2

② LICZBY RZECZYWISTE | 1

WŁASNOŚCI LICZB

BŁĄD PRZYBLIŻENIA:

* bezwzględny $\Delta = |a - \tilde{a}|$
* względny $\delta = \frac{|a-\tilde{a}|}{|a|}$

a - dokładna wartość
$\tilde{a}$ - przybliżona wartość

NAJMNIEJSZA WSPÓLNA WIELOKROTNOŚĆ

liczb n i m to najmniejsza liczba, która dzieli się bez reszty przez n oraz m

NWW (2,3) = 6

Jak go znaleźć?

* rozłóż liczby na czynniki pierwsze

280	2		150	2
140	2		75	3
70	2		25	5
35	5		5	5
7	7		1	
1				

* zaznacz wspólne dzielniki
* mnożę pierwszą liczbę przez niezakreślone dzielniki drugiej

$NWW(280,150) = 280 \cdot 3 \cdot 5 = 4200$

OGÓLNY WZÓR

$NWD(a,b) \cdot NWW(a,b) = ab$

NAJWIĘKSZY WSPÓLNY DZIELNIK

to największa liczba naturalna, która dzieli obie liczby bez reszty.

NWD (10, 6) = 2

Jak go znaleźć?

* rozłóż liczby na czynniki pierwsze

280	2		150	2
140	2		75	3
70	2		25	5
35	5		5	5
7	7		1	
1				

* zaznacz wspólne dzielniki
* pomnóż je ze sobą

$NWD(280,150) = 2 \cdot 5 = 10$

PODSTAWOWE CECHY PODZIELNOŚCI LICZB

Liczba jest podzielna przez	jeśli
2	jest parzysta
3	suma jej cyfr dzieli się przez 3
5	ostatnia cyfra dzieli się przez 5
6	jest parzysta + suma jej cyfr dzieli się przez 3
9	suma jej cyfr dzieli się przez 9

przez 4 jeśli jej dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę podzielną przez 4

Liczba parzysta: $2n$ $n \in C$
Liczba nieparzysta: $2n+1$

SCHEMAT ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ TYPU

(2) 2

* udowodnij, że każda liczba całkowita k przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tą własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5

TEORIA

LICZBA KTÓRA PRZY DZIELENIU PRZEZ 7 DAJE RESZTĘ 2 MOŻNA ZAPISAĆ TAK:

$$k = 7x + 2$$

... czyli 7 razy coś + 2 daje tą liczbę

CO ZROBIĆ?

* udowodnić, że $3k^2$ przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2

JAK?

* podstawić liczbę k z pierwszej części zadania jako k z drugiej części czyli $3k^2$

KIEDY SIĘ TO UDOWODNI?

* musi być coś typu

$$7(\text{coś tam}) + 5$$

można podzielić przez 7 — ale zostaje reszta 5

---

* udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba n^5-n jest podzielna przez 30

TEORIA

* ciąg kolejnych liczb naturalnych można zapisać:

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

MOŻNA Z TEGO ODCZYTAĆ, ŻE:

* CO 5 WYRAZ JEST PODZIELNY PRZEZ 5 (przecież są to liczby naturalne po kolei!)
* CO 3 PRZEZ 3
* CO 2 PRZEZ 2
* KAŻDY PRZEZ 1

* ~~mnożąc~~ podzielności tych wyrazów: $5 \cdot 3 \cdot 2$ → DOCHODZIMY DO WNIOSKU, ŻE CAŁE WYRAŻENIE DZIELI SIĘ PRZEZ 30

* NP. WYRAŻENIE $4(n+2)(n-1)$ ZAWIERA CONAJMNIEJ JEDNĄ LICZBĘ PARZYSTĄ WIĘC

$$\underbrace{\underbrace{4}_{\text{DZIELI SIĘ PRZEZ 4}}\underbrace{(n+2)(n-1)}_{\text{DZIELI SIĘ PRZEZ 2}}}_{\text{DZIELI SIĘ PRZEZ 8}}$$

CO ROBIĆ?

* PRZEKSZTAŁCIĆ WZÓR n^5-n tak, aby dzielił się przez 30

SCHEMAT

wykaż, że ~~[illegible]~~ jeśli p jest liczbą pierwszą większą od 3 to p^2-1 jest liczbą podzielną przez 24.

TEORIA:

* skoro p jest liczbą pierwszą to jest liczbą nieparzystą
* skoro p jest liczbą nieparzystą to na pewno liczba p+1 i p-1 są parzyste

są to dwie kolejne liczby parzyste

* co 2 liczba parzysta dzieli się przez 4
* każda liczba parzysta dzieli się przez 2

$$p^2-1=(p-1)(p+1)$$

są to wymnożone 2 kolejne liczby parzyste

iloczyn 4 i 2 = 8,
więc wyrażenie dzieli się przez 8

Kolejne liczby: $p-1$, p, $p+1$

Liczba pierwsza
$p>3$
czyli
$p \neq 3$

jedna z 3 kolejnych liczb musi być podzielna przez 3 więc wyrażenie $(p-1)(p+1)$ musi być również podzielne

* skoro wyrażenie dzieli się przez 8 oraz 3 to również dzieli się przez 24.

SCHEMAT

Wykaż, że kwadrat każdej liczby całkowitej nieparzystej jest postaci $8k+1$ **P4**

ELEMENTARNE POJĘCIA:

Liczba nieparzysta to $2n+1$

po podniesieniu do kwadratu

$4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$

$n(n+1)$ to iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych, więc jedna z nich jest nieparzysta a druga parzysta (podzielna przez 2)

tzn. że jest podzielna przez 2 cała liczba

$n(n+1) = 2k$

$4 \cdot 2k + 1$

teraz można podstawić $2k$ zamiast tej części liczby

$8k+1$ c.n.d.

WYNIK

ZADANIA NA WYMUSZANIE

„Jeżeli $2a+b \geq 0$ to $2a^3+b^3 \geq 3a^2b$" **P5**

wyrzucić $(2a+b)$ maksymalną ilość razy z tego

wynik to iloczyn nawiasów

Udowodnienie, że liczba jest podzielna przez 10 **P6**

$10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^{n-1} = 10(3^n - 2^{n-1}) = 10k$

Wykaż, że liczba $3^{18}-2^{18}$ jest podzielna przez 19

(wzory skróconego mnożenia)

$$3^{18}-2^{18} = (3^3)^6-(2^3)^6 = 27^6-8^6 = (27^3)^2-(8^3)^2 = (27^3-8^3)(27^3+8^3) =$$

$$\underbrace{(27-8)}_{19}\underbrace{(27^2+27\cdot 8+8^2)(27^3+8^3)}_{k} = 19k$$

TIP: $19 = (3^3-2^3)$ ← należy dążyć do wyjęcia tego przed nawias **P7**

Bardzo elegancki sposób na dowodzenie **P8**

ZAD Udowodnij, że $\frac{1}{x}+x \geq 2$ dla $x>0$

założenie przeciwne

$$\frac{1}{x}+x < 2$$

$$1+x^2 < 2x$$

$$(x-1)^2 < 0$$

sprzeczność dowodzi prawdziwości wyjściowej nierówności :)

Ciekawy sposób na znajdowanie nawiasu do potęgi tej samej co pierwiastek

na przykładzie pierwiastka do 3 stopnia

$$\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

WZÓR $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CZEGO PRAGNĘ $(a+b)^3 = 16 + 8\sqrt{5}$

ZAKŁADAM WIĘC

$b = \sqrt{5}$, $b^2 = 5$

PODSTAWIAM POD B ZE WZORU

$$\underbrace{a^3 + 3\sqrt{5}a^2 + 15a + 5\sqrt{5}}_{\text{moje nowe równanie na a zrobione z wzoru}} = \underbrace{16 + 8\sqrt{5}}_{\text{to czego pragnę}}$$

$$a^3 + 3\sqrt{5}a^2 + 15a - 3\sqrt{5} - 16 = 0$$

NA OKO WIDAĆ, ŻE $\sqrt{5}$ SIĘ ZREDUKUJE

WIĘC

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$ SPRAWDZAM

WYCHODZI $a = 1$

$$\sqrt[3]{16+8\sqrt{5}}$$

UWOLNIJ PIERWIASTEK

$$\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$$

LICZBA LICZB PODZIELNYCH PRZEZ...

* dwucyfrowych podzielnych przez 12

$1, \ldots, 9, 10, 11, \ldots, 99$ ← 90 liczb dwucyfrowych

$$90 : 12 = 7{,}5$$

czyli jest albo 7 albo 8......

Dzielę to na paczki:

1. (12 liczb)

.....

7. (12 liczb)
8. (6 liczb)

tu też :)

? KTÓRE MIEJSCE W PACZCE MA 12'STKA I JEJ WIELOKROTNOŚCI ???

ANO ODTWÓRZMY

$10, 11, \boxed{12}, 13, \ldots$

WIĘC W KAŻDEJ PACZCE JEST NA TRZECIEJ POZYCJI !!!

WIĘC...

jest 8 liczb podzielnych przez 12.