0 | ANALIZA | SZEREGI

GRANICE 1/2

Najważniejsze metody: (GRANICE CIĄGÓW)

1) WYCIĄGANIE PRZED NAWIAS NP

* $$\frac{(3n-2)^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2\left(3-\frac{2}{n}\right)^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$ bo $\left(n\left(3-\frac{2}{n}\right)\right)^2$

(wyciągane n'ki z nawiasu)

* $$\frac{\sqrt{n+1}+3}{n} = \frac{n^{\frac12}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+3}{n} = \frac{n^{\frac12}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{3}{n^{\frac12}}\right)}{n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{3}{n^{\frac12}}}{n^{\frac12}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(wyciąganie n z pierwiastka)

* $$\frac{(1+n^3)^{30}}{(4n-1)^{40}(-n+2)^{50}} = \frac{\left(n^3\left(\frac{1}{n^3}+1\right)\right)^{30}}{\left(n\left(4-\frac{1}{n}\right)\right)^{40}\left(n\left(-1+\frac{2}{n}\right)\right)^{50}} = \frac{n^{90}\left(\frac{1}{n^3}+1\right)^{30}}{n^{40}\left(4-\frac{1}{n}\right)^{40} n^{50}\left(-1+\frac{2}{n}\right)^{50}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4^{40}}$$

(duże potęgi)

* $$(n^3-2n^2+5n-1) = n^3\left(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

(bez ułamka)

* $$\frac{7^n-5}{9^n+10} = \frac{7^n\left(1-\frac{5}{7^n}\right)}{9^n\left(1+\frac{10}{9^n}\right)} = \left(\frac{7}{9}\right)^n\cdot\frac{\left(1-\frac{5}{7^n}\right)}{\left(1+\frac{10}{9^n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(potęgi do n)

* $$\frac{5^n-2^n+10^n}{11^n+5^n} = \frac{10^n\left(\frac{5^n}{10^n}-\frac{2^n}{10^n}+1\right)}{11^n\left(1+\frac{5^n}{11^n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

NIE PRZEJMOWAĆ SIĘ I WYCIĄGAĆ LICZBĘ NAJWIĘKSZĄ Z POTĘGĄ DO "

(NA CHAMA)

2) MNOŻENIE PRZEZ SPRZĘŻENIE (GDY $\sqrt{\ }-\sqrt{\ }$, $a-\sqrt{\ }$, $\sqrt{\ }-a$)

* $$\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2-3}-\sqrt{n^2+1}} = \frac{\left[n^2+2-(n^2+4)\right]\left[\sqrt{n^2-3}+\sqrt{n^2+1}\right]}{\left[n^2-3-(n^2+1)\right]\left[\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right]}$$

po posprzątaniu nie zostają żadne n-y

wyjąć n przed nawias

* MNOŻĘ PODWÓJNIE PRZEZ GÓRĘ Z „+" I PRZEZ DÓŁ Z „+"
* ZOSTAJE TO CO SIĘ NIE SKRÓCI CZYLI PRZECIWNA STRONA

(różnica pierwiastków naraz u góry i u dołu)

* $$\sqrt[3]{n^3+1}-n = \frac{n^3+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}$$

* UŻYWAM WZORU $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
* TRAKTUJĘ a I b JAKO ZMIENNE I DO WZORU WKŁADAM

(pierwiastek 3 stopnia)

4) TWIERDZENIE O 3 CIĄGACH (GDY $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$)

* $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{5}{8}\right)^n}$$

① ZNALEŹĆ NAJWIĘKSZY WYRAZ

② ZRÓB WARUNEK Z NIEGO

$$\sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{5}{8}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$\downarrow \frac{3}{4}$

$$\sqrt[n]{3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}}$$

$\to 1\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

* $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin\left(\frac{n!}{n^n+2n^2-1}\right)}{n^2+1}$$

*sinus ma wart. $\langle -1,1\rangle$ więc

$$\frac{n(-1)}{n^2+1} \leq \text{ciąg szukany} \leq \frac{n(1)}{n^2+1}$$

$\downarrow 0$ $\qquad$ $\downarrow 0$

(sinusy)

* $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}\right)$$

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\dots+\frac{n}{n^2+n} \leq \text{ciąg} \leq \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}$$

(* NAJWIĘKSZY I NAJMNIEJSZY MIANOWNIK)

$$\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2+n} \searrow \frac{1}{2}$$

~ wzór na sumę ciągu arytmetycznego ~

$$\frac{\frac{1+n}{2}\cdot n}{n^2} \searrow \frac{1}{2}$$

GRANICE Z LITERKĄ e

WZÓR

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{\text{to samo}}\right)^{\text{to samo}\cdot a} = e^{a}$$

*używać gdy $[\cos^{\infty}]$

PAMIĘTAJ O MINUSIE

SPOSOBY

1) gdy jest $1-\frac{a}{\text{to samo}}$ to zmieniamy na $1+\frac{-a}{\text{to samo}}$

2)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2n-2}\right)^{4n+11} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-3}{2n-2}\right)^{2n-2}\right)^{\frac{4n+11}{2n-2}}$$

*zapis w formę jak do e, ale kolejna potęga już tak żeby było okej.

-teraz obliczyć tą granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+11}{2n-2} = 2$$

więc

$$= \left(e^{-3}\right)^{2} = e^{-6}$$

3) TWORZENIE SZTUCZNEJ JEDYNKI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n-1}{n^2-n+11}\right)^{4n^2-5n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2-n+11)+(4n-12)}{n^2-n+11}\right)^{4n^2-5n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n-12}{n^2-n+11}\right)^{4n^2-5n+2}$$

4) USUWANIE n Z LICZNIKA

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+11}{4n-12}}\right)^{4n^2-5n+2}$$

→ (KONTYNUOWAĆ J/W)

WZORKI NA GRANICE

$\ln 0 \to -\infty$	
$\ln 1 \to 0$	
$\ln e \to 1$	
$\ln\infty \to \infty$	
LOGARYTMY NATURALNE	

LOGARYTMY

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a \infty$	$\to \infty$	$a>1$
	$\to -\infty$	$a<1$

$\log_a 0$	$\to -\infty$	$a>1$
	$\to +\infty$	$a<1$

$$\lim_{\bullet\to 0}\frac{\sin\bullet}{\bullet} = 1$$

TAK SAMO DLA: sin / arcsin, tg / arc tg

● – to samo

$$\lim_{\bullet\to 0}\frac{\ln(1+\bullet)}{\bullet} = 1 \qquad \lim_{\bullet\to 0}\frac{\log_a(1+\bullet)}{\bullet} = \log_a e$$

$$\lim_{\bullet\to 0}\frac{e^{\bullet}-1}{\bullet} = 1 \qquad \lim_{\bullet\to 0}\frac{a^{\bullet}-1}{\bullet} = \ln a$$

$$\lim_{\bullet\to 0}\frac{1-\cos\bullet}{\bullet^2} = \frac{1}{2}$$

(+ wzór wyżej na literkę e)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{e^{4x}-1}{4x}}^{1}\cdot 4\cancel{x}}{\cancel{x}} = 4$$

[GDY NIE ZGADZAJĄ SIĘ WARTOŚCI PRZY x TO PODZIELIĆ NA NOWO I WYMNOŻYĆ]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{\sin 4x}{4x}}^{1}\cdot 4\cancel{x}-\overbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}^{1}\cdot 2\cancel{x}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\cancel{x}} = 2$$

[NAWET GDY JEST ICH DUŻO]

*TWORZENIE 1'KI VOL 2

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-1+\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{-1+\cos x}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

1) ZROBIŁEM JEDYNKĘ Z +1 -1

2) MOŻNA ZROBIĆ UŁAMEK Z WSZYSTKIEGO NAWET Z TEGO

GDY WIESZ ŻE x JEST UJEMNY

(gdy $x\to 0^-$ to jest ujemny)

TO $|x| = -x$

SZEREG = SUMA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

WARUNEK ZBIEŻNOŚCI: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$

NIE JEST TO WARUNEK WYSTARCZAJĄCY

np. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to 0$ ale $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ idzie gdzieś, nie wiem gdzie

WIĘC SZEREG NIE JEST ZBIEŻNY

* BADANIE ZBIEŻNOŚCI SZEREGU Z DEFINICJI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)}$$

1 ROZKŁAD NA UŁAMKI PROSTE

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{A}{2n} + \frac{B}{2n+2} \quad \Big| \cdot 2n(2n+2)$$

$$1 = A(2n+2) + B(2n)$$

$$1 = 2An + 2A + 2Bn$$

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2}$$

EFEKT

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n} + \frac{-\frac{1}{2}}{2n+2}$$

2 ZAPISANIE KILKU PIERWSZYCH WYRAZÓW BY ZOBACZYĆ CZY COŚ SIĘ SKRÓCI

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{4}} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{4}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{6}} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{6}} - \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{8}} + \ldots + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{2n}} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+2}\right) = \frac{1}{4}$$

SZEREG JEST ZBIEŻNY ✓

* TRUDNIEJSZY PRZYKŁAD DO OGARNIĘCIA CO SIĘ SKRACA

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{-1}{2} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}}\right) + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} + \cancel{\frac{-1}{3}} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{3}} + \cancel{\frac{-1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{5}\right) + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{4}} + \frac{-1}{5} + \cancel{\frac{\frac{1}{2}}{6}}\right) + \ldots + \cancel{\ } + \left(\cancel{\frac{\frac{1}{2}}{n}} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right)\right] =$$

Kryteria zbieżności

* k. D'Alamberta
* k. Cauchy'ego
* k. porównawcze
* k. całkowe

} szeregi o wyrazach nieujemnych

* zbieżność bezwzględna szeregu
* k. Leibnitz'a

3 | ANALIZA | SZEREGI

Kryterium D'Alamberta

* wyrazy nieujemne

ZBIEŻNY GDY $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

ROZBIEŻNY GDY $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

GDY $\lim = 1$ to kryterium to nie rozstrzyga o zbieżności

!

Ogólne to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

PRZYKŁAD 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^3}{n!}\right)$$

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{(n+2)^3}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)^3}{n!}} = \lim \frac{(n+2)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+1)^3} = \lim \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!} = 0$$

$0 < 1$ więc na mocy k. d'Alamberta szereg jest zbieżny

PRZYKŁAD 2: $\sum_{n=1} n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{n^2 \sin\frac{\pi}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^{n+1}}} \cdot \frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}} \cdot \frac{\pi}{3^n}}$$

DZIELĘ I MNOŻĘ

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ABY UŻYĆ WZORU

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}_{1} \cdot \frac{\overbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{3^{n+1}}}{\frac{\pi}{3^{n+1}}}}^{1} \cdot \cancel{\frac{\pi}{3^n}} \cdot \overbrace{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}}{\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{3^n}}{\frac{\pi}{3^n}}}_{1} \cdot \cancel{\frac{\pi}{3^n}}} = \frac{1}{3}$$

na mocy k. d'Alamberta szereg jest zbieżny.

Kryterium Cauchy'ego

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =$	< 1 ZBIEŻNY > 1 ROZBIEŻNY	$= 1$ nie wiadomo

PRZYKŁAD 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}}{3^n}} = \frac{\left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}}{3^{n\cdot\frac{1}{n}}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n}{3} =$$

WYCIĄGAM $\frac{n+2}{n+2}$

$$\frac{\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^n}{3} = \frac{\left[\overbrace{\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{n+2}}^{e^{-1}}\right]^{\overbrace{\frac{n}{n+2}}^{1}}}{3}$$

$$= \frac{e^{-1}}{3} = \frac{\frac{1}{e}}{3} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3e}$$

$e \approx 2{,}71$ więc ogólem < 1

+ ANALIZA | SZEREGI

ALGORYTM:
1. SPRAWDZAM NAJWYŻSZĄ POTĘGĘ n-A W MIANOWNIKU
2. WYBIERAM WIĘKSZY/MNIEJSZY CIĄG
3. DĄŻĘ DO TEGO ABY WYRAZIĆ GO JAKO stała $\cdot \frac{1}{n^\alpha}$

$\alpha \leq 1$ GDY UDOWADNIAM ROZBIEŻNOŚĆ

$\alpha > 1$ GDY UDOWADNIAM ZBIEŻNOŚĆ

Kryterium porównawcze

Szeregi harmoniczne

* szereg Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ ROZBIEŻNY

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ zbieżny dla $\alpha > 1$ ~ znajdź większy

rozbieżny dla $\alpha \leq 1$ ~ znajdź mniejszy

ZBIEŻNOŚĆ

Jeżeli $a_n \leq b_n$ (WYRAZY CIĄGU) od pewnego n

i $\sum b_n$ jest zbieżny

to $\sum a_n$ jest też zbieżny

ROZBIEŻNOŚĆ

Jeżeli $a_n \geq b_n$ od pewnego n

i $\sum b_n$ jest rozbieżny

to $\sum a_n$ jest też rozbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ SKĄD WIEDZIEĆ CZY UDOWADNIAĆ ŻE JEST ZBIEŻNY ALBO ŻE ROZBIEŻNY?

można sobie „na oko" określić: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, największa potęga przy n w $\sqrt{n+1}$ to $n^{\frac{1}{2}}$ stąd zakładam że jeśli $\alpha < 1$ to MOŻE być rozbieżny ciąg.

BĘDĘ WIĘC DOWODZIĆ ROZBIEŻNOŚCI.

* muszę wymyślić mniejszy ciąg

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \boxed{\frac{1}{\sqrt{n+n}}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

np. zamiast liczby n — znany i lubiany trick

szereg Dirichleta $\alpha < 1$ ROZBIEŻNY

WIĘC CAŁY CIĄG ROZBIEŻNY

* od pewnego n – o co chodzi?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+4)(n+1)}$ $\quad \left[\frac{n}{n^2}\right] = \left[\frac{1}{n}\right]$ $+C$ $+D$ n do 1 potęgi: więc rozpatruję rozbieżność

$$\frac{n+3}{(n+4)(n+1)} \geq \frac{n}{(n+n)(n+n)} = \frac{n}{2n\cdot 2n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$$

rozbieżny szereg harmoniczny

ZACHODZI DLA $n \geq 4$ | ALE TO NIE PRZESZKADZA

---

* przykład

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$, $\left(\frac{1}{n^2} \sim \text{naj. potęga n'a}\right)$ więc wykazuję zbieżność

$$\frac{1}{n^2-2n+2} \leq \frac{1}{(n-1)^2+1} \leq \boxed{\frac{1}{(n-1)^2}}$$

dla $n \geq 2$

inny zapis — jeszcze większe

a dla n=2, n+1 to szereg Dirichleta...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=2} \frac{1}{(n-1)^2}$$

szereg Dirichleta zbieżny

ODPOWIEDŹ PISZ

Na mocy kr. porównawczego, Ze zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2}$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-2n+2}$.

5 ANALIZA SZEREGI

*** k. porównawcze – przykład – sprzężenie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$ szacuję robiąc sprzężenie:

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{n+1-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim n^{\frac{3}{2}} \text{ max } n$$

Wykazuję zbieżność

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\alpha>1$ szereg Dirichleta zbieżny

+ ODP NAPISZ

***. k. porównawcze – przykład – z sinusem**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$\sin(0)^+$ → 0^+

trochę szybciej zbiega ten czynnik

→ więc wykazuję zbieżność: $\frac{1}{n}\sqrt{\sin\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ → $\alpha>1$

$\boxed{\sin x < x \ (\text{dla } x>0)}$

+ ODP NAPISZ

* $\frac{1}{\ln n} \geqslant \frac{1}{n-1}$ rozbieżny bo $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$\boxed{\ln x \leqslant x-1}$ (inna zasada)

+ODP

(WOLNO MALEJE X ROZBIEŻNY)

* $\sin\frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$ rozbieżny

$\boxed{\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x \ \left(\text{dla } x\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle\right)}$

Szereg Taylora

(szereg Maclaurina to przypadek dla $x_0=0$)

* założenie: funkcja ma nieskończoność pochodnych w otoczeniu punktu x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = f(x_0) + f'(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots$$

* można przeciąć szereg w dowolnym miejscu i odciąć jego resztę (od pewnego n)

Postać reszty (Lagrange'a):

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{dla } c\in(x_0,x) \text{ lub } c\in(x,x_0)$$

ALGORYTM:

1) ROZPISAĆ DWIE KOLUMNY (LEWO: POCHODNE OGÓLNE)(PRAWO: POCHODNE DLA WARTOŚCI ARGUMENTU x_0)
2) PRAWA KOLUMNA → WZ. TAYLORA
3) ZNAJDŹ ZALEŻNOŚĆ → NAPISZ TO JAKO SZEREG
4) ZAPISZ ŁADNIEJ

* (wzór Taylora) z resztą R_4 to pierwsze wyrazy dla $n=0,1,2,3$ (ale dla 4 już nie!) $+R_4$

Scanned with CamScanner

6 | ANALIZA | SZEREGI

Przykład Taylora:

* Rozwiń funkcję $y=\sqrt{x}$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu $x_0=4$. Wyznacz resztę.

$$y=\sqrt{x} \qquad\qquad y(4)=2$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad\qquad y'(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$y''=\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \qquad\qquad y''(4)=-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}$$

$$y'''=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} \qquad\qquad y'''(4)=\frac{-1\,(-3)}{2^3}\cdot\frac{1}{2^5}$$

$$y^{(IV)}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}} \qquad\qquad y^{(IV)}(4)=\frac{-1\,(-3)(-5)}{2^4}\cdot\frac{1}{2^7}$$

(1) KOLUMNA POCHODNYCH DLA X

(2) POCHODNE DLA DANEGO ARGUMENTU

(3) ZAPISZ WZ. TAYLORA DLA POCHODNYCH Z PRAWEJ KOLUMNY

$$2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}\,\frac{(x-4)^2}{2!}+\frac{1\cdot3}{2^3}\cdot\frac{1}{2^5}\,\frac{(x-4)^3}{3!}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^4}\cdot\frac{1}{2^7}\,\frac{(x-4)^4}{4!}+\ldots$$

dwa pierwsze wyrazy nie mają naprzemiennych minusów więc olewam je :

(4) szukaj zależności aby napisać szereg

* gdy minusy są naprzemienne zapisz coś „a la" $(-1)^{(n-1)}$
* traktuj osobno licznik i mianownik tj. $\frac{(x-4)^3}{3!}$ jako $(x-4)^3\cdot\frac{1}{3!}$
* pomyśl jak możesz zapisać kolejne nieparzyste $(2n-1)$
* tak samo z innymi zapisami tj.

dla n=2	·1
dla n=3	·1·3
dla n=4	1·3·5

można zapisać jako $1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)$

pamiętaj jednak, że $(2n-3)$ to jest ostatni wyraz, NIE WYRAŻA ON WSZYSTKICH WYRAZÓW $2n-3 \neq 1\cdot3\cdot5\ldots(2n-3)$

* Zaznaczaj na rozpisanym wzorze co już ogarnąłeś jak zapisać, będziesz widział co zostało (rób kółeczka wokół tych rzeczy)

$$2+\frac{1}{4}(x-4)+\sum_{n=2}^{\infty}(x-4)^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^{2n-1}}}_{}\cdot\frac{1}{n!}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-3)$$

(5) zapisz powstałe cudo ładniej - poskracaj też co się da np. $\boxed{\text{to}}$

$$2+\frac{1}{4}(x-4)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-3)}{2^{3n-1}}\cdot\frac{(x-4)^n}{n!}$$

Szacowanie błędu przybliżenia

$$\sqrt{1+x} \approx \underbrace{1}_{\text{I WYRAZ}} + \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{II WYRAZ}} - \underbrace{\frac{x^2}{8}}_{\text{III WYRAZ}}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$$

szeregu Maclaurina

ZAPISUJĘ WZÓR NA RESZTĘ DRUGIEGO RZĘDU (CZEMU NIE TRZECIEGO?

bowiem wz. na szereg Taylora zaczyna się od $\underbrace{f(x_0)}_{\text{OD WART. FUNKCJI}} + f'(x_0)\frac{x-x_0}{1!} + \dots$

MAM 3 WYRAZY CZYLI — $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$

$$R_2(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+c)^{\frac{1}{2}-3}}_{\text{trzecia pochodna}} \frac{x^3}{3!} \quad \text{dla } c \in (0, x)$$

SZUKAM LICZBY ODROBINĘ WIĘKSZEJ

$$R_2(x) = \frac{x^3}{16 \cdot \sqrt{(1+c)^5}} < \frac{1}{16}$$

$x \in \langle 0, 1 \rangle$ więc na pewno jest conajwyżej równe 1 lub mniejsze

usuwam c, więc mianownik zwiększa się