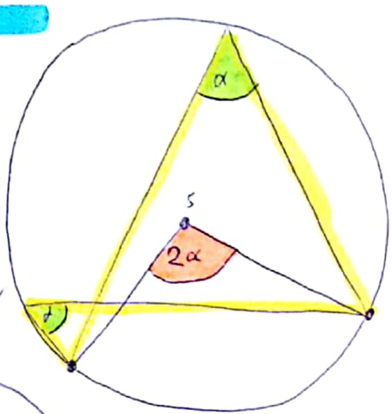
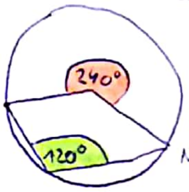
Kąty w kole

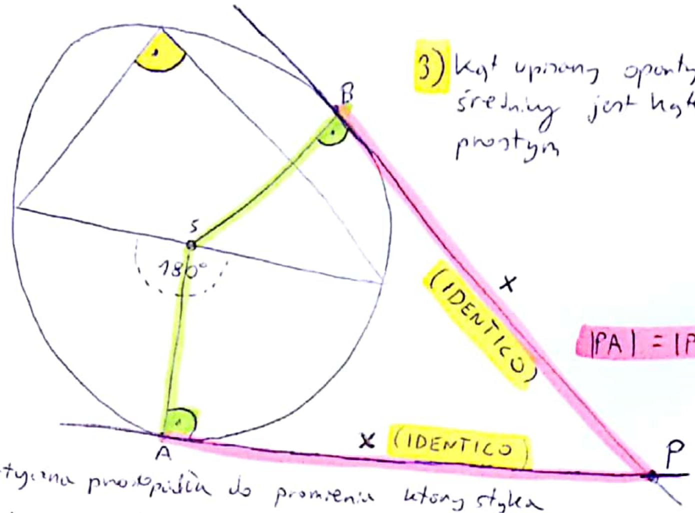
1) kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miarę

2) kąt środkowy oparty na tym samym łuku jest 2x większy





CZASEM GO WYWIEJE
NIE PRZEJMUJ SIĘ :)



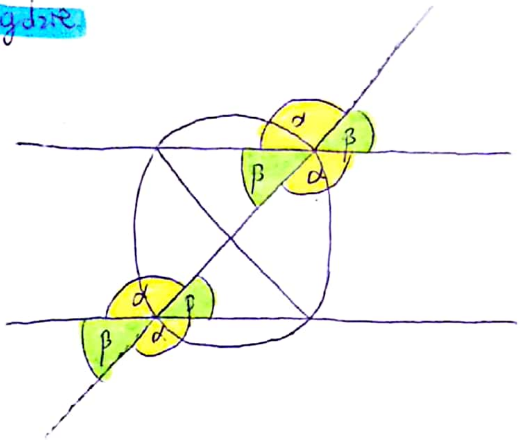
3) Kąt wpisany oparty na średnicy jest kątem prostym

|PA| = |PB|

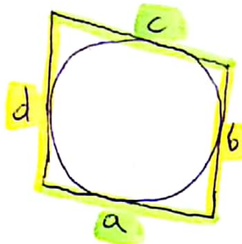
4) styczna prostopadła do promienia który styka

5) styczne z tego samego punktu są identico

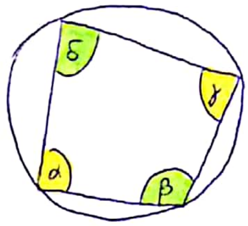
Kąty byle gdzie



Czworokąty



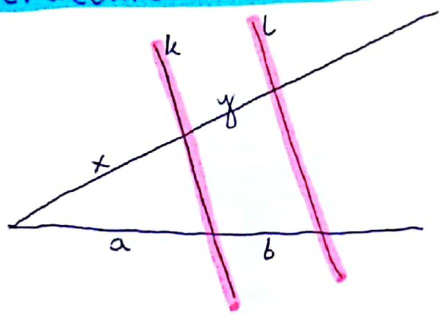
$a + c = b + d$



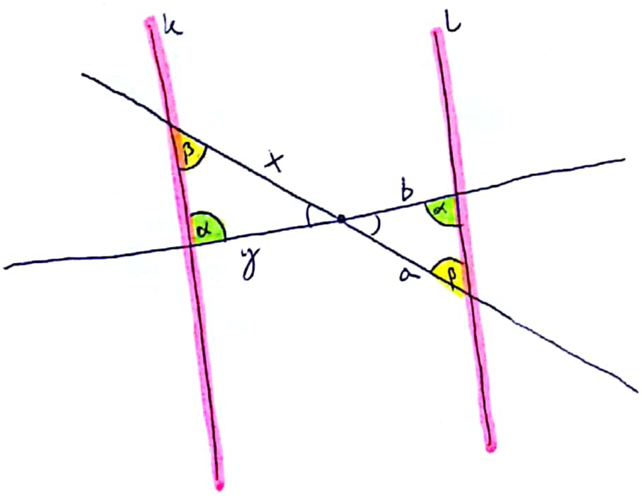
$\alpha + \gamma = \beta + \delta$

(180°) (180°)

Twierdzenie Talesa



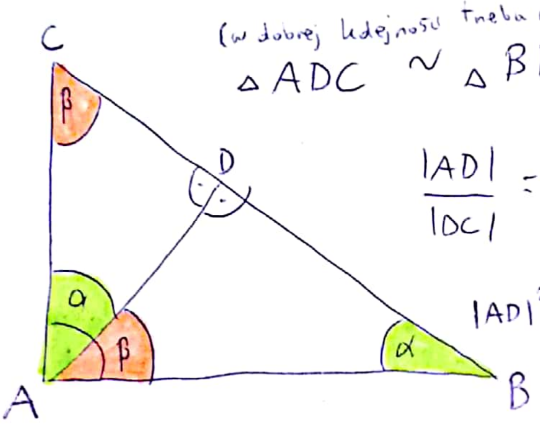
$k \parallel l \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$



$$\frac{x}{x+a} = \frac{y}{y+b}$$

TRÓJKĄTY...

Podobieństwo w trójkącie prostokątnym



(w dobrej kolejności trzeba wypisać)

$\triangle ADC \sim \triangle BDA$

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BD|}{|DA|}$$

$$|AD|^2 = |BD| \cdot |CD|$$

Cechy podobieństwa trójkątów

b, b, b	– 3 BOKI PODOBNE W SKALI K
b, k, b	– 2 BOKI PODOBNE W SKALI K + KĄT MIĘDZY NIMI TAKI SAM
k, k, k	– 2 KĄTY MAJĄ TAKĄ SAMĄ MIARĘ

Cechy przystawania trójkątów

b, b, b	– WSZYSTKIE DŁUGOŚCI BOKÓW OBYDWU TRÓJKĄTÓW TAKIE SAME
b, k, b	– 2 BOKI RÓWNE DŁUGOŚCI, 1 KĄT RÓWNE WIELKOŚCI
k, b, k	– 1 BOK RÓWNEJ DŁUGOŚCI + PRZYLEGAJĄCE DO NIEGO KĄTY

POLE TRÓJKĄTA

$P = \frac{1}{2} a \cdot h$

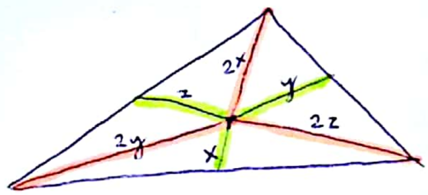
$P = \frac{1}{2} r (a+b+c)$

$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

$P = \frac{abc}{4R}$

ŚRODKOWE TRÓJKĄTA

WIERZCHOŁEK ZE ŚRODKIEM BOKU

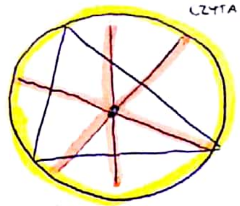


* przecinają się w „środku ciężkości" trójkąta
* punkt ten dzieli każdą środkową w stosunku 2:1

SYMETRALNE BOKÓW

* prostopadła do boku – przechodząca przez jego środek

CZYTAJ: DZIELI BOK NA DWIE CZĘŚCI



ŚRODEK OKRĘGU OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY O BOKU a

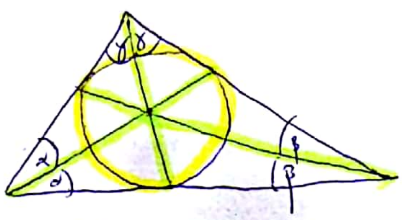
* wysokość $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
* pole $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
* okrąg opisany na t. równobocznym

$R = \frac{2}{3} h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

* okrąg wpisany (promień)

$r = \frac{1}{3} h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

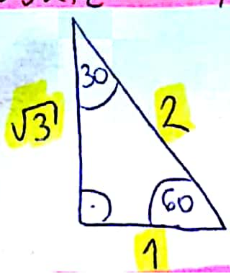
DWUSIECZNE KĄTÓW



ŚRODEK OKRĘGU WPISANEGO

* kąty na pół

TRÓJKĄT 30°, 60°, 90°

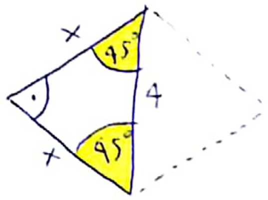


– długości boków

OGÓLNE PROPORCJE

ten ze naprzeciw prostokątnego 2x większy od przyprostokątnej, przy 60° etc

Trójkąt który jest połową kwadratu...



(przekątna kwadratu o boku a to $a\sqrt{2}$)

$$4 = x\sqrt{2}$$

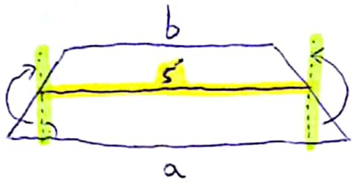
$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Koło opisane na trójkącie równobocznym

$$R = \frac{2}{3}h$$

(bo w trójkącie równobocznym wysokości pokrywają się ze środkowymi boków)

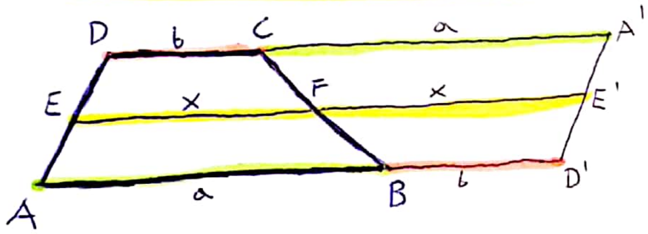
Trapez - czworokąt z conajmniej jedną parą boków równoległych



środkowa trapezu → średnia arytmetyczna boków

$$ś \cdot \cancel{H} = \frac{a+b}{2} \cdot \cancel{H} \quad \Big\} \text{POLE TRAPEZU}$$

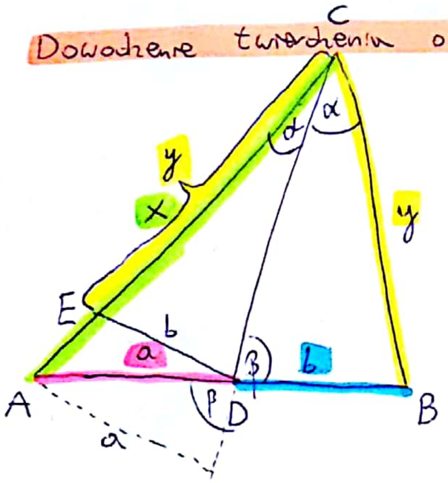
Najszybsze dowodzenie powyższej zależności: Wykażyj, że $x = \frac{a+b}{2}$



$$\square ABCD \equiv \square A'CBD'$$

$$|EE'| = 2x = a+b \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

Dowodzenie twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie



Udowodnić $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

$$\triangle ECD \equiv \triangle BCD$$ (trójkąt ECD przystaje do BCD)

z tw. Talesa

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

Twierdzenie sinusów i cosinusów

*pozwala wyliczyć brakujące kąty lub boki w trójkącie

Twierdzenie sinusów

PROMIEŃ OKRĘGU OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE

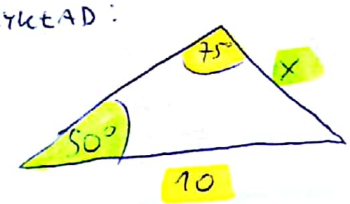
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

CHARAKTERYSTYCZNE SYTUACJE:

*mam 2 boki i kąt

*mam 1 bok i 2 kąty

PRZYKŁAD:



z tw sinusów:

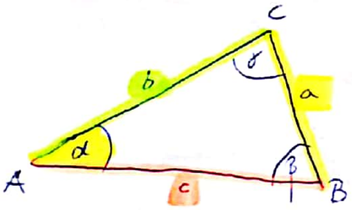
$$\frac{x}{\sin 50^\circ} = \frac{10}{\sin 75^\circ} \Rightarrow x = \frac{10\sin 50^\circ}{\sin 75^\circ}$$

Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

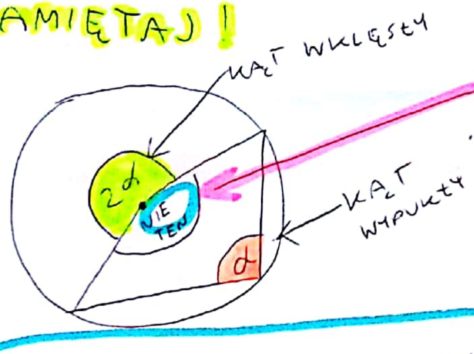
CHARAKTERYSTYCZNE SYTUACJE:

*mam 2 boki i kąt między nimi



GŁUPOTKI ↓

PAMIĘTAJ!



PAMIĘTAJ ŻEBY SIĘ NIE POMYLIĆ

KĄT 2 X WIĘKSZY TO TEN USTAWIONY W TĄ SAMĄ STRONĘ !!

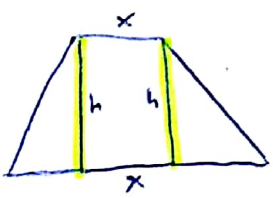
TRÓJKI PITAGOREJSKIE:

3 - 4 - 5

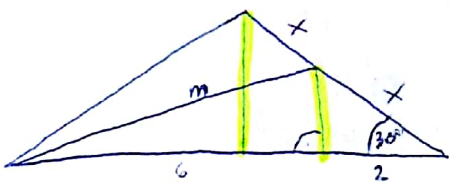
5 - 12 - 13

8 - 15 - 17

Podział trapezu

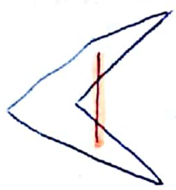


Podział trójkąta równoramiennego z niewiadomą środkową



CZWOROKĄT WYPUKŁY

WKLĘSŁY

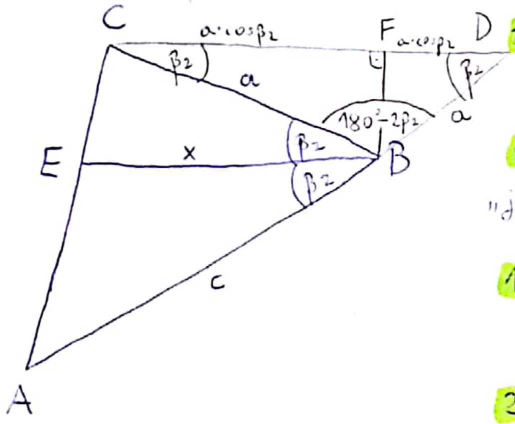


$\cos 30°$ to $\frac{\sqrt{3}}{2}$ A NIE $\cancel{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

DOWODZENIE W PLANIMETRII

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

ANALIZA ROZWIĄZANIA NR 1 - DOWODZENIE, ŻE DŁUGOŚĆ ODCINKA BE JEST RÓWNA $\frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$



Zapis

$\beta_2 = \frac{\beta}{2}$ (uproszczony), $BE = x$

Chwytowe przysłowie

„jak coś się mądrze dorysuje to zadanie staje się prostsze"

1) Dorysowanie a) przedłużenie c, b) równoległa do x } do punktu D

2) kąt BCD to też β_2 - kąt naprzemianległy
kąt CBD to $180° - 2\beta_2$ więc { kąt BDC to też β_2, prosta BD to a

3) Zauważ, że:

$$\frac{CF}{a} = \cos\beta_2 \Rightarrow CF = a\cdot\cos\beta_2$$

4) Podobieństwo trójkątów - próba wyjęcia czegoś pasującego do dowodu

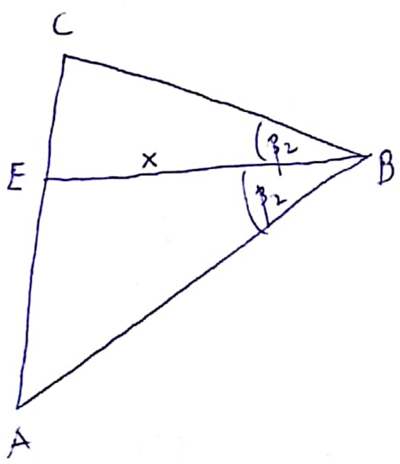
$$\Delta ABE \overset{kkk}{\sim} \Delta ADC$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x}{c} = \frac{2a\cos\beta_2}{a+c} \Rightarrow x = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$$

ANALIZA ROZWIĄZANIA NR 2

Ułożenie układu równań z wzorów na pole.



$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

1) Pole całego trójkąta

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ac\sin 2\beta_2 \xrightarrow[\text{podwojonego kąta}]{\text{wzór na sin}} ac\sin\beta_2\cos\beta_2$$

2) Suma pól mniejszych trójkątów podzielonych przez $BE = x$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}cx\sin\beta_2 + \frac{1}{2}ax\sin\beta_2 \rightarrow \frac{1}{2}(a+c)x\sin\beta_2$$

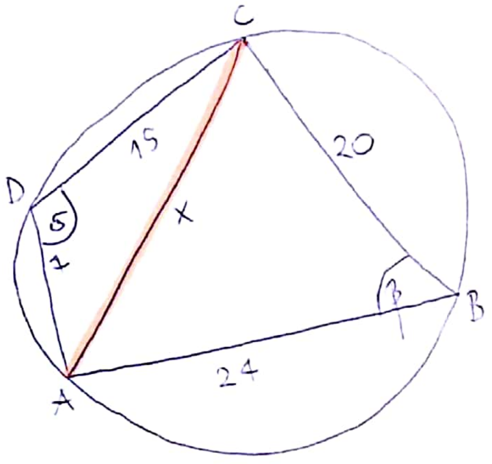
3) Stworzenie równania

$$\frac{1}{2}(a+c)x\sin\beta_2 = ac\sin\beta_2\cdot\cos\beta_2$$

$$x = \frac{2ac\cos\beta_2}{a+c}$$

Dowodzenie – tworzenie układu równań :)

Czworokąt ABCD o bokach długości $|AB| = 24$, $|BC| = 20$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$ wpisano w okrąg. Oblicz długość przekątnej AC.



1) Czworokąt wpisany w trójkąt ma kąty naprzeciwko o sumie 180°

$$\delta + \beta = 180^\circ$$

$$\cos\delta = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta$$

2) Układ równań z twierdzeń cosinusów – tak, jakby wyznaczanie tego samego boku z dwóch stron

$$\begin{cases} x^2 = 24^2 + 20^2 - 2\cdot 24\cdot 20\cdot\cos\beta & \text{z ABC)} \\ x^2 = 7^2 + 15^2 + 2\cdot 7\cdot 15\cos\beta & \text{z ADC)} \end{cases}$$

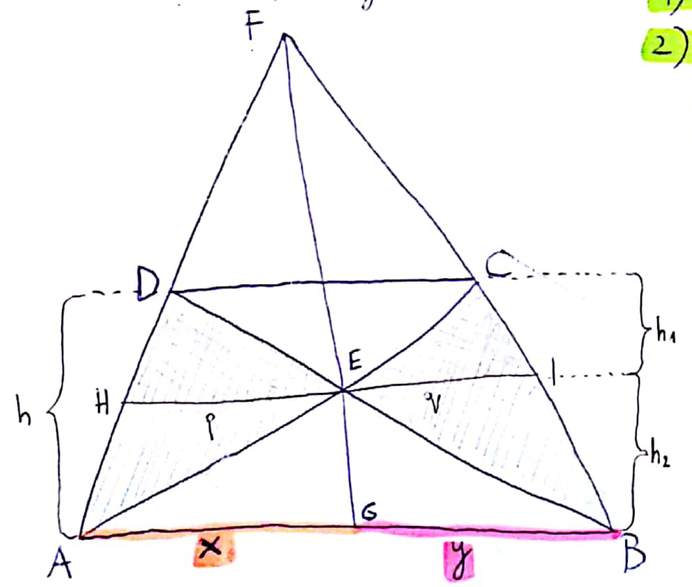
$\cos\beta = c$

$$\begin{cases} x^2 = 976 - 960c \\ x^2 = 274 + 210c \end{cases}$$

$$0 = 702 - 1170c \Rightarrow c = \frac{702}{1170} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$x^2 = 274 + 126 = 400 \Rightarrow x = 20 \quad \text{(odp.)}$$

Dany jest trapez ABCD. Punkt E jest punktem przecięcia się przekątnych trapezu. Ramiona trapezu przedłużono do przecięcia w punkcie F. Wykaż, że prosta EF dzieli długość podstawy AB trapezu na połowy.



1) O co chodzi? Wykazać, że $x = y$

2) Zacznę jednak od wykazania, że $p = q$

PORÓWNUJĘ POLA

$$P_{AED} = P_{ABD} - P_{ABE} = P_{ABC} - P_{ABE} = P_{BEC}$$ POLA SĄ RÓWNE!

DZIELĘ WYSOKOŚCI I WYPISUJĘ POLA

$$\left.\begin{aligned} P_{AED} &= \tfrac{1}{2}ph_1 + \tfrac{1}{2}ph_2 = \tfrac{1}{2}ph \\ P_{BEC} &= \tfrac{1}{2}qh_1 + \tfrac{1}{2}qh_2 = \tfrac{1}{2}qh \end{aligned}\right\} \Rightarrow p = q$$

3) Rozpoczynam dowód tego, że $x = y$

ZAUWAŻAM TRÓJKĄTY PODOBNE

$$\triangle AGF \overset{kkk}{\sim} \triangle HEF \quad i \quad \triangle GBF \overset{kkk}{\sim} \triangle EIF$$

Są podobne więc:

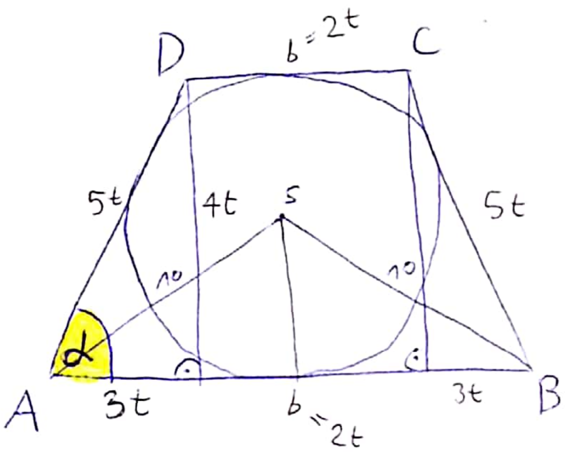
$$\frac{x}{p} = \frac{|GF|}{|EF|} = \frac{y}{q}$$

$p = q$ więc $x = y$ □

$$\frac{\text{PODSTAWA DUŻEGO LEWEGO TRÓJKĄTA}}{\text{PODSTAWA MAŁEGO LEWEGO TRÓJKĄTA}} = \underbrace{\left(\frac{\text{DUŻY BOK}}{\text{MAŁY BOK}}\right)}_{\text{ŁĄCZNIK}} = \frac{\text{PODSTAWA DUŻEGO PRAWEGO TRÓJKĄTA}}{\text{PODSTAWA MAŁEGO LEWEGO TRÓJKĄTA}}$$

12) PLANIMETRIA C

W trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$ wpisano okrąg o środku S. Odległość punktu S od końców dłuższej podstawy AB jest równa 10, a cosinus kąta ostrego tego trapezu jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole tego trapezu.



ZADANIE – OZNACZANIE BOKÓW WG COSINUSA

1) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ więc mogę sobie pozwolić na oznaczenie boków jako $3t$ i $5t$.

2) $\triangle AED$ jest podobny do „trójkąta egipskiego" (3-4-5) więc wysokość jest równa $4t$

3) Jest to czworokąt opisany na okręgu więc przeciwległe boki tworzą sumy które są sobie równe stąd:

$10t = 6t + 2b \Rightarrow b = 2t$ ZAPISUJĘ NA SZKICU

4) ~~Promień~~ można wyliczyć z Pitagorasa tj. liczbę „t"

$t = \sqrt{5}$ ← 2t, 10, 4t

5) Pole trapezu

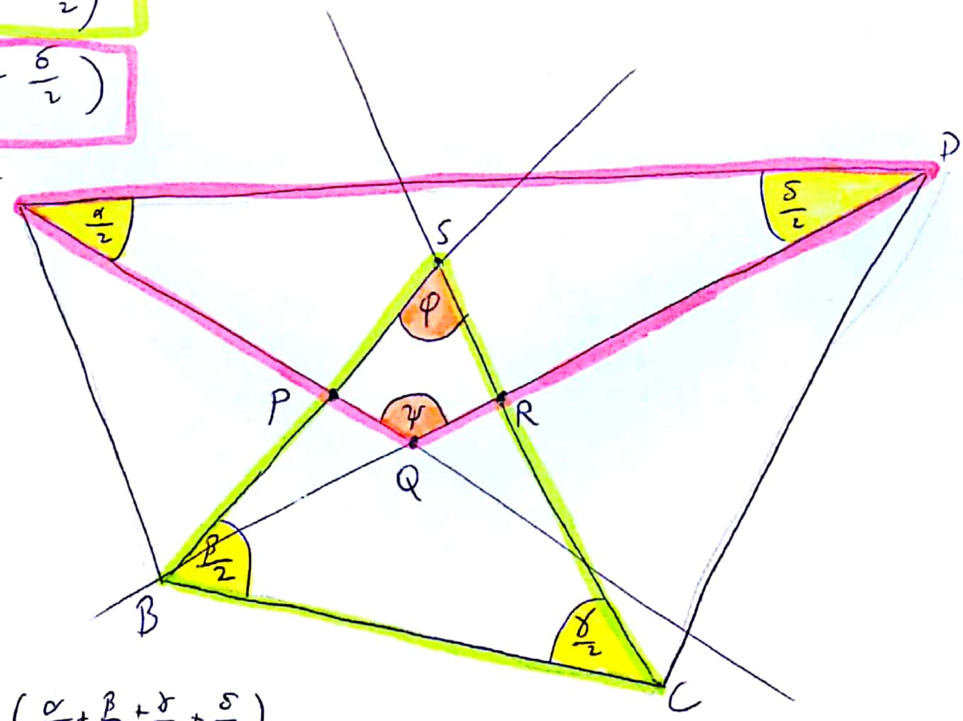
$P_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h = p \cdot r = 10\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 100$

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach $PQRS$. Wykaż że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

$$\boxed{\varphi = 180° - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\boxed{\psi = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}$$



$$\varphi + \psi = 360° - \underbrace{\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right)}_{180°}$$

180° BO 4 POŁÓWKI KĄTÓW 360°KI

$\varphi + \psi = 180°$ □

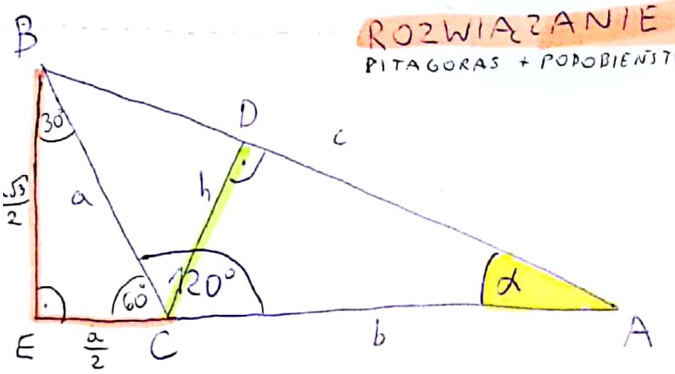
ABY MOŻNA BYŁO OPISAĆ OKRĄG WYSTARCZY, ŻE SUMA PRZECIWLEGŁYCH KĄTÓW JEST RÓWNA 180° → POZOSTAŁE KĄTY MAJĄ TEŻ 180 Z AUTOMATU

12 PLANIMETRIA D — DŁUGOŚĆ WYSOKOŚCI W TRÓJKĄCIE - DOWÓD

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$, $|AC| = b$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120^\circ$. Punkt D jest spodkiem wysokości CD tego trójkąta. Udowodnij, że $|CD| = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}}$

ROZWIĄZANIE 1

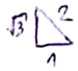
PITAGORAS + PODOBIEŃSTWO



1) Oznaczam $|CD|$ jako h (wysokość)

2) Dorysowuję punkt E (przedłużam trójkąt)

3) Trójkąt BEC to trójkąt „charakterystyczny” 30-60-90, więc oznaczam boki według zasady



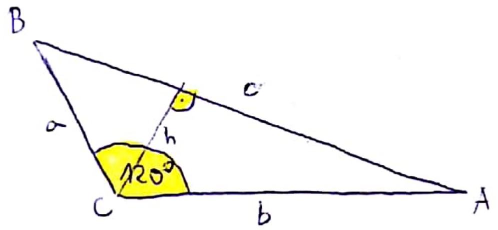
4) Wyliczam c^2 z pitagorasa

z $\triangle ABE$: $c^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2+ab+b^2}$

5) Zauważam, że trójkąty są podobne

$\triangle ADC \overset{kkk}{\sim} \triangle ABE \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{c} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}}$

ROZWIĄZANIE 2



1) IDEA: zestawienie pól trójkąta

2) Potrzebne będzie c, więc: z TW. COSINUSÓW

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos 120^\circ \Rightarrow c = \sqrt{a^2+ab+b^2}$

3) Zestawiam ze sobą 2 różne wyrażenia pola $\left(\frac{1}{2}a\cdot h\right)$ i $\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot \sin\gamma\right)$

UKŁAD RÓWNAŃ

$$\begin{cases} P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}c\cdot h \\ P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 120^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ab\underbrace{\sin 120^\circ}_{\underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}} \Rightarrow hc = \frac{\sqrt{3}}{2}ab \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}} \quad \blacksquare$$

DOWODZENIE W PLANIMETRII

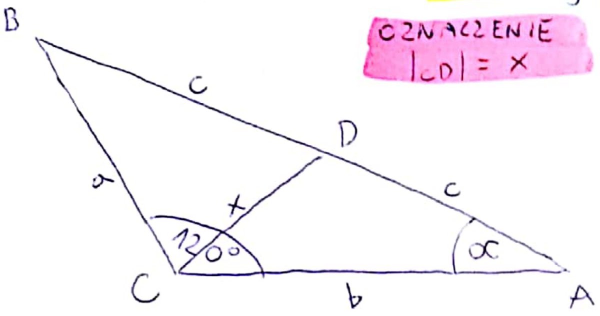
* nie przerażaj się tym co masz udowodnić W SENSIE NIE WYSTRASZ SIĘ

1) PRÓBUJ ZNALEŹĆ
   * boki, kąty z tw. cosinusów i sinusów
   * trójkąty podobne
   * wyrażenia wyglądające podobnie do dowodu
   * trójkąty charakterystyczne, egipskie, równoramienne
   * stosunki boków z sin/cos/tg
   * [illegible]
   * WZORY NA CZWOROKĄT W OKRĘGU
   * MIARY KĄTÓW NAPRZEMIENNYCH ETC.

2) DORYSUJ BOKI, PROSTE I PONÓW

(12) PLANIMETRIA E — DŁUGOŚĆ ŚRODKOWEJ W TRÓJKĄCIE - DOWÓD

Dany jest trójkąt ABC w którym $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\sphericalangle ACB = 120°$. Punkt D jest środkiem boku AB tego trójkąta. Udowodnij, że $|CD| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ab + b^2}$



OZNACZENIE
$|CD| = x$

Co widać od razu?

1) Mamy dwa boki i kąt między nimi

Aż się prosi więc aby obliczyć bok 2c z tw. kosinusów

$$(2c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°$$
$$c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + ab + b^2)$$

2) Mając kolejny bok:

dorysowuję kąt α i wyznaczam wzór na $\cos\alpha$

z ΔABC: $a^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^2 + 4c^2 - a^2}{4bc}$

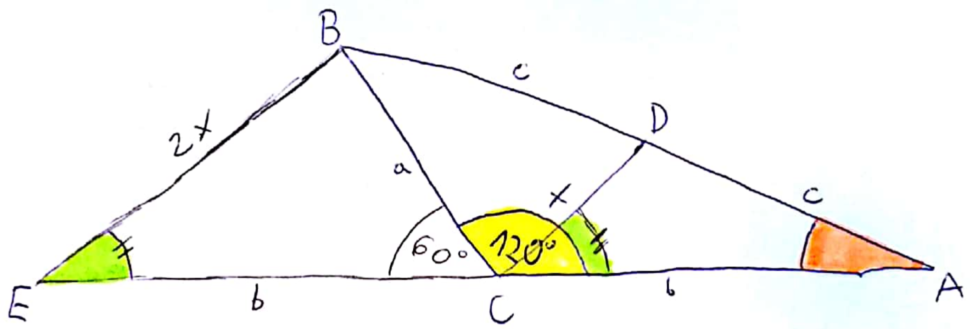
3) Mając bok c i cosinusa

mam już wszystko do wyznaczenia x'a

z ΔADC: $x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4}b^2$

więc $x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ab + b^2}$

ROZWIĄZANIE 2



1) Dorysowuję odcinek równoległy do mojego x'a, daje mi to podobny trójkąt na zasadzie kkk (zielony i pomarańczowy)

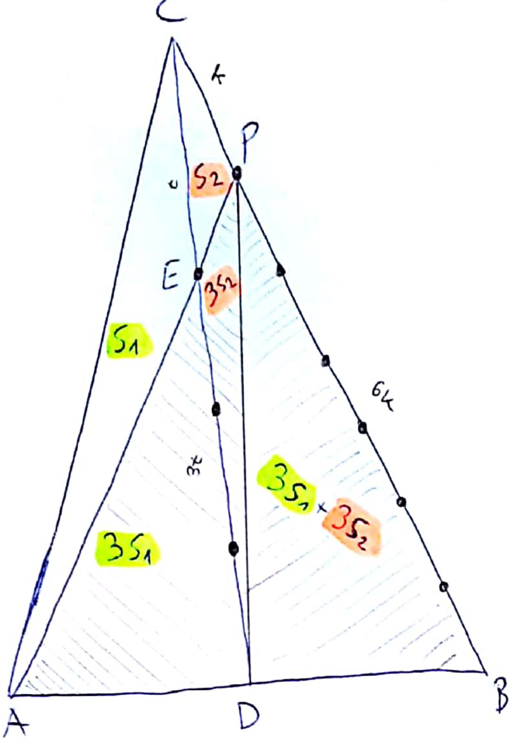
2) Szukam wartości boku 2x: MAM DWA BOKI I KĄT MIĘDZY NIMI więc z tw. kosinusów

z ΔECB: $(2x)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60° = a^2 + b^2 - ab$

$$x^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - ab)$$

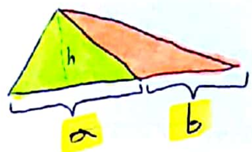
$$x = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ab + b^2}$$

W trójkącie ABC poprowadzono środkową CD i wyznaczono na niej taki punkt E, że $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{1}{3}$. Prosta przechodząca przez punkty AE przecina bok BC w punkcie P. Wykaż, że $\frac{|CP|}{|PB|} = \frac{1}{6}$



MEGA WAŻNE!

JEŚLI DWA TRÓJKĄTY MAJĄ WSPÓŁLINIOWE PODSTAWY I WSPÓLNY WIERZCHOŁEK



$$\Rightarrow \frac{P_{\Delta 1}}{P_{\Delta 2}} = \frac{\frac{1}{2} a h}{\frac{1}{2} b h} = \frac{a}{b}$$

TO STOSUNEK ICH PÓL JEST RÓWNY STOSUNKOWI ICH PODSTAW

1) Dorysowuję odcinek $|PD|$

2) Wg tej zasady stwierdzam, że

$P_{EAD} = 3S_1$ i $P_{EAC} = S_1$

$P_{EPD} = 3S_2$ i $P_{EPC} = S_2$

(ponieważ $\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{1}{3}$ więc stosunki podstaw odkładają się na pola)

3) Odcinki AD i DB są takie same, także trójkąty od nich do wierzchołka P są identyczne

Więc $P_{DPB} = 3S_1 + 3S_2$

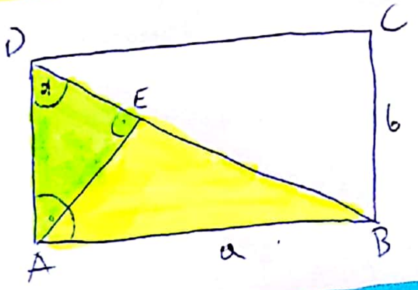
4) Aby dowieść, że CB dzieli się na 1 : 6 w punkcie P porównuję pola trójkątów z tych podstaw

$$\frac{|CP|}{|PB|} = \frac{P_{\Delta CPA}}{P_{\Delta PBA}} = \frac{S_1 + S_2}{6S_1 + 6S_2} = \frac{1}{6} \quad \square$$

ZADANIA TEGO TYPU

* tworz różne trójkąty z punktów
* tworz układy równań by wyliczyć inne pola
* szukaj podobnych trójkątów

ZAD. Dany jest prostokąt ABCD w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyznacz pole trójkąta AED za pomocą a i b



$|\sphericalangle DAB| = 90° = |\sphericalangle DEA|$

$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle EDA|$ kąt wspólny

Zatem $\Delta DAB \overset{kkk}{\sim} \Delta AED$ skala podobieństwa $\frac{b}{|BD|}$

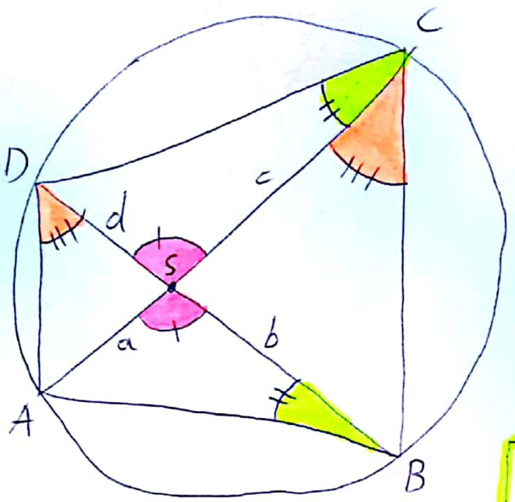
WAŻNE

Stosunek pól figur podobnych to kwadrat skali podobieństwa, stąd:

$$\frac{P_{\Delta AED}}{P_{\Delta DAB}} = k^2 \Rightarrow P_{\Delta AED} = P_{\Delta DAB} \cdot k^2 = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{b^2}{|BD|^2} = \frac{\frac{1}{2} ab^3}{a^2 + b^2} \quad \square$$

12) PLANIMETRIA | G | DOWÓD RÓWNOWAŻNY W DWÓCH KROKACH

Dany jest czworokąt ABCD. Niech S będzie punktem przecięcia jego przekątnych. Udowodnij, że czworokąt ABCD można wpisać w okrąg **wtedy i tylko wtedy** gdy $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$



1) Upraszczam zapis $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, $ac = bd$

2) „wtedy i tylko wtedy" to RÓWNOWAŻNOŚĆ (jednoczesność obu odwrotnych implikacji)

więc 1 KROK [IMPLIKACJA W PRAWO] $(\Rightarrow)$

a) zakładam, że czworokąt ABCD można wpisać w okrąg

b) chcę udowodnić podany związek tj. $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

Udowodnić mam pewną proporcję boków więc...

PRZYPATRZĘ SIĘ WIĘC KĄTOM (SZUKAM TAKICH SAMYCH)

MOŻE CHODZIĆ O PODOBIEŃSTWO TRÓJKĄTÓW

Pierwszy co znajduję to

$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$ – SĄ TO KĄTY WIERZCHOŁKOWE

$|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle DCS|$ – KĄTY WPISANE OPARTE NA TYM SAMYM ŁUKU

Mam już 2 kąty zatem widzę podobne trójkąty. Zapisuję...

$\Delta ABS \overset{(kkk)}{\sim} \Delta DSC \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ STOSUNKI BOKÓW TRÓJKĄTÓW PODOBNYCH ■

---

2 KROK [IMPLIKACJA W LEWO] $(\Leftarrow)$

a) zakładam, że $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$

b) chcę dojść do tego, że czworokąt można wpisać w okrąg

Tak więc...

$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle CSD|$ TRÓJKĄTY SĄ PODOBNE BO MAJĄ TEN SAM KĄT ORAZ BOKI PODOBNE

$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow \Delta ABS \overset{(bkb)}{\sim} \Delta DSC \Rightarrow |\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle DCS|$

Analogicznie $\Delta BCS \overset{(bkb)}{\sim} \Delta DAS \Rightarrow |\sphericalangle SCB| = |\sphericalangle ADS|$

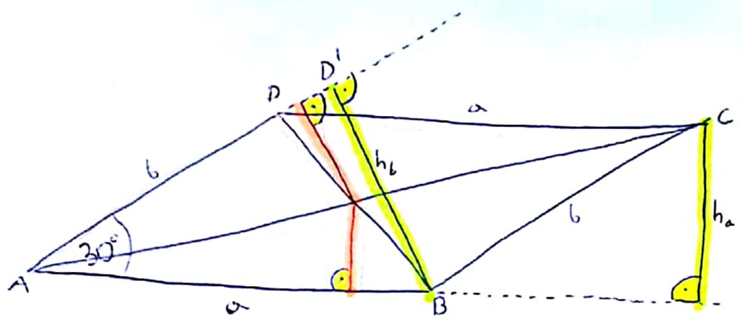
Zatem $|\sphericalangle BAD| = 180° - (|\sphericalangle ADS| + |\sphericalangle ABS|)$

$$\left\{\begin{array}{l} |\sphericalangle BAD| = 180° - (|\sphericalangle DCB|) \\ |\sphericalangle CBA| = 180° - |\sphericalangle ADC| \end{array}\right\}$$ na czworokącie ABCD można opisać okrąg ■

WYSOKOŚCI W RÓWNOLEGŁOBOKU

W równoległoboku ABCD miara kąta ostrego jest równa 30°, a odległości punktu przecięcia się przekątnych od sąsiednich boków równoległoboku są równe 2 i $\sqrt{3}$. Oblicz długość krótszej przekątnej.

ROZWIĄZANIE 1



WAŻNE

są to połowy wysokości równoległoboku

* na pomarańczowo oznaczyłem te połówki

* na zielono oznaczyłem właściwe wysokości

Zatem:

$h_a = 2\sqrt{3}$, $h_b = 4$

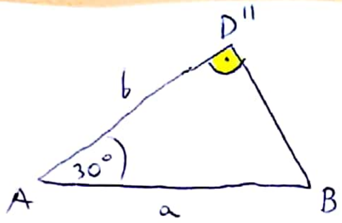
Wyrażam pole na dwa sposoby

$P_{\square} = a \cdot 2\sqrt{3} = b \cdot 4$

z tego równania wynika, że:

$\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **WYGLĄDA ZNAJOMO?** $= \cos 30°$

WYOBRAŹ SOBIE TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY



ma on takie same ramiona i ten sam kąt co ABD...

(b,k,b) (k,b,k)

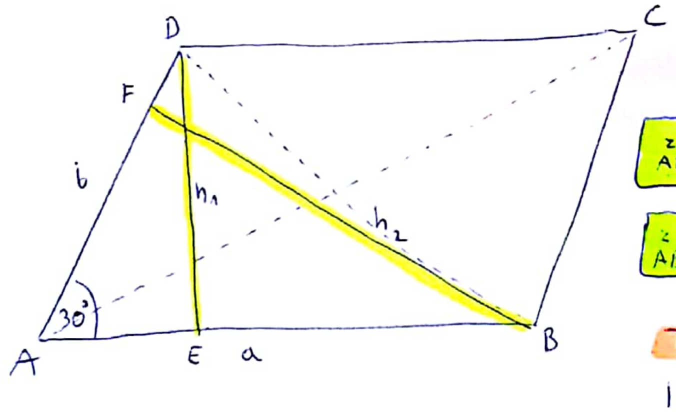
$\Delta ABD'' \equiv \Delta ABD \equiv ABD'$

BO MA TEN SAM BOK a I KĄTY 30° I 90°

więc $|BD| = |BD'| = 4$ ■

KRÓTSZA PRZEKĄTNA TO WYSOKOŚĆ!

ROZWIĄZANIE 2



Wysokości to $h_1 = 4$, $h_2 = 2\sqrt{3}$

Mam kąt 30° i wypisuję z niego sinusy

z Δ AED: $\sin 30° = \frac{h_1}{b} \Rightarrow b = \frac{h_1}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

z Δ ABF: $\sin 30° = \frac{h_2}{a} \Rightarrow a = 4\sqrt{3}$

Teraz wystarczy tw. cosinusów

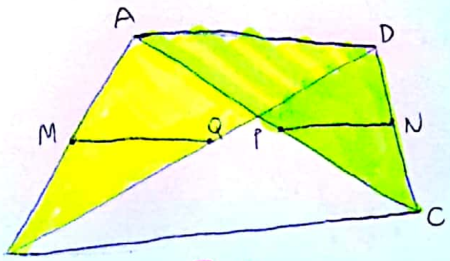
$|BD| = x$

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30°$

$x^2 = (4\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ ■

Dany jest czworokąt wypukły ABCD niebędący równoległobokiem. Punkty M, N są odpowiednio środkami boków AB i CD. Punkty P, Q są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Uzasadnij, że $MQ \parallel PN$



$$(1)\quad \frac{|BM|}{|BA|} = \frac{|BQ|}{|BD|} = \frac{1}{2}$$

STOSUNKI TYCH BOKÓW SĄ NASTĘPUJĄCE BO TO POŁOWY BOKÓW

$$(2)\quad \frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|CN|}{|CD|} = \frac{1}{2}$$

MAM ZWIĄZKI I CHCĘ DOWIEŚĆ RÓWNOLEGŁOŚCI WIĘC ↓

Korzystam z tw. odwrotnego do tw. Talesa

$(1) \Rightarrow MQ \parallel AD$

$(2) \Rightarrow PN \parallel AD$

$\Rightarrow MQ \parallel PN$ ■

INACZEJ

Można też od razu powołać się na tw. o odcinku łączącym środki boków trójkąta