НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
"МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ"

Кафедра математического и компьютерного моделирования

Численные методы
Отчет по лабораторной работе №2
"Решение нелинейных уравнений"
Вариант 33

Студент: Волков Павел Евгеньевич
Преподаватель: Амосова Ольга Алексеевна

Группа: А-14-19

Москва
2021

Задача 2.1

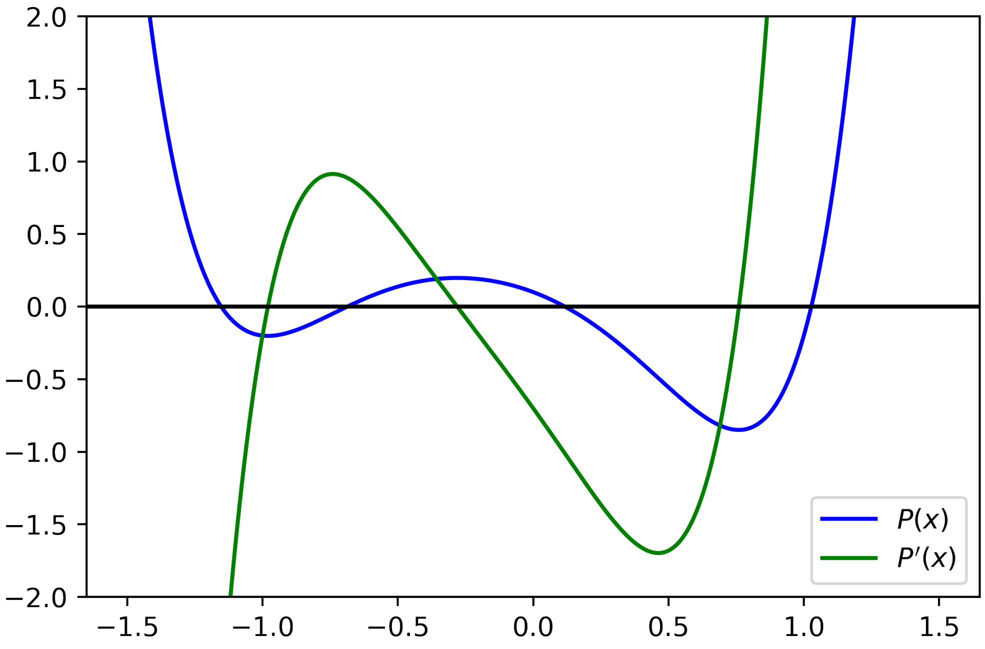
Постановка задачи

Методом простой итерации найти вещественные корни алгебраического уравнения $P(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$

$$P(x) = x^6 + 0.9x^5 - 0.2x^3 - 1.3x^2 - 0.7x + 0.1$$

Решение

Построим графики функций $P(x)$ и $P'(x)$ и найдем отрезки локализации, проверив, что на концах отрезков производная функции сохраняет знак:



Эти четыре корня будут иметь следующие отрезки локализации:

$$x_1 \in [-1.4, -1]$$
$$x_2 \in [-0.9, -0.5]$$
$$x_3 \in [0, 0.5]$$
$$x_4 \in [0.8, 1.3]$$

Проверим, что на концах отрезков локализации производная функции сохраняет знак:

```
In [42]: x = [[-1.4, -1], [-0.9, -0.5], [0, 0.5], [0.8, 1.3]]
         dp = [[dP(d[0]), dP(d[1])] for d in x]
         for i in dp: print(i)

[-13.218239999999999, -0.19999999999999996]
[0.56351, 0.5437500000000002]
[-0.7, -1.68125]
[0.6452800000000012, 30.036030000000004]
```

Для каждого корня определим итерационный параметр α и q:

$$M_1 = -0.199, m_1 = -13.218$$
$$M_2 = 0.913, m_2 = 0.544$$
$$M_3 = -0.7, m_3 = -1.698$$
$$M_4 = 30.036, m_4 = 0.645$$

Номер корня	1	2	3	4
α	-0.149051	1.372510	-0.834039	0.065186
q	0.970190	0.253698	0.416173	0.957937

Запишем результаты вычислений в таблицу:

<table>
<tr><td colspan="6">ФИО: Волков Павел Евгеньевич, Группа: А-14-19</td><td>Номер варианта: 33</td></tr>
<tr><td colspan="6">Уравнение $P(x) = x^6 + 0.9x^5 - 0.2x^3 - 1.3x^2 - 0.7x + 0.1$</td><td>Точность $\epsilon = 10^{-8}$</td></tr>
<tr><td>Корни</td><td>$[a, b]$</td><td>M_i</td><td>m_i</td><td>α</td><td>q</td><td>Число итераций</td></tr>
<tr><td>1-й: -1.15264767</td><td>$[-1.4, -1]$</td><td>-0.2</td><td>-13.2</td><td>-0.149</td><td>0.97</td><td>36</td></tr>
<tr><td>2-й: -0.686541063</td><td>$[-0.9, -0.5]$</td><td>0.913</td><td>0.544</td><td>1.37</td><td>0.254</td><td>11</td></tr>
<tr><td>3-й: 0.117006206</td><td>$[0, 0.5]$</td><td>-0.7</td><td>-1.7</td><td>-0.834</td><td>0.416</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4-й: 1.02764921</td><td>$[0.8, 1.3]$</td><td>30.0</td><td>0.645</td><td>0.0652</td><td>0.958</td><td>26</td></tr>
</table>

Задача 2.2

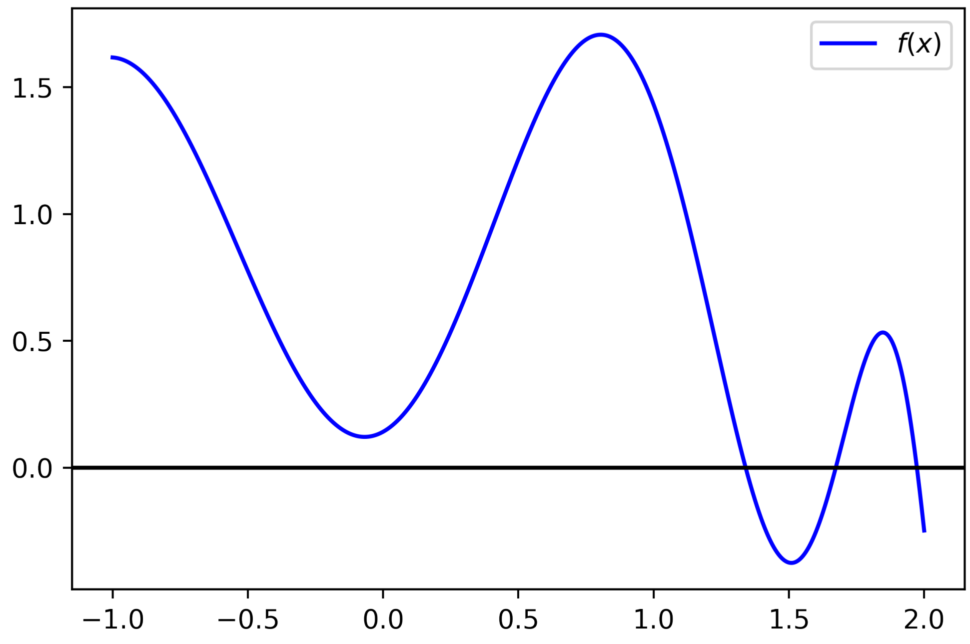
Постановка задачи

Дано уравнение $f(x) = 0$. Найти все корни уравнения с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-12}$ на указанном отрезке $[a, b]$. Для решения задачи использовать метод Ньютона и метод, указанный в индивидуальном варианте(метод секущих). Сравнить количество итераций, потребовавшихся для достижения заданной точности каждым методом.

$$f(x) = \sin 3^x - \cos 3x + 0.3, [-1, 2]$$

Решение

Построим график функции и локализуем корни уравнения $f(x) = 0$:

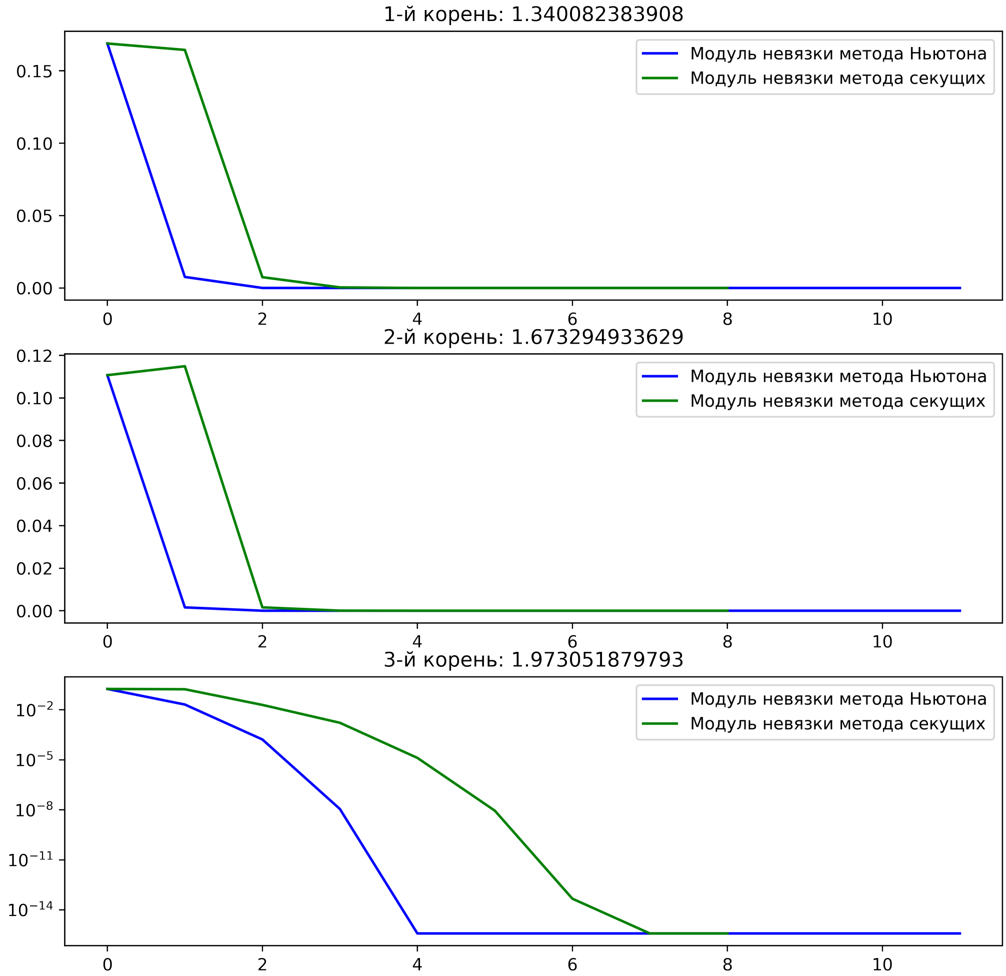


Получили 3 корня на следующих отрезках:

$$x_1 \in [1.2, 1.4]$$
$$x_2 \in [1.6, 1.8]$$
$$x_3 \in [1.9, 2]$$

Уравнение: $f(x) = \sin 3^x - \cos 3x + 0.3, [-1, 2]$ Расчетная формула метода Ньютона: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$ Расчетная формула метода секущих: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})(x^{(k)}-x^{(k-1)})}{f(x^{(k)})-f(x^{(k-1)})}$		
Задача 2.2		
Корни уравнения	Число итераций метода Ньютона	Число итераций метода секущих
1.3400823839084	6	8
1.6732949336289	5	7
1.9730518797929	6	8

Модифицируем методы для нахождения модуля невязки $r_n = |f(x_n)|$ на каждой итерации и построим сравнительные графики для каждого из корней:



На графиках наглядно продемонстрированы различия в скорости сходимости данных методов. Метод Ньютона обладает квадратичной сходимостью ($p = 2$), в то время как порядок сходимости метода секущих составляет $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$, в результате чего и получаем, что метод Ньютона "опережает"метод секущих на 1-2 итерации.

Задача 2.3

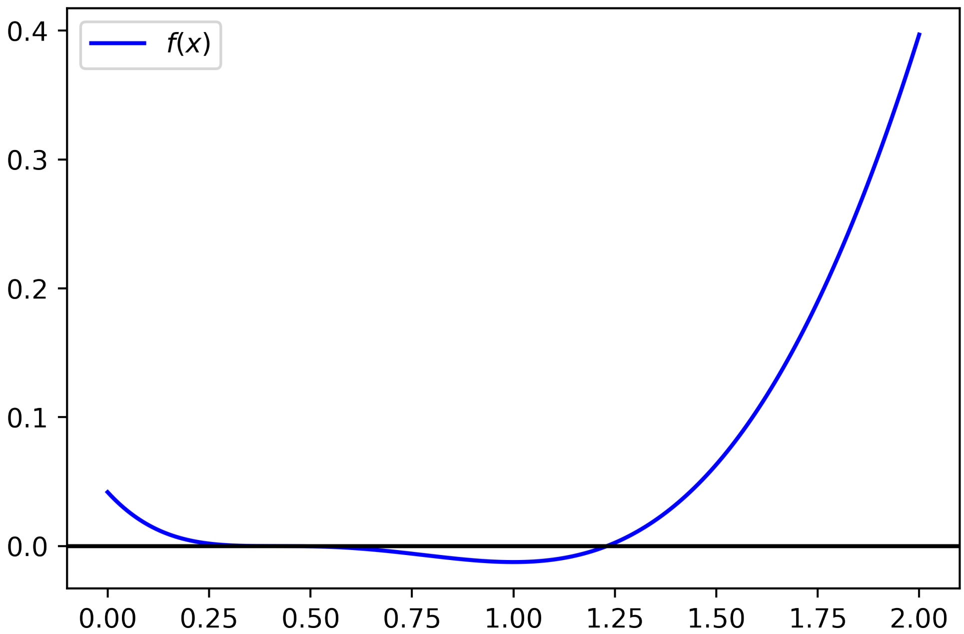
Постановка задачи

Найти корни уравнения $f(x) = 0$ и определить их кратность

$$f(x) = 8(\sqrt{2} - 1)\operatorname{arctg} x - \pi(\sqrt{2} - 1) - 2x(2\sqrt{2} - 1) + 7 - 4\sqrt{2} + x^2$$

Решение

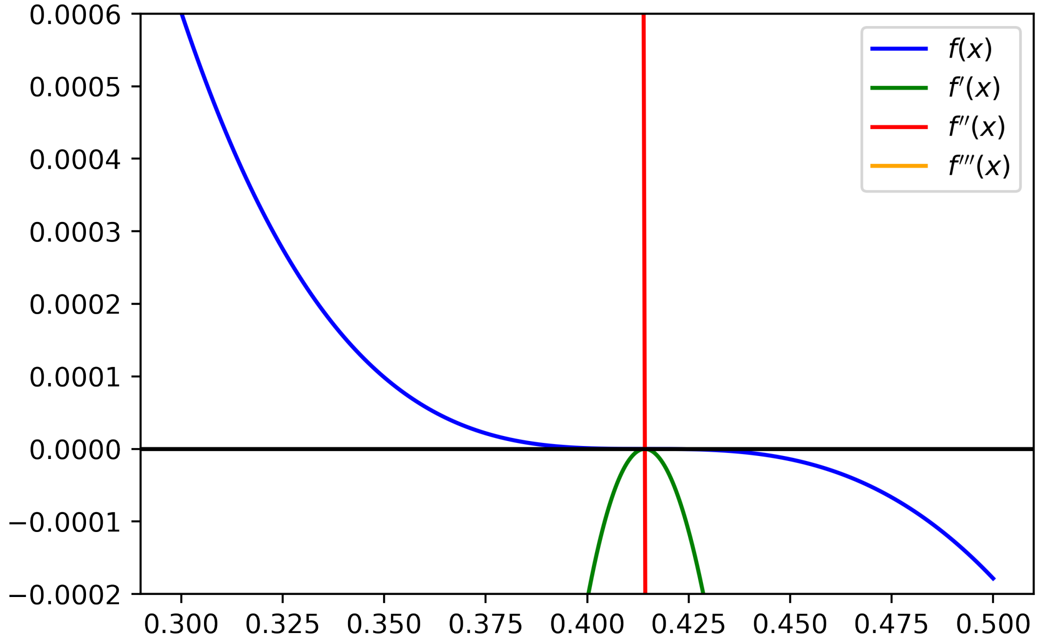
Вычислим производные функции, и определим кратность корней.



Получили 2 корня на следующих отрезках:

$$x_1 \in [0.4, 0.425]$$
$$x_2 \in [1.2, 1.3]$$

Причем, как следует из графиков производных, первый корень имеет кратность 3:



Второй корень кратности 1 легко находится с помощью метода Ньютона: $x_2 = 1.2302155532993027$

Найдем первый корень с помощью метода бисекции: $x_1 = 0.41420254713302707$ за 34 итерации. Причем ни простой метод Ньютона, ни модифицированный для кратных корней не смогли приблизиться к этому значению.

Ответ: $x_1 = 0.41420254713302707$, кратность 3; $x_2 = 1.2302155532993027$, кратность 1