







Data Science Academy

Seja muito bem-vindo(a)!







Data Science Academy

Machine Learning - Regressão







Data Science Academy

O que é Regressão?



Aprovação de Crédito de um Indivíduo

Atributo	Valor	
Sexo	Masculino	
Idade	34	
Salário Mensal	R\$ 18.000,00	
Anos no Emprego Atual	3	
Anos de Residência	7	
Saldo Bancário	R\$ 32.671 <mark>,9</mark> 4	

Classificação

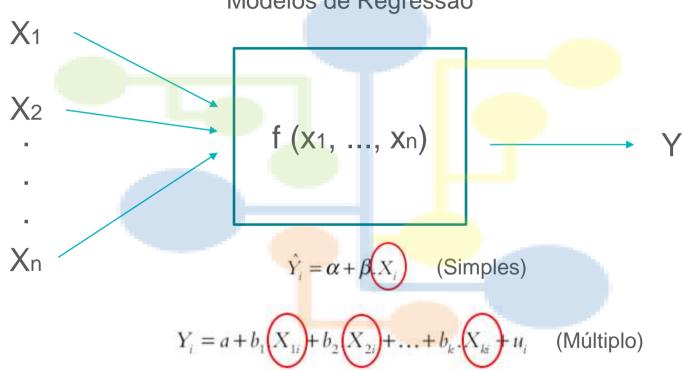
• Decisão de crédito (Sim/Não)

Regressão

Quantidade de crédito (dinheiro)



Modelos de Regressão





Uma variável independente x, explica a variação em outra variável, que é chamada variável dependente y. Este relacionamento existe em apenas uma direção:

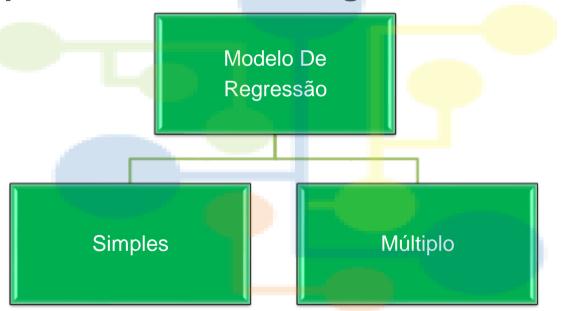
variável independente (x) -> variável dependente (y)



Análise de regressão é uma metodologia estatística que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis quantitativas de tal forma que uma variável possa ser predita a partir de outra.



Tipos de Modelos de Regressão Linear



- 1 Variável Dependente Y
- 1 Variável Independente X
- 1 Variável Dependente Y
- 2 ou + Variáveis Independentes X, X_i



A análise de regressão compreende quatro tipos básicos de modelos:

Linear Simples

Linear Múltiplo

Não Linear Simples Não Linear Múltiplo



Regressão Linear Simples Regressão Linear Múltipla Regressão Logística



Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?



Prever a população futura de uma cidade simulando a tendência de crescimento da população no passado

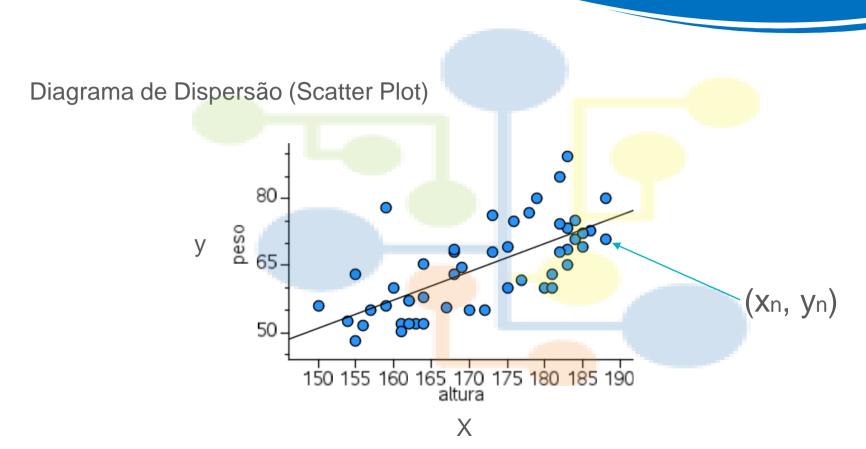


Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

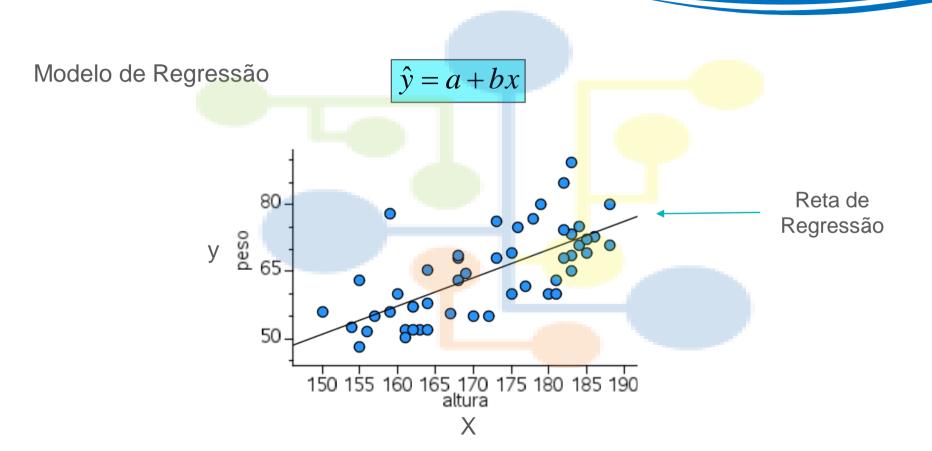


Produtividade (Y) de uma área agrícola é alterada quando se aplica certa quantidade (X) de fertilizante sobre a terra

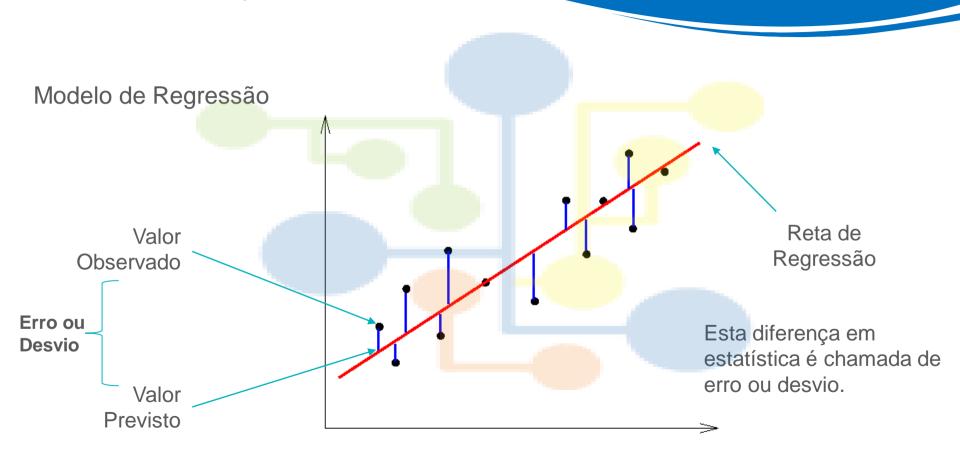














$$\hat{y} = a + bx$$

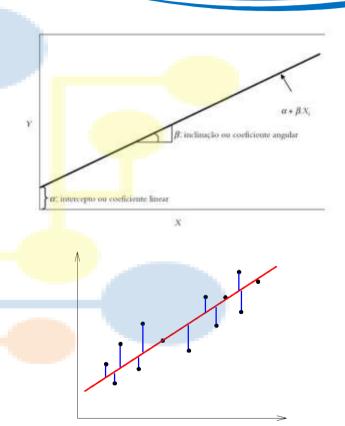
Onde:

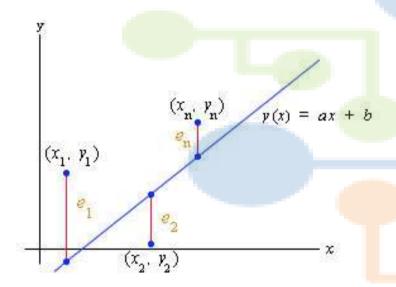
 \hat{y} = valor previsto de *y* dado um valor para *x*

 $\dot{\mathbf{x}}$ = variável independente

a = ponto onde a linha intercepta o eixo y

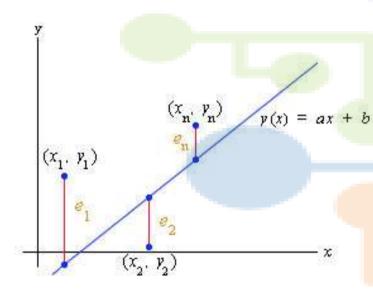
b = inclinação da linha reta





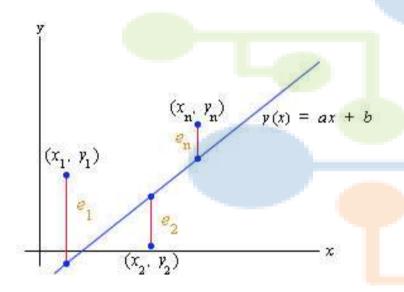
Método dos Mínimos Quadrados

Esse método definirá uma reta que minimizará a soma das distâncias ao quadrado entre os pontos plotados (X, Y) e a reta (que são os valores previstos de X',Y').



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação



Coeficiente de Correlação

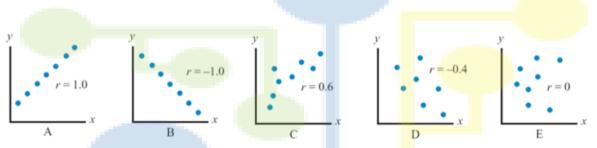


Gráfico A (r = 1.0): correlação positiva perfeita entre x = y

Gráfico B (r = -1.0): correlação negativa perfeita entre x e y

Gráfico C (r = 0.6): relação positiva moderada: y tende a aumentar se x aumenta, mas não

necessariamente na mesma taxa observada no Gráfico A

Gráfico D (r = -0.4): relação negativa fraca: o coeficiente de correlação é próximo de zero ou

negativo: y tende a diminuir se x aumenta

Gráfico E (r = 0): Sem relação entre x e y

Os valores de r variam entre -1.0 (uma forte relação negativa) até +1.0, uma forte relação positiva.



Coeficiente de Correlação

O coeficiente de determinação indica o quanto a reta de regressão explica o ajuste da reta, enquanto que o coeficiente de correlação deve ser usado como uma medida de força da relação entre as variáveis



- Soma Total dos Quadrados (STQ) Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$STQ = SQR + SQU$$

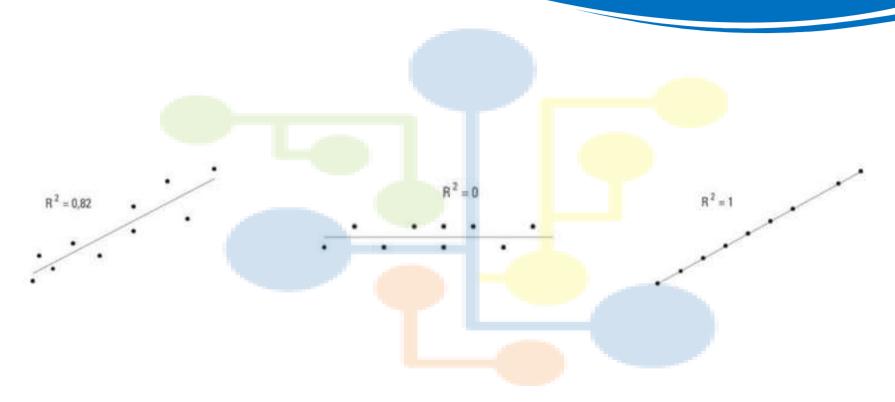


Nossa próxima etapa é compreender o poder explicativo do modelo de regressão

Coeficiente de Ajuste R²

$$R^2 = \frac{SQR}{SQR + SQU} = \frac{SQR}{SQT}$$







O coeficiente de ajuste R2 não diz aos analistas se uma determinada variável explicativa é estatisticamente significante e se esta variável é a causa verdadeira da alteração de comportamento da variável dependente.





Data Science Academy

Avaliando o Modelo de Regressão





Típicos problemas que podem ser resolvidos com Regressão

- Quantos computadores serão vendidos no próximo mês?
- Quantas pessoas vão acessar nosso web site na próxima semana?
- Qual o salário de uma pessoa de acordo com a performance escolar?
- Qual o total de vendas relacionado ao número de seguidores em redes sociais?





Número de Funcionários Por Turno	Número de Seguidores nas Redes Sociais	Preço da Matéria-Prima (R\$)	Cotação do Dólar	Total de Vendas (R\$)
1400	54000	5000	3.44	1245900
1359	55000	5400	3.12	1302763
1402	55430	5300	3.50	1345119

Atributos ou Features (X)

Variável Resposta (y)





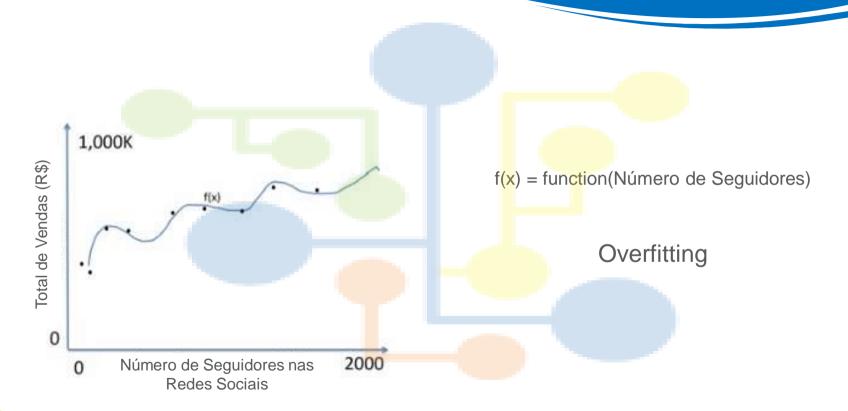
Número de Seguidores nas Redes Sociais	Total de Vendas (R\$)
54000	1245900
55000	1302763
55430	1345119

Atributo (X)

Variável Resposta (y)

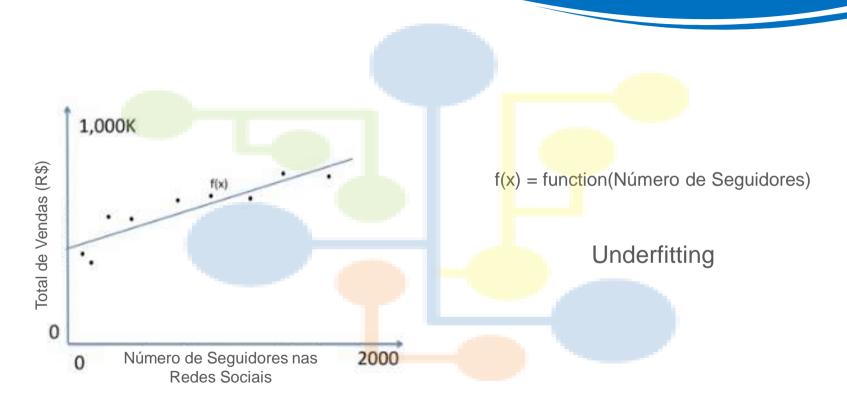






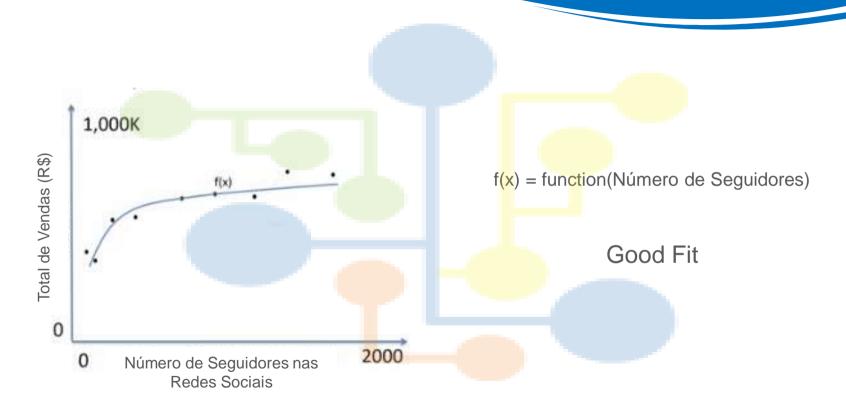
















Número de Seguidores nas Redes Sociais	
54000	
55000	
55430	

	·	
Atributos	ou	Features
	(X)	

Total de Vendas (R\$)		Total de Vendas Previsto (R\$)
	1245900	1278450
	1302763	1302763
	1345119	1320876

Variável Resposta Previsão f(x)







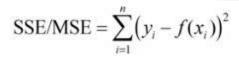
$$y_i - f(x_i)$$

$$| f(x_i) - y_i |$$

$$(y_i - f(x_i))^2$$

Método	dos	Mín	imos
Qı	uadra	dos	
(Least	Squa	re E	rror)

Total de Vendas (R\$)	Total de Vendas Previsto (R\$)
1245900	1278450
1302763	1334789
1345119	1320876



Mean absolute error (MAE)= $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2}$$



Variável Resposta (y)







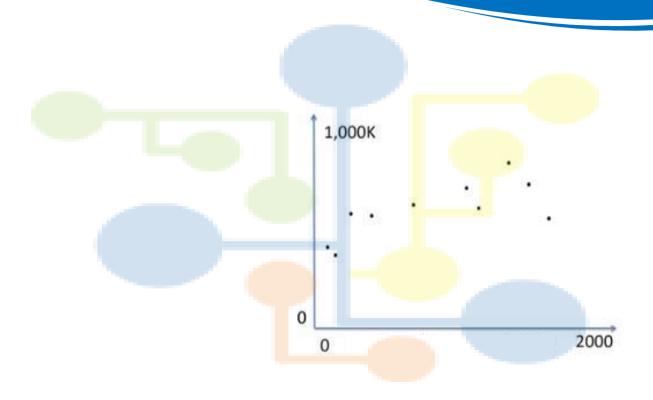


- (SST Sum Square Total) Soma Total dos Quadrados (STQ) Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- (SSR Sum Square Regression) Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- (SSE Sum Square Error) Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.



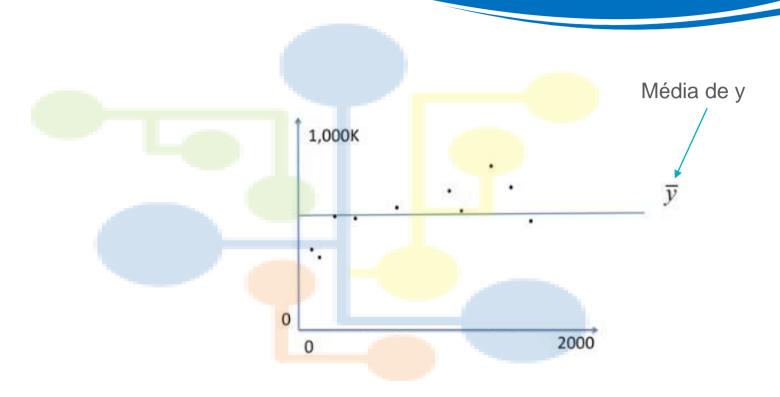






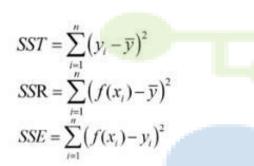




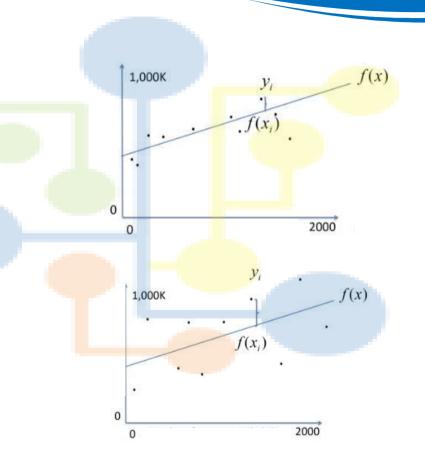






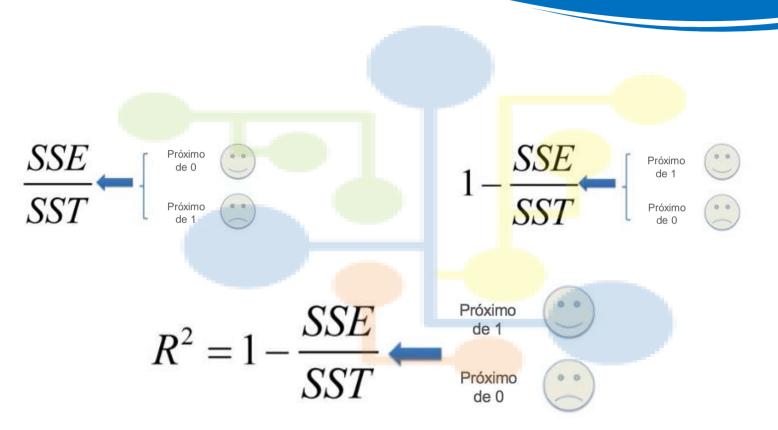
















$$SST = SSE + SSR$$

Se o SSR é alto e o SSE é baixo, o Modelo de Regressão explica bem a variação nas previsões

Se o SSR é baixo e o SSE é alto, o Modelo de Regressão não explica bem a variação nas previsões

- SSR = medida da variação que pode ser explicada
- SSE = medida da variação que não pode ser explicada
- SST = medida da variação total









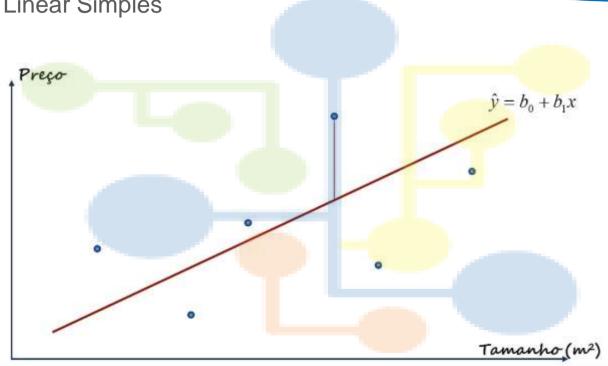
Data Science Academy

Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla

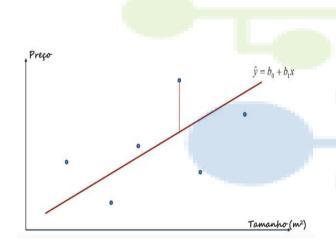


Regressão Linear Simples





Regressão Linear Simples



Tamanho (m2)	Preço (R\$)
105	89.000
120	145.000
115	123.000



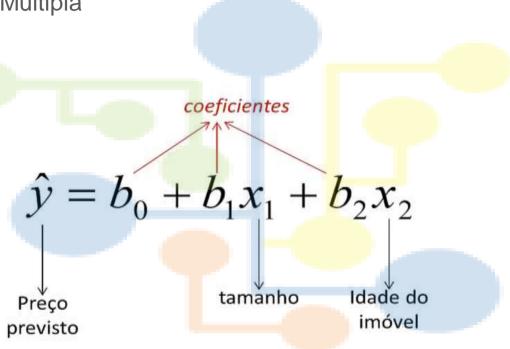
Regressão Linear Múltipla

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Tamanho (m2)	Idade do Prédio (Anos)	Número Vagas na Garagem	Número de Quartos	Preço (R\$)	
105	15	2	2	89.000	
120	4	3	3	145.000	
115	8	2	3	123.000	



Regressão Linear Múltipla





Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla



Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla

- Teste F de Significância Global
- Testes de Significância Individuais
- Coeficientes R2 e R2 Ajustado
- Coeficientes



Teste F de Significância Global

O modelo é útil para prever o preço?

Estatística de re R múltiplo R-Quadrado R-quadrado ajustado Erro padrão Observações	0,66 0,44 0,41 132352,0 40		"Há evidência está relaciona	e significação: teste F de significância global do modelo. evidências de que pelo menos uma variável no modelo relacionada com o preço?" no valor-p do teste F < 0,05, há evidências estatísticas.					
ANOVA	gl	SQ	MQ	F	F de significação	Valor-p do			
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000				
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10						
Total	39	1,162E+12							
	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores			
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1			
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2			
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5			



Testes de Significância Individuais

Quais variáveis estão relacionadas com o preço?

R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

MINOAW					
	gl	5Q	MQ	F	F de significação
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes Erro padrão			Stat t valor-P 95% inferiores		95% superiores
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Há evidências estatísticas de relação de tamanho e idade com preço, pois valores-p<0,05.



Coeficientes R2 e R2 Ajustado

Qual percentual de variabilidade é explicado pelas variáveis usadas no modelo?

Estatística de re	gressão	- Fi	R ² : 44% da va	riabilidade d	o preço é explicada	pelo			
R múltiplo	0,66	-	modelo com tamanho e idade.						
R-Quadrado	0,44								
R-quadrado ajustado	0,41		R ² ajustado: sempre é um pouco menor que o R ² ;						
Erro padrão	132352,0	100	deve ser utilizado para comparar modelos com diferentes quantidades de variáveis.						
Observações	40		uner entres qu	armoudes de	verioveis.				
ANOVA									
	gl	SQ	MQ	F	F de significação				
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000				
Residuo	37	6,481E+11	1,752E+10						
Total	39	1,162E+12							
	Coeficientes	Erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores			
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1			
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2			
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5			



Coeficientes

Valores que compõe a equação.

Estatística de reg	ressão				
R múltiplo	0,66				
R-Quadrado	0,44				
R-quadrado ajustado	0,41				
Erro padrão	132352,0				
Observações	40				
ANOVA					
	gl	5Q	MQ	F	F de significação
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1.162F+12			

	Coeficientes !	erro padrão	Stat t	valor-P	95% inferiores	95% superiores
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5



Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05. O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.



Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05. O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.

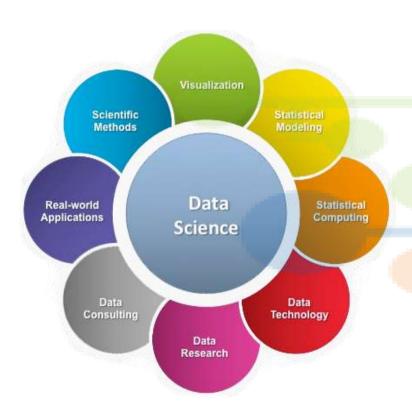




Data Science Academy

Interpretando o Valor-p



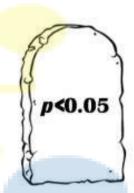


Data Science é uma área multidisciplinar, que emprega conceitos de diversas áreas diferentes.

Data Science e Estatística NÃO são a mesma coisa, mas a Estatística fornece ferramentas importantes principalmente para interpretabilidade dos modelos de Machine Learning.



O **valor-p** é amplamente usado para interpretar modelos de regressão ou mesmo quando empregamos análise estatística aos dados.







Ponto de Vista em Data Science



Interpretando o Valor-p

Os conceitos de valor-p e nível de significância são aspectos importantes dos testes de hipóteses e métodos estatísticos, como regressão. No entanto, eles podem ser um pouco difíceis de entender, especialmente para iniciantes, e uma boa compreensão desses conceitos pode ajudar bastante no entendimento do aprendizado de máquina.



Interpretando o Valor-p

Vamos imaginar o seguinte exemplo.

Considere dois grupos dentro de uma determinada população: um grupo de controle e um grupo experimental. O grupo experimental é uma amostra aleatória retirada da população sobre a qual um experimento será realizado e, em seguida, será comparada com o grupo de controle. A diferença nos grupos é definida em termos de uma estatística de teste, como o teste t de Student (por exemplo, uma empresa deseja saber se seu produto é comprado mais por homens ou mulheres).



Interpretando o Valor-p

Precisamos definir dois termos adicionais: uma hipótese nula significa que não há diferença entre os dois grupos, enquanto a hipótese alternativa significa que há uma diferença estatisticamente significativa entre os dois grupos.



Interpretando o Valor-p

Assumiremos que a hipótese nula é verdadeira, ou seja, não há diferença entre dois grupos. Em seguida, o experimento é realizado no grupo experimental. Em seguida, é verificado se há algum efeito significativo no grupo ou não.



Interpretando o Valor-p

Agora vamos considerar a importância do valor-p. Precisamos calcular a probabilidade de que o efeito no grupo seja atribuído ao acaso. Se você repetir o experimento repetidamente no mesmo tamanho de amostra para o grupo experimental, qual porcentagem de tempo você vê uma diferença no grupo experimental por acaso?



Interpretando o Valor-p

O valor-p é usado para avaliar d<mark>e fato a fo</mark>rça d<mark>as hipóte</mark>ses nula e alternativa.

Os valores-p são números decimais entre 0 e 1, que servem como referência probabilística para pesar a hipótese.



Interpretando o Valor-p

Às vezes, o valor-p também é expresso como uma porcentagem.

Um valor-p maior que 0,05 significa que, em mais de 1/20 das vezes, o experimento não mostra diferença entre os dois grupos. O valor 0,05 é normalmente usado como referência e é conhecido como nível de significância (α).



Interpretando o Valor-p

Em um problema de regressão, você deseja que o valor-p seja muito menor que 0,05 para a variável ser considerada uma variável significativa.

Normalmente, um pequeno valor-p (<0,05) sugere que a hipótese nula deve ser rejeitada, enquanto um grande valor-p (> 0,05) indica que a hipótese nula deve não deve ser rejeitada devido à falta de evidências contra ela.

Valores iguais ou próximos a 0,05 sugerem que o Cientista de Dados deve tomar a decisão por si mesmo!



Interpretando o Valor-p

Agora, vamos considerar o uso de valores-p em Ciência de Dados.



Interpretando o Valor-p

Usando o conjunto de dados de casas em Boston, ajustamos um modelo linear simples usando a variável preditora RM e a variável de resposta "y".

OLS Regression Results

Dep. Varia Model: Method:	ble:		Least	targ O Squar	LS	Adj.	ared: R-squar			0.484 0.483 471.8
Date: Time: No. Observ Df Residua Df Model: Covariance	ls:		t, 28	Sep 20 15:15:	19 23 06 04 1	Prob	(F-stat ikeliho	istic):		2.49e-74 -1673.1 3350. 3359.
		coef	std	err		t	P>	t	[0.025	0.975]
const RM	-34. 9.	6706 1021	- 50	650 419			0.0		-39.877 8.279	-29.465 9.925
Omnibus: Prob(Omnib Skew: Kurtosis:	us):			102.5 0.0 0.7 8.1	00 26	7	200			0.684 612.449 1.02e-133 58.4



Interpretando o Valor-p

Um pequeno valor-p indica que é improvável observar uma associação tão substancial entre o preditor e a resposta devido ao acaso, na ausência de qualquer associação real entre o preditor e a resposta.



Interpretando o Valor-p

Consequentemente, se vemos um pequeno valor-p podemos deduzir que há uma associação entre o preditor e a resposta. Isso significa que rejeitamos a hipótese nula, ou seja, afirmamos que existe um relacionamento entre as duas variáveis se o valor-p for pequeno o suficiente.



Interpretando o Valor-p

Consequentemente, se vemos um pequeno valor-p podemos deduzir que há uma associação entre o preditor e a resposta. Isso significa que rejeitamos a hipótese nula, ou seja, afirmamos que existe um relacionamento entre as duas variáveis se o valor-p for pequeno o suficiente.

No caso de um grande valor-p ded<mark>uzimos que não há uma associação entre o preditor e a resposta!</mark>



Interpretando o Valor-p

O valor-p representa a chance ou a probabilidade do efeito (ou da diferença) observada entre as variáveis ser devido ao **acaso**, e não aos fatores que estão sendo estudados.

0		1
Impossível	abso	luta certeza
•		
p = 0.001	Muito imprová <mark>ve</mark> l ser devido ao acaso	1 em 1000
p = 0.05	Bastante improvável ser devido ao acaso	1 em 20
p = 0.5	Bastante provável ser devido ao acaso	1 em 2
p = 0.75	Muito provavelmente é devido ao acaso	3 em 4







Data Science Academy

O Que é Regularização?

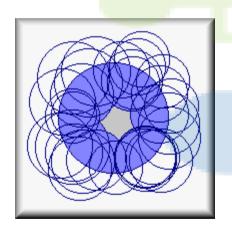


O modelo de regressão utiliza as variáveis explanatórias para explicar a variabilidade da variável resposta!

Mas o que acontece quando o número de variáveis explanatórias é muito grande?

A técnica de mínimos quadrados, nesta situação, pode não permitir previsões com precisão e nem permitir uma interpretação ideal para o modelo.





Isso significa que muitas variáveis seriam ajustadas e o modelo ficaria super estimado, com uma variância infinita, sendo inviável o método dos mínimos quadrados.



Temos basicamente 3 métodos que nos auxiliam quando o número de variáveis é muito grande ou até mesmo maior que o número de observações:

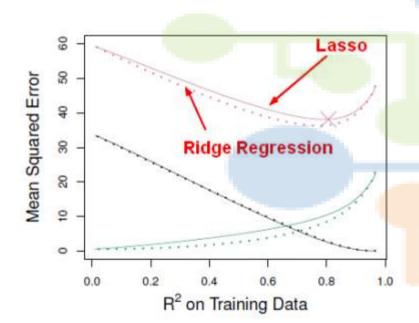
Seleção de um subconjunto de coeficientes

Reduzir a dimensão

Reduzir o valor dos coeficientes (Regularização)



Métodos de Regularização



Uma regressão com diversos coeficientes torna o modelo como um todo muito mais complexo e pode não ter características de interpretabilidade.



Shirinkage Methods (Métodos de Encolhimento)

Ridge Regression

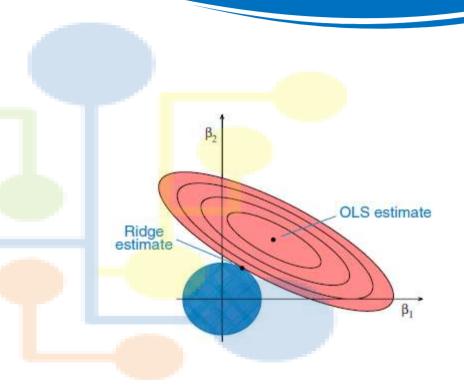
LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)



Ridge Regression

A Ridge Regression é um método de regularização do modelo que tem como principal objetivo suavizar atributos que sejam relacionados uns aos outros e que aumentam o ruído no modelo (multicolinearidade).

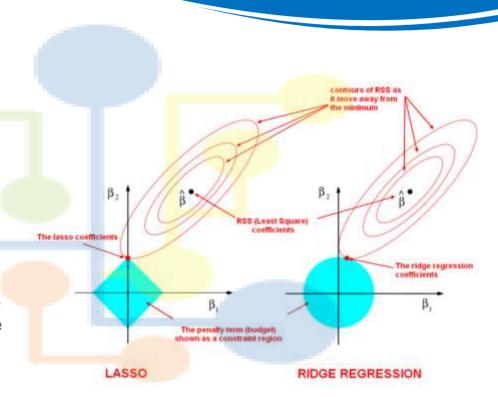




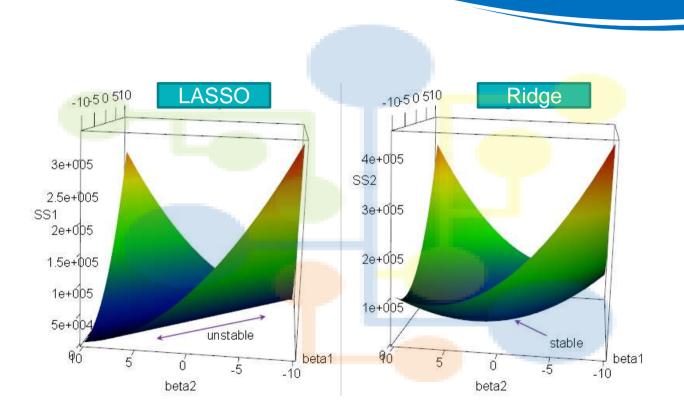
LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

O LASSO tem o mesmo mecanismo de penalização dos coeficientes com um alto grau de correlação entre si, mas que usa o mecanismo de penalizar os coeficientes de acordo com o seu valor absoluto.











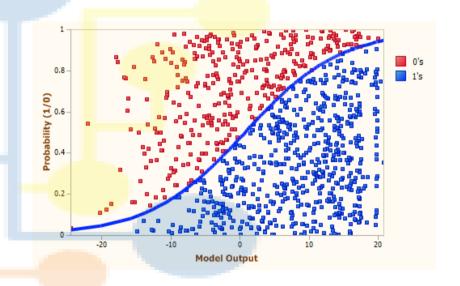


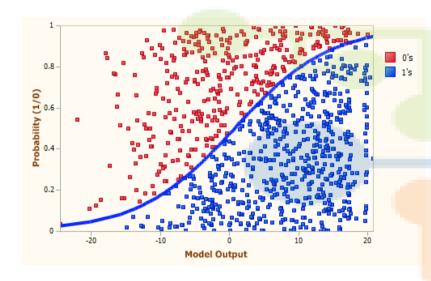
Data Science Academy

Regressão Logística



A regressão logística é uma técnica estatística que tem como objetivo modelar, a partir de um conjunto de observações, a relação "logística" entre uma variável resposta e uma série de variáveis explicativas numéricas (contínuas, discretas) e/ou categóricas.





A regressão logística é amplamente usada em ciências médicas e sociais, e tem outras denominações, como modelo logístico, modelo logit e classificador de máxima entropia.



Na Regressão Logística, a variável resposta é binária:

- 1 → acontecimento de interesse (sucesso)
- 0 → acontecimento complementar (insucesso)



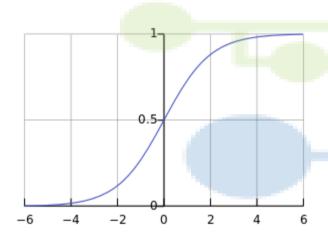
$$g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1 - \pi(x)}\right)$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}{1 - \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}{\frac{1}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x}}}\right)$$

Transformação logit

$$g(x) = ln(e^{\beta_0 + \beta_1 x}) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$\uparrow$$
Logaritmo



Regressão Logística é útil para modelar a probabilidade de um evento ocorrer como função de outros fatores. É um modelo linear generalizado que usa como função de ligação a função logit.



A regressão logística é utilizada em áreas tais como:



- Em <u>medicina</u>, permite por exemplo determinar os fatores que caracterizam um grupo de indivíduos doentes em relação a indivíduos saudáveis.
- Na área de <u>seguros</u>, permite encontrar frações de clientes que sejam sensíveis a determinada política securitária em relação a um dado risco particular.
- Em instituições financeiras, pode detectar os grupos de risco para a subscrição de um crédito.
- Em <u>econometria</u>, permite explicar uma variável discreta, como por exemplo as intenções de voto em atos eleitorais.



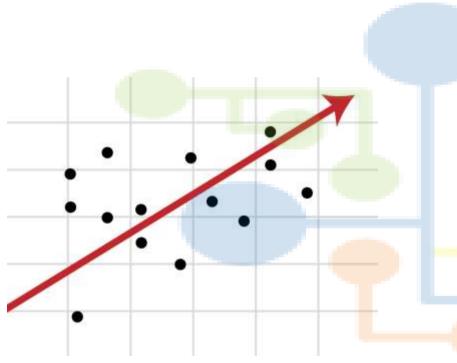


Data Science Academy

Regressão Vantagens e Desvantagens







- Simple Linear Regression
- Multiple Linear Regression
- Ridge Regression
- Lasso Regression
- Logistic Regression
- Polynomial Regression
- Stepwise Regression
- Elastic Net Regression











Previsão do Futuro





































Importantes Desvantagens:

- Apenas consideram relacionamento linear
- Toma como base a média da variável dependente
- Sensível a Outliers



