WSTĘP DO TRYGONOMETRII...

STOPNIE vs **MIARA ŁUKOWA RADIANY**

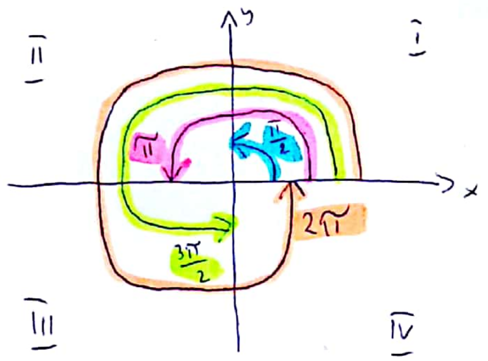
$$360^\circ = 2\pi$$

SZTUCZNA JEDYNKA

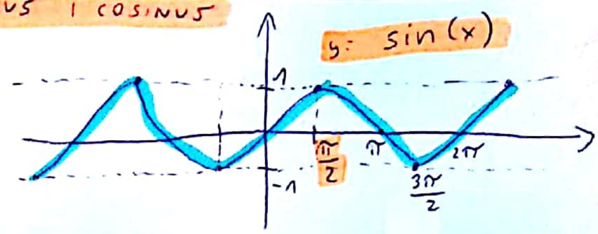
$$1 = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{2\pi}{360^\circ}$$

30° na RADIANY ? $\cancel{30}^{\,1}$ stopni $\cdot \dfrac{\pi}{\cancel{180}_{\,6} \text{ stopni}} = \dfrac{\pi}{6}$ radianów

MIARA ŁUKOWA W ĆWIARTKACH

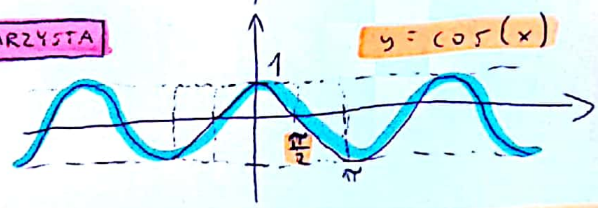


SINUS I COSINUS



sin 0 w zerze

F. PARZYSTA



cos 1 w zerze

WYKRESY SIN I COS SĄ PRZESUNIĘTE OD SIEBIE O $\frac{\pi}{2}$ (90°)

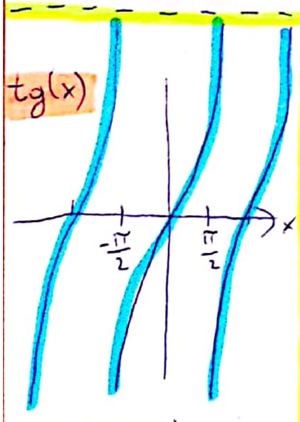
Obie funkcje są okresowe

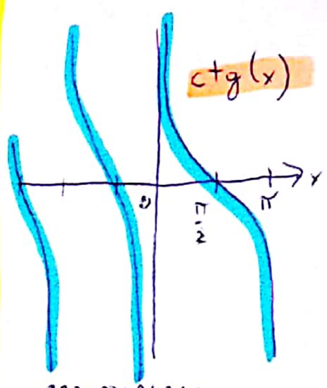
W JĘZYKU WZORKÓW:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

gdzie k to dowolna liczba całkowita

Okresem tych funkcji jest 2π – OKRES PODSTAWOWY – NAJMNIEJSZY OKRES





TANGENS I COTANGENS ...

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ → DZIEDZINA: $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$ → DZIEDZINA: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$

Okresem tych funkcji jest π – OKRES PODSTAWOWY

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$$

W związku z okresem podstawowym można dokonać zamiany np. BO $\pi = 180^\circ$

1) $\cos 3645^\circ = \cos(10 \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\operatorname{tg}(-120^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ$

3) $\sin\left((10^{2012} + 17)\pi + \alpha\right) = \sin\left((10^{2012} + 16)\pi + \pi + \alpha\right) = \sin(2k\pi + \pi + \alpha) = \sin(\alpha + \pi)$

WZORKI C.D.

Tożsamości trygonometryczne:

JEDYNKA TRYGONOMETRYCZNA: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

* zamienia $\sin^2\alpha$ na $\cos^2\alpha$ i na odwrót

FUNKCJE PODWOJONEGO ~~KONTA~~ KĄTA:

$\sin 2\alpha = 2(\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

↓ podstawiając jedynkę

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

SUMY I RÓŻNICE KĄTÓW

"trzyma znak" zmienia sinusy

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \sin x$

zmienia znak "trzyma cosinusy"

SUMA I RÓŻNICA SIN'/COS' INUSÓW

$\sin x + \sin y = 2\left(\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}\right)$

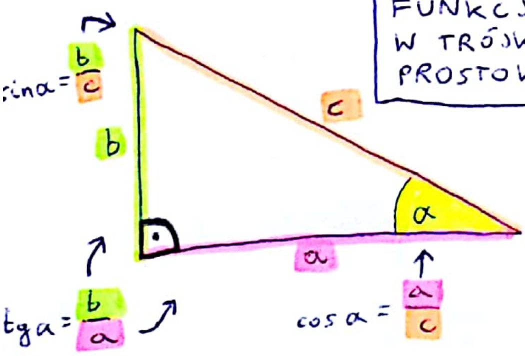
$\sin x - \sin y = 2\left(\sin\frac{x-y}{2} \cdot \cos\frac{x+y}{2}\right)$

$\cos x + \cos y = 2\left(\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos x - \cos y = -2\left(\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}\right)$

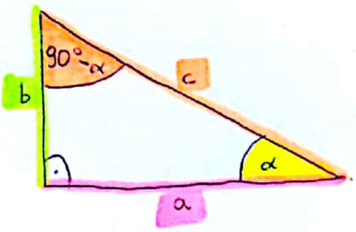
"suma równa 0 → iloczyn równy 0"

FUNKCJE TRYG. W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM



	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Dowodzenie wzorków trygonometrycznych :)



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\qquad$ $\underbrace{\cos\alpha = \frac{a}{c}}$

$\sin(90°-\alpha) = \frac{a}{c} = \cos\alpha$

PO PROSTU ZAMIANA BOKÓW.

więc:

$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$	$tg(90°-\alpha) = ctg\alpha$	$ctg(90°-\alpha) = tg\alpha$

TWIERDZENIE PITAGORASA

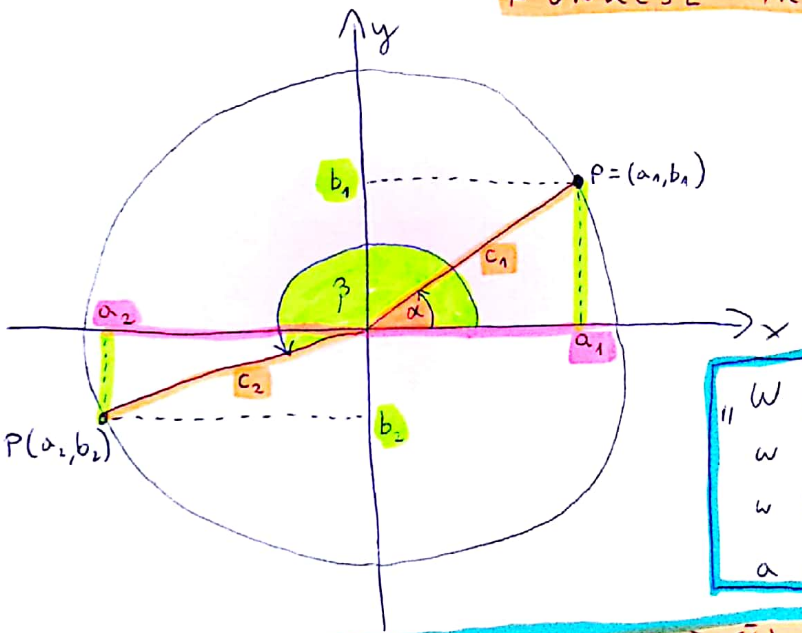
$a^2 + b^2 = c^2 \quad | : c^2$

$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$

JEDYNKA TRYGONOMETRYCZNA

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA



$\sin\alpha = \frac{b}{c}$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$

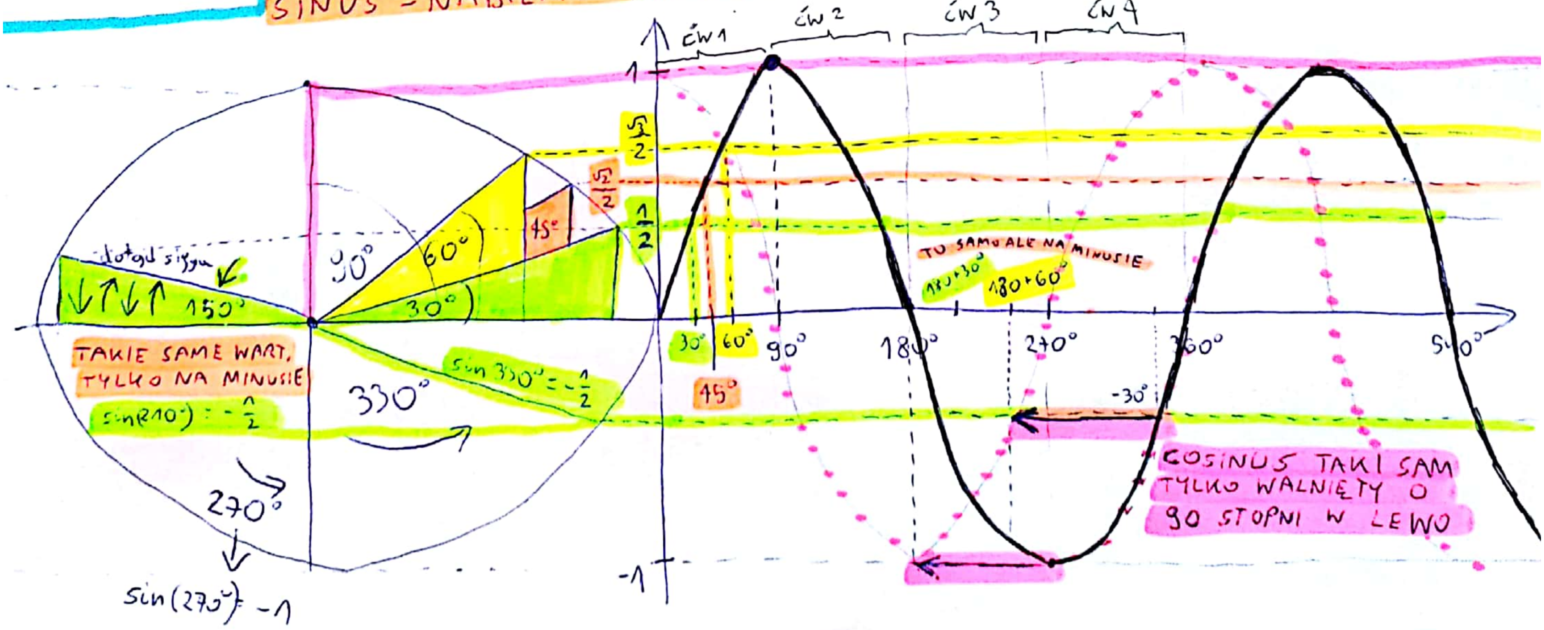
$tg\alpha = \frac{b}{a}$

* c nigdy nie jest ujemne

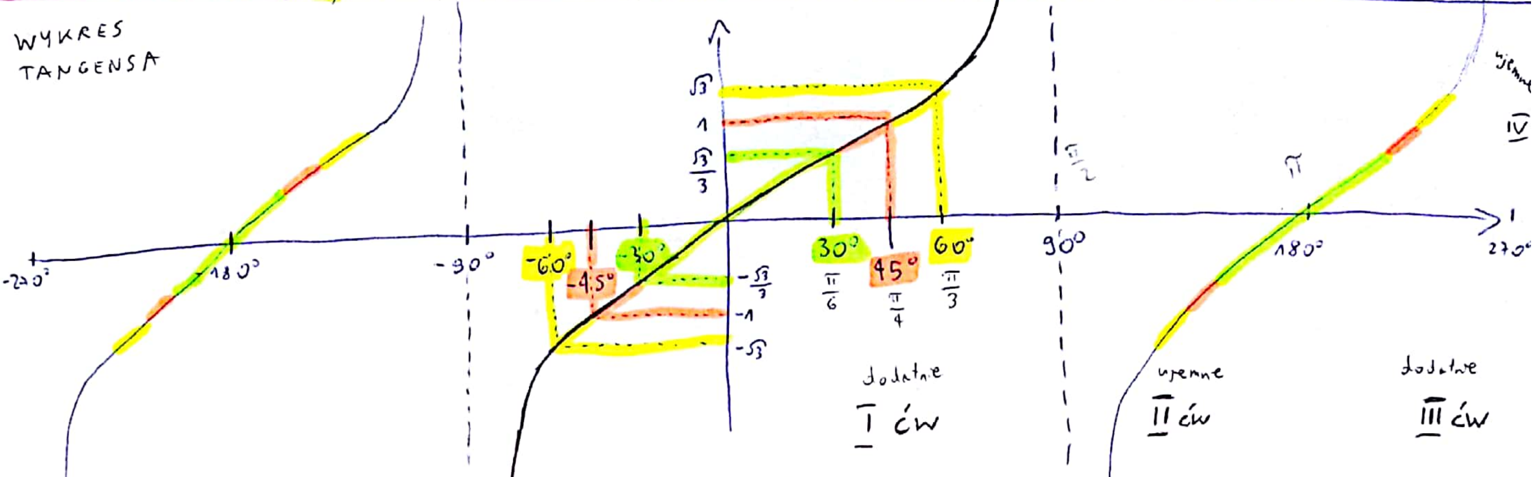
WIERSZYK

"W pierwszej wszystkie są dodatnie
w drugiej tylko sinus
w trzeciej tangens i cotangens
a w czwartej cosinus."

SINUS – NABIERA WARTOŚCI TAK SAMO JAK W KÓŁKU



WYKRES TANGENSA + ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ

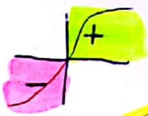


TANGENSY

0°, 180°, 360° itp.
„przyciągają" do siebie wartości 30, 45, 60

COTANGENSY NA ODWRÓT

w tendencji



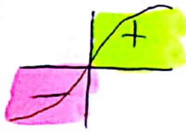
SINUSY

0°, 360°, -360° itp.
„przyciągają" wartości (30, 45, 60)
w tendencji

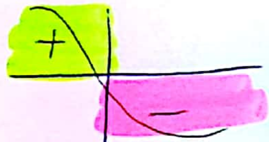
-180°, 180°, itp.
„przyciągają" wartości (30, 45, 60)
w tendencji

COSINUSY

-90°, 270°
w tendencji



-270°, 90°
w tendencji



Rozwiązywanie równań

PODSTAWIANIE

$$tg^4 x - 4tg^2 x + 3 = 0$$

$$tg^2 x = t \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$tg^2 x = 3 \qquad tg^2 x = 1$$

$$tg\, x = -\sqrt{3} \qquad tg\, x = \sqrt{3} \qquad tg\, x = 1 \qquad tg\, x = -1$$

$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ LUB $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ LUB $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ LUB $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

PRZYPOMNIENIE

$$\sin x = 2\sin x \cdot \cos x$$

wyciągam przed nawias jak człowiek

$$\sin x(2\cos x - 1) = 0$$

dzielę przez sin x
ZAKŁADAJĄC ŻE $\sin x \neq 0$
ALE POTEM TRZEBA SPRAWDZIĆ CO WTEDY !

$$\cos x \cdot tg\, x + \sin x = 2$$

$$\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x = 2$$

$$2\sin x = 2 \wedge \boxed{x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

RÓWNANIE NIE MA ROZWIĄZAŃ

PAMIĘTAJ O ZAŁOŻENIU TANGENSOWYM ABY NIE DZIELIĆ PRZEZ ZERO

RÓŻNE ...

Równanie typu $\sin 3x = 0$

1 SPOSÓB

* narysować wykres gdzie okres sinusa jest zagęszczony 3 razy
* odczytać wartości

2 SPOSÓB

$\sin 3x = \sin(k\pi)$

UWAGA! ZAPIS NIEOFICJALNY (MOŻE BYĆ BŁĄD!)

$3x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{3}$

$\sin x = \cos x \quad | : \cos x$

$\operatorname{tg} x = 1 \quad$ zał. $\cos x \neq 0$

TWORZENIE TANGENSA

$\sqrt{3} \sin x + \cos x = m$

$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = m$

$2(\cos 30^\circ \cdot \sin x + \sin 30^\circ \cdot \cos x) = m$

$2 \sin(x + 30^\circ) = m$

ZBIOREM ~~NIERÓWNOŚCI~~ RÓŻN FUNKCJI $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ jest przedział $\langle -2, 2 \rangle$

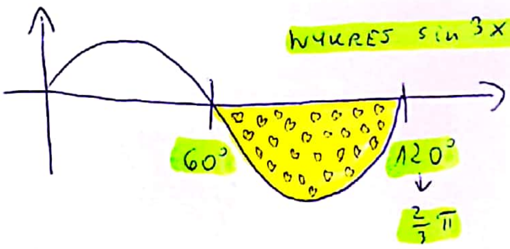
więc równanie m ma rozwiązania gdy $m \in \langle -2, 2 \rangle$

TWORZENIE WZORU NA SUMĘ KĄTÓW + ZBIÓR WARTOŚCI + PARAMETR

NIERÓWNOŚĆ $\sin 3x \leq 0$

$x \in \left\langle -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \ \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$

MINUS 60° ← 120°



WYKRES $\sin 3x$ ZAGĘSZCZONY RAZY 3

Wiedząc, że $\sin(6\pi + \alpha) > 0$, $\cos(\pi + \alpha) = \frac{5}{13}$ oblicz $\operatorname{tg} \alpha$

1) OPUŚCIĆ OKRESY NIEPOTRZEBNE

$\sin(6\pi + \alpha) > 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha) > 0$

2) ZREDUKOWAĆ COSINUSA

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

więc: $\cos x = -\frac{5}{13}$

3) UŻYĆ JEDYNKI TRYGONOMETRYCZNEJ

$\sin^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad | \sqrt{\ }$

PAMIĘTAJ O MINUSIE!

$\sin x = \pm \frac{12}{13}$

$\sin x = -\frac{12}{13}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{12}{13}$

PAMIĘTAM O ZAŁOŻENIU $\sin\alpha > 0$

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$ (odp.)

PODWOJONY KĄT [x TO 2 RAZY $\frac{x}{2}$] - CAŁA STRONA NA TEN TEMAT :)

Przykładowe zadanie dowodowe na ↗

nie bój się $\frac{1}{2}x$

* UZASADNIJ ŻE WARTOŚĆ $\cos 2x + 8\sin^2 \frac{1}{2}x \cdot \cos^2 \frac{1}{2}x$ NIE ZALEŻY OD x'A

$$\cos 2x + 2\left(2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)^2$$

WZÓR NA PODWOJONY KĄT ZŁOŻONY

$$\cos 2x + 2\sin^2 x$$

ROZŁOŻONY WZÓR NA PODWOJONY KĄT

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x$$

JEDYNKA TRYG. → NIEZALEŻNY WYNIK OD x

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Kolejne zadanie z $\frac{1}{2}x$'a :)

zamieniaj α na x'a bo wygodniej

WYKAŻ ŻE $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x} = tg\,\frac{1}{2}x$

WAŻNE

ZAPAMIĘTAJ! WZORY NA PODWOJONY KĄT DZIAŁAJĄ TEŻ NA $\frac{x}{2}$ i x

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

dlatego na potrzeby zadanka...

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

Podstawiam....

znowu rozbijam x'a jako $\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = tg\,\frac{x}{2}$$

c.b.d.u.

Jeszcze inny przykład na podwojony kąt „$\frac{1}{2}\cos$"

$$(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2 = 4\cos^2\frac{x-y}{2}$$

WZORY SKRÓCONEGO + JEDYNKA

$$2 + 2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y$$

WZÓR NA RÓŻNICĘ KĄTÓW

$$2 + 2\cos(x-y)$$ ZOSTAWIAM LEWĄ STRONĘ I KONTYNUUJĘ...

TERAZ ROZPISUJĘ PODWOJONY KĄT ZE WZORU

WZÓR $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

DOSTOSOWUJĘ POD SIEBIE

$$\cos(x-y) = 2\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1$$

$$2\cos(x-y) = 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2 \Rightarrow 2 + 2\cos(x-y) = 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$L = P$

c.b.d.u.

Potraktowanie niepozornie wyglądających sinusów podwojonego kąta wzorem na sumę sinusów! [ZOBACZ JAK]

$$\underbrace{\sin 2x + \sin 2y}_{\text{suma sinusów}} + \underbrace{\sin 2(x+y)}_{\text{standardowy podwojony kąt}} = 4\cos x \cos y \sin(x+y)$$

dla każdego $x, y \in R$ ma być ok

$$L = 2\sin\frac{2x+2y}{2}\cos\frac{2x-2y}{2} + 2\sin(x+y)\cos(x+y)$$

WYJMUJE PRZED NAWIAS

$$2\sin(x+y)\Big(\underbrace{\cos(x-y) + \cos(x+y)}_{\text{suma cosinusów}}\Big)$$

bo $\cos -y = \cos y$

$$2\sin(x+y)\cdot 2\cos\frac{x-y+x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y-x-y}{2} = 4\cos x\cos y\sin(x+y) = P$$

PORADY DO ZADAŃ NA DOWODY NA ZWIĄZKI POMIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOM.

* nie patrz schematycznie
* Zadawaj sobie pytania:
  - czy można dodać tu jakieś sinusy?
  - czy są tu jakieś różnice kątów?
  - czy można zamienić jakąś wartość stopni na liczbę?

Dziedzina i zbiór wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1+\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - \sin^4 x}$$

WYZNACZANIE DZIEDZINY (MIANOWNIK RÓŻNY OD ZERA)

$\sin^2 x - \sin^4 x \neq 0$

$\sin^2 x(1-\sin^2 x) \neq 0$

$\sin x \neq 0$, $\sin x \neq -1$, $\sin x \neq 1$

więc $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in C$

$D = R \setminus \{\frac{k\pi}{2}, k \in C\}$

WYZNACZENIE ZBIORU WARTOŚCI (PRZEKSZTAŁCENIE)

$$\frac{1+\sin^2 x - (1-\sin^2 x)}{\sin^2 x - \sin^4 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x - \sin^4 x} = \frac{2}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

ZBIOREM WARTOŚCI $\cos x$ JEST $\langle -1, 1\rangle$

ALE RÓWNIEŻ $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1$ BO CO $\frac{\pi}{2}$ DZIEDZINA WYWALA TĄ WARTOŚĆ

* Z ZAŁOŻENIA WIEM ŻE $x = \frac{k\pi}{2}$ WIĘC ~~ZW = (−1,1)~~
* WIEM RÓWNIEŻ ŻE MA BYĆ $\cos^2 x$ WIĘC ZW = $\langle 0, 1\rangle$

+ dodając ten warunek $x \neq 1$ $x \neq 1$ ZW = $(0,1)$ dla $\cos^2 x$

PODSUMOWUJĄC...

$$\frac{2}{\cos^2 x} = \frac{2}{\text{liczba ze zbioru } (0,1)}$$

np dla $\frac{2}{0{,}00000\ldots1} = 2000000000$

dla $\frac{2}{1} = 2$ (1 to pierwsza „zła" liczba)

WIĘC... ZW $= (2, +\infty)$

Zbiór wartości $f(x) = 4\sin^2 x - 4\sin x + 5$

$t = \sin x \Rightarrow g(t) = 4t^2 - 4t + 5$

O CZYM NALEŻY PAMIĘTAĆ
jest to funkcja określona w zbiorze $\langle -1, 1 \rangle$

* parabola z ramionami do góry

NAJMNIEJSZA WARTOŚĆ

1) pierwsza współrzędna wierzchołka $\frac{-b}{2a} = 0.5$

$g(0,5) = 4$

NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ

albo $g(-1)$ albo $g(1)$

$g(-1) = 13 > g(1)$

$$\boxed{ZW_f, ZW_g \langle 4, 13 \rangle}$$

Przekształcenia wykresów

$\sin x$ →	$\sin 2x$ →	$\sin^2 2x$ →	$\frac{1}{4}\sin^2 2x$
normalny sinus	sinus zagęszczony w poziomie	kwadraty poprzedniego więc wartości, jakie przyjmuje to:	sinus spłaszczony w pionie więc
$ZW \langle -1, 1 \rangle$	$ZW \langle -1, 1 \rangle$	$ZW \langle 0, 1 \rangle$	$ZW \langle 0, \frac{1}{4} \rangle$

$\sin(x + 45°) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **TO PO PROSTU SINUS POSUNIĘTY O** $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$

[redacted]

$2\cos^2 x - 1 + 3\cos x + 2 = 0$

PAMIĘTAJ O $t = \cos x$ $\boxed{t \in \langle -1, 1 \rangle}$ **PAMIĘTAJ O ZAŁOŻENIU !**

$$2\sin x \cos 2x = 2\cos\frac{3x + x}{2} \cdot \sin\frac{3x - x}{2} = \sin 3x - \sin x$$

WZÓR Z TABLIC

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

GENIALNE UŻYCIE WZORU

$0 = \sin x + \sqrt{3}\cos x \Rightarrow$

$\sin x = -\sqrt{3}\cos x$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

PRZY ZAŁ $\cos x \neq 0$ (wtedy $\sin x = 0$ czyli sprzeczność!)

DZIELĘ PRZEZ COSINUS!

WAŻNE!

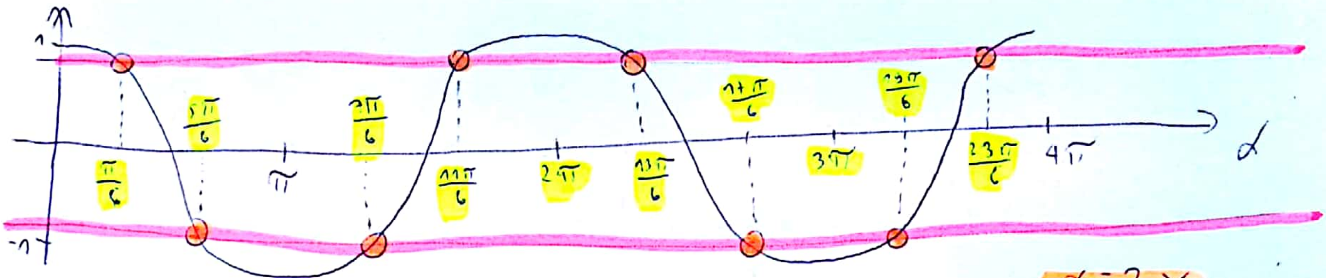
Rozwiąż nierówność $4\cos^2 2x - 3 < 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

1) Zastępuję $2x$ przez α : $\boxed{\alpha = 2x}$, $\boxed{\alpha \in \langle 0, 4\pi \rangle}$ + ZWIĘKSZAM PRZEDZIAŁ

I ROZPATRUJĘ DLA ALFY ....

$$\cos^2\alpha < \frac{3}{4} \quad \Big|\sqrt{}$$

$$|\cos\alpha| < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$$



DLA ALFY $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right)$

$\alpha = 2x$

WIĘC ZMIENIAM PRZEDZIAŁ NA 2 RAZY „MNIEJSZY"

DLA IKSA $\boxed{x \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right)}$ (Odp.)