Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Machine Learning

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Seja muito bem-vindo(a)!

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Machine Learning - Regressão

Regressão

- Modelos de Aprendizagem
- Fundamentos Teóricos
- Avaliação, Otimização, Regularização, Customizações
- Outros Conceitos Relacionados à Criação do Modelo
- Prática

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

O que é Regressão?

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Aprovação de Crédito de um Indivíduo

Atributo	Valor
Sexo	Masculino
Idade	34
Salário Mensal	R$ 18.000,00
Anos no Emprego Atual	3
Anos de Residência	7
Saldo Bancário	R$ 32.671,94

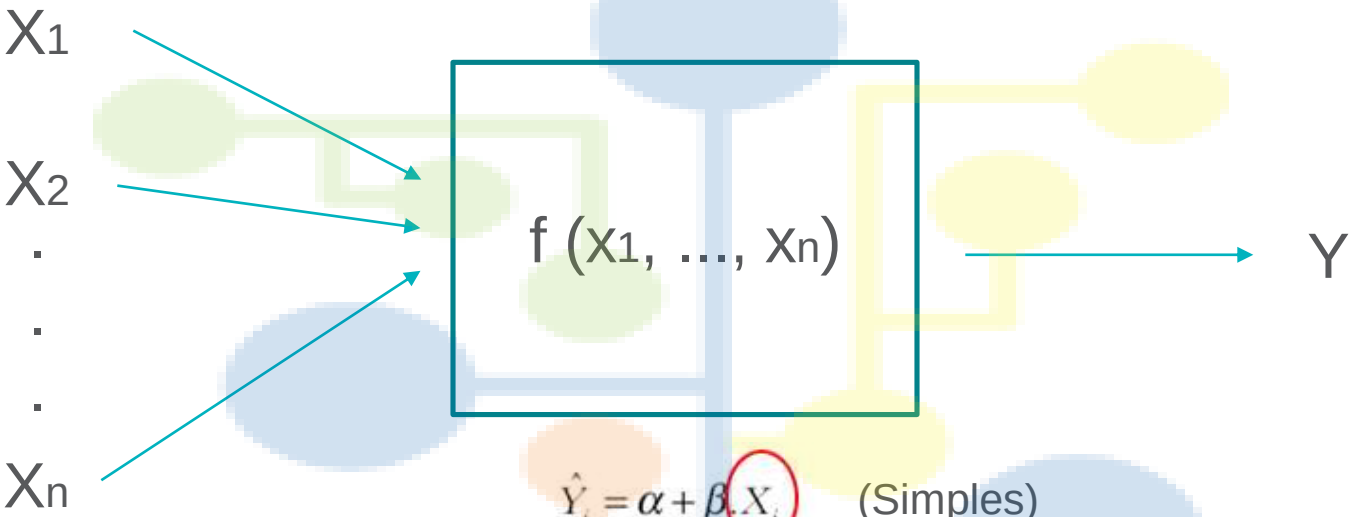
Classificação

- Decisão de crédito (Sim/Não)

Regressão

- Quantidade de crédito (dinheiro)

Modelos de Regressão



$$\hat{Y}_i = \alpha + \beta . X_i$$ (Simples)

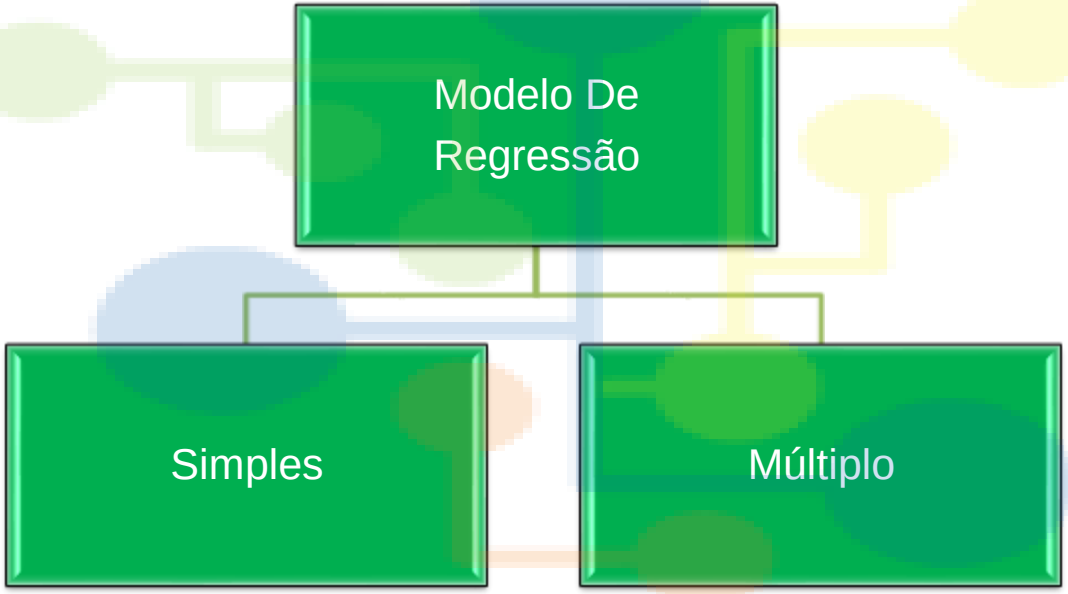
$$Y_i = a + b_1 . X_{1i} + b_2 . X_{2i} + \ldots + b_k . X_{ki} + u_i$$ (Múltiplo)

Uma **variável independente x**, explica a variação em outra variável, que é chamada **variável dependente y**. Este relacionamento existe em apenas uma direção:

variável independente (x) → variável dependente (y)

Análise de regressão é uma metodologia **estatística** que utiliza a relação entre duas ou mais variáveis quantitativas de tal forma que uma variável possa ser predita a partir de outra.

Tipos de Modelos de Regressão Linear



1 Variável Dependente Y
1 Variável Independente X

1 Variável Dependente Y
2 ou + Variáveis Independentes X, X_i

A análise de regressão compreende quatro tipos básicos de modelos:

- Linear Simples
- Linear Múltiplo
- Não Linear Simples
- Não Linear Múltiplo

Regressão Linear Simples

Regressão Linear Múltipla

Regressão Logística

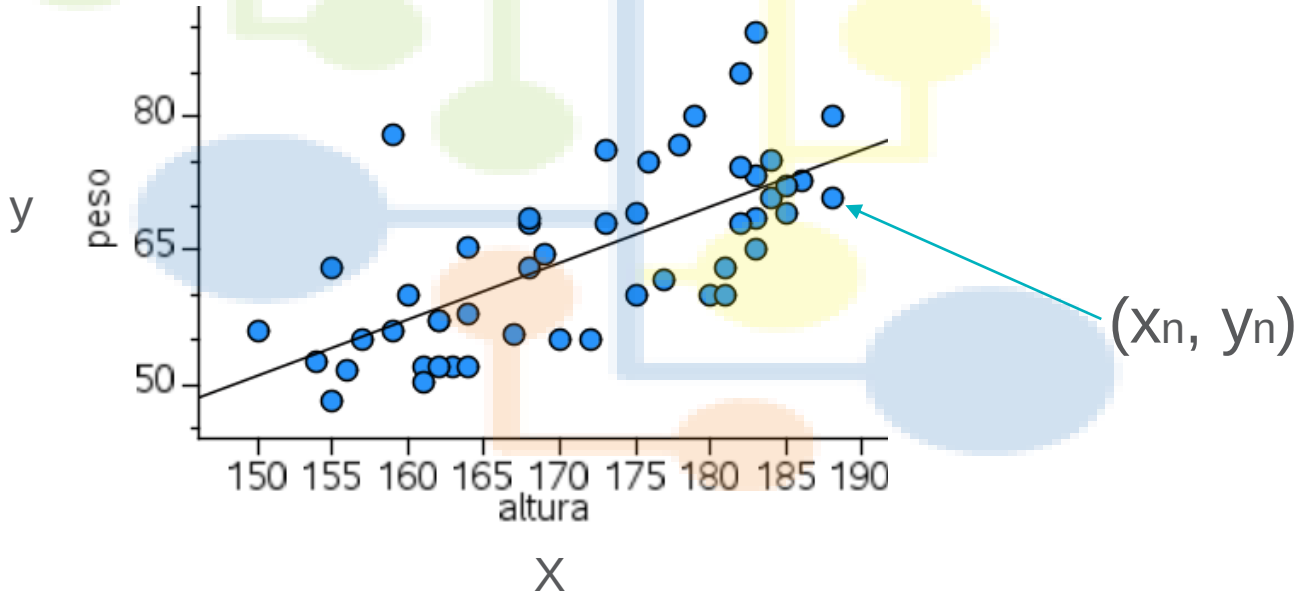
Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

Prever a população futura de uma cidade simulando a tendência de crescimento da população no passado

Qual o objetivo em se determinar a relação entre duas variáveis?

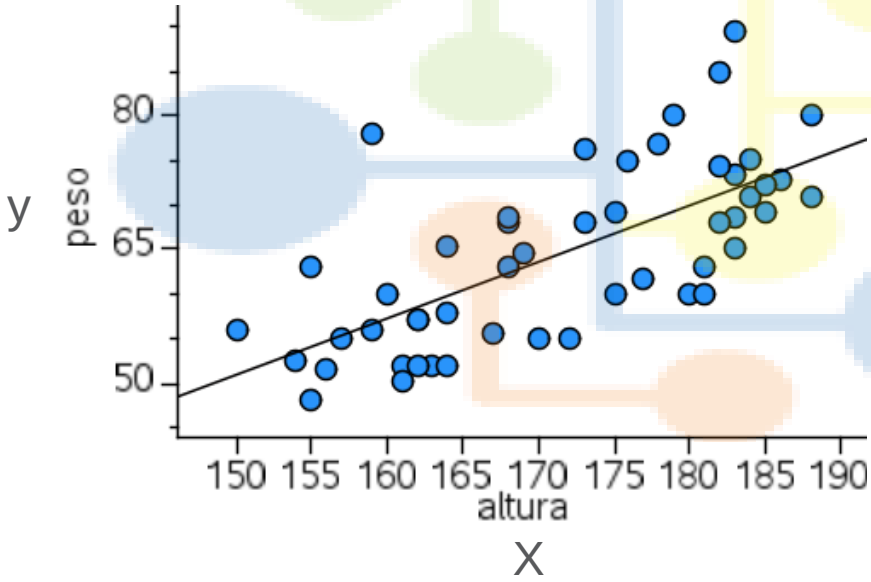
Produtividade (Y) de uma área agrícola é alterada quando se aplica certa quantidade (X) de fertilizante sobre a terra

Diagrama de Dispersão (Scatter Plot)



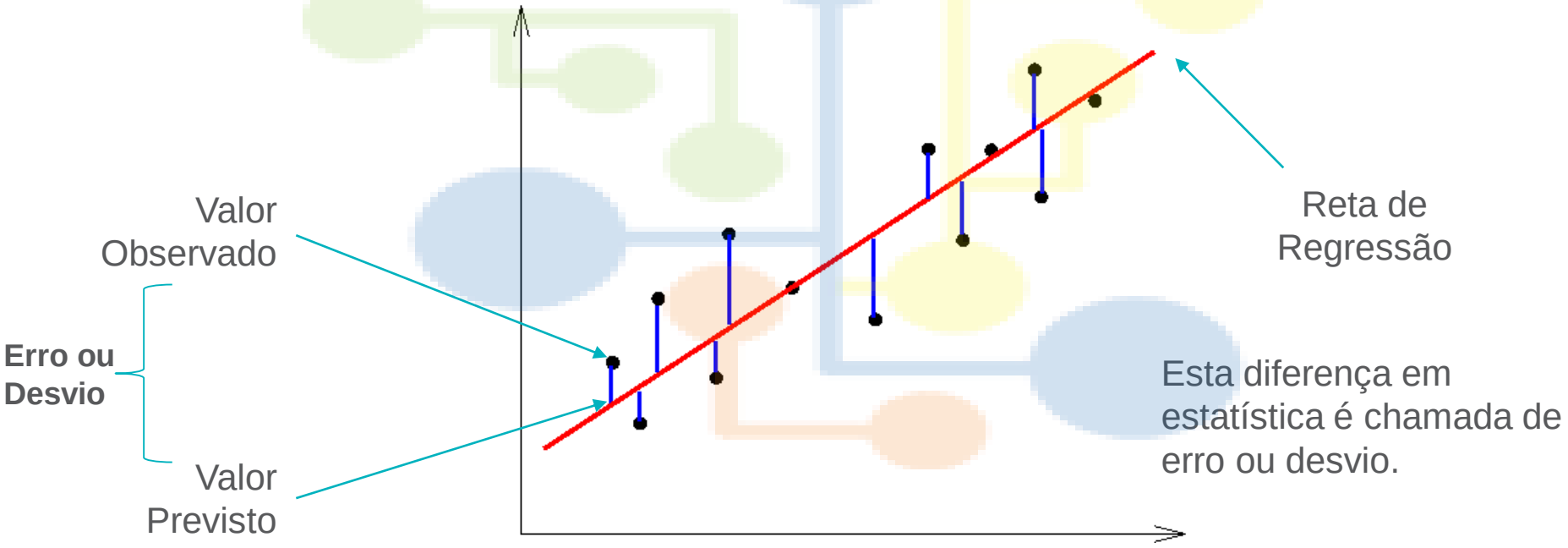
Modelo de Regressão

$$\hat{y} = a + bx$$

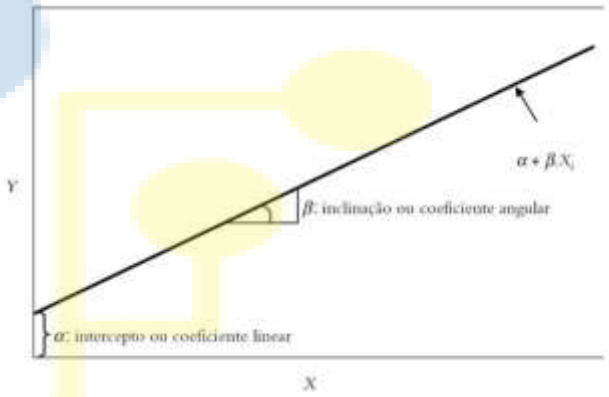


Reta de Regressão

Modelo de Regressão



$$\hat{y} = a + bx$$



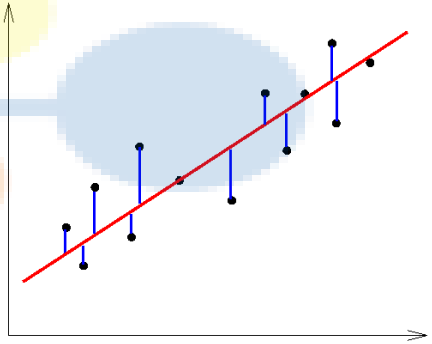
Onde:

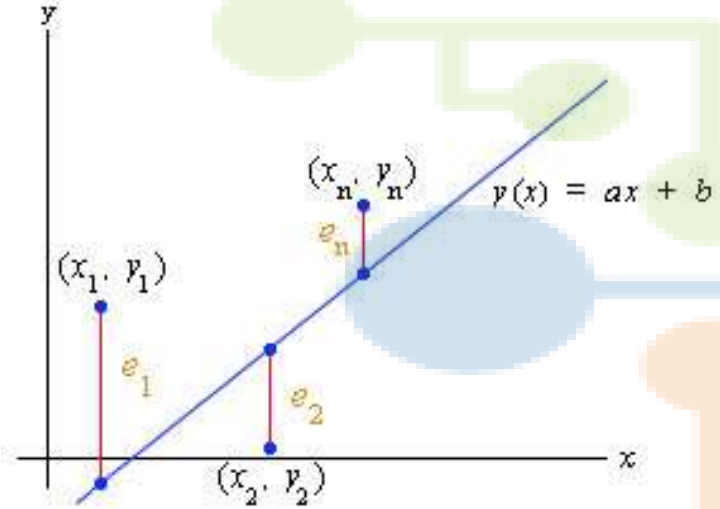
$\hat{y}$ = valor previsto de *y* dado um valor para *x*

x = variável independente

a = ponto onde a linha intercepta o eixo y

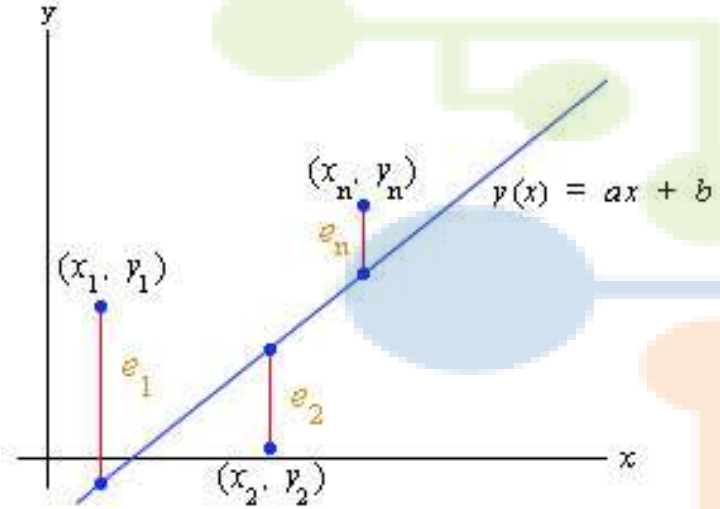
b = inclinação da linha reta





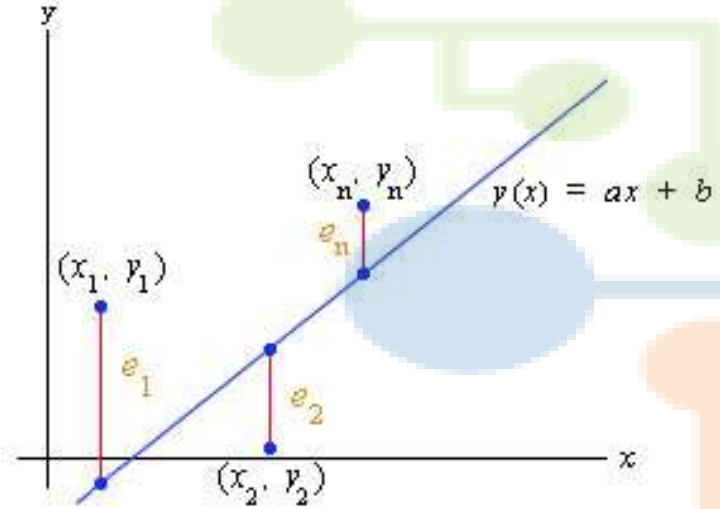
Método dos Mínimos Quadrados

Esse método definirá uma reta que minimizará a soma das distâncias ao quadrado entre os pontos plotados (X, Y) e a reta (que são os valores previstos de X’,Y’).



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação



Método dos Mínimos Quadrados

- Erro de Estimativa
- Coeficiente de Determinação

Coeficiente de Correlação

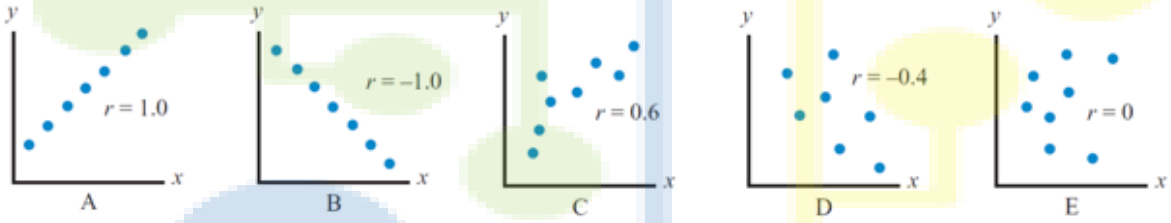


Gráfico A (*r* = 1.0): correlação positiva perfeita entre *x* e *y*

Gráfico B (*r* = -1.0): correlação negativa perfeita entre *x* e *y*

Gráfico C (*r* = 0.6): relação positiva moderada: y tende a aumentar se x aumenta, mas não necessariamente na mesma taxa observada no Gráfico A

Gráfico D (*r* = -0.4): relação negativa fraca: o coeficiente de correlação é próximo de zero ou negativo: y tende a diminuir se x aumenta

Gráfico E (*r* = 0): Sem relação entre x e y

Os valores de **r** variam entre **-1.0** (uma forte relação negativa) até **+1.0**, uma forte relação positiva.

Coeficiente de Correlação

O coeficiente de determinação indica o quanto a reta de regressão explica o ajuste da reta, enquanto que o coeficiente de correlação deve ser usado como uma medida de força da relação entre as variáveis

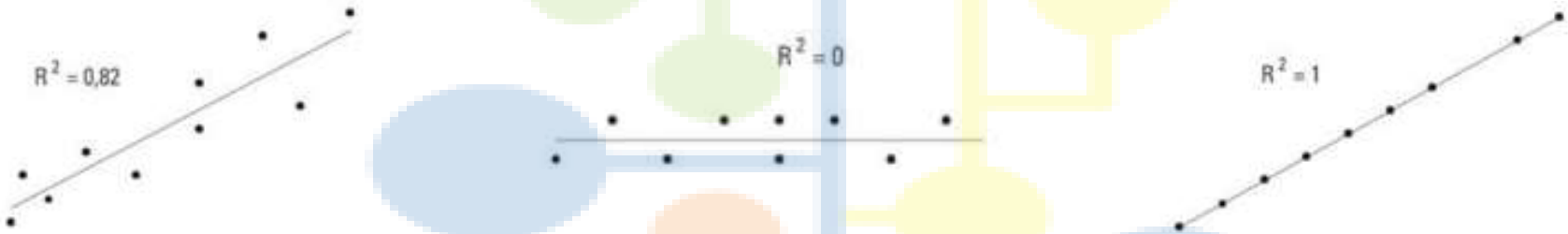
- Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.
- Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.
- Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

$$STQ = SQR + SQU$$

Nossa próxima etapa é compreender o poder explicativo do modelo de regressão

Coeficiente de Ajuste R^2

$$R^2 = \frac{SQR}{SQR + SQU} = \frac{SQR}{SQT}$$


$R^2 = 0,82$
$R^2 = 0$
$R^2 = 1$

O coeficiente de ajuste R2 não diz aos analistas se uma determinada variável explicativa é estatisticamente significante e se esta variável é a causa verdadeira da alteração de comportamento da variável dependente.

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Avaliando o Modelo de Regressão

Típicos problemas que podem ser resolvidos com Regressão

- Quantos computadores serão vendidos no próximo mês?
- Quantas pessoas vão acessar nosso web site na próxima semana?
- Qual o salário de uma pessoa de acordo com a performance escolar?
- Qual o total de vendas relacionado ao número de seguidores em redes sociais?

Número de Funcionários Por Turno	Número de Seguidores nas Redes Sociais	Preço da Matéria-Prima (R$)	Cotação do Dólar		Total de Vendas (R$)
1400	54000	5000	3.44		1245900
1359	55000	5400	3.12		1302763
1402	55430	5300	3.50		1345119

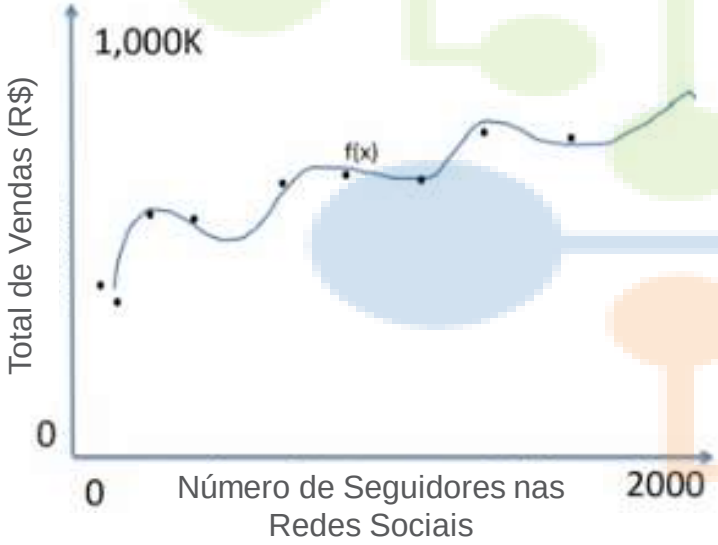
Atributos ou Features
(X)

Variável Resposta
(y)

	Número de Seguidores nas Redes Sociais				Total de Vendas (R$)
	54000				1245900
	55000				1302763
	55430				1345119

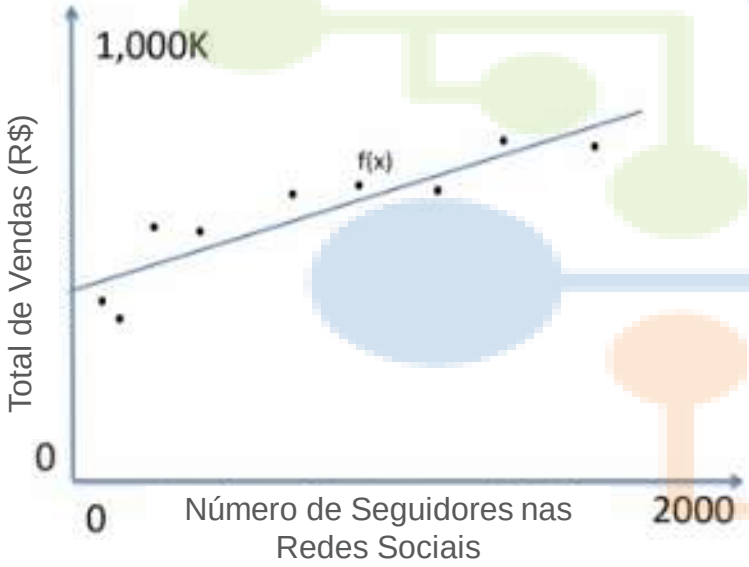
Atributo (X)

Variável Resposta (y)



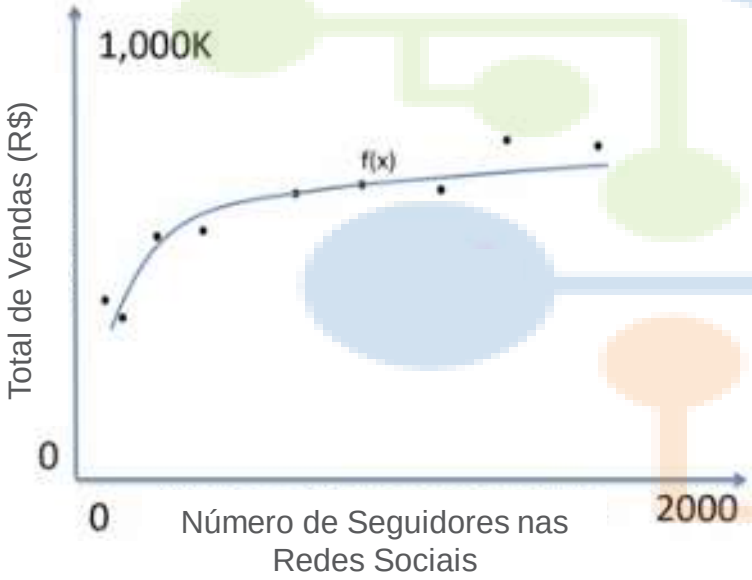
f(x) = function(Número de Seguidores)

Overfitting



f(x) = function(Número de Seguidores)

Underfitting



f(x) = function(Número de Seguidores)

Good Fit

	Número de Seguidores nas Redes Sociais			Total de Vendas (R$)	Total de Vendas Previsto (R$)
	54000			1245900	1278450
	55000			1302763	1302763
	55430			1345119	1320876

Atributos ou Features (X)

Variável Resposta (y)

Previsão f(x)

$y_i - f(x_i)$

$f(x_i) - y_i$

$| f(x_i) - y_i |$

$(y_i - f(x_i))^2$

$$\text{Mean absolute error (MAE)} = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$$

$$\text{SSE/MSE} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2}$$

Método dos Mínimos Quadrados (Least Square Error)

Total de Vendas (R$)	Total de Vendas Previsto (R$)
1245900	1278450
1302763	1334789
1345119	1320876

Variável Resposta (y)

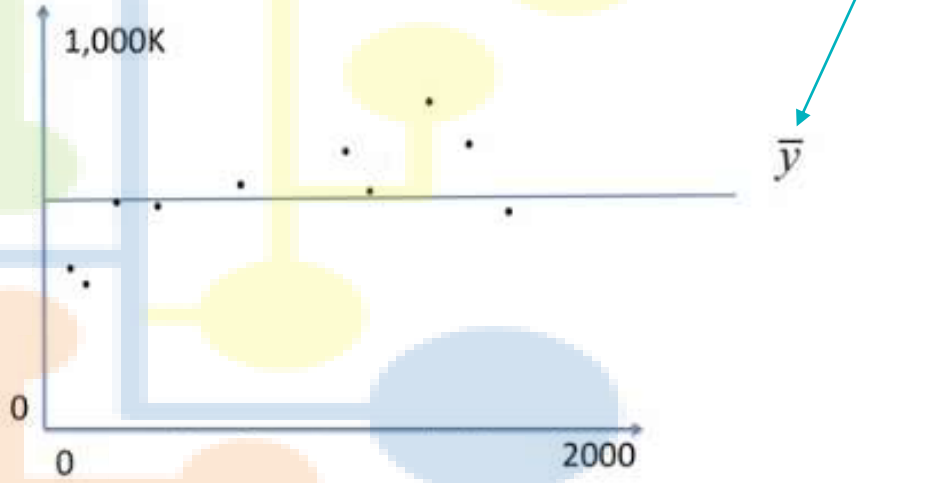
Previsão f(x)

- (**SST – Sum Square Total**) Soma Total dos Quadrados (STQ) – Mostra a variação em Y em torno da própria média.

- (**SSR – Sum Square Regression**) Soma dos Quadrados de Regressão (SQR) – Oferece a variação de Y considerando as variáveis X utilizadas no modelo.

- (**SSE – Sum Square Error**) Soma dos Quadrados dos Resíduos (SQU) – Variação de Y que não é explicada pelo modelo elaborado.

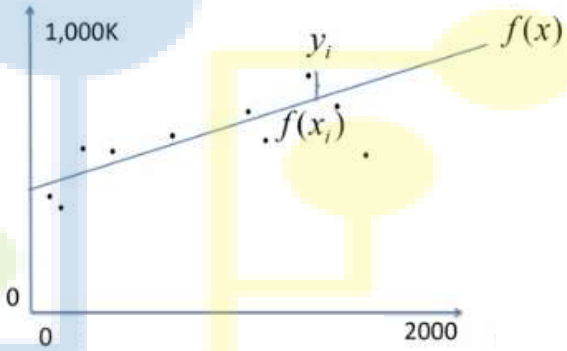
$$SST = SSE + SSR$$


Média de y
1,000K
$\bar{y}$
0
0
2000

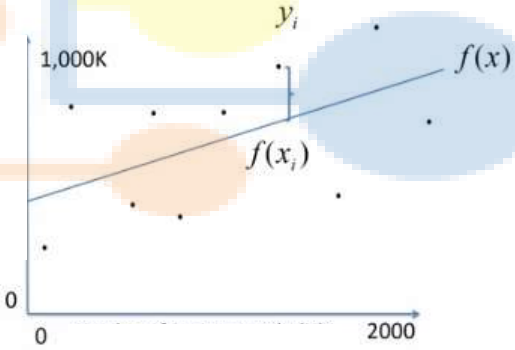
$$SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$



$$SST = SSE + SSR$$



$$\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 0

Próximo de 1

$$1-\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$R^2 = 1-\frac{SSE}{SST}$$

Próximo de 1

Próximo de 0

$$SST = SSE + SSR$$

Se o SSR é alto e o SSE é baixo, o Modelo de Regressão explica bem a variação nas previsões

Se o SSR é baixo e o SSE é alto, o Modelo de Regressão não explica bem a variação nas previsões

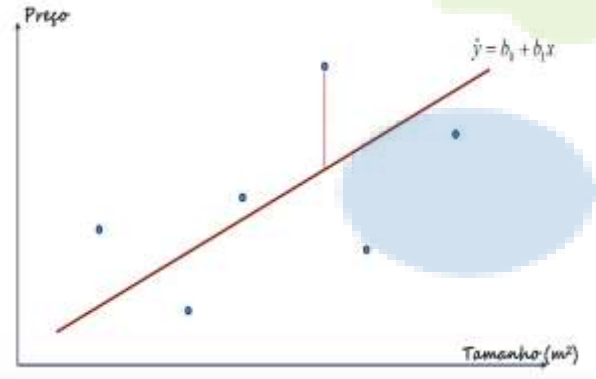
- **SSR = medida da variação que pode ser explicada**
- **SSE = medida da variação que não pode ser explicada**
- **SST = medida da variação total**

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Regressão Linear Simples
x
Regressão Linear Múltipla

Regressão Linear Simples



Tamanho (m2)				Preço (R$)
105				89.000
120				145.000
115				123.000

Regressão Linear Múltipla

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Tamanho (m2)	Idade do Prédio (Anos)	Número Vagas na Garagem	Número de Quartos	Preço (R$)
105	15	2	2	89.000
120	4	3	3	145.000
115	8	2	3	123.000

Regressão Linear Múltipla

coeficientes

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Preço previsto

tamanho

Idade do imóvel

Interpretando Modelos de Regressão Linear Simples e Múltipla

- Teste F de Significância Global
- Testes de Significância Individuais
- Coeficientes R2 e R2 Ajustado
- Coeficientes

Teste F de Significância Global

O modelo é útil para prever o preço?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

F de significação: teste F de significância global do modelo.
"Há evidências de que pelo menos uma variável no modelo está relacionada com o preço?"
Como **valor-p do teste F < 0,05**, há evidências estatísticas.

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	***F de significação***
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	**0,000**
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

Valor-p do teste F

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Testes de Significância Individuais

Quais variáveis estão realcionadas com o preço?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	***valor-P***	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	**0,000**	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	**0,028**	-36094,8	-2164,5

Há evidências estatísticas de relação de tamanho e idade com preço, pois **valores-p<0,05**.

Coeficientes R2 e R2 Ajustado

Qual percentual de variabilidade é explicado pelas variáveis usadas no modelo?

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	**0,44**
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

R^2: 44% da variabilidade do preço é explicada pelo modelo com tamanho e idade.

R^2 ajustado: sempre é um pouco menor que o R^2; deve ser utilizado para comparar modelos com diferentes quantidades de variáveis.

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	440107,0	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	6772,1	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	-19129,7	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

Coeficientes

Valores que compõe a equação.

Estatística de regressão	
R múltiplo	0,66
R-Quadrado	0,44
R-quadrado ajustado	0,41
Erro padrão	132352,0
Observações	40

ANOVA

	gl	*SQ*	*MQ*	*F*	*F de significação*
Regressão	2	5,135E+11	2,567E+11	1,466E+01	0,000
Resíduo	37	6,481E+11	1,752E+10		
Total	39	1,162E+12			

	Coeficientes	*Erro padrão*	*Stat t*	*valor-P*	*95% inferiores*	*95% superiores*
Interseção	**440107,0**	182742,3	2,408	0,021	69836,0	810378,1
tamanho	**6772,1**	1555,7	4,353	0,000	3620,0	9924,2
idade do prédio	**-19129,7**	8372,9	-2,285	0,028	-36094,8	-2164,5

$$\hat{y} = 440107 + 6772{,}1 \cdot tamanho - 19129{,}7 \cdot idade$$

Regras Gerais

Modelo é útil para prever o preço, se o valor-p do teste F é menor que 0,05.

O R2 indica quanto da variabilidade de y é explicado pelas variáveis preditoras. Pode ser necessário incluir mais variáveis no modelo para aumentar este coeficiente.

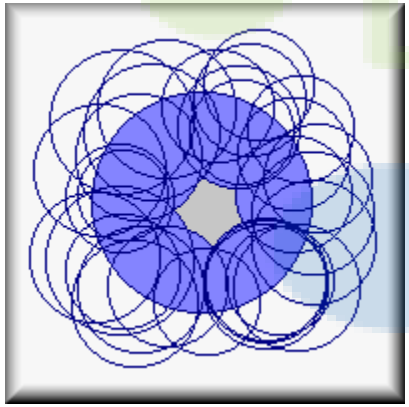
Há evidências de que uma variável está relacionada com o valor previsto, se o valor-p for menor que 0,05.

O objetivo da regressão é encontrar os coeficientes que permitem construir a equação de regressão e fazer as previsões.

Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

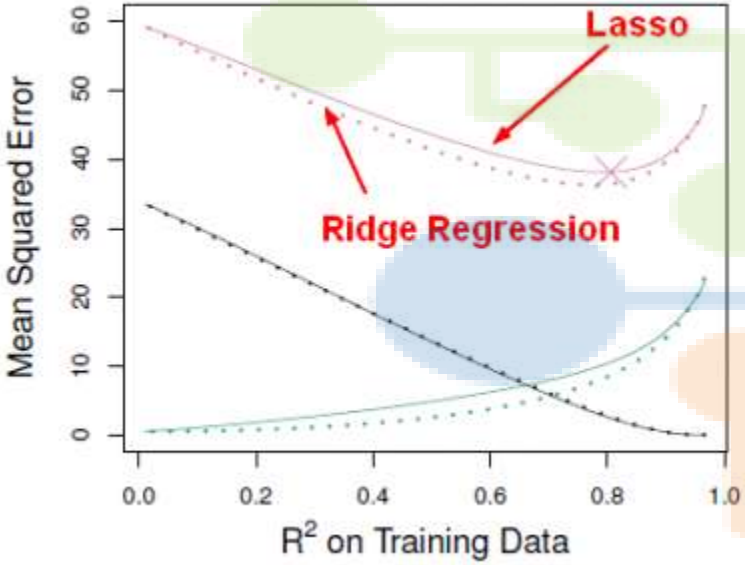
Regularização



Isso significa que muitas variáveis seriam ajustadas e o modelo ficaria super estimado, com uma variância infinita , sendo inviável o método dos mínimos quadrados

Temos basicamente 3 métodos que nos auxiliam quando o número de variáveis é maior que o número de observações:

- Seleção de um subconjunto de coeficientes
- Reduzir a dimensão
- Reduzir o valor dos coeficientes (Regularização)



Uma regressão com diversos coeficientes regressores torna o modelo como um todo muito mais complexo e pode tirar características de interpretabilidade

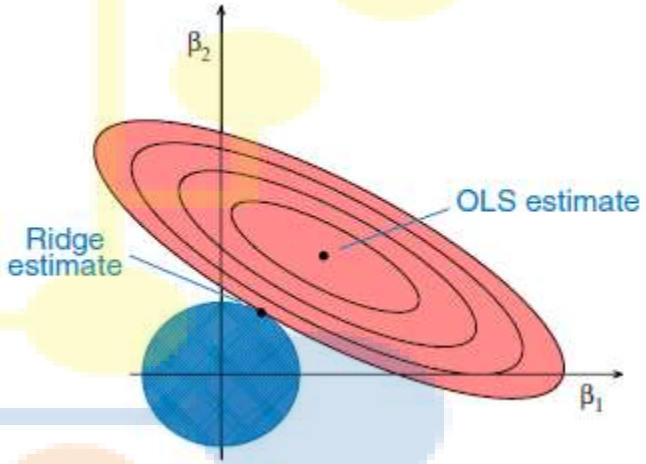
Shirinkage Methods
(Métodos de Encolhimento)

Ridge Regression

LASSO Regression
(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

Ridge Regression

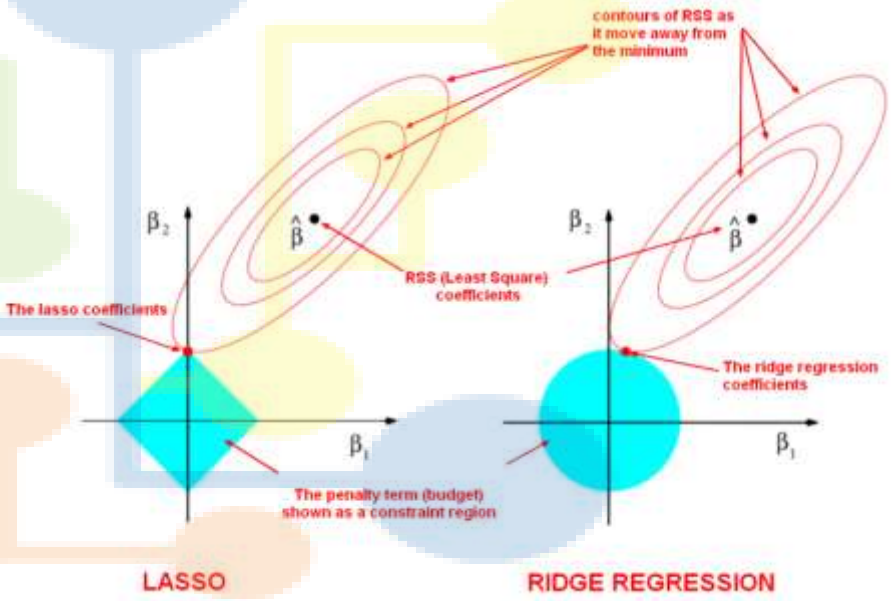
A Ridge Regression é um método de regularização do modelo que tem como principal objetivo suavizar atributos que sejam relacionados uns aos outros e que aumentam o ruído no modelo (multicolinearidade).

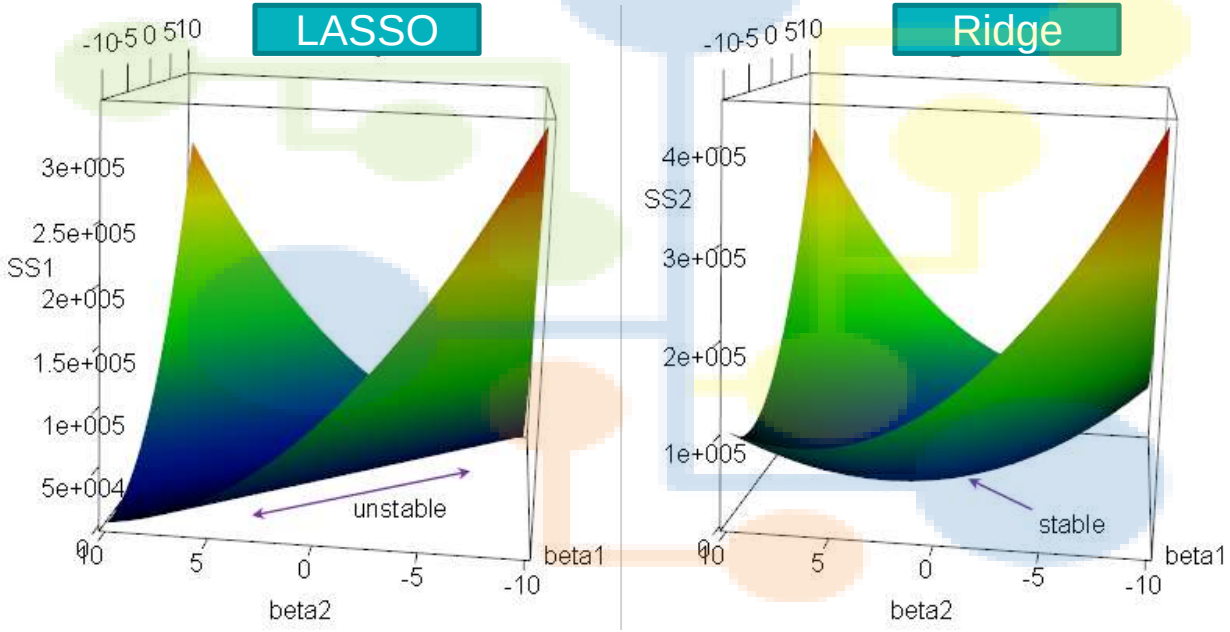


LASSO Regression

(Least Absolute Shrinkage and Selection Operator)

O LASSO tem o mesmo mecanismo de penalização dos coeficientes com um alto grau de correlação entre si, mas que usa o mecanismo de penalizar os coeficientes de acordo com o seu valor absoluto.

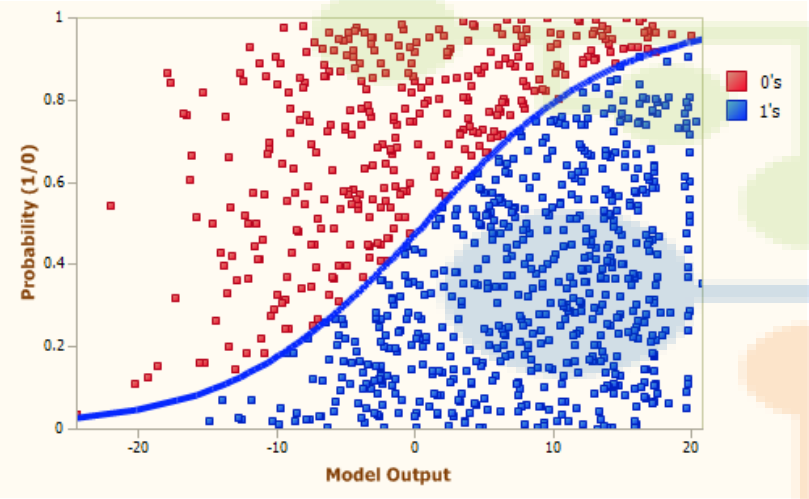



LASSO
Ridge
SS1
3e+005
2.5e+005
2e+005
1.5e+005
1e+005
5e+004
0
unstable
beta1
beta2
SS2
4e+005
3e+005
2e+005
1e+005
stable
beta1
beta2

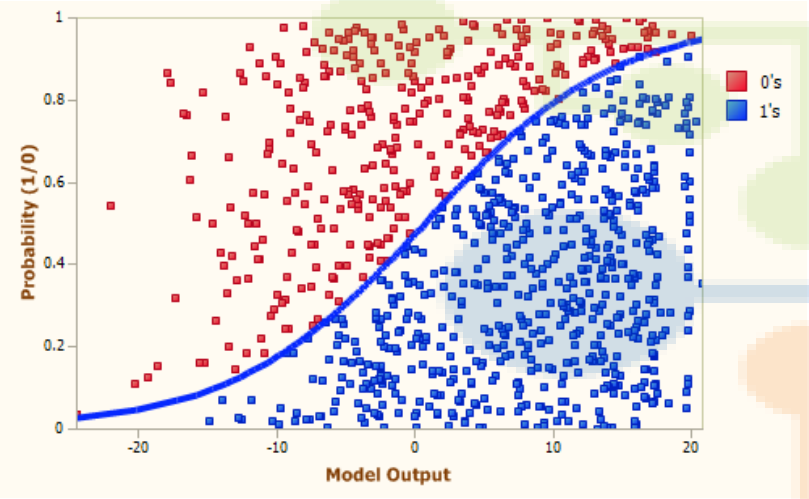
Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Regressão Logística



A regressão logística é uma técnica estatística que tem como objetivo modelar, a partir de um conjunto de observações, a relação “logística” entre uma variável resposta e uma série de variáveis explicativas numéricas (contínuas, discretas) e/ou categóricas.



A regressão logística é amplamente usada em ciências médicas e sociais, e tem outras denominações, como **modelo logístico**, **modelo logit**, e **classificador de máxima entropia.**

Na Regressão Logística, a variável resposta é binária

1 → acontecimento de interesse (sucesso)
0 → acontecimento complementar (insucesso)

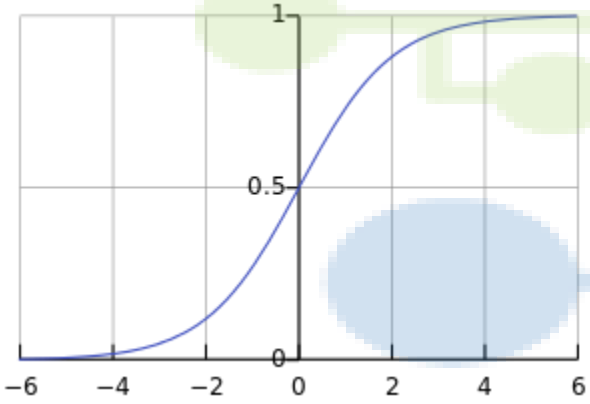
$$g(x) = \ln\left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right)$$

$$g(x) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right) = ln\left(\frac{\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}{\frac{1}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x}}}\right)$$

Transformação logit

$$g(x) = ln\left(e^{\beta_0+\beta_1 x}\right) = \beta_0 + \beta_1 x$$

Logaritmo



Regressão Logística é útil para modelar a probabilidade de um evento ocorrer como função de outros fatores. É um modelo linear generalizado que usa como função de ligação a função logit.

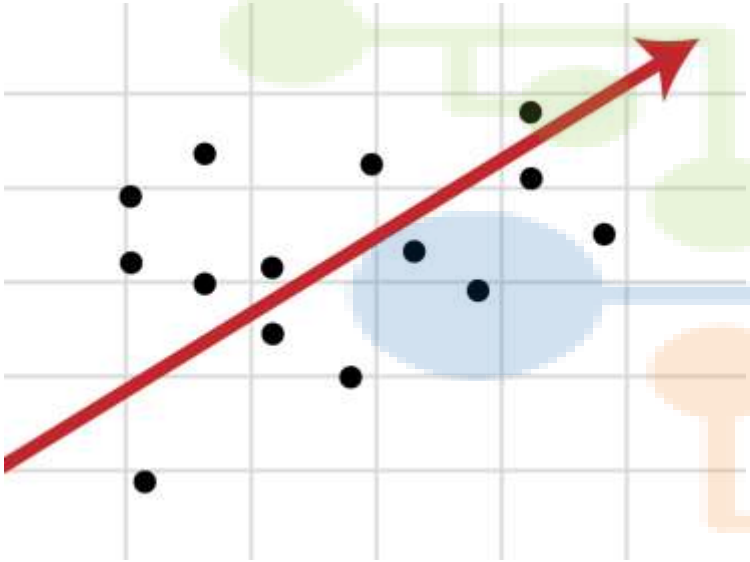
A regressão logística é utilizada em áreas tais como:

- Em medicina, permite por exemplo determinar os fatores que caracterizam um grupo de indivíduos doentes em relação a indivíduos saudáveis.
- Na área de seguros, permite encontrar frações de clientes que sejam sensíveis a determinada política securitária em relação a um dado risco particular.
- Em instituições financeiras, pode detectar os grupos de risco para a subscrição de um crédito.
- Em econometria, permite explicar uma variável discreta, como por exemplo as intenções de voto em atos eleitorais.

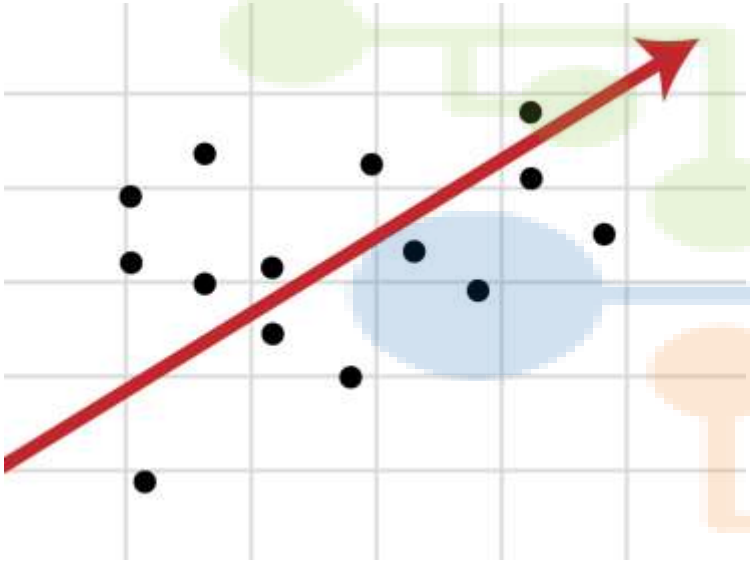
Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f

Data Science Academy

Regressão
Vantagens e Desvantagens



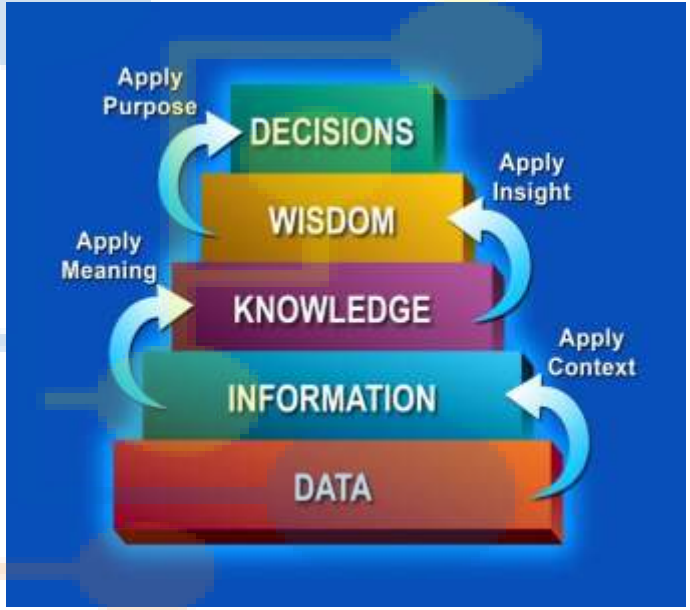
- **Simple Linear Regression**
- **Multiple Linear Regression**
- **Ridge Regression**
- **Lasso Regression**
- **Logistic Regression**
- Polynomial Regression
- Stepwise Regression
- Elastic Net Regression



Não coloque a culpa no modelo, se você não entregar o que ele está esperando

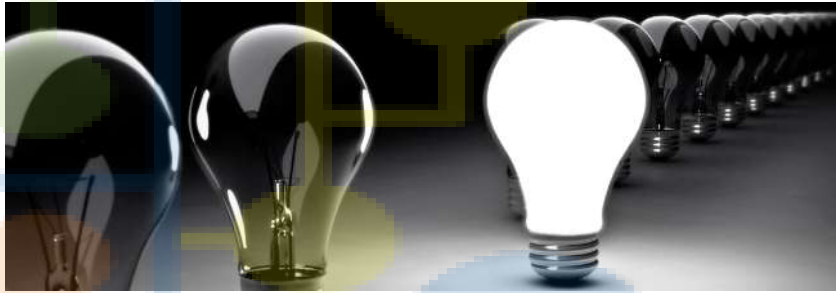
Previsão do Futuro

Apoio à Tomada de Decisão



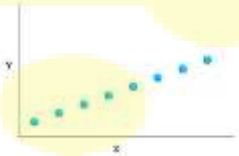
Correção de Erros

Novos Insights



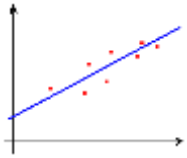
Importantes Desvantagens:

Importantes Desvantagens:



- Apenas consideram relacionamento linear
- Toma como base a média da variável dependente
- Sensível a Outliers

- Regressão Linear assume que os dados são independentes



Data Science Academy gregorio@dexpertio.com.br 6004a7f1e32fc346864dec3f