3) FUNKCJE | 1

Funkcja f każdej liczbie całkowitej przyporządkowuje resztę z dzielenia przez 8 jej kwadratu.

a) Uzasadnij, że jeśli n jest liczbą nieparzystą to $f(n)=1$

1. ZAPISUJĘ LICZBĘ NIEPARZYSTĄ: $n = 2k+1$ gdzie $k \in C$
2. PODNOSZĘ DO POTĘGI $n^2 = \underbrace{4k(k+1)}+1$

iloczyn dwóch kolejnych liczb (k i $k+1$) z których jedna jest parzysta, więc zgrabnie to można zapisać $4 \cdot 2k + 1 = \underbrace{8k}_{\text{dzieli się przez } 8} + \underbrace{1}_{\text{reszta } 1}$

c.k.d.

b) Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

TAK JAK WYŻEJ NAPISAŁEM L. NIEPARZYSTA TO $2k+1$ WIĘC PARZYSTE TO $2k$ LUB $2k+2$

(zgodnie z funkcją podniesioną do kwadratu)

$2k \to 4k^2 \to r=0$

$2k+2 \to 4(k^2+2k)+4 \to r=4$

nieparzysta $\to r=1$

$ZW = \{0,1,4\}$

c) Ile miejsc zerowych należących do przedziału $\langle 0;80\rangle$ ma funkcja f

WSZYSTKIE LICZBY PODZIELNE PRZEZ 4 WG PODPUNKTU WYŻEJ

Przekształcenia wykresów funkcji

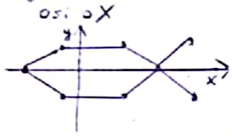
$f(x-a)+b$

$a \to$ przesunięcie w prawo [wzdłuż osi X]

$b \to$ przesunięcie w górę [wzdłuż osi Y]

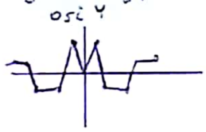
$-f(x)$

Symetria względem osi OX



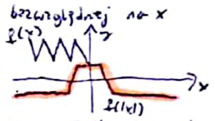
$f(-x)$

Symetria względem osi Y



$f(|x|)$

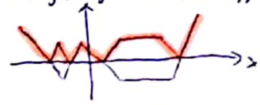
Nakładanie wartości bezwzględnej na x



Wartość dla ujemnych x-ów jest identyczna jak dla dodatnich

$|f(x)|$

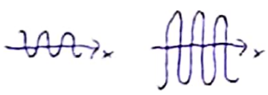
Nakładanie wartości bezwzględnej na całą funkcję



Odbijam wszystko poniżej osi x

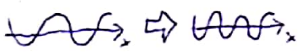
$c \cdot f(x)$

wraz z wzrostem parametru c funkcja osiąga większe wartości (w górę i w dół)



$f(d \cdot x)$

wraz z wzrostem parametru d funkcja zagęszcza się w poziomie



Odbicie wykresu względem początku układu

ODBICIE WZGLĘDEM OSI Y
+
ODBICIE WZGLĘDEM OSI X

$-f(-x)$

Przekształcenie w symetrii do prostej

PRZYKŁAD: prosta $x=2$

1. Przesunąć o wektor $[-2,0]$
2. Odbić względem osi Y
3. Przesunąć o wektor $[2,0]$

Scanned with CamScanner

5) FUNKCJE 2

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$. Uzasadnij, że istnieje nieskończenie wiele par różnych liczb rzeczywistych, dla których funkcja przyjmuje tą samą wartość, a następnie podaj wszystkie pary liczb całkowitych o tej własności.

1. POKAZUJĘ ŻE ISTNIEJĄ TAKIE RÓŻNE LICZBY A, B DLA KTÓRYCH FUNKCJA PRZYJMUJE TĄ SAMĄ WARTOŚĆ

$$\frac{a}{a^2+4} = \frac{b}{b^2+4} \Rightarrow (b-a)(ab-4)=0$$

przy zał. że $a \neq b$ pierwszy nawias nie może być pusty, więc drugi musi.

$$\downarrow$$

$$ab-4=0$$

$$\downarrow$$

$$b = \frac{4}{a}$$

Zakładając, że $a \neq b$ to $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$

chcielibyśmy nie dzielić przez zero

liczby byłyby takie same

a i $\frac{4}{a}$ to inne liczby o tej samej wartości funkcji, więc

$$f(a) = f\left(\frac{4}{a}\right)$$

2. PARY CAŁKOWITE

Mam liczby a i $\frac{4}{a}$ → są one całkowite gdy a jest dzielnikiem 4ki i nie jest $\in \{0, -2, 2\}$ → pary to 1 i 4 oraz -1 i -4

PAMIĘTAJ ABY ZAWSZE WYZNACZYĆ DZIEDZINĘ PRZED SKRACANIEM

Przykładowo:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2-4)(x^2+9)} \xrightarrow{\text{skracanie}} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2-4)(x^2+9)} \rightarrow \frac{(x+1)}{(x^2-4)(x^2+9)}$$

→ przy założeniu $x \neq 1$

$(x-1)$: $x \neq 1$; (x^2-4): $x \neq 2$, $x \neq -2$

GDY TEGO NIE ZROBISZ WYKRES TWOJEJ FUNKCJI BĘDZIE ZŁY

JEŚLI DZIEDZINA JEST CIĘŻKA DO OBLICZENIA A LICZNIK PROSTY:

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{x^4-3x^3+4x^2-7x+6}}$$

→ 1. WYLICZAM MIEJSCA ZEROWE $x=2$ i $x=3$

2. SPRAWDZAM CZY NALEŻĄ ONE DO DZIEDZINY

* dla $x=2$ mianownik równy 0 $(x=2 \notin D)$
* dla $x=3$ wyrażenie dodatnie więc ok (MIEJSCE ZER. $=3$)

CZYM WŁAŚCIWIE JEST FUNKCJA?

Funkcja f to specjalny typ relacji, w której dla dowolnego $x \in X$ relacja f zawiera dokładnie jedną parę (x, y) z elementem x na pierwszym miejscu.

* f i $f(x)$ to dwie różne rzeczy.

  f - nazwa funkcji (zbiór par)

  $f(x)$ - wartość funkcji w punkcie x (jedna liczba)

* oznacza to, że:

  $f = g$ - równość funkcji tj. dla każdego x'a z dziedziny zachodzi równość liczb $f(x) = g(x)$

  $f(x) = g(x)$ - funkcje f i g przyjmują tę samą wartość w punkcie x (w innych punktach wartości te mogą być inne)

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI

Funkcja f jest rosnąca gdy: dla większych argumentów przyjmuje większe wartości

WARUNEK: spełniona implikacja $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$

Funkcja jest malejąca gdy: dla większych argumentów przyjmuje mniejsze wartości

WARUNEK: spełniona implikacja $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

PARZYSTOŚĆ FUNKCJI

Funkcja f jest parzysta gdy dla dowolnego x $f(-x) = f(x)$ TAKA SAMA WARTOŚĆ DLA LICZB PO DWÓCH STRONACH OSI Y

Funkcja f jest nieparzysta gdy dla dowolnego x $f(-x) = -f(x)$ WARTOŚCI PRZECIWNE DLA DOWOLNYCH LICZB PRZECIWNYCH

Gdy funkcja nie spełnia powyższych warunków to nie jest ani parzysta ani nieparzysta.

OKRESOWOŚĆ

Funkcja f jest okresowa gdy dla dowolnego $x \in D_f$ $f(x) = f(x + T)$

tzn. wartości funkcji powtarzają się co T (okres podstawowy funkcji)

RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ

Funkcja f jest różnowartościowa gdy dla dowolnych $x, y \in D_f$ $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Funkcje monotoniczne są różnowartościowe m.in.

* funkcja logarytmiczna
* funkcja wykładnicza
* funkcja liniowa
* funkcja potęgowa