FUNKCJE WYMIERNE

Własności funkcji wymiernej (na podstawie $f(x) = \frac{2}{x+3} - 4$)

1. Dziedzina funkcji

$x + 3 \neq 0$ więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2. Miejsce zerowe

* w tradycyjny sposób podstawiając za "y" wartość 0

Uwaga! Funkcja wymierna może nie posiadać miejsca zerowego. W jej wzorze brakuje liczby odpowiedzialnej za przesunięcie wykresu w pionie (w górę lub w dół)

$$f(x) = \frac{s}{x - p} + q$$

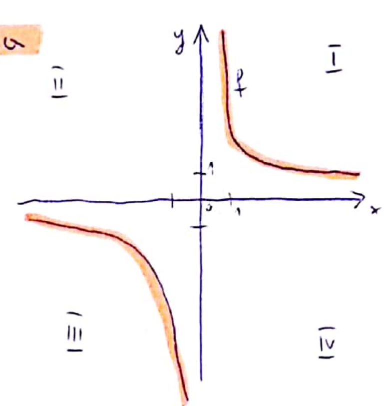
↑ jeśli $q > 0$ to w górę, $q < 0$ w dół

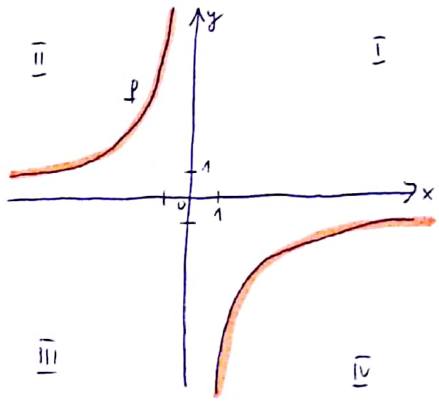
jeśli $p > 0$ to w prawo, $p < 0$ w lewo

3. Wykres funkcji - hiperbola

$y = \frac{s}{x}$ gdzie $s \neq 0$

jeśli	$s > 0$	I, III ćw
jeśli	$s < 0$	II, IV ćw





4. Asymptoty

wracając do przykładu... $f(x) = \frac{2}{x+3} - 4$

asymptota pozioma: $y = -4$

asymptota pionowa: $x = -3$

5. Zbiór wartości

* zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem asymptoty poziomej

$ZW = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

6. Monotoniczność

* dwa przedziały określone przez dziedzinę (w obydwu rosnąca lub w obydwu malejąca)

$D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) \searrow$ w przedziałach $(-\infty, -3)$ i $(-3, +\infty)$

FUNKCJA HOMOGRAFICZNA + RÓWNANIA WYMIERNE

Postać ogólna: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ → Jeśli: $ad-bc\neq 0$, $c\neq 0$ → to jest to **funkcja homograficzna** → więc można ją przekształcić na → Postać kanoniczna: $f(x)=\frac{a}{x-p}+q$

$$\boxed{f(x)=\frac{-3x+4}{x+2}}=\frac{-3(x+2)+10}{x+2}=-3+\frac{10}{x+2}=\boxed{\frac{10}{x+2}-3}$$

Prosta nierówność wymierna... **nie zapominaj o założeniu!**

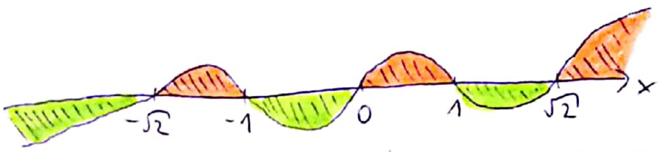
$$\frac{10x+16}{x+1}\leq 0 \to \left(x+\frac{8}{5}\right)(x+1)\leq 0 \wedge x\neq -1$$

PAMIĘTAJ O WYRZUCANIU EL. WYKLUCZONYCH Z DZIEDZINY ZE ZBIORU WARTOŚCI F(x)

NAJSZYBSZY SPOSÓB NA NIERÓWNOŚCI WYMIERNE

$$\frac{x^2-2}{x^3-x}\geq 0 \Rightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x)(x-1)(x+1)\geq 0$$

rysowanie wykresu - patrz notatka 1.4



Zadanie Wyznacz wszystkie wartości parametru b dla których równanie $\frac{x^2-(4b+3)x+3b^2+3b}{x-2}=0$ ma dwa rozwiązania różnych znaków

1. Rozpisuję warunki:

1	$D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ więc wywalić 2'kę!
2.	$\Delta>0$
3.	$x_1\cdot x_2<0$

← BARDZO WAŻNY WARUNEK !!!

WARUNEK 1 - PODSTAWIAM 2 POD X'A

$0=4-8b-6+3b^2+3b=3b^2-5b-2$

$\Delta=49$

$b_1=-\frac{1}{3}$ $b_2=2$ więc

b nie może być równe $-\frac{1}{3}$ i 2

WARUNEK 3 - WZORY VIETE'A

$x_1\cdot x_2<0$

$3b(b+1)<0$ więc

$b\in(-1,0)$

WARUNEK 2 - $\Delta>0$

$\Delta=4b^2+12b+9>0$

$\Delta_b=0$ $\left(b+\frac{3}{2}\right)^2>0$

więc $b\neq-\frac{3}{2}$

TYLKO GDY NAWIAS =0 TO WARUNEK NIESPEŁNIONY

$$b\in\left(-1,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(-\frac{1}{3},0\right)$$

Wyznacz te wartości parametru m, dla których równanie $\frac{x^2+8x+m}{x+3}=0$ ma jedno rozwiązanie.

1. Określenie dziedziny $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

WARUNKI:		
1) x^2+8x+m ma jeden pierwiastek x_0 i $x_0 \neq -3$	$\Delta = 0$	$x_0 \neq -3$
LUB		
2) x^2+8x+m ma dwa pierwiastki i jeden z nich $= -3$	$\Delta > 0$	$(-3)^2+8\cdot(-3)+m=0$ więc $m=15$

Wyznacz zbiór wartości funkcji określonej wzorem $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7}$ dla $x\in\mathbb{R}$.

Dla jakich wartości parametru m równanie ma rozwiązania?

$$\frac{x+3}{x^2+7}=m \quad \text{mnożę}$$

$$x+3=m(x^2+7)$$

$$mx^2-x+(7m-3)=0$$

1. SPRAWDZENIE CO SIĘ DZIEJE JEŚLI JEST LINIOWA

$m=0 \quad -x-3=0$ czyli są rozwiązania

2. JEŚLI $m\neq 0$ TO JEST RÓWNANIE KWADRATOWE

więc $\Delta \geq 0$ musi być.

$$m\in\left\langle -\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right\rangle$$

PAMIĘTAJ :)

JEŚLI DZIEDZINA WYRAŻENIA TO ZB. LICZB RZECZYWISTYCH

↓

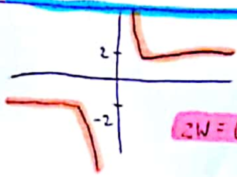
MIANOWNIK NIE MA ROZW.

(ZADANIE)

Zbiór wartości funkcji: $\frac{|x+3|+|x-3|}{x}$

WYSTARCZY NAMALOWAĆ WYKRES FUNKCJI:

$$\begin{cases} 2 & \text{dla } x\geq 3 \\ \frac{6}{x} & \text{dla } x\in(-3,0)\cup(0,3) \\ -2 & \text{dla } x\leq -3 \end{cases}$$



$ZW=(-\infty;-2)\cup(2,+\infty)$

NALEŻY PAMIĘTAĆ

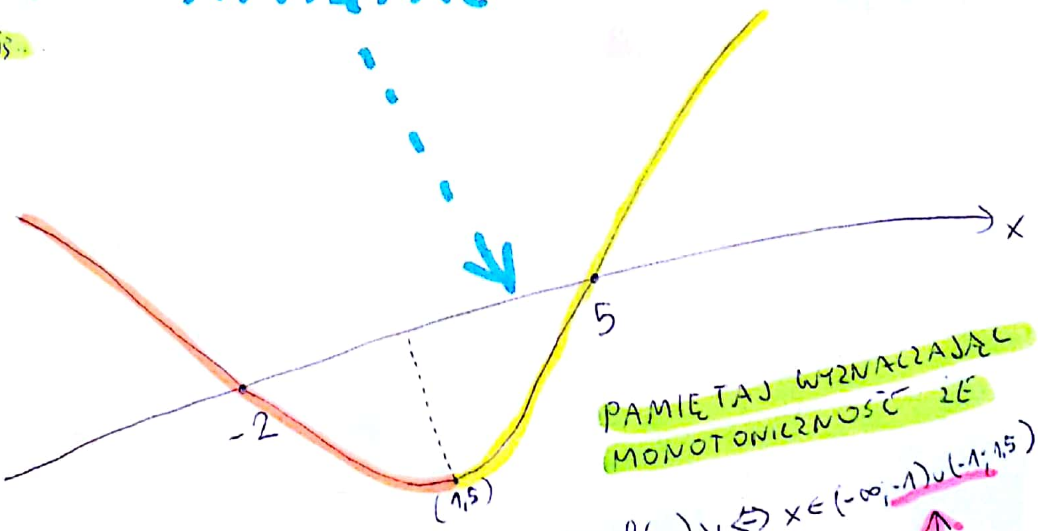
Wyobraź sobie, że masz funkcję

$$y=\frac{x^3-2x^2-13x-10}{x+1}$$

którą przekształcasz do postaci

$$y=(x+2)(x-5)$$

ale z założeniem, że $x\neq 1$!



PAMIĘTAJ WYZNACZAJĄC MONOTONICZNOŚĆ ŻE

$$f(x)\searrow \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1{,}5)$$

WYWALIĆ JEDYNKĘ :)

ORAZ CO JEŚLI TO F. LINIOWA $(a=0)$

FUNKCJA WYMIERNA? PAMIĘTAJ O DZIEDZINIE!!!