Graniastosłupy

OBJĘTOŚĆ $V = P_p \cdot H$ (ogólnie)

POLE CAŁKOWITE $P_c = 2P_p + P_b$

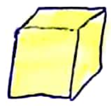
Sześciany

PRZEKĄTNA $d = a\sqrt{3}$

OBJĘTOŚĆ $V = a^3$

POLE CAŁKOWITE $P_c = 6a^2$

* 6 ścian
* 12 krawędzi
* 8 wierzchołków

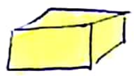


wszystkie ściany kwadraty

Prostopadłościany

OBJĘTOŚĆ $V = a \cdot b \cdot H$

POLE CAŁKOWITE $P_c = 2ab + 2bH + 2aH$



wszystkie ściany prostokąty

Ostrosłupy

OBJĘTOŚĆ $V = \frac{1}{3} P_p \cdot H$

POLE CAŁKOWITE $P_c = P_p + P_b$

Ostrosłupy trójkątne

* ostrosłup prawidłowy trójkątny

PODSTAWA : TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY

BOKI : TRÓJKĄTY RÓWNORAMIENNE

* czworościan foremny

WSZYSTKIE ŚCIANY RÓWNOBOCZNE

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $P_c = a^2\sqrt{3}$

METODY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ Z GEOMETRII ~~PŁASKIEJ~~ PRZESTRZENNEJ

* wyjęcie wszystkich trójkątów do 2D i szukanie zależności [trójkąt charakterystyczny, trójka pitagorejska, równoboczny, równoramienny]

* porównywanie pól tego samego trójkąta patrząc na inne wysokości

* porównywanie tangensów, sinusów itp.

* dzielenie kąta na dwa kąty, jeśli mam trójkąt równoramienny - powstaną dwa prostokątne ($\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$)

* aby obliczyć cosinus kąta NIE-prostokątnego mogę użyć tw. cosinusów

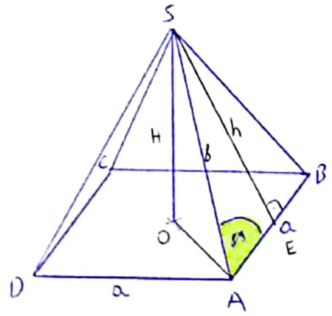
* jeśli jest wysokość poprowadzona na dany bok to mogę przyjąć, że ten bok jest podstawą

* „kulę przetopiono na stożek" = równe objętości.

* walec wpisany w stożek? Rysuję przekrój w 2D, daje mi to masę... trójkątów podobnych!

* Licząc pole przekroju, który jest pięciokątem mogę go podzielić na trapez i trójkąt (równoramienne).

14) STEREOMETRIA 2



MAM:
* KĄT MIĘDZY KRAWĘDZIĄ PODSTAWY A KRAW. BOCZNĄ
* DŁUGOŚĆ KRAWĘDZI PODSTAWY

PRAGNĘ:
* OBJĘTOŚĆ $V=\frac{1}{3}a^2\cdot H$ → **PRAGNĘ H** (wyrazić przy pomocy a i kąta α który mam)

[redacted]

① WYRAŻAM KRAWĘDŹ b przy pomocy cosinusa i krawędzi podstawy

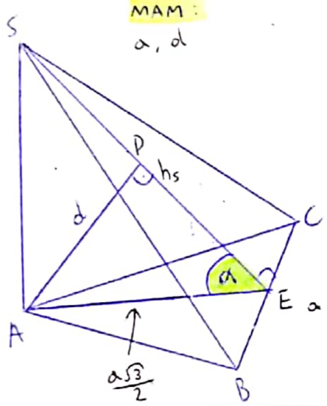
z AES $\frac{\frac{a}{2}}{b}=\cos\alpha \Rightarrow b=\frac{a}{2\cos\alpha}$

② ROZPISUJĘ PITAGORASA Z AOS (mając b)

z AOS: $H^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow H=\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}$

PAMIĘTAJ

WNIOSEK: NALEŻY DĄŻYĆ DO OKREŚLENIA WYBRANEJ KRAWĘDZI Z RÓŻNYCH TRÓJKĄTÓW



MAM: a, d

① OBRACAM TRÓJKĄT ABY JEGO PODSTAWĄ BYŁ Δ BCS

wtedy $V=\frac{1}{3}\cdot P_{\Delta BCS}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot a\cdot h_s\cdot d$ BRAKUJE MI TYLKO h_s !!!

② WYRAŻAM (SIN i COS) NOWOUTWORZONEGO KĄTA α Z RÓŻNYCH TRÓJKĄTÓW

z AED: $\sin\alpha=d:\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{2d}{a\sqrt{3}}$ | z AES: $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{3}}{2}:h_s \Rightarrow h_s=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\cos\alpha$

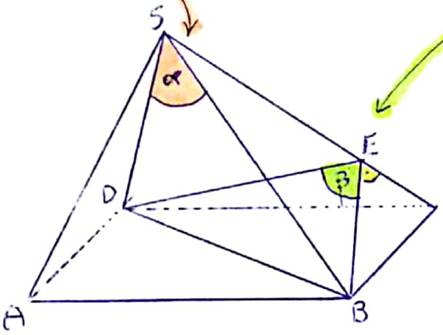
③ PRZEKSZTAŁCAM [SIN → COS] Z JEDYNKI

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin\alpha}=\sqrt{1-\frac{4d^2}{3a^2}}=\frac{\sqrt{3a^2-4d^2}}{a\sqrt{3}}$; $h_s=\frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2-4d^2}} \Rightarrow V=\frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2-4d^2}}$

WNIOSKI:
NIE MUSI BYĆ PODANEGO KĄTA TRÓJKĄTA ABY WYZNACZAĆ F. TRYGONOMETRYCZNE (MOGĘ JE WYZNACZYĆ DLA DOWOLNEGO W CELACH PORÓWNAWCZYCH)

OSTROSŁUPY PRAWIDŁOWE CZWOROKĄTNE

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym cosinus kąta między krawędziami bocznymi które nie są sąsiednie jest równy $\frac{4}{7}$, a pole koła opisanego na podstawie ostrosłupa jest równe 6π. Oblicz cosinus kąta β między sąsiednimi bocznymi ścianami ostrosłupa.



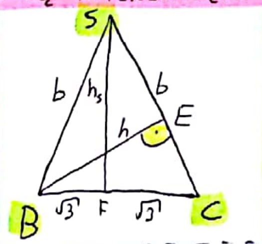
① Pole koła opisanego na podstawie - wyciągam promień

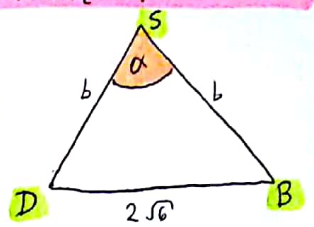
$\pi r^2 = 6\pi \Rightarrow r = \sqrt{6} \Rightarrow |DB| = 2\sqrt{6}$ (PRZEKĄTNA PODSTAWY)

② Z powyższego otrzymuję bok podstawy

PRZEKĄTNA $2\sqrt{6}$, BOK: $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2\sqrt{3}$

③ PLAN BOJOWY: RYSUJĘ INTERESUJĄCE TRÓJKĄTY!





⑥ POZNAĆ $\cos\beta$ ⟵ ⑤ POZNAĆ h ⟵ ④ POZNAĆ B

④ z tw. cosinusów

$2b^2 - 2b^2 \cdot \frac{4}{7} = 24$

znam $\cos\alpha$ — znam bok $|DB|$: $(2\sqrt{6})^2 = 24$

$b = 2\sqrt{7}$

⑤ I Wyznaczam h_s z PITAGORASA

$\sqrt{3}^2 + h_s^2 = (2\sqrt{7})^2$

$h_s = 5$

II Porównuję pole z wysokością h_s do pola z wysokością h (PODWOJONE)

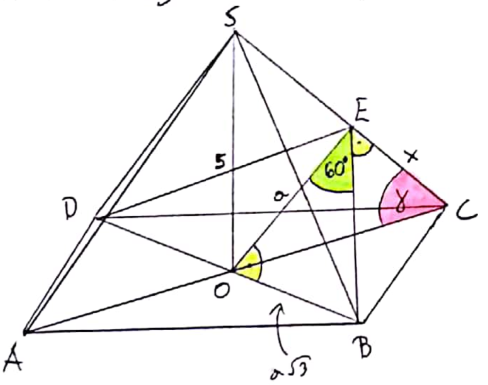
$2\sqrt{3} \cdot 5 = h \cdot 2\sqrt{7}$ stąd $h = 5\sqrt{\frac{3}{7}}$

⑥ z tw. cosinusów

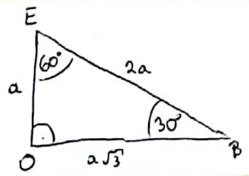
$(2\sqrt{6})^2 = 2h^2 - 2h^2\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = -\frac{3}{25}$

(Odp.)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDS o podstawie ABCD wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



① ZAUWAŻAM TRÓJKĄT „CHARAKTERYSTYCZNY" OBE



Pole rombu to $\frac{e \cdot f}{2}$ stąd $\frac{(2a\sqrt{3})^2}{2} = P_p$

② UŻYWAM WZORU NA OBJĘTOŚĆ

$V = \frac{5}{3} \cdot P_p = \frac{5}{3} \cdot \frac{(2a\sqrt{3})^2}{2} = 10a^2$

③ UŻYWAM PITAGORASA DO OBLICZENIA x

$x^2 + a^2 = (a\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$

④ PORÓWNUJĘ TANGENSY

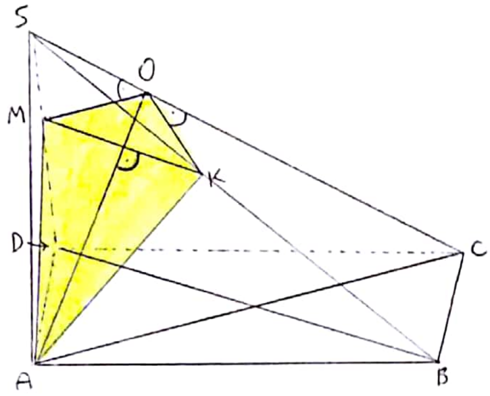
z ΔOCE: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ⟷ z ΔOCS: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{5}{a\sqrt{3}}$ $\Rightarrow a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

⑤ PODSTAWIAM DO WZORU

$V = 10a^2 = 10 \cdot \frac{50}{3} = \frac{500}{3}$ (Odp.)

OSTROSŁUP / PŁASZCZYZNA I SZEŚCIAN

Podstawą ostrosłupa ABCDS jest kwadrat o boku długości $\sqrt{6}$. Krawędź boczna AS, równej o długości $\sqrt{6}$ jest prostopadła do podstawy. Przez wierzchołek A poprowadzono przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznej CS. Oblicz pole otrzymanego przekroju

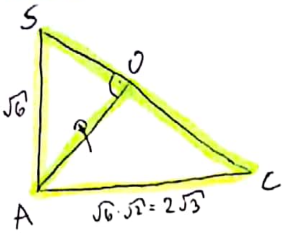


① RYSUNEK PRZEKROJU

Przekątne przekroju są prostopadłe bo:
* ΔACS jest prostopadły do podstawy
* BD jest równoległy do MK

PLAN: WYZNACZYĆ PRZEKĄTNE TEGO DELTOIDU (PŁASZCZYZNY)

② WYZNACZAM PRZEKĄTNĄ p [PORÓWNUJĘ POLE Δ Z DWÓCH STRON]

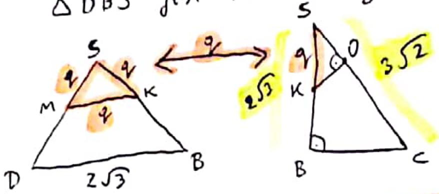


$$P_{\Delta ACS} \to \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot p = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$$

$$p = 2$$

③ WYZNACZAM PRZEKĄTNĄ q [PORÓWNUJĘ COS TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH]

ΔDBS jest równoboczny



$$\Delta KOS \overset{kkk}{\sim} \Delta CBS$$

$$\frac{\sqrt{2}}{q} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

$(\cos\sphericalangle BSC)$

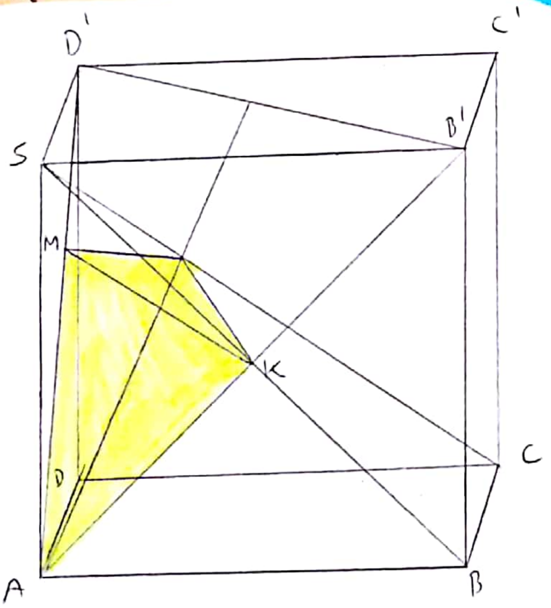
stąd: $q = \sqrt{3}$

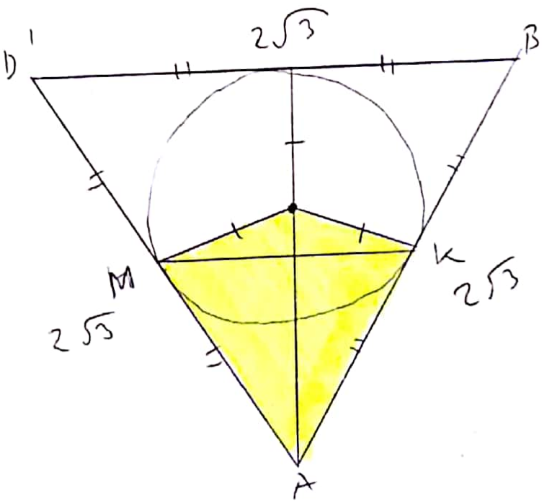
TO SAMO KRÓCEJ !!!

④ WYZNACZAM POLE

$$P_{prz} = \frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3} \quad (\text{Odp.})$$

① RYSUJĘ SZEŚCIAN

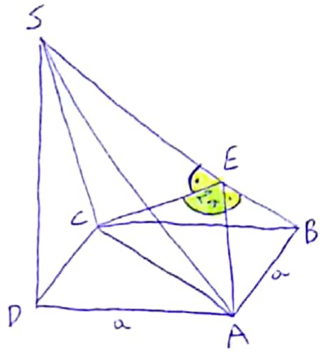




$$P_{płaszczyzny} = \frac{1}{3}P_{AB'D'} = \frac{1}{3}\cdot\frac{(2\sqrt{3})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad (\text{Odp.})$$

ROZSZERZONA PŁASZCZYZNA DZIELI SIĘ NA 3 CZĘŚCI TAKIE SAME, A JEDEN BOK ZNAM, STĄD ROZW. W JEDNEJ LINII

Podstawą ostrosłupa ABCDS jest kwadrat ABCD. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

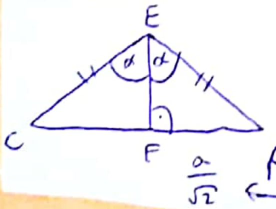


① PODZIAŁ KĄTA NA $2\cdot\alpha$

PONIEWAŻ TRÓJKĄT ΔECA JEST RÓWNORAMIENNY, chcę stworzyć dwa trójkąty prostokątne!

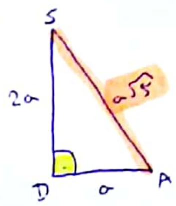
z nich obliczę $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ co da mi $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$



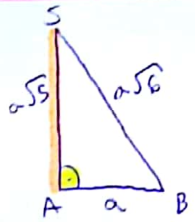
$\frac{a}{\sqrt{2}}$ ← pół przekątnej kwadratu

② WYJMUJĘ TRÓJKĄTY I LICZĘ Z PITAGORASA



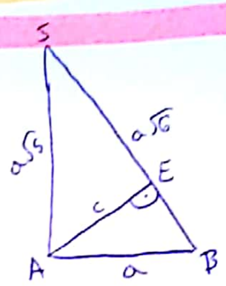
obliczone AS →

podstawiam do kolejnego



obliczone BS →

liczę $|AE| = c$



PORÓWNUJĘ POLA Z RÓŻNYCH WYSOKOŚCI (2.5)

$P_{\Delta ABS}$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{5} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}\cdot c$

$\Downarrow$

$c = a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

③ ODCZYTUJĘ SINUS A Z OBRAZKA, LICZĘ COS I PODSTAWIAM DO WZORU NA $\sin 2\alpha$

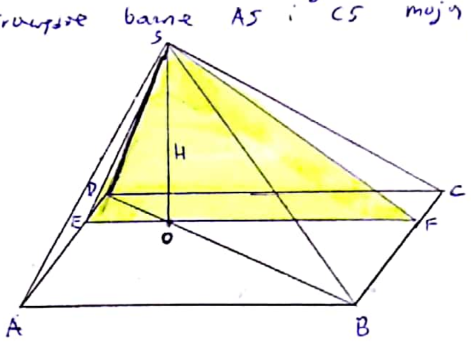
$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ (Odp.)

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat ABCD o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde ~~długie~~ równe 187,5. Ściany boczne ADS i CDS też mają jednakowe pola, każde równe 250. Oblicz objętość tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AS i CS mają równe długości.

W ZALEŻNOŚCI OD POLA WYSOKOŚĆ PRZESUWA SIĘ PO PRZEKĄTNEJ



① RYSUJĘ PŁASZCZYZNĘ PRZECHODZĄCĄ PRZEZ PRZEKĄTNĄ BLIŻEJ PUNKTU D

* skoro jest to trójkąt mający wysokość ostrosłupa to ŚCIANY BOCZNE TO WYSOKOŚCI ŚCIAN BOCZNYCH OSTROSŁUPA!

② WYZNACZAM WYSOKOŚCI ŚCIAN BOCZNYCH

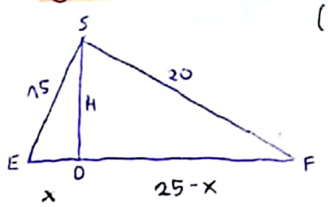
$P_{DCS} = 250 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot h_1 \Rightarrow h_1 = 20$

$P_{ABS} = 187{,}5 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot h_2 \Rightarrow h_2 = 15$

③ RYSUJĘ I MYŚLĘ CO DALEJ

SZUKAM TYLKO H

$V = \frac{1}{3}\cdot 25^2\cdot H$



(NIEOFICJALNIE WIDAĆ, ŻE SĄ TO TRÓJKI PITAGOREJSKIE)

WYZNACZAM OFICJALNIE

$\begin{cases} H^2 + (25-x)^2 = 20^2 \\ H^2 + x^2 = 15^2 \end{cases} \Rightarrow x = 9 \Rightarrow H = 12$

$\Downarrow$

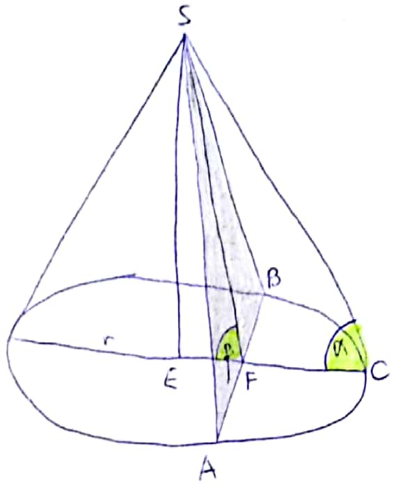
$V = \frac{1}{3}\cdot 25^2\cdot 12 = 2500$

(Odp.)

STOŻEK

W stożku o promieniu podstawy r tworząca jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przez wierzchołek stożka poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\beta > \alpha$.

Wykaż, że pole otrzymanego stożka jest równe $\dfrac{r^2 \, tg\alpha \sqrt{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}}{\cos\alpha \, \sin^2\beta}$



Znane długości

r - promień

α - kąt nachylenia

β - kąt nachylenia

① LICZĘ DŁUGOŚĆ WYSOKOŚCI I TWORZĄCEJ STOŻKA

Znam promień i kąt → pełny cosinusa

$\cos\alpha = \dfrac{EC}{SC} \Rightarrow SC = \dfrac{r}{\cos\alpha}$ (tworząca)

$\sin\alpha = \dfrac{SE}{SC} \Rightarrow SE = \sin\alpha \cdot SC = \dfrac{r\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} = r\,tg\alpha$ (wysokość)

② LICZĘ DŁUGOŚĆ WYSOKOŚCI PRZEKROJU

Piszę sinusa dla pełny.

$\dfrac{SE}{SF} = \sin\beta \Rightarrow SF = \dfrac{SE}{\sin\beta} = \dfrac{r\,tg\alpha}{\sin\beta}$

③ LICZĘ DŁUGOŚĆ PODSTAWY PRZEKROJU

Używam Pitagorasa → (znam tworzącą i wysokość przekroju)

$AF = \sqrt{SA^2 - SF^2} = \sqrt{\left(\dfrac{r}{\cos\alpha}\right)^2 - \left(\dfrac{r\,tg\alpha}{\sin\beta}\right)^2} = r\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \dfrac{tg^2\alpha}{\sin^2\beta}} = \dfrac{r\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha \cdot \sin\beta}$

④ LICZĘ POLE - CZYLI TO DO CZEGO DĄŻĘ

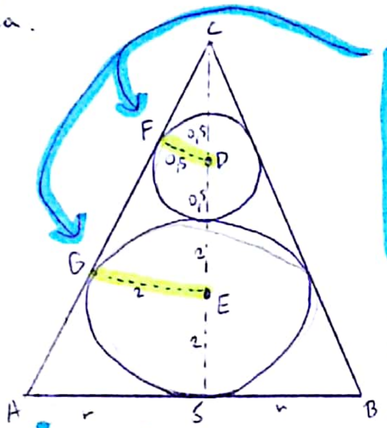
$P = \frac{1}{2} AB \cdot SF = AF \cdot SF = \dfrac{r\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} \cdot \dfrac{r\,tg\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{r^2\,tg\alpha\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\cos\alpha \cdot \sin^2\beta}$

⑤ UDOWADNIAM ŻE $\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = \sin^2\beta - \sin^2\alpha$

$\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) = (\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta)(\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta)$
$= \sin^2\beta - \sin^2\alpha$

KONIEC :)

Dwie kule mające średnice 4cm i 1cm wpisano w stożek w ten sposób, że większa jest styczna do podstawy i powierzchni bocznej stożka, zaś mniejsza do powierzchni bocznej stożka i większej kuli. Oblicz pole powierzchni tego stożka.



WAŻNE!

Kluczowym spojrzeniem na ten rzut jest zauważenie promieni kąt idących na tworzącą stożka.

DAJE TO NIESAMOWITE MOŻLIWOŚCI PORÓWNYWANIA TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH

WAŻNE!

ASC ~ DFC

[bo też ma jeden kąt 90° i ten sam kąt przy wierzchołku C]

PO PROSTU JEST NA ODWRÓT. Zauważaj takie sytuacje!

(1) ZAUWAŻAM PODOBIEŃSTWO CDF i CEG I LICZĘ h

$$\frac{FD}{GE} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{h-\frac{9}{2}}{h-2} \Rightarrow h = \frac{16}{3}$$

(2) ZAUWAŻAM PODOBIEŃSTWO ASC i DFC → LICZĘ l i r

$CD = \frac{16}{3} - \frac{9}{2} = \frac{5}{6}$

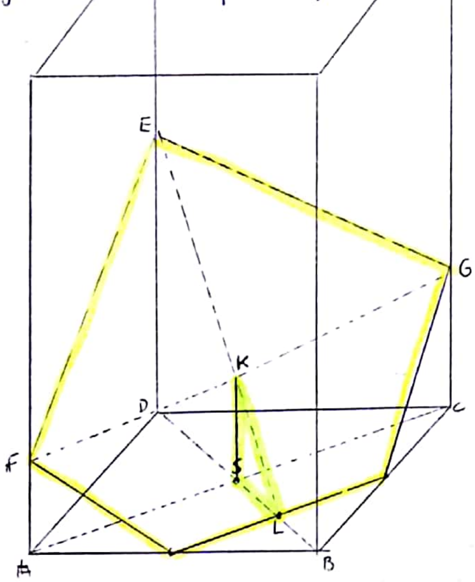
$CF \Rightarrow$ PITAGORAS $\Rightarrow = \frac{2}{3}$

$\frac{SA}{CS} = \frac{FD}{CF} \Rightarrow r = SA = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \cdot \frac{16}{3} = 4$

$\frac{CA}{AS} = \frac{CD}{FD} \Rightarrow l = CA = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} \cdot 4 = \frac{20}{3}$

(3) LICZĘ $P_c = \pi r^2 + \pi r l = \frac{128\pi}{3}$

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 6cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy pod kątem 60°. Zaznacz na rysunku ten przekrój i oblicz jego pole.



(1) PRZEKRÓJ TO PIĘCIOKĄT | SUMA TRAPEZU RÓWNORAMIENNEGO ORAZ TRÓJKĄTA RÓWNORAMIENNEGO → LICZĘ WYSOKOŚCI

wysokość trapezu

$\frac{SL}{KL} = \cos 60°$ (ZAPISUJĘ COSINUSA JAKO STOSUNEK)

$KL = \frac{SL}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} 6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{[\frac{1}{4} \text{przekątnej kwadratu}]}{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2}$

(2) TWIERDZENIE TALESA W ODLE

$\frac{EK}{KL} = \frac{DS}{SL} = 2 \Rightarrow EK = 6\sqrt{2}$ wysokość trójkąta

(3) LICZĘ TRAPEZ (POLE)

$FG = AC = 6\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$ } podstawy $\Rightarrow P_{\triangle} = 27$

$KL = 3\sqrt{2}$ } wysokość

(4) LICZĘ TRÓJKĄT (POLE)

$P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 36$

(5) PODAJĘ

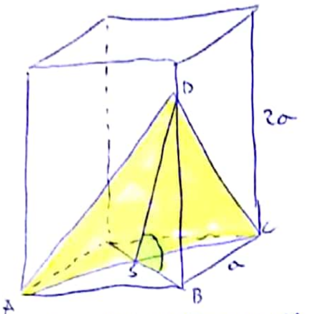
$P_1 + P_2 = 27 + 36 = 63$

↑ CIEKAWY PRZYKŁAD STWORZENIA TRÓJKĄTÓW POPRZECZNYCH z płaszczyzny prowadzę pionową linię do środka podstawy

WAŻNE

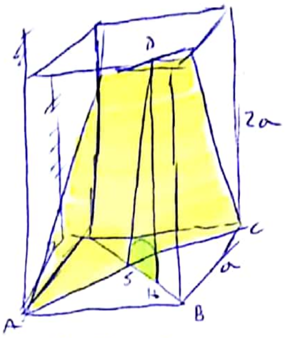
(14) STEREOMETRIA | F

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej a i wysokości dwa razy dłuższej od krawędzi podstawy, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Oblicz pole otrzymanego przekroju. Rozważ wszystkie przypadki.

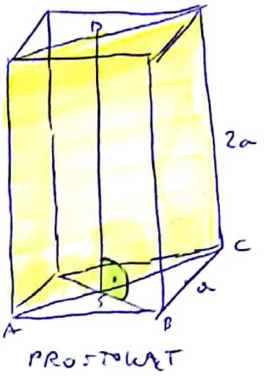


w zależności od kąta α

TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY



TRAPEZ RÓWNORAMIENNY



PROSTOKĄT

I Przypadek – PROSTOKĄT tj. $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$

Pole $P = AC \cdot AE = a\sqrt{2} \cdot 2a = 2\sqrt{2}a^2$

II Przypadek – TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY

Podstawa $AC = a\sqrt{2}$

Wysokość ? ⇒ UŻYWAM $\xrightarrow{\text{COSINUSA W DSB}}$ $\frac{SB}{DS} = \cos\alpha \Rightarrow DS = \frac{SB}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}$

Pole $= \frac{1}{2} AC \cdot DS = \frac{a^2}{2\cos\alpha}$

III Przypadek – TRAPEZ RÓWNORAMIENNY

wysokość $\frac{DH}{SD} = \sin\alpha \Rightarrow SD = \frac{DH}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\sin\alpha}$

górna podstawa

$$\left.\begin{aligned} &EF = 2DG = 2HB = 2(SB - SH) \\ &\frac{DH}{SH} = tg\alpha \Rightarrow SH = \frac{DH}{tg\alpha} = \frac{2a}{tg\alpha} \end{aligned}\right\} EF = 2(SB - SH) = a\sqrt{2} - \frac{4a}{tg\alpha}$$

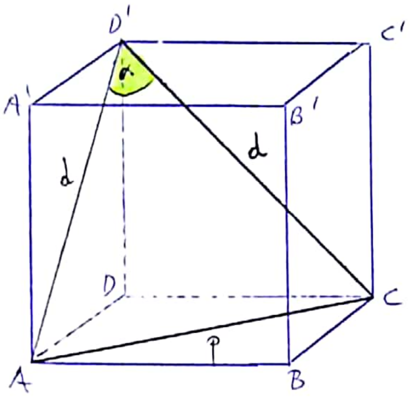
dolna podstawa $AC = a\sqrt{2}$

Pole $P = \frac{AC + EF}{2} \cdot SD = \frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{2} - \frac{4a}{tg\alpha}}{2} \cdot \frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{2a^2\sqrt{2}\,tg\alpha - 4a^2}{tg\alpha \sin\alpha}$

ODPOWIEDŹ!

$$\begin{cases} \frac{a^2}{2\cos\alpha} & \text{dla } 0 < tg\alpha \leq 2\sqrt{2} \\ \frac{2a^2\sqrt{2}\,tg\alpha - 4a^2}{tg\alpha \sin\alpha} & \text{dla } tg\alpha > 2\sqrt{2} \text{ i } \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{2}a^2 & \text{dla } \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątne ścian bocznych, wychodzące z tego samego wierzchołka mają długość d i tworzą kąt o mierze α. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



METODA I - NAJKRÓTSZA

1. UŻYWAM WZORU COSINUSÓW DO WYZNACZENIA KWADRATU PRZEKĄTNEJ (PODSTAWY)

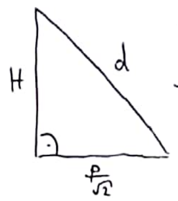
$$p^2 = d^2 + d^2 - 2d^2 \cdot \cos\alpha = 2d^2(1-\cos\alpha)$$

2. POLE PODSTAWY TO PÓŁ ILOCZYNU PRZEKĄTNYCH STĄD PODSTAWIAM OD RAZU

$P_p = d^2(1-\cos\alpha)$ [połowa kwadratu przekątnej]

3. POTRZEBUJĘ JESZCZE TYLKO H - SZUKAM - RYSUJĘ RZUT BOKU

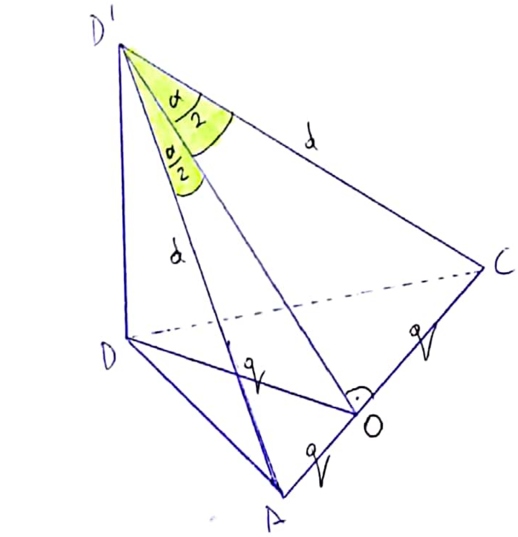
$$H^2 = d^2 - \frac{p^2}{2} = d^2 - d^2(1-\cos\alpha) = d^2 \cdot \cos\alpha$$



z pitagorasa

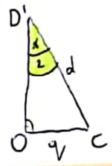
$$\Downarrow$$
$$H = d\cdot\sqrt{\cos\alpha}$$
$$\Downarrow$$
$$V = d^3(1-\cos\alpha)\cdot\sqrt{\cos\alpha}$$

(wyjmuję fragment graniastosłupa.)



METODA II - DŁUŻSZA

1. DZIELĘ KĄT NA DWA IDENTYCZNE (W TRÓJKĄCIE RÓWNORAMIENNYM)
2. WYZNACZAM q Z FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNEJ



z $\triangle OCD'$ $\quad q = d\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

3. (MAJĄC q) WYLICZAM POLE PODSTAWY

$$P_p = (q\sqrt{2})^2 = 2d^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

4. Z PITAGORASA WYZNACZAM H (mając q)

z $\triangle DAD'$ $\quad H^2 = d^2 - (q\sqrt{2})^2 = d^2 - 2d^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = d^2\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$

FUNKCJA PODWOJONEGO KĄTA

$$d^2\cdot\cos\alpha$$

$$H = d\cdot\sqrt{\cos\alpha}$$

5. WYPISUJĘ OBJĘTOŚĆ

$$V = 2d^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} = d^3(1-\cos\alpha)\sqrt{\cos\alpha}$$

FUNKCJA PODWOJONEGO KĄTA (TRUDNIEJSZA)

UWAGI:

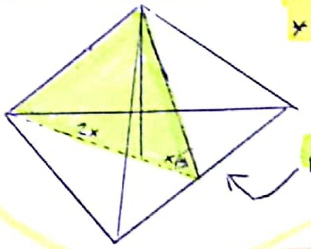
* jeśli jest podana jakaś długość literką to raczej w niej i ew. funkcjach tryg. mam wyrazić wynik
* mogłem też wyrazić wynik w $\frac{\alpha}{2}$ bo nie pisze, że ma być pełny kąt

Czworościan foremny - co robić i jak żyć?

środek ciężkości tj. punkt przecięcia wszystkich wysokości dzieli się w stosunku 2:1 na każdej ścianie

NAJCZĘŚCIEJ WYKORZYSTYWANA ZALEŻNOŚĆ:

JAK RYSOWAĆ?



* najpierw podstawa
* boczna krawędź w poziomie tylna

płaszczyzna

* prostopadła do krawędzi
* kąt między ścianami w prawym rogu
* przechodząca przez krawędź boczną i wysokość podstawy

CZĘSTY MANEWR NA WYSOKOŚĆ

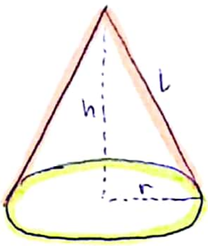
$$h^2 + \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2$$

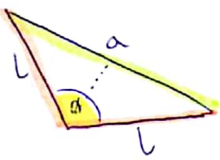
* zależność dzielenia na 2:1
* wysokość trójkąta równobocznego

PITAGORAS

STOŻEK

* bardzo często trójkąty podobne
* rysowanie przekroju stożka → dzielenie kąta u góry stożka na dwie części i wyznaczanie funkcji trygonometrycznych dla jego połowy





ROZWINIĘCIE POWIERZCHNI BOCZNEJ STOŻKA

* cięciwa a to obwód podstawy stożka

UWAGA! MASZ PODANY KĄT α TO NIE BÓJ SIĘ GO UŻYĆ

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{l} \Rightarrow l = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

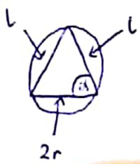
TRÓJKĄT RÓWNORAMIENNY CIACH NA PÓŁ I JUŻ MASZ DWA TRÓJKĄTY DO F. TRYGONOM. ORAZ PITAGORASA !!!

WAŻNE!

TRÓJKĄTY PODOBNE

* walec w stożku tworzy trójkąty podobne
* koła w stożku i ich promienie w boku równiej.

KULA OPISANA NA STOŻKU



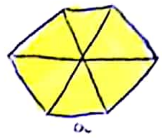
Trójkąt równoramienny

TW. SINUSÓW

$$\frac{l}{\sin\alpha} = 2R$$

Graniastosłupy

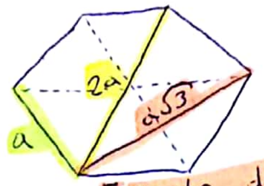
PRAWIDŁOWY SZEŚCIOKĄTNY



Podstawa: sześciokąt foremny → 6 trójkątów równobocznych

P trójkąta równobocznego $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ⟶ $P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = a\sqrt{3}$

są to dwie wysokości

PRAWIDŁOWY CZWOROKĄTNY

Podstawa: kwadrat

często wykorzystuje się kawałki przekątnych