ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1.
ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 2]. Варианты к задачам 1.1-1.3 даны в ***ПРИЛОЖЕНИИ 1.А.***

В **отчет** следует включить постановки задач, результаты расчетов и их анализ.

Задача 1.1. Найти значения машинного нуля, машинной бесконечности и машинного эпсилон. (см. ***Приложение 1.В***)

Задача 1.2. Исследовать поведение погрешности приближения функции F(x) частичными суммами на отрезке [a,b] .

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Используя разложения стандартных функций в ряд Тейлора в окрестности нуля, получить разложение функции F(x) по степеням x.
2. Составить процедуру, вычисляющую частичную сумму N членов ряда S(x,N).
3. Построить графики исходной функции и первых пяти частичных сумм: S(x,1),…S(x.5).
4. Составить функции, вычисляющие абсолютную погрешность $\Delta(x,N)=\left|S(x,N)-F(x)\right|$ и относительную погрешность $\delta(x,N)=\Delta(x,N)/\left|S(x,N)\right|$. Построить графики погрешностей первых пяти частичных сумм.
5. Определить количество членов ряда N, при котором величина относительной погрешности в средней точке отрезка станет меньше машинного эпсилон. Величину относительной погрешности вычислять как отношение прибавляемого члена к накопленной частичной сумме $S(x,N)$, взятое по модулю.
6. При найденном значении N построить графики абсолютной погрешности $\Delta(x,N)$ и относительной погрешности $\delta(x,N)$.
7. Составить программу округления вычислений результата до t разрядов мантиссы и произвести расчеты п. 4 с учетом округления.
8. Сравнить полученные результаты и составить отчет по задаче.

Задача 1.3. Дана функция $f(a,b,c)$. Значения переменных указаны в варианте со всеми верными цифрами. Оценить погрешность результата двумя способами: а) используя оценки погрешности для арифметических операций, б) используя общую формулу погрешностей. Результат представить в двух формах записи: с явным указанием погрешностей и с учетом количества верных цифр.
(см. ***Приложение 2.В***)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ 1

ВНИМАНИЕ! Номер варианта N для **лабораторных работ** вычисляется по следующей формуле:

1) $N=I$ для группы А-5-19;
2) $N=10+I$ для группы А-13а-19
3) $N=20+I$ для группы А-13б-19
4) $N=30+I$ для группы А-14-19
5) $N=60-I$ для группы А-16-19

(здесь I — индивидуальный номер студента по журналу).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.А

Таблица к задаче 1.1

№	$F(x)$	$[a,b]$	№	$F(x)$	$[a,b]$	№	$F(x)$	$[a,b]$
1.1.1	xe^x	$[-5,-3]$	**1.1.21**	$x\cos(x)$	$[1,4]$	**1.1.41**	$x^2(1-\cos(x))$	$[2,7]$
1.1.2	$\sin(x)$	$[0,1.6]$	**1.1.22**	$x^2(e^x-x-1)$	$[-4,0]$	**1.1.42**	$x\sin(x)$	$[-8,-5]$
1.1.3	e^x-2	$[-3,-1]$	**1.1.23**	$x\cos(x^2)$	$[1,4.5]$	**1.1.43**	x^2e^{-x}	$[-7,-4]$
1.1.4	$\ln(1+x^2)$	$[0.2,0.8]$	**1.1.24**	$\ln(1+x)-x$	$[0,0.5]$	**1.1.44**	$\ln(1+x)/x$	$[0.3,0.9]$
1.1.5	$arctg(x)/x$	$[0.1,0.9]$	**1.1.25**	$arctg(x)$	$[0,0.8]$	**1.1.45**	$arctg(x)-x$	$[0.2,0.7]$
1.1.6	$\sin(x^2)$	$[-3,0]$	**1.1.26**	$\ln(1+x^2)-x^2$	$[0.5,0.9]$	**1.1.46**	$(1-\cos(x))/x$	$[-9,-6]$
1.1.7	$x(e^x-1)$	$[-4,0]$	**1.1.27**	$\sin(x)/x$	$[1,8]$	**1.1.47**	e^x-1	$[-7,-1]$
1.1.8	$\cos(x)$	$[1,3]$	**1.1.28**	$(e^x-x-1)/x$	$[6,9]$	**1.1.48**	$1-\cos(x)$	$[-6,-2]$
1.1.9	$x\ln(1+x)$	$[0.2,0.8]$	**1.1.29**	$1-\ln(1+x)$	$[0,0.5]$	**1.1.49**	$\ln(1+x^2)/x$	$[0.3,0.9]$
1.1.10	$2x\cdot arctg(x)$	$[0.1,0.9]$	**1.1.30**	$x-arctg(x)$	$[0,0.8]$	**1.1.50**	$arctg(x^2)$	$[-0.9,0]$
1.1.11	$x(1-\cos(x))$	$[2,6]$	**1.1.31**	$2-e^{-x}$	$[2,5]$	**1.1.51**	$\sin(x)-\cos(x)$	$[-1,4]$
1.1.12	$(e^x-1)/x$	$[-7,-3]$	**1.1.32**	$1-\ln(1+x)/x$	$[0.2,0.7]$	**1.1.52**	$e^{-x}+\cos(x)$	$[1,7]$
1.1.13	$3x\sin(x)$	$[1,7]$	**1.1.33**	$e^x+\cos(x)$	$[-2,2]$	**1.1.53**	$\sin(x^2)-x^2$	$[-5,-1]$
1.1.14	$arctg(2x)$	$[-0.2,0.4]$	**1.1.34**	$arctg(x)-1/x$	$[0.1,1]$	**1.1.54**	$\sin(x)-e^{-x}$	$[-1,3]$
1.1.15	$\ln(1+x^2)$	$[-0.8,0]$	**1.1.35**	$x^2-x\sin(x)$	$[1,6]$	**1.1.55**	$\ln(1+x)+x^2/2$	$[-0.9,0]$
1.1.16	$x^2\cos(x)$	$[-5,-2]$	**1.1.36**	$e^{-x}+\sin(x)$	$[-1,5]$	**1.1.56**	$1/x+\cos(x)$	$[1,8]$
1.1.17	e^x-x-1	$[-9,-5]$	**1.1.37**	e^x-e^{-x}	$[-2,1]$	**1.1.57**	$arctg(x)/x-1$	$[0.2,0.8]$
1.1.18	$\ln(1+x)-x$ $+x^2/2$	$[0.4,0.8]$	**1.1.38**	$\sin(x)+\cos(x)$	$[-6,2]$	**1.1.58**	e^x+e^{-x}	$[-3,4]$
1.1.19	$x-\sin(x)$	$[1.5,4]$	**1.1.39**	$\ln(1+x)+1/x$	$[0.3,0.9]$	**1.1.59**	$1/x+\sin(x)$	$[1,8]$
1.1.20	$2-\cos(x)$	$[-5,0]$	**1.1.40**	$2\sin(x^2)$	$[-6,-4]$	**1.1.60**	$x+\cos(x)$	$[0,4]$

Таблица к задаче 1.2

№	$f(a,b,c)$	a	b	c	№	$f(a,b,c)$	a	b	c
1.2.1	$\frac{a}{a^2+bc}$	**0.0125**	**0.283**	**0.0187**	**1.2.31**	$\frac{a+b^2}{a^2-bc}$	**4.41**	**18.5**	**1.4**
1.2.2	$\frac{a-b}{a^2+bc}$	**14.29**	**13.81**	**10.98**	**1.2.32**	$\frac{a-c^2}{a^2+b}$	**16.5**	**4.2**	**1.23**
1.2.3	$\frac{a^2}{ab-bc}$	**12.28**	**13.21**	**12.19**	**1.2.33**	$\frac{a+b}{b-c}$	**52.31**	**48.95**	**47.81**
1.2.4	$\frac{a+b}{a^2+bc}$	**0.328**	**0.781**	**0.0129**	**1.2.34**	$\frac{ac+bc}{a^2-b^2}$	**4.81**	**4.52**	**9.28**
1.2.5	$\frac{a+c}{a^2-b^2}$	**14.85**	**15.49**	**10.1**	**1.2.35**	$\frac{ac-bc}{a^2+b^2}$	**16.21**	**16.18**	**21.23**
1.2.6	$\frac{ab}{a^2+bc}$	**12.31**	**0.0352**	**10.82**	**1.2.36**	$\frac{a^2+b^2}{abc}$	**121**	**0.324**	**1.25**
1.2.7	$\frac{a-b}{a^2+b^2}$	**12.45**	**11.98**		**1.2.37**	$\frac{a^2+b^2}{a-c}$	**25.18**	**24.98**	**23.18**
1.2.8	$\frac{a^2b}{c}$	**3.456**	**0.642**	**7.12**	**1.2.38**	$\frac{c}{a^2-b^2}$	**3.1415**	**3.1411**	**10.91**
1.2.9	$\frac{a^3b}{c}$	**1.245**	**0.121**	**2.34**	**1.2.39**	$\frac{ab^2}{c}$	**3.14**	**1.57**	**0.0921**
1.2.10	$\frac{ab+b^2}{a^2+c^2}$	**13.12**	**0.145**	**15.18**	**1.2.40**	$\frac{ac}{a^2-b^2}$	**14.85**	**15.49**	**0.16**
1.2.11	$\frac{ab^3}{c}$	**0.643**	**2.17**	**5.843**	**1.2.41**	$\frac{ac+b}{ac-b}$	**5.325**	**5.152**	**5.481**
1.2.12	$\frac{ab}{c^2}$	**0.3575**	**2.63**	**0.854**	**1.2.42**	$\frac{a+c}{a^2+b^2}$	**71.4**	**4.82**	**49.5**
1.2.13	$\frac{ab+b^2}{a^2-c^2}$	**14.91**	**0.485**	**14.18**	**1.2.43**	$\frac{a^2+b}{c}$	**4.356**	**4.32**	**0.246**
1.2.14	$\frac{ac}{a-b^2}$	**16.5**	**4.12**	**0.198**	**1.2.44**	$\frac{a^3-b}{c}$	**3.42**	**5.124**	**0.221**
1.2.15	$\frac{c^2}{a^2+b}$	**5.21**	**14.9**	**0.295**	**1.2.45**	$\frac{ab}{c^3}$	**0.5761**	**3.622**	**0.0685**
1.2.16	$\frac{2a}{a^2+2bc}$	**1.25**	**2.83**	**0.0187**	**1.2.46**	$\frac{b^2}{a-6c}$	**4.41**	**8.5**	**1.4**
1.2.17	$\frac{a-3b}{a^2+3c}$	**4.29**	**13.8**	**10.98**	**1.2.47**	$\frac{2a-c^2}{a^2+b}$	**16.5**	**4.2**	**1.23**
1.2.18	$\frac{a^2}{ab-4bc}$	**12**	**13.21**	**3.2**	**1.2.48**	$\frac{a+b}{b-c}$	**52.31**	**48.95**	**47.81**

1.2.19	$\frac{4a+b}{a^2+2bc}$	**0.328**	**1.781**	**0.0129**	**1.2.49**	$\frac{ac+bc}{a^2-b^2}$	**4.81**	**4.52**	**9.28**
1.2.20	$\frac{2a+c}{a^2-5b^2}$	**11.5**	**15.45**	**5.1**	**1.2.50**	$\frac{ac-bc}{a^2+b^2}$	**16.21**	**16.18**	**21.23**
1.2.21	$\frac{10ab}{a^2+c}$	**12.315**	**0.035 2**	**10.82**	**1.2.51**	$\frac{a^2+b^2}{abc}$	**121**	**0.324**	**1.25**
1.2.22	$\frac{a}{b^2}+c$	**12.45**	**11.98**	**8.6**	**1.2.52**	$\frac{a^2+b^2}{a-c}$	**25.18**	**24.98**	**23.18**
1.2.23	$\frac{b}{c}+a^2$	**3.456**	**0.642**	**7.12**	**1.2.53**	$\frac{c}{a^2-b^2}$	**3.1415**	**3.1411**	**10.91**
1.2.24	$a^3-\frac{b}{c}$	**1.245**	**12.1**	**2.34**	**1.2.54**	$\frac{a+b^2}{c}$	**3.14**	**1.57**	**0.0921**
1.2.25	$2b^2-\frac{a}{c^2}$	**13.123**	**1.45**	**3.18**	**1.2.55**	$\frac{ac}{a^2-b^2}$	**14.85**	**15.49**	**0.16**
1.2.26	$\frac{5a+2b^3}{c}$	**0.643**	**1.17**	**0.5843**	**1.2.56**	$\frac{ac+b}{ac-b}$	**5.325**	**5.152**	**5.481**
1.2.27	$\frac{b}{c^2-4a}$	**0.675**	**12.63**	**1.54**	**1.2.57**	$\frac{a+c}{a^2+b^2}$	**71.4**	**4.82**	**49.5**
1.2.28	$c+\frac{5ab}{c^2}$	**14.91**	**0.485**	**4.18**	**1.2.58**	$\frac{a^2+b}{c}$	**4.356**	**4.32**	**0.246**
1.2.29	$\frac{a+4c}{3ab^2}$	**16.5**	**4.12**	**0.198**	**1.2.59**	$\frac{a^3-b}{c}$	**3.42**	**5.124**	**0.221**
1.2.30	$\frac{c^2-8a}{a^2+b}$	**5.21**	**14.9**	**6.8**	**1.2.60**	$\frac{ab}{c^3}$	**0.5761**	**3.622**	**0.0685**

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. В

Задача 1.1. Постановка задачи: для пакета найти значения машинного нуля, машинной бесконечности, машинного эпсилон.

Теоретический материал. В ЭВМ для вещественных чисел используется двоичная система счисления и принята форма представления чисел с плавающей точкой $x=\mu\cdot 2^p$, $\mu=\pm(\gamma_1\cdot 2^{-1}+\gamma_2\cdot 2^{-2}+...+\gamma_t\cdot 2^{-t})$. Здесь μ - мантисса ; $\gamma_1,\gamma_2,..\gamma_t$ - двоичные цифры, причем всегда γ_1 =1, p-целое число называемое двоичным порядком. Количество *t* цифр, которое отводится для записи мантиссы, называется разрядностью мантиссы. Диапазон представления чисел в ЭВМ ограничен конечной разрядностью мантиссы и значением числа *p*. Все представимые числа на ЭВМ удовлетворяют неравенствам: $0<X_0\le|x|<X_\infty$, где $X_0=2^{-(p_{\max}+1)}$, $X_\infty=2^{p_{\max}}$. Все числа, по модулю большие X_∞, не представимы на ЭВМ и рассматриваются как машинная бесконечность. Все числа, по модулю меньшие X_0, для ЭВМ не отличаются от нуля и рассматриваются как машинный нуль. Машинным эпсилон ε_M называется относительная точность ЭВМ, то есть граница относительной погрешности представления чисел в ЭВМ. Покажем, что $\varepsilon_M\approx 2^{-t}$. Пусть $x^*=\mu\cdot 2^p$, тогда граница абсолютной погрешности представления этого

числа равна $\overline{\Delta}(x^*) \approx 2^{-t-1} \cdot 2^p$. Поскольку $\frac{1}{2} \le \mu < 1$, то величина относительной погрешности представления оценивается так:

$$\overline{\delta}(x^*) \approx \frac{\overline{\Delta}(x^*)}{|x^*|} \approx \frac{2^{-t-1} \cdot 2^p}{\mu \cdot 2^p} = \frac{2^{-t-1}}{\mu} \le \frac{2^{-t-1}}{2^{-1}} = 2^{-t}.$$

Машинное эпсилон определяется разрядностью мантиссы и способом округления чисел, реализованным на конкретной ЭВМ.

Примем следующие способы определения приближенных значений параметров, требуемых в задаче:

1. Положим $X_\infty = 2^n$, где n - первое натуральное число, при котором происходит переполнение.

2. Положим $X_0 = 2^{-m}$, где m – первое натуральное число , при котором 2^{-m} совпадает с нулем.

3. Положим $\varepsilon_M = 2^{-k}$, где k – наибольшее натуральное число, при котором сумма вычисленного значения $1+2^{-k}$ еще больше 1. Фактически ε_M есть граница относительной погрешности представления числа $x^* \approx 1$.

Результаты вычислительного эксперимента:

Машинная бесконечность $X_\infty \approx$

Машинный нуль $X_0 \approx$

Машинное эпсилон $\varepsilon_{маш} \approx$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. В

Задача 1.3. Для нахождения погрешности функции следует использовать следующие утверждения.

Утверждение 1. Абсолютная погрешность алгебраической суммы не превосходит суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

Утверждение 2. Если $\delta(a^*) << 1$ и $\delta(b^*) << 1$, то для оценки границ относительных погрешностей произведения и частного можно использовать приближенные равенства: $\delta(a^* b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$,

$\delta(a^*/b^*) \approx \delta(a^*) + \delta(b^*)$

Утверждение 3. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ - дифференцируемая функция m переменных, вычисление которой производится при приближенно заданных значениях аргументов x_1^*, x_2^*, … x_m^*.Тогда если $x^* \approx x$, то можно использовать равенства: $\Delta f(x^*) \approx \sum_{j=1}^{m} \left| \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \right| \Delta(x_j^*)$, $\delta f(x^*) \approx \frac{\Delta f(x^*)}{|f(x^*)|}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

2. Казенкин К.О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Теория погрешностей. Нелинейные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений. М, Изд. Дом МЭИ , 2009.

3.Амосова О.А., Вестфальский А.Е., Крупин Г.В. Упражнения по основам численных методов.М, Изд-во МЭИ, 2016.