Pochodne cząstkowe

* pochodna po iksie $F_x' = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ y-stała → LICZĘ NORMALNIE ALE Z ZAŁOŻENIEM ŻE y TO STAŁA np. $(x^2+y^2)' = 2x$

* pochodna po y-greku ~~~ analogicznie ~~~

Trudniejszy przykład!

$$z = (xy)^y$$

PO X-IE

tu np. wyjmuję y przed nawias bo to liczba

$$\underset{y\text{-liczba}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \left(xy^y\right)' = y(xy)^{y-1}\cdot(xy)' = y(xy)'\cdot y(x)' = y^2(xy)^{y-1}$$

PO Y-GREKU

$$\underset{x\text{-liczba}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \left(xy^y\right)' = \left(e^{y\ln xy}\right)' = e^{y\ln xy}\cdot\underbrace{(y\ln xy)'}_{\text{wz. na iloczyn}} = e^{y\ln xy}\Big[\underbrace{y'}_{1}\ln xy + y\cdot(\ln xy)'\Big]$$

$$= e^{\ln xy} = \left[\ln xy + y\frac{1}{xy}(xy)'\right] = e^{\ln xy}\left[\ln xy + 1\right]$$

Pochodne cząstkowe II RZĘDU

$$f(x,y) = \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dots \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dots \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}$$

II RZĘDU   I RZĘDU

powinny być takie same

1 | ANALIZA | FWZ

*extrema lokalne fwz:

1. Pochodna cząstkowa po każdym argumencie $x, y, z \dots$
2. Tworzę układ równań, równam każdą tą pochodną do zera.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

→ 3. Wychodzą mi z tego punkty stacjonarne
$P_1(x,y,z)$, $P_2(x,y,z)$, ...

4. Zapisuję hesjan dla pochodnych II stopnia

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

← w mianowniku na prawo jest ∂x

← —//— ∂y

← —//— ∂z

na lewo: ∂x ∂y ∂z ...

5. Liczę wyznaczniki dla kolejnych punktów

$H(P_1)$, $H(P_2)$

Dla danego punktu:

Liczę 3 wyznaczniki I II III

Dalej dla TEGO PUNKTU:

* wszystkie dodatnie = MINIMUM
* naprzemian minus→plus→minus = MAXIMUM
* inne ułożenie = BRAK EXTREMÓW
* jakiś wyznacznik $=0$ = NIE WIADOMO (w tym konkretnym punkcie)

*extrema globalne

przykład $f(x,y) = \dots$, $D = \{(x,y): -1 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

1. Narysuj obszar D.
2. Znajdź punkty stacjonarne
   - wybierz te leżące w obszarze D
   - policz ich wartości
   - dodaj te wartości do puli możliwych extremów. → EXTREMA GLOBALNE
3. Wypisz równanie ograniczające każdy brzeg ogr. obszar np. $x=1$, $y \in \langle 0,2 \rangle$
4. Podstaw te równanie (np $x=1$) do wz. funkcji. Powstanie funkcja 1 zmiennej.
   - muszę znaleźć maxima/minima tej funkcji
   - aby to zrobić standardowo $f'=0$,
   - jeśli punkty są w zakresie y to licz ich wartość i do puli możliwych extremów
5. Powtórz dla każdego brzegu

2. ANALIZA FWZ

Extrema warunkowe

mając funkcję: ; warunek:

$z = f(x,y)$ $\qquad$ $g(x,y) = 0$ $\qquad$ ← FUNKCJA LAGRANGE'A

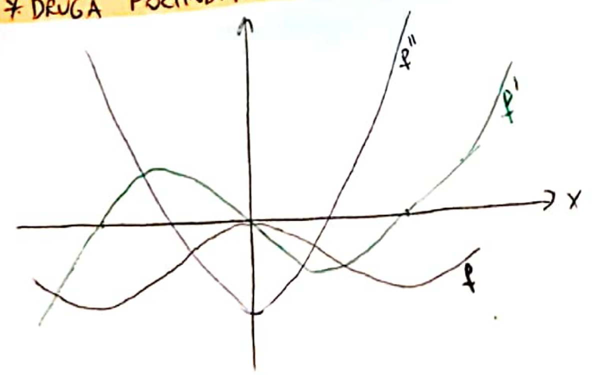
1. STWÓRZ FUNKCJĘ $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$
2. UKŁAD RÓWNAŃ (POCHODNE F DO ZERA) → PUNKTY STACJONARNE $P_1, P_2 \ldots$
3. TWÓRZ HESJAN OBRZEŻONY

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$

4. LICZ $H(P_1)$ jeśli $H(P_1) < 0$ to w P_1 MINIMUM
   $H(P_1) > 0$ to w P_1 MAXIMUM
5. LICZ WARTOŚĆ $Z(P_1)$
6. DO KOLEJNYCH PUNKTÓW

---

* DRUGA POCHODNA MÓWI O TYM JAK ZMIENIA SIĘ POCHODNA



$f' = 0$ gdy f zmienia się: rośnie/maleje albo stoi

f''(PUNKT) > 0 oznacza, że w tym punkcie funkcja jest wklęsła tak: V

GDZIE $f' = 0$

< 0 jest wklęsła tak: ∩