



6. naloga - Enačbe hoda

Ma-Fi praktikum 2021/22



Enačbe hoda

- Ta naslov ne pomeni nič drugega kot **diferencialne enačbe prvega reda z ustreznim začetnim pogojem - torej problem DE z začetno vrednostjo.**
 - Po angleško Initial Value Problem (IVP).
 - **Popolnoma enake metode veljajo tudi za sisteme enačb prvega reda** - določene implementacije metod, npr. v Pythonu sprejmejo v isto funkcijo tako 1D skalarje kot multi-D vektorje ter vrnejo enako-dim. količino... (o tem še več prihodnji teden).

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 .$$

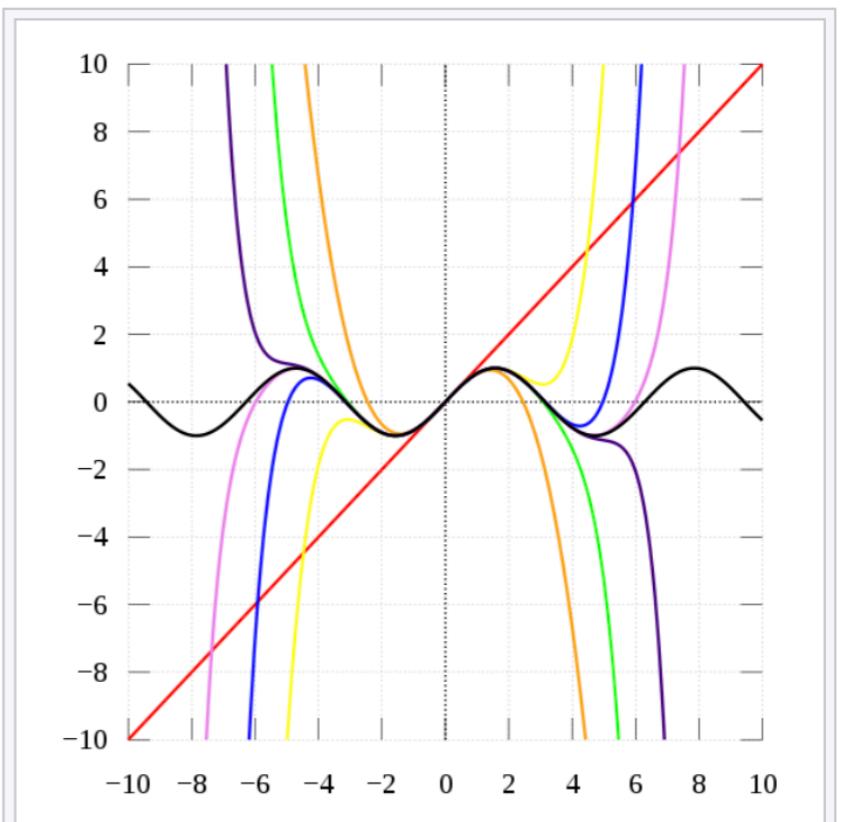
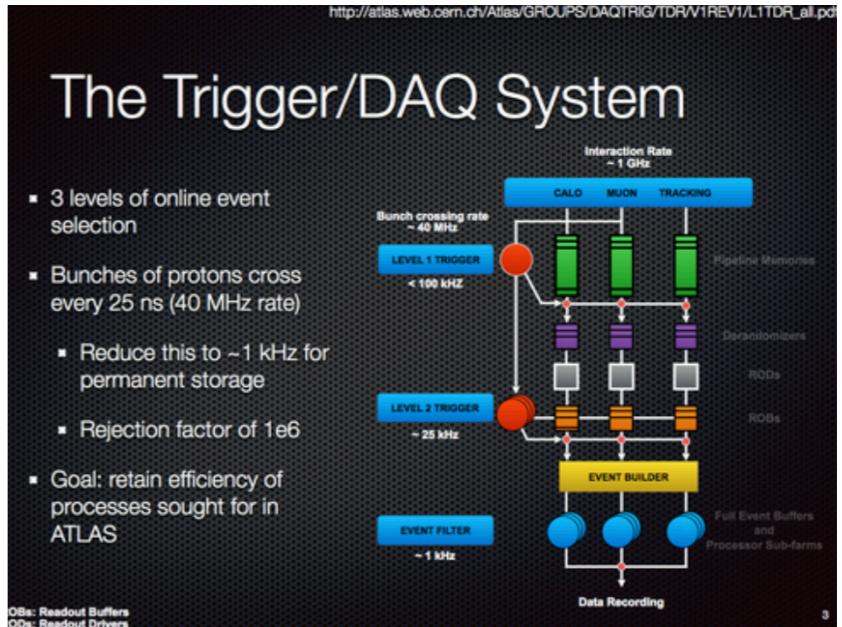
skalar ali vektor

- Tipično smo pri **analitičnem reševanju** takoj v škripcih, čim je desna definicija odvoda f odvisna tudi od vrednosti neznane funkcije y .
- **Numerično** ta problem rešimo z različnimi približki oz. metodami za oceno vrednosti funkcije y - **vsi problemi so zdaj obravnavani (rešeni) brez posebnega razmišljanja in z vnaprej določenimi metodami...**

Izbira ustrezne numerične metode



- Pri izbiri numerične metode, ki je najboljša za naš problem, moramo biti pozorni na:
 - Časovno zahtevnost - rabimo hitro ali natančno metodo?**
 - Npr. v nekem prožilnem sistemu za zajem podatkov, je hitrost pomembnejša od (velike) natančnosti.
 - Natančnost - kako dobro metoda lahko opiše iskano funkcijo?**
 - Če si pomagamo s Taylorjevim razvojem v vrsto, se lahko vprašamo do katerega reda je metoda točna (zna točno rešitev za premico, parabolo, polinom do 4. reda...?)
 - Stabilnost metode - kako pogosto nam metoda 'zbezlia'?**
 - Lahko dobimo na primer zelo napačne rezultate, če si slabo izberemo velikost koraka?
 - Število vrednotenj (evaluacij) funkcije f .**
 - To je lahko zelo draga operacija, če je sama funkcija f rezultat neke numerične procedure (npr. integracije, minimizacije ...)



As the degree of the Taylor polynomial rises, it approaches the correct function. This image shows $\sin x$ and its Taylor approximations, polynomials of degree 1, 3, 5, 7, 9, 11, and 13.

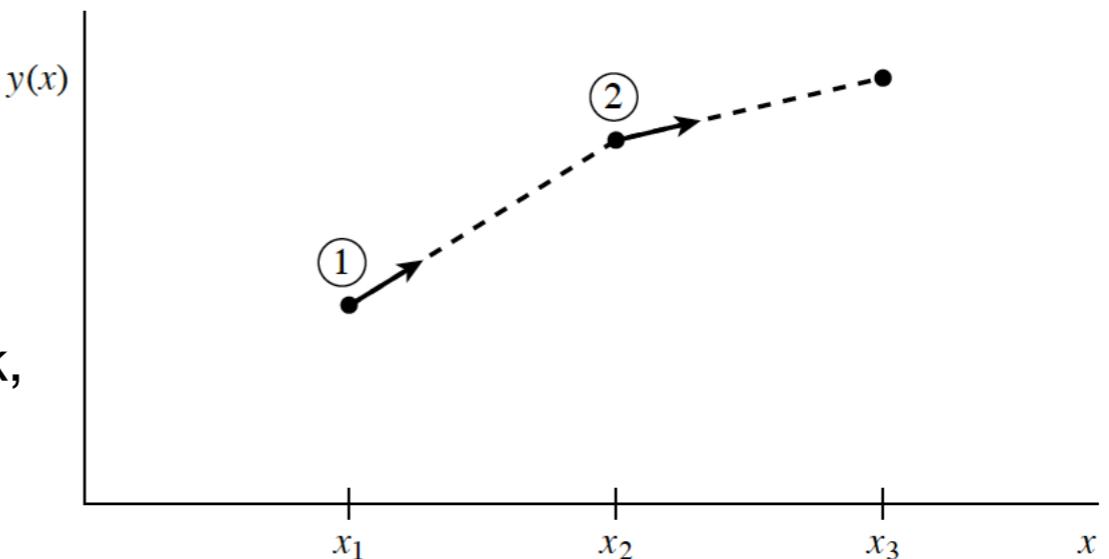


Eulerjeva metoda

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Poglejmo si najpreprostejšo metodo.
 - Izberemo si **enakomerno mrežo točk s korakom h :**
- $$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots N$$
- $$Y_i = y(x_i)$$
- Vpeljemo dva približka:
 - Odvod na desni strani enačbe **izvrednotimo kar v začetni točki**. $f(x, y) \rightarrow f(x_i, Y_i)$
 - Odvod na levi aproksimiramo s **končno diferenco**:
- $$y'(x) \rightarrow \frac{Y_{i+1} - Y_i}{h}$$
- ... in dobimo Eulerjevo metodo:

$$Y_{i+1} = Y_i + h f(x_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$$



- **Očitno:**
 - potrebujemo eno vrednotenje f na korak,
 - metoda bi točno rešila enačbo premice.



Eulerjeva metoda

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Kako je torej z **natančnostjo Eulerjeve metode?**

$$Y_{i+1} = Y_i + h f(x_i, Y_i) \quad Y_0 = y_0$$

- Če bi metoda točno rešila premico, ne pa tudi parbole, potem bi bila - glede na Taylorjev razvoj - **napaka pri enem koraku (najmanj) reda h^2** - večja kot je potenca, manjša je napaka...
 - Temu rečemo tudi **lokalna napaka, označimo z $O_{\text{lok.}}(h^2)$.**
- V našem reševanju pa naredimo N korakov, kjer je njihovo število obratno sorazmerno z velikostjo koraka:

$$N = \frac{b - a}{h}$$

- Po N narejenih korakih se lokalne napake seštejejo v **globalno napako O_g , ki je za en red slabša (pri vseh metodah)!**

$$O_g = N \times O_{\text{lok.}}(h^2) \sim \frac{1}{h} \times h^2 = O_g(h)$$

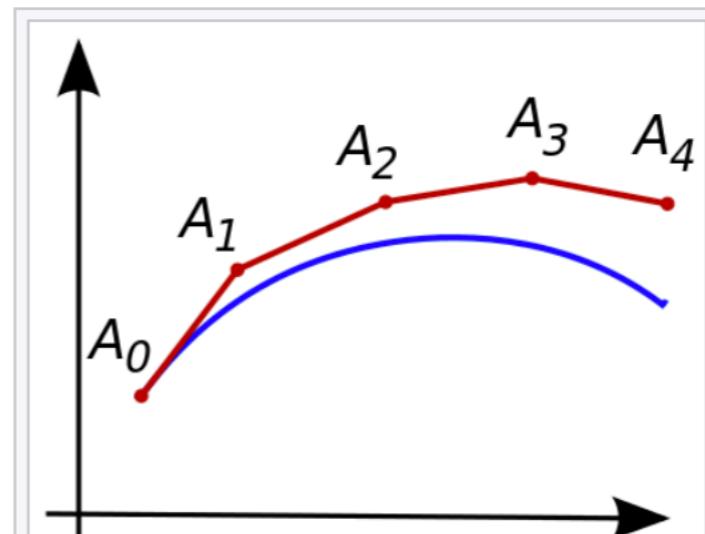


Illustration of the Euler method. The unknown curve is in blue, and its polygonal approximation is in red.

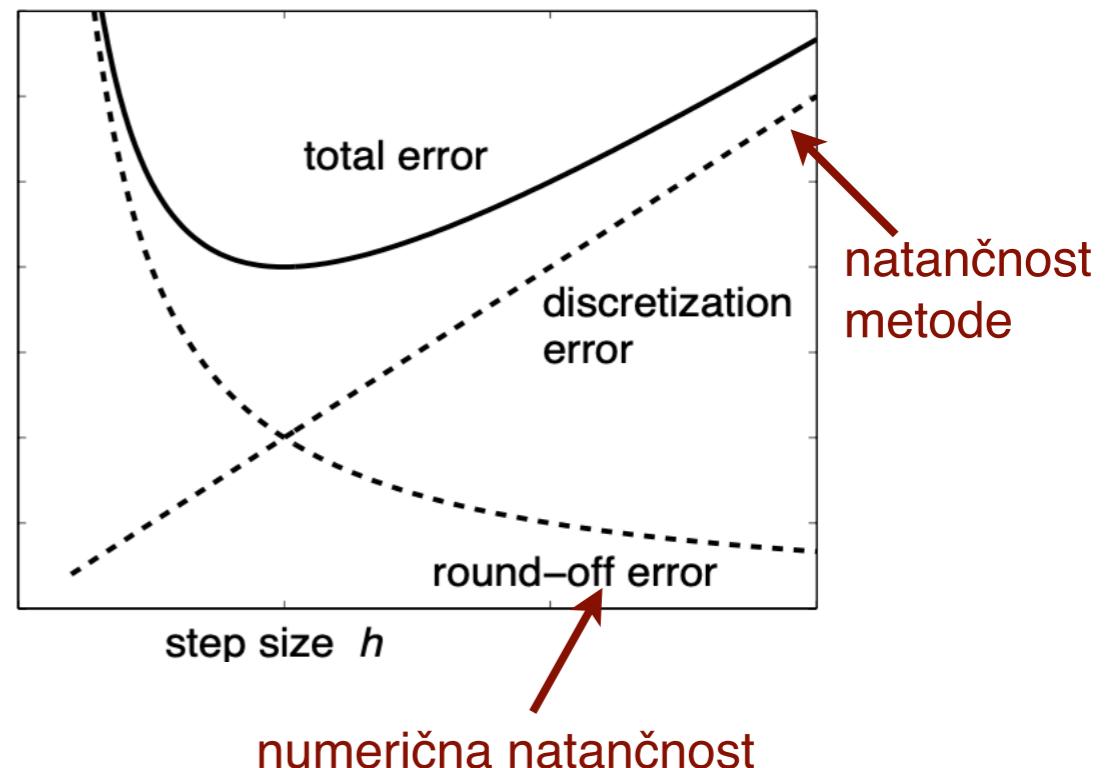


Velikost koraka

- Seveda, glede na te ugotovitve, **je manjši korak vedno boljši:**
 - Tako kot pri numerični integraciji... pač potrebnih več korakov do cilja.
 - Vendar pa je treba paziti tudi na **končno natančnost računanja!**
 - Koraki 10^{-10} najverjetneje niso smiseln pri običajni natančnosti....
 - **Obstaja optimalna vrednost koraka h**

Moral:

Decreasing the step size of the difference equation does not always result in the increased accuracy of the obtained solution.





Heunova metoda

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

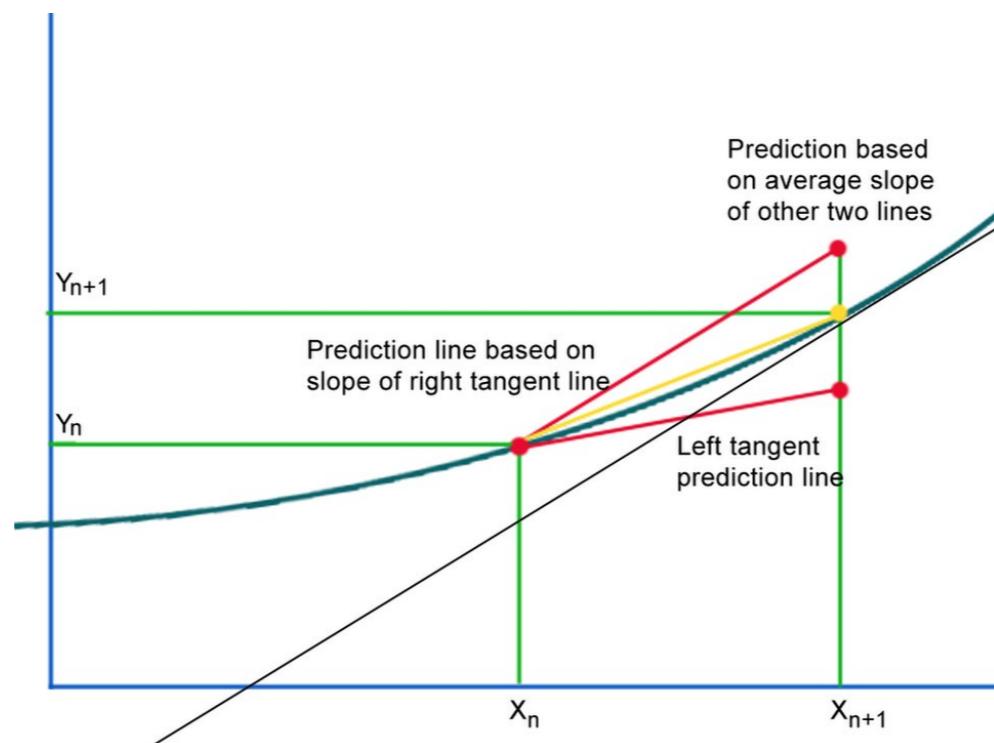
- Poznana tudi kot **Modificirana Eulerjeva metoda.**

vmesni približek →

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0, \\ \bar{Y}_{i+1} &= Y_i + h f(x_i, Y_i), \\ Y_{i+1} &= Y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, Y_i) + f(x_{i+1}, \bar{Y}_{i+1})) \end{aligned}$$

popravljena ocena odvoda

- Izboljšava z boljšo oceno odvoda **s povprečjem**.
- Alternativna interpretacija kot pristop k reševanju **implicitne sheme (iteracije!)**.
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





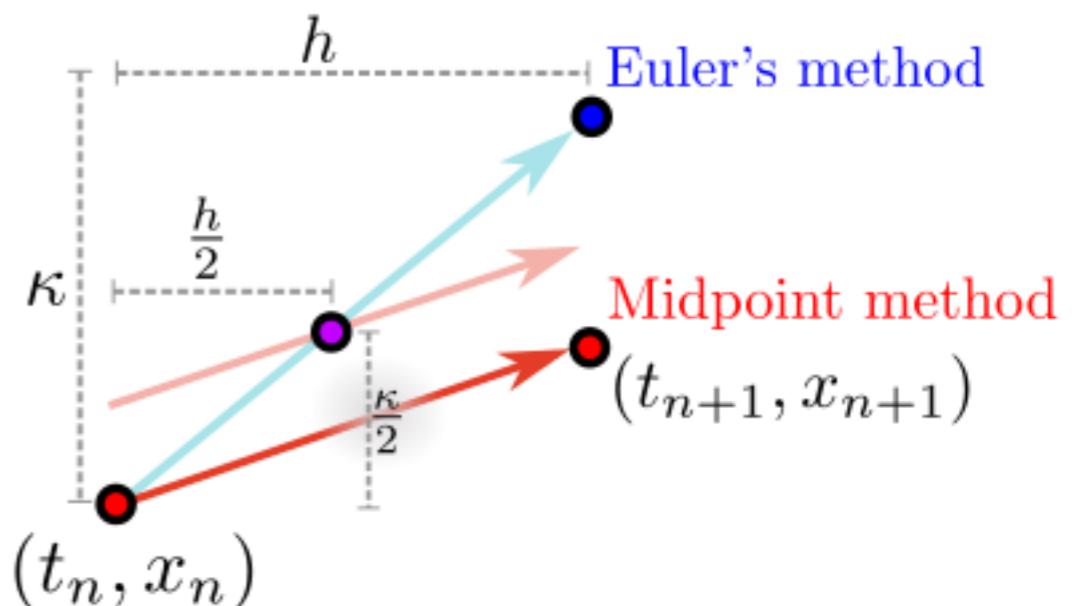
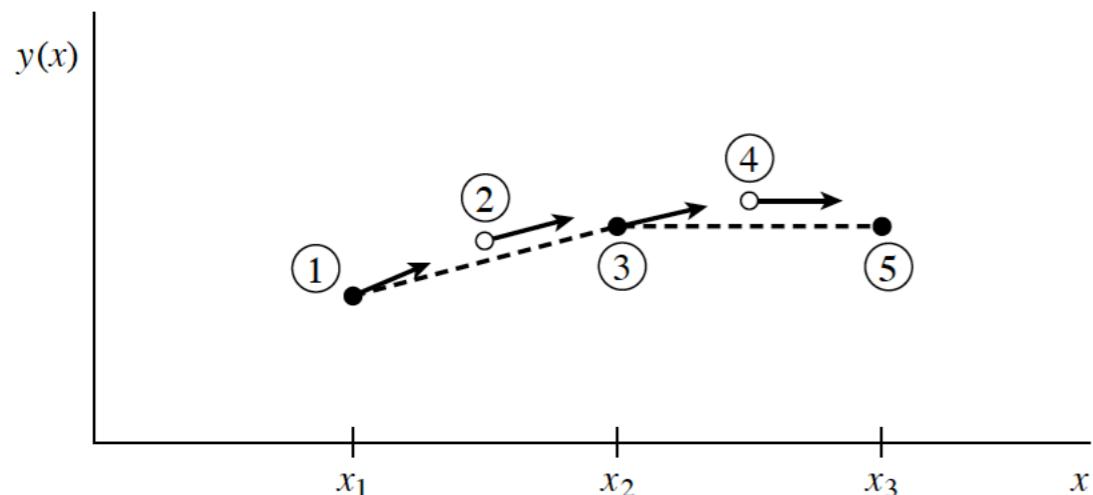
Midpoint metoda

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke...**

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0, \\ \text{vmesni približek } \rightarrow \quad Y_{i+\frac{1}{2}} &= Y_i + \frac{h}{2} f(x_i, Y_i), && \text{popravljena ocena odvoda} \\ Y_{i+1} &= Y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

- Izboljšava z oceno odvoda na **sredi intervala enega koraka**.
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





Metode tipa Runge-Kutta

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Carl Runge - fizik
Martin Kutta - matematik

Nemčija, okrog 1900

- V to kategorijo pade že Midpoint metoda, **najbolj uporabljana pa je metoda Runge-Kutta 4. reda - klasična (kanonična) Runge-Kutta metoda.**

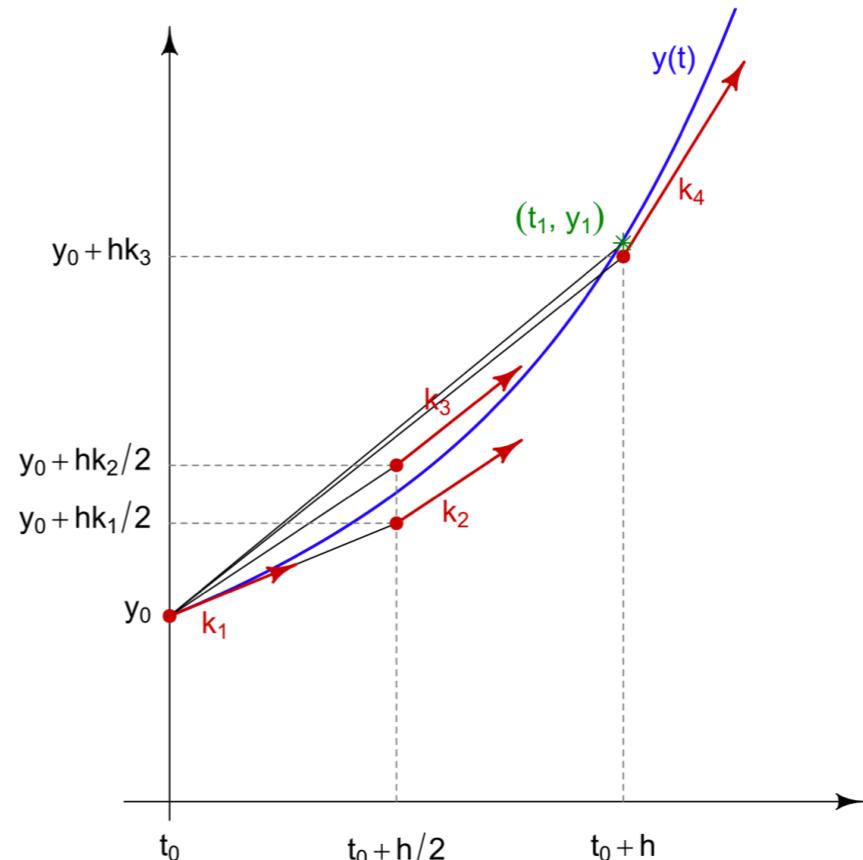
$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

$$k_1 = hf(x_i, Y_i),$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, Y_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, Y_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, Y_i + k_3).$$



- Izboljšava z zaporednimi približki odvodov, ni pa intuitivne razlage...
 - Odvodi se računajo v treh točkah, vmesna je na sredini intervala...
- Ima **globalno napako $O_g(h^4)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo polinoma 4. reda!
- Potrebujemo štiri vrednotenja f na korak - kar je za ta red natančnosti malo!



Kako pridemo do teh formul?

- Izpeljava teh formul izhaja iz Taylorjeve vrste.
 - Za zgled vzemimo izpeljavo Midpoint metode (RK 2. reda). Začnimo z nastavkom:

$$Y_{n+1} = Y_n + h f \left(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + hB \right)$$

izberemo korak  neznani parameter 

in razvijemo funkcijo po Taylorju:

$$Y_{n+1} = Y_n + h f(x_n, Y_n) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, Y_n) \frac{h^2}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, Y_n) B h^2$$

- Primerjamo z direktnim Taylorjevim razvojem do 2. reda:

$$Y_{n+1} = Y_n + h Y'_n + \frac{h^2}{2} Y''_n = Y_n + h f(x_n, Y_n) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, Y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n, Y_n) f(x_n, Y_n) \right)$$

↑ ↑ ↑
 $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x)$ $y'(x) = f(x, y)$ $y'' = \frac{df(x, y)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$

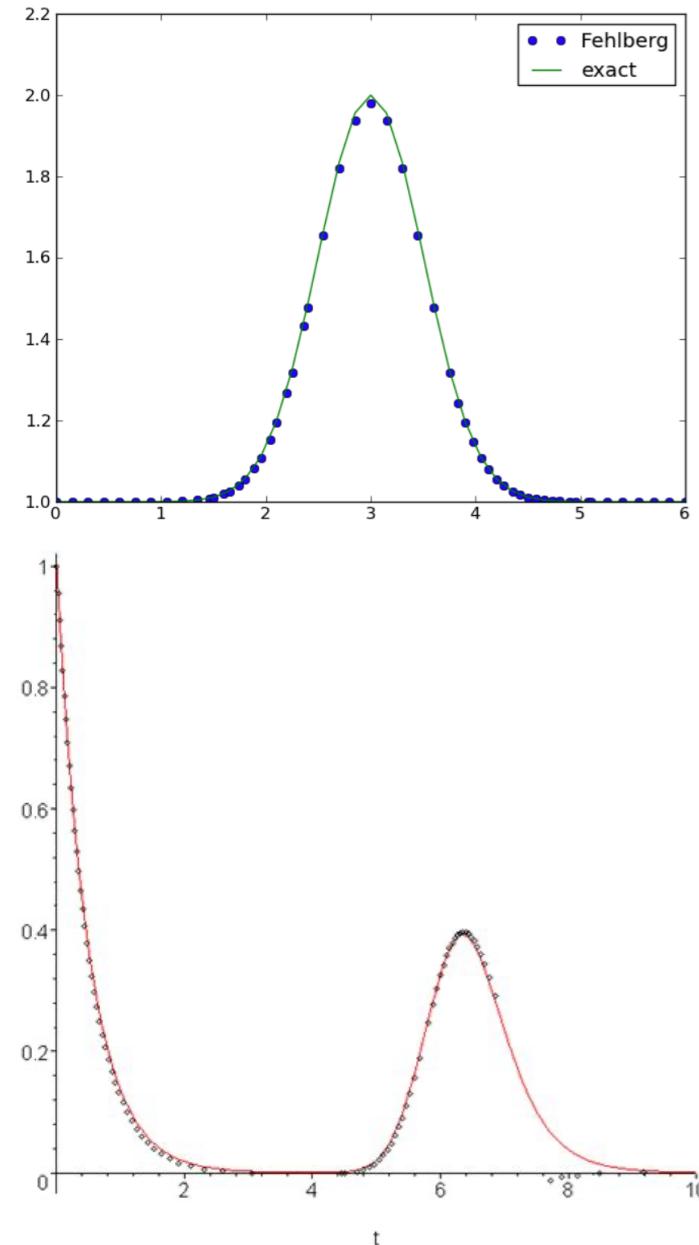
- S primerjavo dobimo $B = \frac{f(x_n, Y_n)}{2}$... itd, ipd ...



Runge-Kutta-Fehlberg

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Do sedaj smo se ukvarjali z metodami s **fiksno velikostjo koraka**. Gotovo pa to ni vedno optimalno.
 - Runge-Kutta-Fehlberg je razširitev R-K metode 4. reda s **prilagodljivim (adaptivnim) korakom**.
 - **Korak se prilagaja ciljni natančnosti**, odstopanje od le-te (torej **ocena napake**) se izračuna kot **razlika med napovedjo R-K 4. reda in R-K 5. reda**.
 - S pametno izbiro točk se lahko postopek poenostavi na samo šest vrednotenj f na korak!



$$\begin{aligned}
 Y_{i+1}^{[4]} &= Y_i + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right), \\
 Y_{i+1}^{[5]} &= Y_i + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right); \\
 k_1 &= hf(x_i, Y_i), \\
 k_2 &= hf\left(x_i + \frac{1}{4}h, Y_i + \frac{1}{4}k_1\right), \quad \text{drugačna izbira korakov kot klasični RK!} \\
 k_3 &= hf\left(x_i + \frac{3}{8}h, Y_i + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right), \\
 k_4 &= hf\left(x_i + \frac{12}{13}h, Y_i + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right), \\
 k_5 &= hf\left(x_i + h, Y_i + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right), \\
 k_6 &= hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, Y_i - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)
 \end{aligned}$$



Runge-Kutta-Fehlberg

$$Y_{i+1}^{[4]} = Y_i + \left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \right),$$

$$Y_{i+1}^{[5]} = Y_i + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \right);$$

- Napako torej lahko ocenimo z $\epsilon_i = |Y_{i+1}^{[5]} - Y_{i+1}^{[4]}|$
- Za velikost koraka lahko izberemo **korekcijski faktor**:

$$s = \left(\frac{\epsilon_{\text{tol}}}{2|Y_{i+1}^{[5]} - Y_{i+1}^{[4]}|} \right)^{1/4} \approx 0.84 \left(\frac{\epsilon_{\text{tol}}}{|Y_{i+1}^{[5]} - Y_{i+1}^{[4]}|} \right)^{1/4}$$

$$h_{\text{new}} = s \cdot h$$

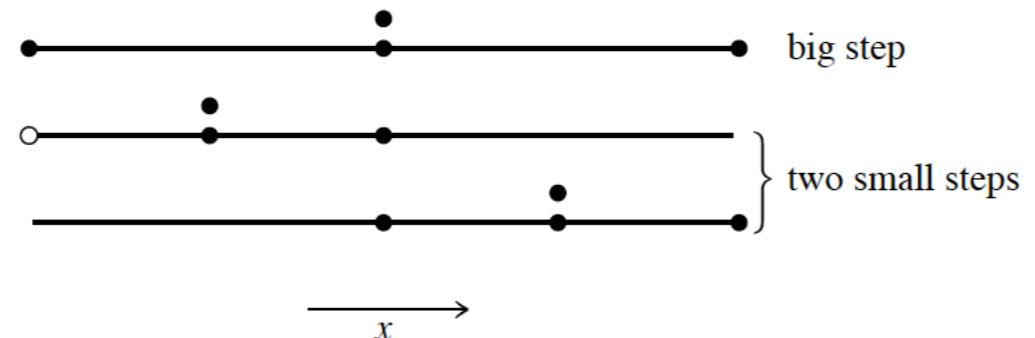
- Primerjajmo sedaj napako z dovoljeno napako ϵ_{tol} :
 - če je pogoj $\epsilon_i < \epsilon_{\text{tol}}$ izpolnjen, izberemo za novo točko $Y_{i+1} = Y_{i+1}^{[5]}$ kot boljšo oceno.
 - V nasprotnem primeru račun ponovimo z novo velikostjo koraka.

Predstavljene so seveda samo osnovne metode, vseh izvedb ogromno!



Splošni pristop k oceni napak

- Splošni pristop k oceni lokalne napake metode je uporaba polovičnih korakov.



- Ideja je dovolj preprosta: če je lokalna napaka reda q : $\mathcal{O}_{\text{lok}}(h^q) \sim h^q$, je razlika pri dveh polovičnih korakih ($2^*h/2$) namesto enega (h):

ocena pri koraku $h \rightarrow Y_h = y(x + h) + \mathcal{O}_{\text{lok}}(h^q) = y(x + h) + Ch^q$

$$Y_{h/2} = y(x + h) + 2\mathcal{O}_{\text{lok}}((h/2)^q) = y(x + h) + 2 \cdot C \left(\frac{h}{2}\right)^q$$

prava vrednost

- Iz tega lahko izrazimo oceno za lokalno napako:

$$\mathcal{O}_{\text{lok}}(h^q) = \frac{Y_h - Y_{h/2}}{1 - 2^{-q+1}}$$

Smiselno dodati tudi absolutno vrednost....



Butcherjeve tabele

- Kompakten zapis metod **tipa Runge-Kutta!**

$$Y_{n+1} = Y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

$$k_1 = f(x_n, Y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, Y_n + h(a_{21} k_1))$$

$$k_3 = f(x_n + c_3 h, Y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))$$

\vdots

$$k_s = f(x_n + c_s h, Y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \cdots + a_{s,s-1} k_{s-1}))$$

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s

Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array} \quad Y_{n+1} = Y_n + h f(x_n, Y_n)$$

Midpoint

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \quad Y_{n+1} = Y_n + h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{2}h f(x_n, Y_n)\right)$$

- Adaptivna razširitev (npr Runge-Kutta-Fehlberg):

$$Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s b_i^* k_i$$

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s (b_i - b_i^*) k_i$$

$$h_{\text{new}} = 0.84 \left(\frac{\varepsilon_{\text{tol}}}{|\varepsilon_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{4}} h_{\text{old}}$$

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s
	b_1^*	b_2^*	\cdots	b_{s-1}^*	b_s^*



RKF Butcherjeva tabela

$$Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s b_i^* k_i$$

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s (b_i - b_i^*) k_i$$

$$h_{\text{new}} = 0.84 \left(\frac{\varepsilon_{\text{tol}}}{|\varepsilon_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{4}} h_{\text{old}}$$

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s
	b_1^*	b_2^*	\cdots	b_{s-1}^*	b_s^*

The Runge–Kutta–Fehlberg method has two methods of orders 5 and 4. Its extended Butcher tableau is:

0					
1/4	1/4				
3/8	3/32	9/32			
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197		
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104	
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5
					2/55



RK Merson metoda in tabela

- Obstaja še ena podobna metoda: R.H. Merson (An operational method for the study of integration processes, Proc. Symp. Data Processing, Weapons Research Establishment, Salisbury, Australia, 1957, pp 110-125)

$$Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s b_i^* k_i$$

$$\varepsilon_{n+1} = Y_{n+1} - Y_{n+1}^* = Y_n + h \sum_{i=1}^s (b_i - b_i^*) k_i$$

0					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots		\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\cdots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\cdots	b_{s-1}	b_s
	b_1^*	b_2^*	\cdots	b_{s-1}^*	b_s^*

$$k_1 = h f(x_n, Y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{3}h, Y_n + \frac{1}{3}k_1\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{1}{3}h, Y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2\right)$$

$$k_4 = h f\left(x_n + \frac{1}{2}h, Y_n + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_3\right)$$

$$k_5 = h f\left(x_n + h, Y_n + \frac{1}{2}k_1 - \frac{3}{2}k_3 + 2k_4\right)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_4 + \frac{1}{6}k_5$$

$$Y_{n+1}^* = Y_n + \frac{1}{10}k_1 + \frac{3}{10}k_3 + \frac{2}{5}k_4 + \frac{1}{5}k_5$$

0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$		
1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	2	
$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	

- Z elegantno oceno za napako:

$$\mathcal{O}_{\text{lok}}(h^5) = \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{30} (k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$$



Metode tipa prediktor-korektor

- Posebna kategorija metod so tudi **metode prediktor-korektor (P-C)**. Najbolj znana je **Adams-Bashfort-Moulton metoda**.
 - Tudi **Heunova metoda** je že metoda tipa P-C!
- **Adams-Bashfort prediktor:** ekstrapolacija ('fit') polinoma 4. reda iz štirih točk, dobimo oceno (**prediktor**) za naslednjo točko.
 - V prvem koraku to pomeni, da je ena točka začetna vrednost, ostale tri pa določimo npr s tremi koraki klasične R-K metode.
 - Zaradi kompaktnosti je interpolacija napisana samo z vrednostmi f , torej odvodov v danih točkah:

$$Y_{i+1}^p = Y_i + \frac{1}{24} h(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$$

- **Adams-Moulton korektor:** s pomočjo zgornje ocene za naslednjo točko izvrednotimo odvod v tej točki in izračunamo boljšo oceno nove točke (**korektor**).
 - Končna numerična integracija naše DE - **implicitna metoda (rešimo s prediktorjem ...)**.

$$Y_{i+1}^c = Y_i + \frac{1}{24} h(9f_{i+1}^p + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$$

- **Običajno**, potem še enkrat izračunamo tudi odvod v novi točki:

$$f_{i+1} = f_{i+1}^c = f(x_{i+1}, Y_{i+1}^c) \quad \text{Pred-Eval-Corr-Eval (PECE)}$$

- ... kar nam da samo dve vrednotenji f na korak ob natančnosti $O(h^4)$.



Stabilnost metod

- Pri **stabilnosti** ugotavljamo *podobnost rešitev*, ne pa njihovo *pravilnost*.
 - Predvidevamo, da se rešitve ne bodo divje spremajale pri razumnih spremembah parametrov metode (npr. velikosti koraka, zač. vrednosti)
 - **ne velja za kaotične sisteme....**
- Za preprost zgled si lahko pogledamo kar **eksponentno enačbo**:

$$\frac{dy}{dx} = k \cdot y$$

- **Eulerjeva metoda** nam da:

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + f(x_i, Y_i) \cdot h \\ &= Y_i + (k \cdot Y_i) \cdot h \\ &= (1 + kh) Y_i \end{aligned}$$

- ... oziroma, če začnemo v začetni točki z vrednostjo Y_0 in korakamo do točke n z vrednostjo Y_n :

$$Y_n = (1 + kh)^n Y_0$$



Stabilnost metod

- Poglejmo, kaj se zgodi za majhen premik začetne vrednosti: $\hat{Y}_0 = Y_0 + \varepsilon$
- Začetni premik se **sprehodi** skozi postopek Eulerjeve metode vse do:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_n &= (1 + kh)^n \hat{Y}_0 \\ &= (1 + kh)^n (Y_0 + \varepsilon) \\ &= Y_n + (1 + kh)^n \varepsilon\end{aligned}$$

- Mi seveda želimo, da je tudi končna variacija **majhna**, če naj bo **metoda stabilna**. Ta zahteva nam takoj pove, da mora biti:

$$\begin{aligned}|1 + kh| &< 1 \\ -1 < 1 + kh &< 1 \\ -2 < kh &< 0\end{aligned}$$

- Iz tega lahko izpeljemo tudi **splošen pogoj** za stabilnost Eulerjeve metode:

$$-2 < \frac{dy}{dx} \cdot h < 0$$



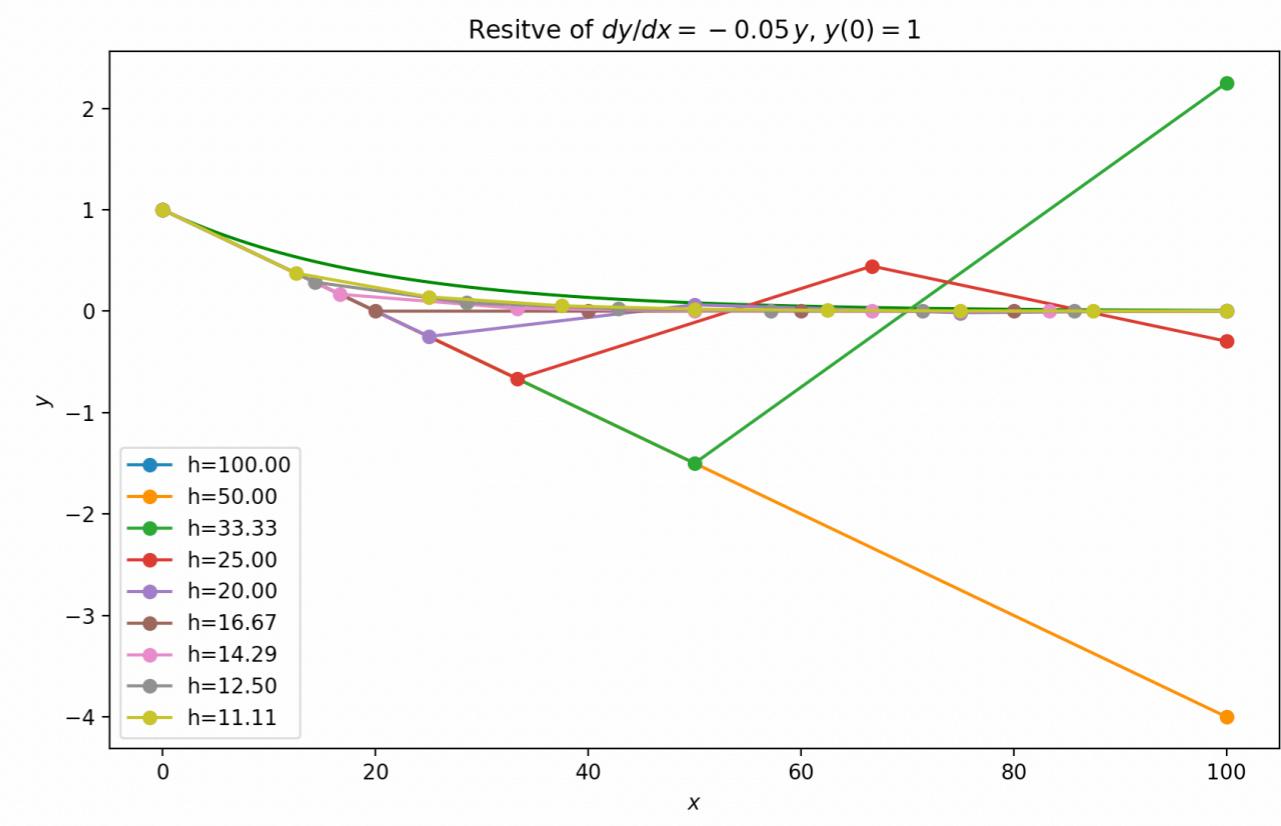
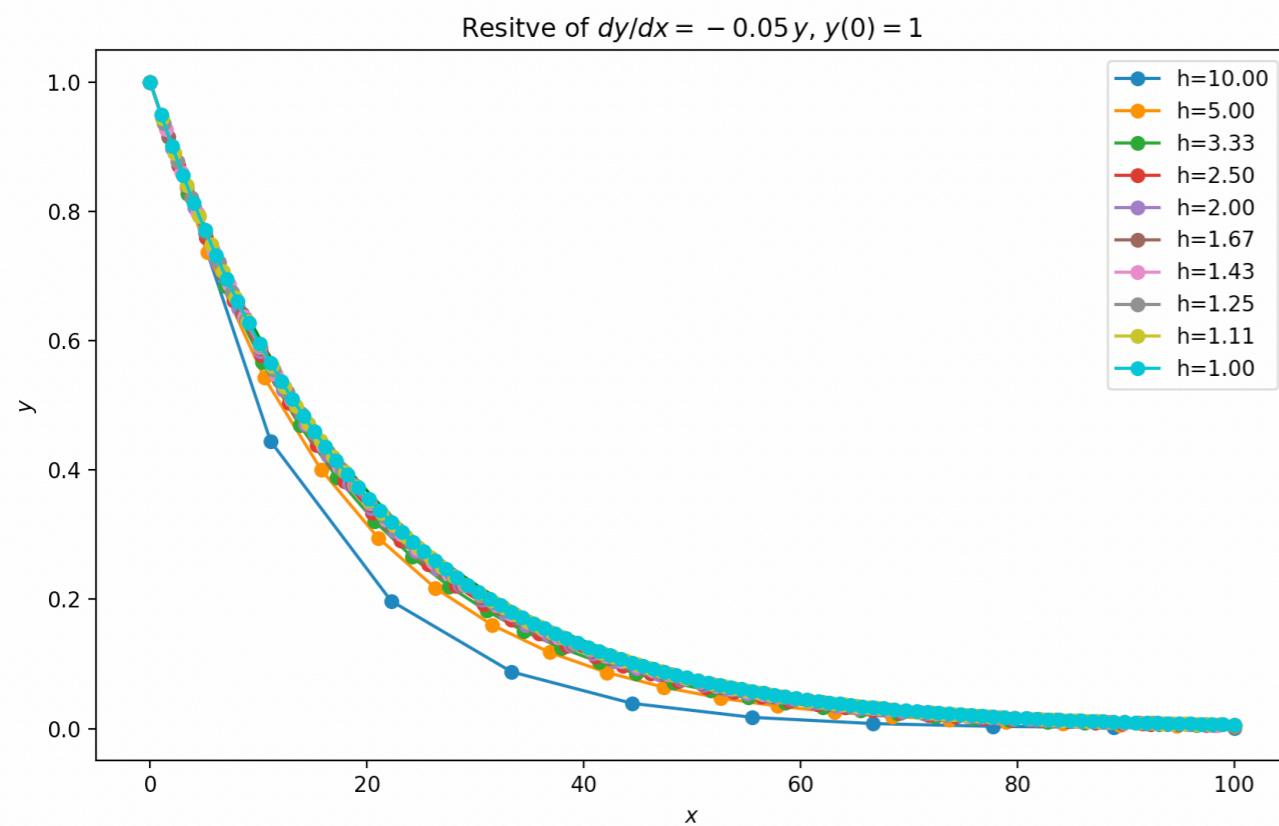
Stabilnost metod

- **Kako to zgleda v praksi:** za naš eksponentni primer rešitve za dovolj velik korak zbezljajo...

$$-2 < kh < 0$$

- Vedno imamo problem pri pozitivni vrednosti k - eksponentno **naraščanje** je težko modelirati!
- Pri negativni vrednosti (padajoč eksponent), je pač treba paziti na velikost koraka, pri prevelikem funkcija 'znori'.

$k = -0.05$ stabilnost: $h < 40$



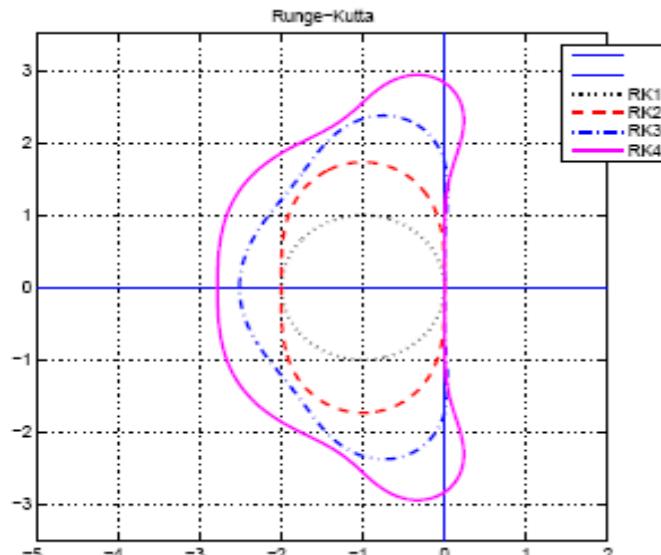


Stabilnost metod

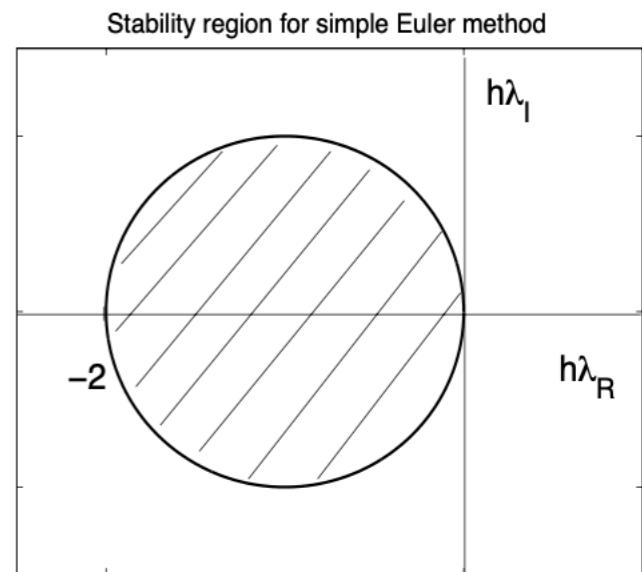
- Namesto v realnem lahko stabilnost gledamo tudi v kompleksnem prostoru argumentov - dobimo 'lepše' slike:

$$|1 + h\lambda| < 1 \implies |1 + h\lambda_R + ih\lambda_I| < 1$$

$$(1 + h\lambda_R)^2 + (h\lambda_I)^2 < 1$$

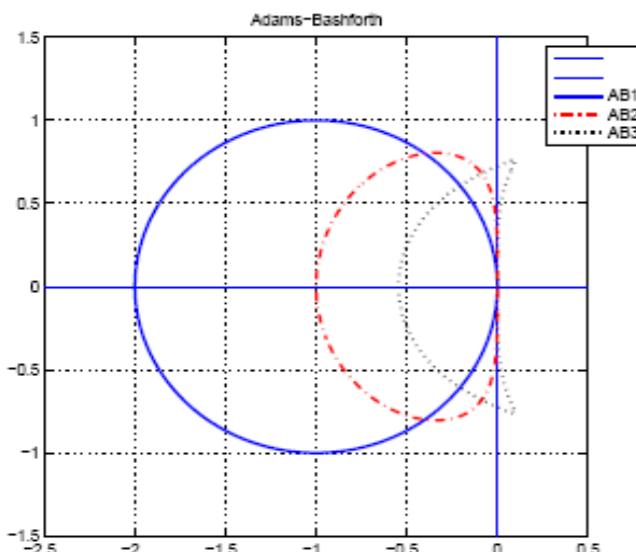


Stability region of Runge-Kutta methods increases with increasing order of method.

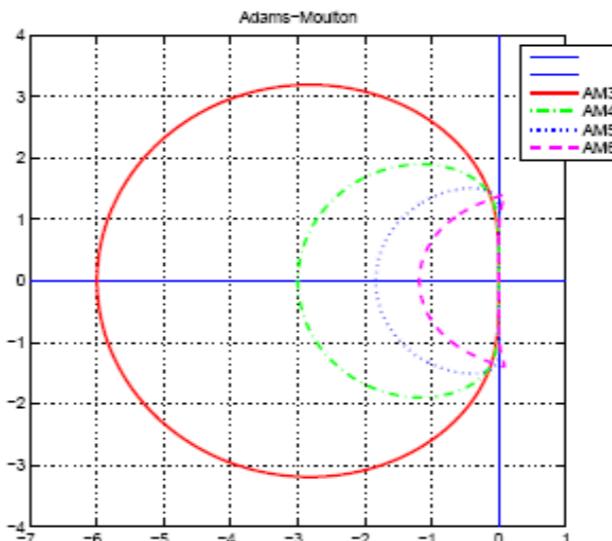


$$\left| \sum_{k=0}^4 \frac{(h\lambda)^k}{k!} \right| \leq 1 \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{stabilnost klasične RK (4. reda)} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$-2.79 \leq h\lambda \leq 0$$



Stability region of Adams-Basforth methods shrinks with increasing order of method.



Stability region of Adams-Moulton methods shrinks with increasing order of method. (AM1 and 2 are absolutely stable.)



Naloga

- Preprost model ohlajanja stanovanja:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{zun})$$

z analitično rešitvijo:

$$T(t) = T_{zun} + e^{-kt} (T(0) - T_{zun}) .$$

- Za nekaj parametrov modela uporabi čim več num. metod za IVP in jih primerjaj po natančnosti, hitrosti in stabilnosti....
- Dodatna naloga: Obravnavaj še malo težjo enačbo (periodično gretje):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{zun}) + A \sin\left(\frac{2\pi}{24}(t - \delta)\right)$$

