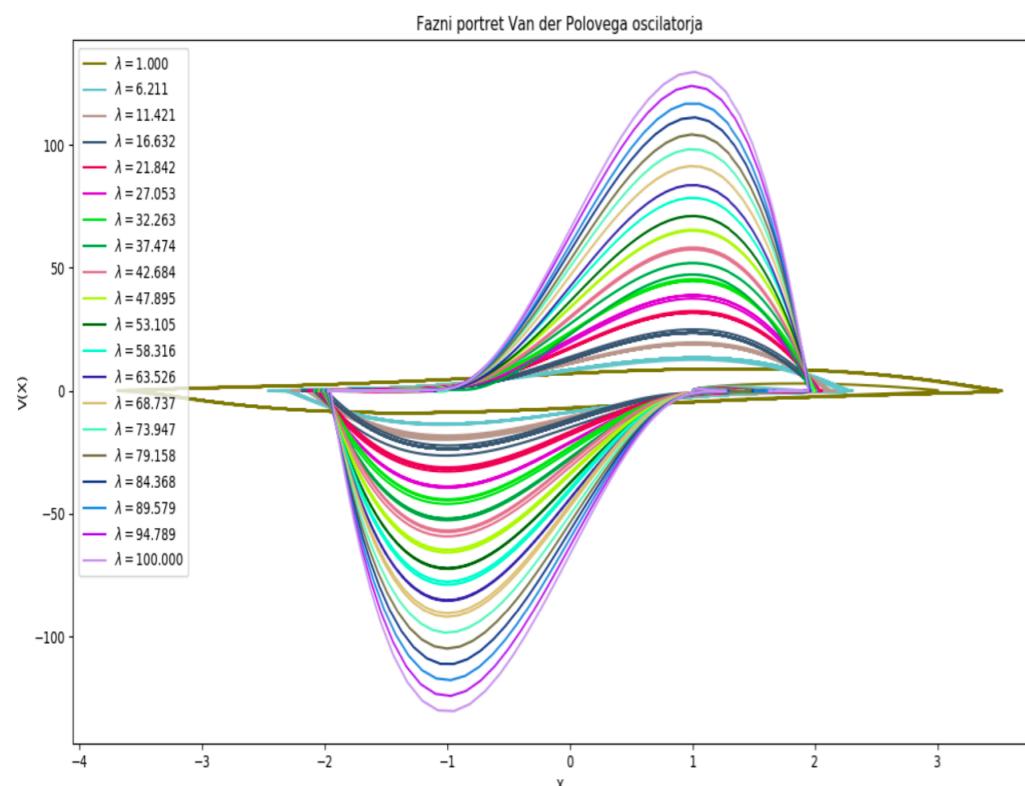
BRAVO!



Slika 12: Fazni portret van der Polovega oscilatorja, $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$. $t \in [0, 20]$ za $\lambda = 1$ in $t \in [0, 1000]$ za $\lambda = 100$.



Slika 15: Vse metode konvergirajo k limitnemu ciklu v faznem prostoru.



Slika 17: Izgleda, da je metodi uspelo zadeeti limitni cikel.



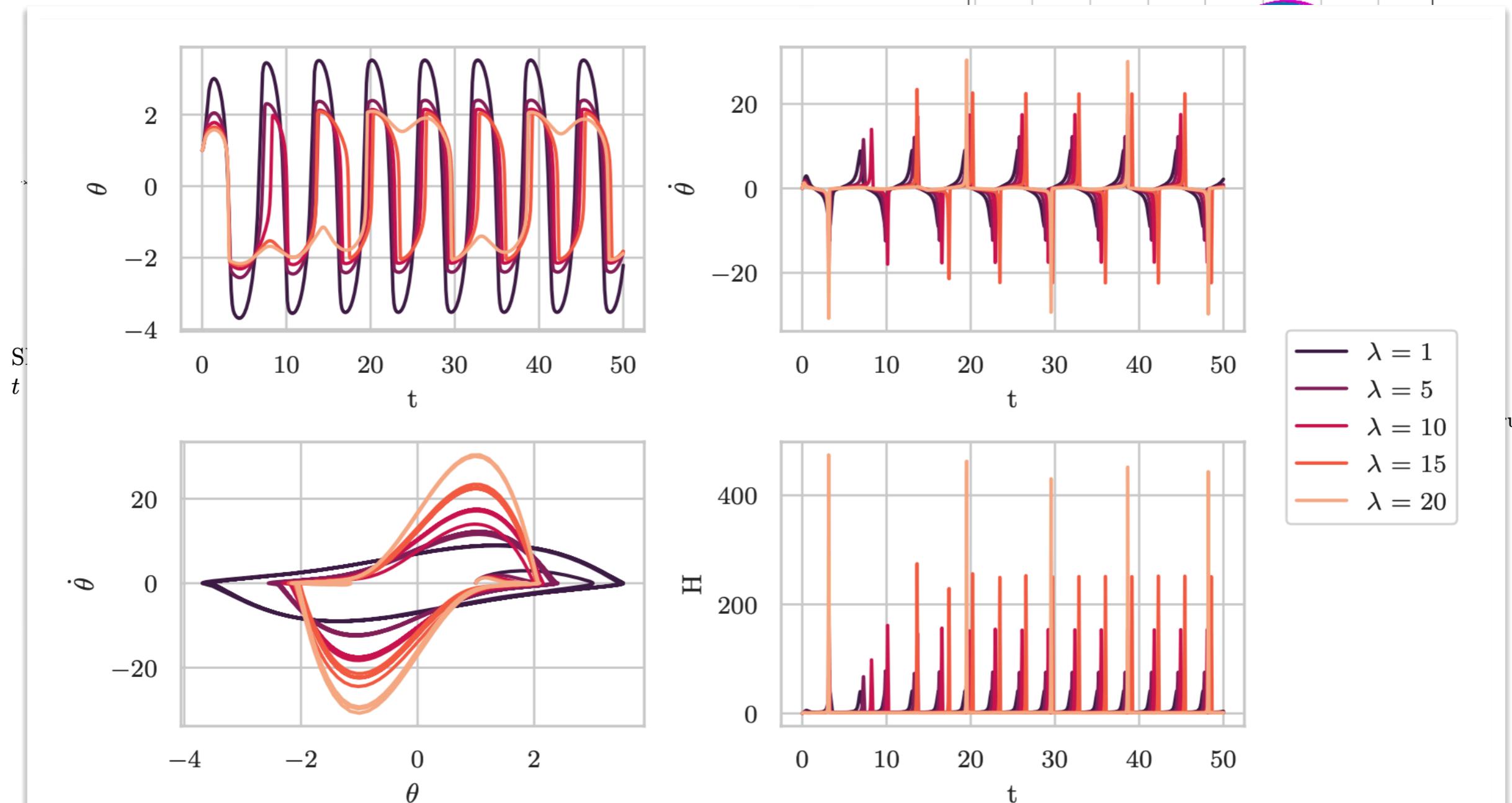
Van der Polov oscilator

- Lepi primeri

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} (1 - x^2) + x = v \cos \omega_0 t.$$

BRAVO!

Van der Polov oscilator $\omega_0 = 1$ $\lambda = 1$ $v = 10$ $T = 200$ $N = 10000$



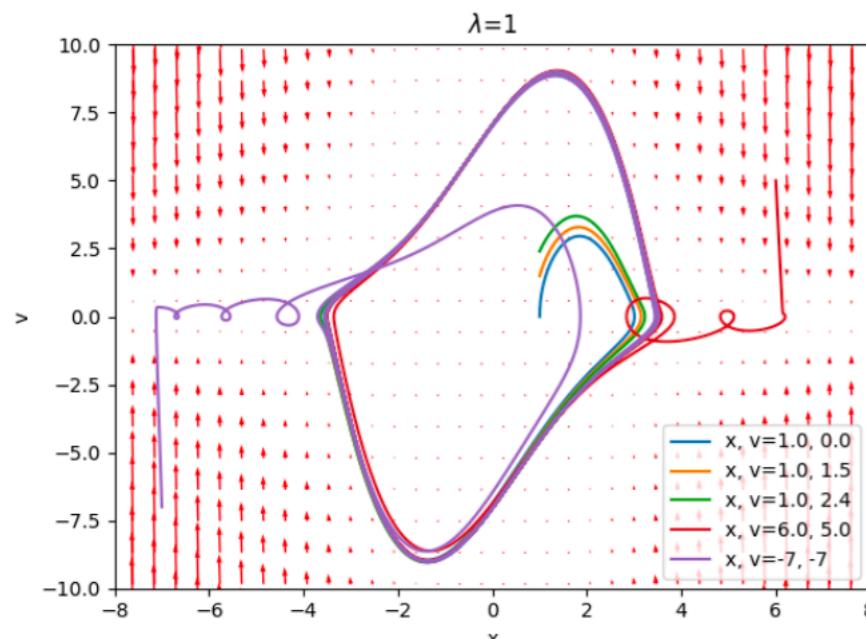
Slika 8: Dobimo značilen fazni diagram Van der Polovega oscilatorja, k izgleda zelo stabilno. Zgoraj: Lega in hitrost v odvisnosti od časa. Spodaj: fazni diagram in skupna energija sistema v odvisnosti od časa.



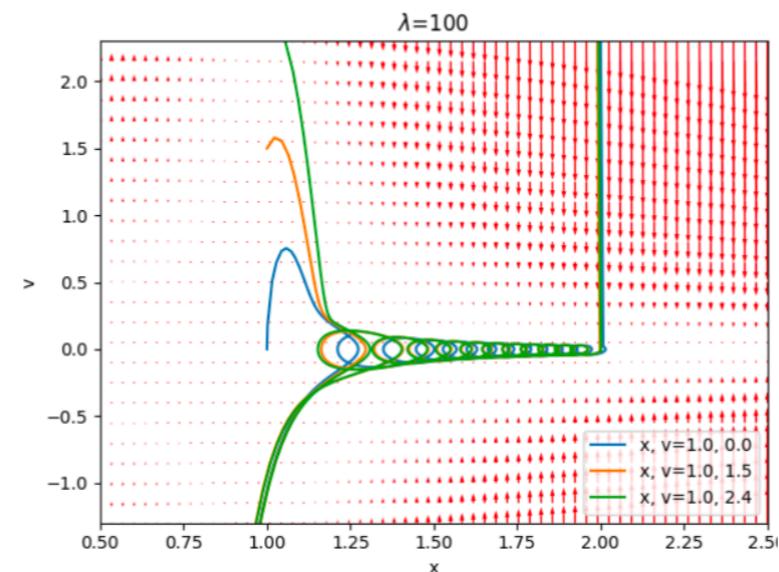
Van der Polov oscilator

- Lepi primeri

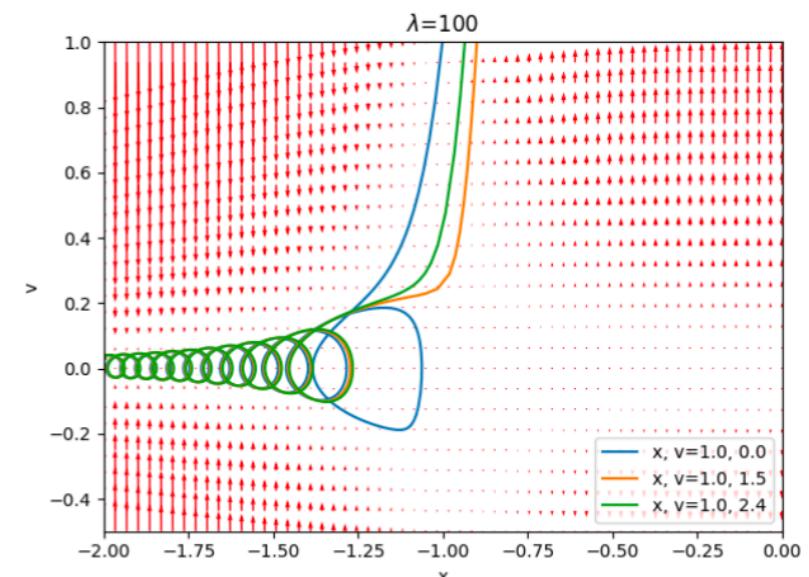
$$\frac{d^2x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} (1 - x^2) + x = v \cos \omega_0 t.$$



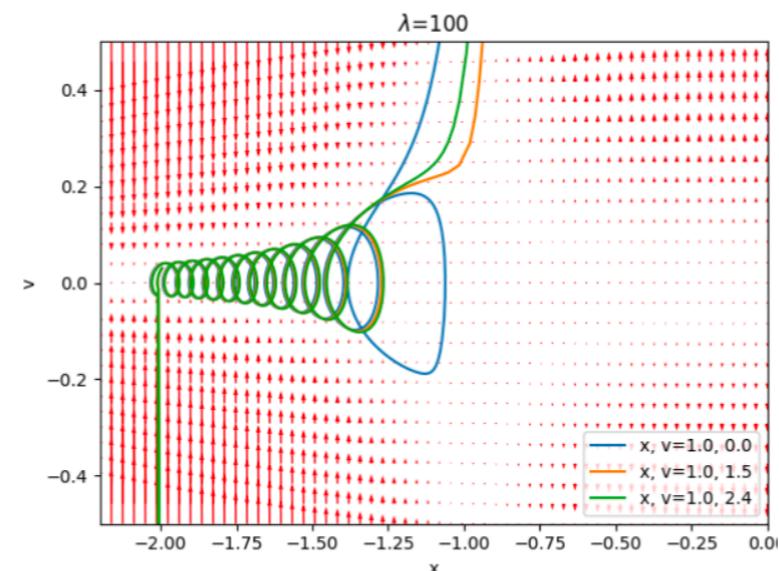
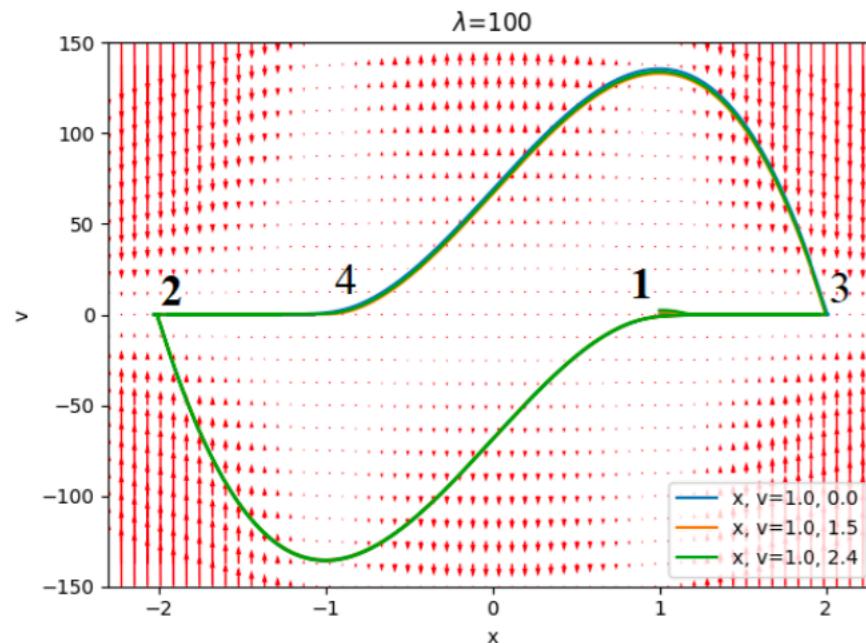
1. na začetku se spusti navzdol. (Ta del ki prihaja iz desne in gor je že prišel okoli). 3



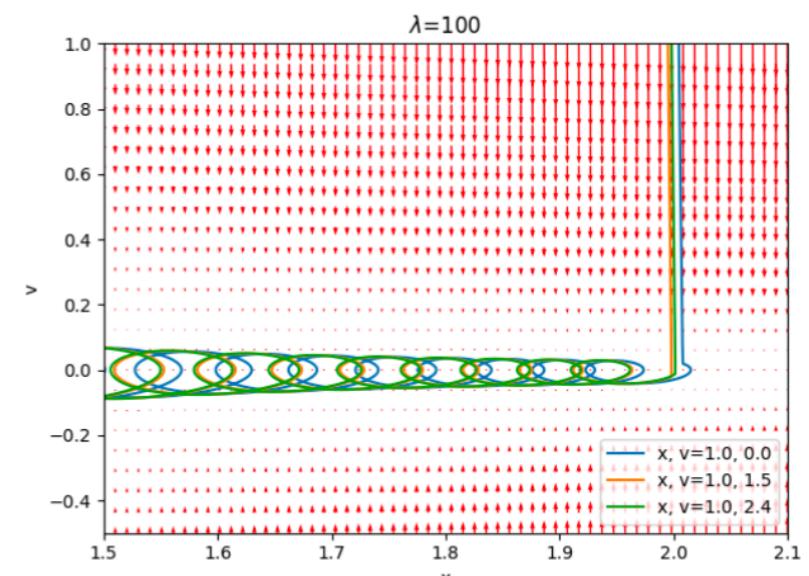
3. .



2. v vsakem kotu nastanejo majhne zanke



4.



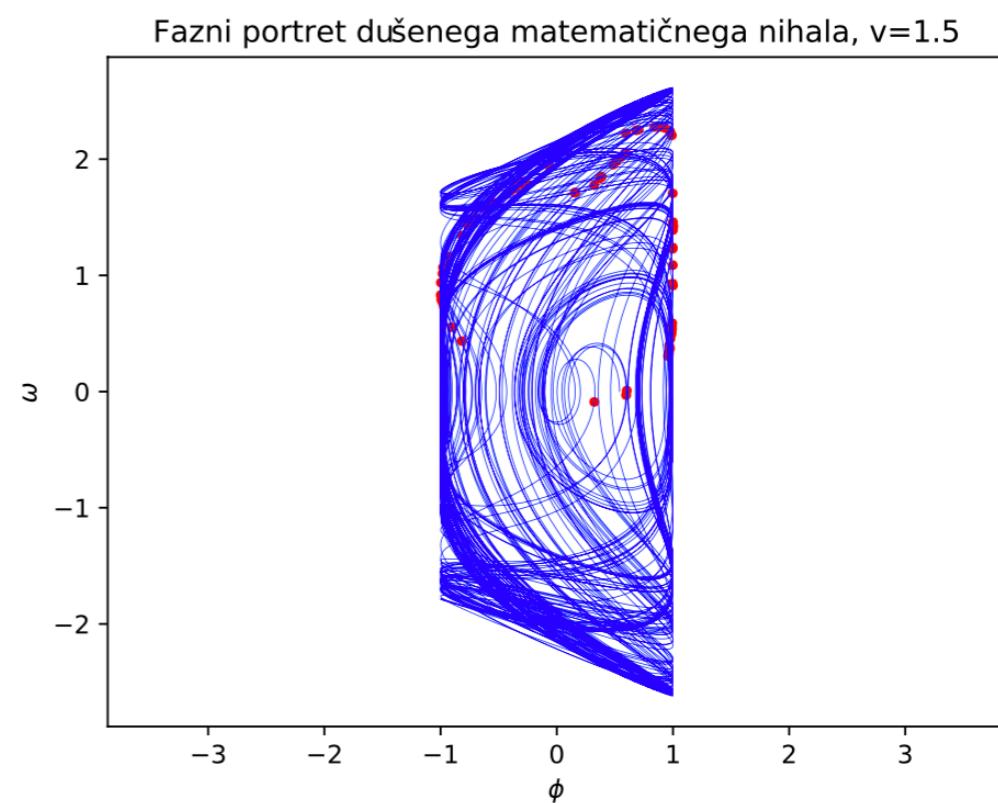
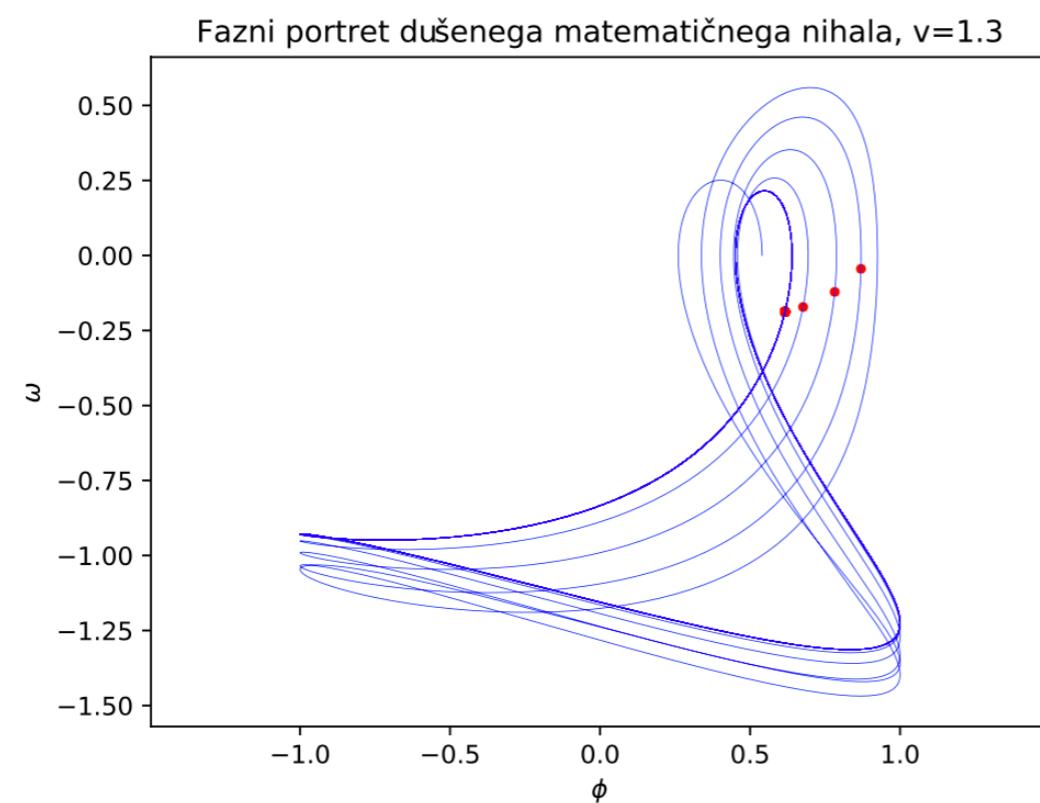
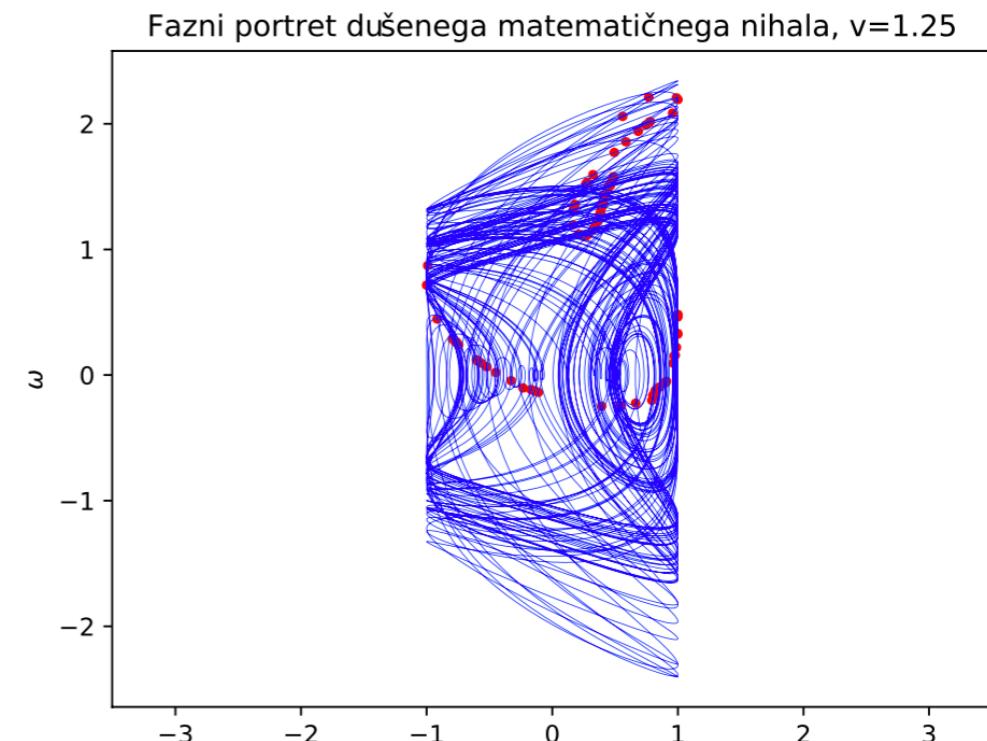
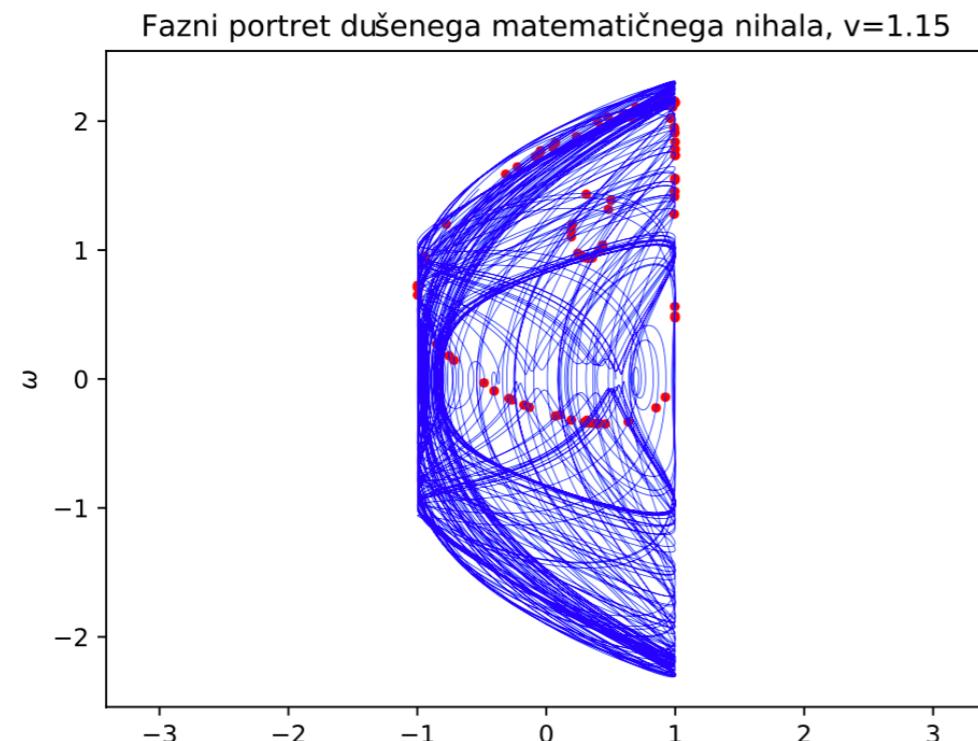


Na poti h kaosu...

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = v \cos \omega_0 t,$$

Slika 9: Fazni portreti pri različnih jakostih vzbujanja s Pointcarejevimi preseki - rdeče točke

BRAVO!



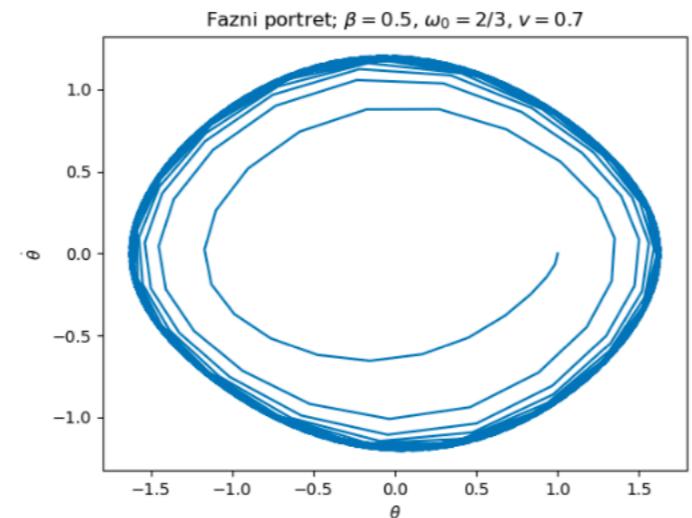


Na poti h kaosu...

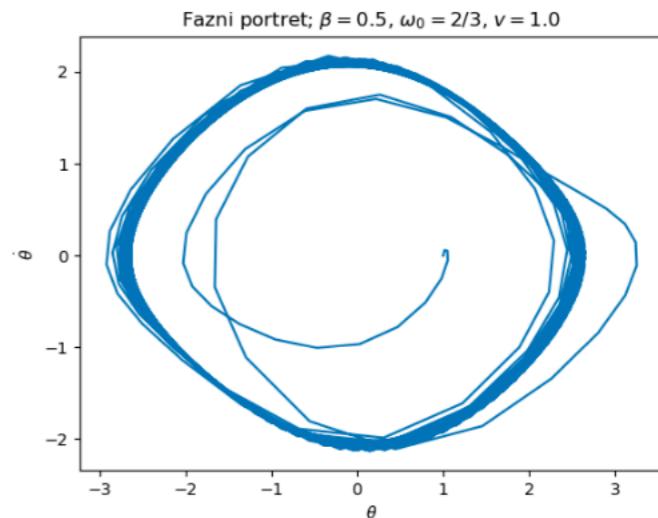
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = v \cos \omega_0 t,$$

Opazimo lahko naraščanje amplitude nihanja z večanjem amplitude vzbujanja, dokler ne zайдemo v območje kaosa. To si lahko pogledamo še na faznih portretih.

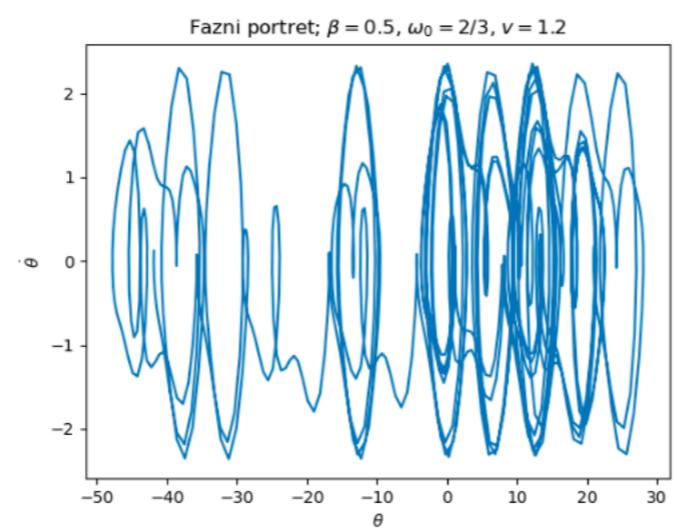
BRAVO!



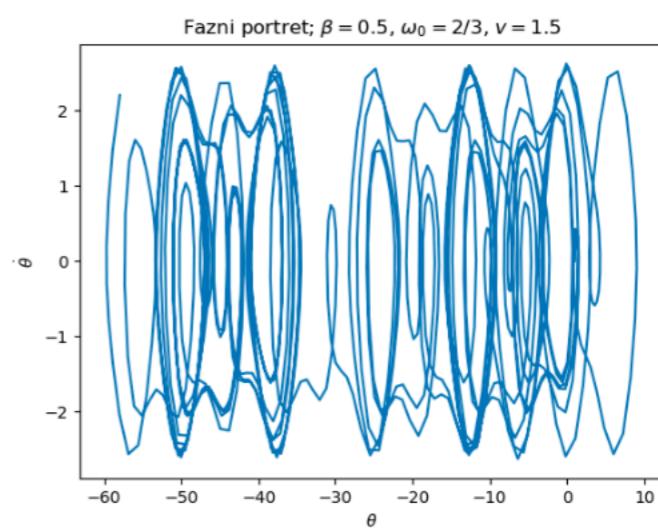
Slika 19: Fazni portret vzbujenega dušenega niha za $v = 0.7$ pri $\beta = 0.5$ in $\omega_0 = 2/3$.



Slika 20: Fazni portret vzbujenega dušenega niha za $v = 1.0$ pri $\beta = 0.5$ in $\omega_0 = 2/3$.



Slika 21: Fazni portret vzbujenega dušenega niha za $v = 1.2$ pri $\beta = 0.5$ in $\omega_0 = 2/3$.



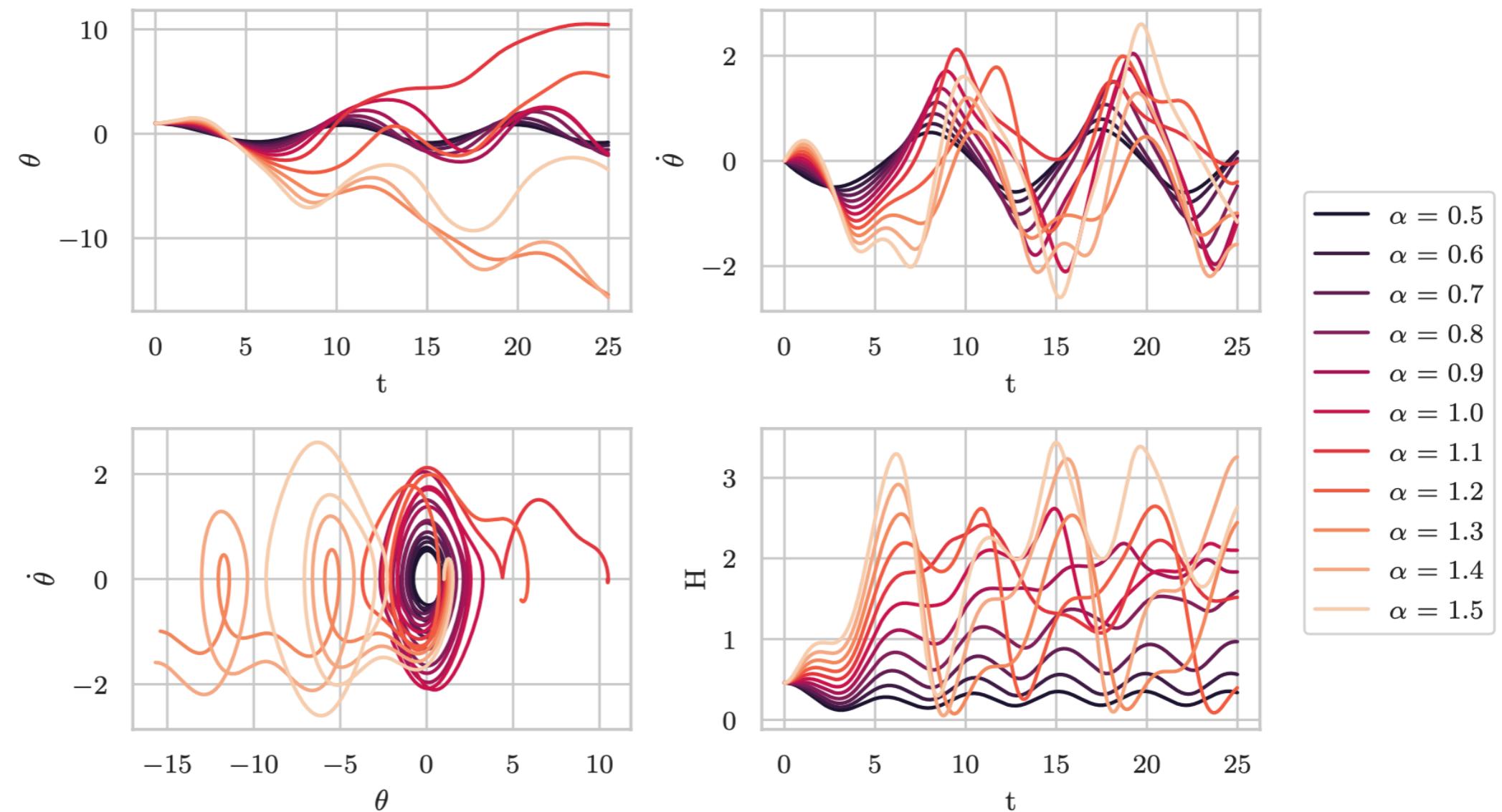
Slika 22: Fazni portret vzbujenega dušenega niha za $v = 1.5$ pri $\beta = 0.5$ in $\omega_0 = 2/3$.



Na poti h kaosu...

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = v \cos \omega_0 t ,$$

BRAVO!



Slika 7: Zgoraj: Lega in hitrost v odvisnosti od časa. Spodaj: fazni diagram in skupna energija sistema v odvisnosti od časa. Vsaka črta predstavlja pot za eno nihalo pri dani amplitudi vzbujanja (barva grafa se svetli z naraščanjem te amplitude).



Najlepsi fazni portreti

