ALGEBRA

MACIERZE

* oznaczenia: drukowane litery

np. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{H}$

* pojedynczy ~~wyraz~~ element macierzy

wiersz + kolumna

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{wiersz 1} \\ \text{wiersz 2} \\ \text{wiersz 3} \\ \text{wiersz 4} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \text{kolumna 1} & \text{kolumna 2} & \text{kolumna 3} & \text{kolumna 4} \end{array} \end{array} \quad 4 \times 3$$

$a_{34} = 4$

FUN FACT

* dodawać i odejmować można tylko macierze tego samego wymiaru !

* mnożenie macierzy przez macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 & 11 \\ -9 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

1 WIERSZ:

1 KOLUMNA: $2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 15$

2 KOLUMNA (podobnie)

3 KOLUMNA (podobnie)

2 WIERSZ: (tak jak powyżej)

WIERSZE MNOŻYMY RAZY KAŻDĄ KOLUMNĘ
musi mieć tyle wierszy co drugi ma kolumn

* transponowanie macierzy

JEST TO ZAMIANA JEJ WIERSZY ZA KOMÓRKI

* macierz kwadratowa

MA JEDNAKOWĄ LICZBĘ WIERSZY I KOLUMN

(stopień macierzy kwadratowej to liczba tych wierszy)

* macierz jednostkowa

MA NA GŁÓWNEJ PRZEKĄTNEJ JEDYNKI

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{itp.}$$

* WYZNACZNIK MACIERZY

STOPNIA 1

\- równy elementowi (jedynemu)

STOPNIA 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$-$ $+$

STOPNIA 3

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$-$ $-$ $-$ $+$ $+$ $+$

* dopisać pierwsze dwa wiersze poniżej

* mnożyć i dodawać

STOPNIA 4

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

* zabawa polega na mnożeniu liczby z danej kolumny · macierz który został stworzony po wyzerowaniu „sąsiadów" tej liczby

STOPNIA 5, 6 itd.

* sprowadzić do wyznacznika o stopień niższego, następnie znowu niższego i tak w koło Macieja.

Scanned with CamScanner

UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH

Przykład:

$$AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Szukam więc macierzy $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

spełniającej równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Daje to taki układ równań

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

METODA GAUSSA

1. ZAPISZ WŁAŚCIWĄ MACIERZ I OBOK WYNIK

$$\begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-2) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2. TERAZ BĘDZIEMY DĄŻYĆ ABY BYŁY TUTAJ SCHODKI Z ZER

ZAPISUJĘ ILE TRZEBA ODJĄĆ ABY BYŁO TAM ZERO

3. MNOŻĘ (ZAPISANĄ LICZBĘ) RAZY ELEMENT U GÓRY A NASTĘPNIE DODAJĘ DO LICZBY W TEJ SAMEJ KOLUMNIE OTRZYMANĄ WARTOŚĆ

czyli... $(-1)\cdot(-3) = 3$, dodaję to do stojącej tam jedynki: $3 + 1 = 4$

$(-1)\cdot(+2) = -2$, dodaję to do stojącej tam minus dwójki: $-2 - 2 = -4$

$(-2)\cdot(2) = -4$, dodaję to do stojącej tam jedynki: $1 - 4 = -3$ itd.....

$$\begin{array}{c} \\ \\ (-5) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right]$$

! NALEŻY ZAUWAŻYĆ ŻE NA DOLE PO ŚRODKU PO DZIAŁANIACH STOI TERAZ PIĄTKA - TERAZ TO JEJ TRZEBA SIĘ POZBYĆ

DODATKOWO DLA UŁATWIENIA OBLICZEŃ LEPIEJ ZROBIĆ JEDYNKĘ NAD ZEROWANĄ LICZBĄ - MOŻNA POMNOŻYĆ CAŁY WIERSZ RAZY JAKĄŚ TAM LICZBĘ I JEST OK.

Mnożę $\times \left(-\frac{1}{4}\right)$ i powstaje $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 5 & -3 & -7 \end{array}\right]$

4. PRZY ZEROWANIU ELEMENTU Z DRUGIEJ KOLUMNY MNOŻĘ (ZAPISANĄ LICZBĘ) RAZY DRUGI WIERSZ A NIE PIERWSZY

! NIE ZAPOMNIJ O MNOŻENIU 4 KOLUMNY (WYNIKU)

stąd...

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{2} \end{array}\right]$$

5. TERAZ ZBIERAM X'Y ZACZYNAJĄC OD DOŁU

$$2x_3 = -\frac{9}{2}$$

$$x_2 - x_3 = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3$$

(z tego już prosta droga do wyliczenia x'ów)

Scanned with CamScanner

WYZNACZNIK 4 STOPNIA – INNY SPOSÓB

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} w_4(-3) \\ w_4(2) \\ w_4(-2) \\ \end{matrix}$$

* Mnożę każdy rząd przez wybrany aby wyzerować
* Najlepiej zerować ten z 1'ką, aby było prosto.

↳ RZĄD KTÓRY MUSZĘ WYZEROWAĆ

$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -6 & 0 & -5 & 6 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

WYZNACZNIK TO

$$1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} -6 & -5 & 6 \\ 5 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

wybrana liczba

wiersz + kolumna

PO PROSTU POZOSTAŁE LICZBY TO ZERA

TAK SAMO ~~podobnie~~

METODA LAPLACE'A (BEZ ZEROWANIA)

→ TAK JAK NA POPRZEDNIEJ STRONIE ALE DLA DOWOLNEJ KOLUMNY

* zamiast pamiętać gdzie plus a gdzie minus jak to jest w przypadku 1 wiersza możesz WYBRAĆ DOWOLNĄ KOLUMNĘ, wtedy (wykreślam po kolei wiersze)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$2 \cdot (-1)^{1+2}$

$1 \cdot (-1)^{2+2}$ bo...

$$\text{LICZBA} \cdot (-1)^{\text{wiersz + kolumna}} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

MACIERZ TRÓJKĄTNA

* jeśli wyzerujesz wszystkie elementy poniżej/powyżej przekątnej, to jej wyznacznikiem jest iloczyn wyrazów leżących na przekątnej
* ABY TO ZROBIĆ ZAMIENIAJ WIERSZE / MNÓŻ PRZEZ SIEBIE

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

np. tutaj zamień wiersze aby

ZAWSZE MIEĆ 1'KĘ NAD KOLUMNĄ GDZIE CHCESZ MIEĆ ZERA

→ JEŚLI NIE DA SIĘ TAK ZAMIENIĆ TO NA PRZYKŁAD ODEJMIJ OD W1 WIERSZE W2 [redacted] DWA

→ (NA 1'KACH ŁATWIEJ OPEROWAĆ)

MACIERZ ODWROTNA

* WARUNEK:

A^{-1} - macierz odwrotna

macierz jednostkowa

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

* można obliczyć tylko z macierzy kwadratowej

* WZÓR

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^D)^T$$

jeśli $|A| = 0$ to m. odwrotna nie istnieje

1. POLICZYĆ WYZNACZNIK $|A|$ NIE ISTNIEJE GDY $= 0$
2. MACIERZ DOPEŁNIEŃ
3. ZAPIS → TRANSPOZYCJA $\frac{1}{|A|} \cdot \left(\begin{bmatrix} \text{powstała macierz dopełnień} \end{bmatrix}^T \right)$ policzone
4. WYNIK $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \text{macierz transponowana} \end{bmatrix}$

2 MACIERZ DOPEŁNIEŃ

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad A^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \dots \\ \dots & & \\ \dots & & \end{bmatrix}$$

(wykreślać po kolei każdy element i zapisywać powstałe macierze ...)

RÓWNANIA MACIERZOWE

$$X \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

MNOŻĘ RAZY MACIERZ ODWROTNĄ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 12 & 14 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

* TWORZENIE SZTUCZNYCH MACIERZY

$$X \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + 3X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X \left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

ABY WYJĄĆ X PRZED NAWIAS TWORZĘ MACIERZ JEDNOSTKOWĄ

NO BO „MAX" MACIERZ TO 1 x 1 KTÓRA SIĘ ZMIEŚCI KWADRATOWA LOGICZNE

RZĘDY MACIERZY

1. POZAMIENIAĆ / MNOŻYĆ WIERSZE BY OTRZYMAĆ „1"kę i SAME ZERA
2. WYKREŚLIĆ, ZAPISAĆ +1 i POZOSTAŁĄ MACIERZ

taka macierz jeśli ma conajmniej 1 jeden element $\neq 0$ to rz. równy 1 gdy same zera to rz $= 0$

$$rz \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = rz \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 1 + rz \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 2$$

! można zamieniać kolumny, wykreślać gdy puste

wielkość macierzy z wyznacznikiem niezerowym NAJWIĘKSZA MOŻLIWA np $[3 \times 3]$ rz. $= 3$ lub mniejszy

$$\text{RZĄD} = \text{ILOŚĆ SCHODKÓW}$$

[jeśli wyznacznik macierzy $n \times n \neq 0$ to KONIEC, n to rząd macierzy]

$$rz \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} \\ 6 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 1 + rz \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

wiersz lub kolumna z 1 i samymi zerami (TYLKO W JEDNYM POZIOMIE!)

Scanned with CamScanner

UKŁAD CRAMERA

$$\begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1 \\ 4x + 3y - 5z = -2 \\ 5x - 2y + 7z = 10 \end{cases}$$

WARUNKI !

1 W: TYLE RÓWNAŃ ILE NIEWIADOMYCH → generalnie max 3

2 W: WYZNACZNIK $\neq 0$

① POLICZYĆ WYZNACZNIK $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

② JEŚLI $\neq 0$ TO ZAPISAĆ

$$\begin{vmatrix} wynik_1 & -5 & 3 \\ wynik_2 & 3 & -5 \\ wynik_3 & -2 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow x = \frac{W_x}{W}$$

(dla y, z analogicznie)

↑ zamiast x'a podstawić wynik

---

dla $\det A \neq 0$ — 1 ROZWIĄZANIE

dla $\det A = 0$
- $W_i = 0$ dla każdego $i = x, y, z \dots$ — NIESKOŃCZENIE WIELE ROZWIĄZAŃ
- $W_i \neq 0$ — UKŁAD SPRZECZNY

same zera - nieskończenie wiele rozw   zero ; nie zero - wtf sprzeczność

RZĄD - PRZYKŁAD

① $\begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}$ WYZNACZNIK $2p(p-2)$ ①

② RZĄD TO MAX JEŚLI $W \neq 0$ WIĘC ZOSTAŁO TYLKO SPRAWDZIĆ PRZYPADKI KTÓRE PRZESZKADZAJĄ

zał $2p(p-2) \neq 0$ dla $p \neq 2$; $p \neq 0$ $rz = 3$ BO W JEST NIEZEROWE

TERAZ TYLKO SPRAWDZIĆ CO JEŚLI $p=2$ ORAZ $p=0$

TYLKO DO MAŁYCH MACIERZY | OSTROŻNIE

---

② JEŚLI DUŻA TO RÓB SCHODKI I SPRAWDŹ PRZYPADKI ILE SCHODÓW KIEDY

5 ALGEBRA MACIERZE

Układ równań z parametrem → GAUSS

PRZYKŁAD

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & k & 1 \\ k & k & 1 & k \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -12+k & -2 \\ 0 & 0 & -4k+1 & 0 \end{array}\right]$$

↑ zaczynaj analizę od dołu !

JEŚLI $-4k+1=0$ to $0=0$ NIESKOŃCZENIE WIELE ROZW, ALE O PEWNYM SCHEMACIE

1° $k=\frac{1}{4}$

* $0=0$ więc nie mam wyznaczonego x_3
* są 2 równania i 3 niewiadome

PODSTAWIAM $x_3=\alpha$, WTEDY

x_2: $-2x_2 - 11\frac{3}{4}\alpha = -2$

$x_2 = 1 - 5\frac{7}{8}\alpha$

x_1: $x_1 + 1 - 5\frac{7}{8}\alpha + 4\alpha = 1$

$x_1 = 1\frac{7}{8}\alpha$

2° $k \neq \frac{1}{4}$

$(-4k+1)x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0$

$-2x_2 = -2 \rightarrow x_2 = 1$

$x_1 + 1 = 1 \rightarrow x_1 = 0$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego

– lekarstwo na ograniczenia wzoru Cramera

(* można używać gdy mamy inną liczbę równań niż niewiadomych)

$r(A) = r(U) = n$	DOKŁADNIE 1 ROZWIĄZANIE
$r(A) = r(U) < n$	NIESKOŃCZENIE WIELE ROZWIĄZAŃ
$r(A) \neq r(U)$	BRAK ROZWIĄZAŃ

PRZYKŁAD:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7w = 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3w = 2 \\ 2x - 4y - 11z - 15w = 1 \end{cases}$$

CO WIDZĘ?
* 4 niewiadome
* 3 równania

1) LICZĘ RZĄD (A) GŁÓWNEJ MACIERZY

$$r\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 11 & -15 \end{bmatrix} = r(A) = 3$$

2) LICZĘ RZĄD (U) UZUPEŁNIONEJ MACIERZY

$$r\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 11 & -15 & 1 \end{bmatrix} = r(U) = 3$$

3) NIESKOŃCZONA L. ROZWIĄZAŃ

$3 = r(A) = r(U) < n = 4$

4) WYBIERAM WYZNACZNIK 3 X 3 ALE RÓŻNY OD ZERA

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & -11 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 7 \\ 3 \\ -15 \end{array}\right] \\ x \quad y \quad z & w \end{array}$$

✓ OK

5) W STAJE SIĘ PARAMETREM !!! PRZENOSZĘ NA PRAWO I TRAKTUJĘ JAKO SKALAR $w=t$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1-7t \\ 4 & -6 & 2 & 2-3t \\ 2 & -4 & -11 & 1+15t \end{array}\right] \\ x \quad y \quad z \end{array}$$

6) ROZWIĄZUJĘ GAUSSEM. LICZĘ x, y, z a $w=t$