O | RR

Równania różniczkowe dla opornych.

RR zwyczajne – występuje funkcja jednej zmiennej ~ tym! będziemy się zajmować

RR cząstkowe – występuje funkcja wielu zmiennych

Ogólny zapis: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

* n – **rząd równania** = najwyższy rząd pochodnej.

* **Rozwiązanie, całka równania** – każda funkcja klasy C^n określona w pewnym przedziale otwartym i spełniająca to równanie.

Postaci rozwiązania:

– jawna $y = f(x)$

– uwikłana $F(x,y) = 0$

* **Rozwiązanie / całka ogólna** – rodzina funkcji postaci

$$y = y(x, C_1, \dots, C_n) \quad \text{lub} \quad F(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$$

* **Rozwiązanie / całka szczególna** – funkcja otrzymana z całki ogólnej przez podstawienie konkretnych liczb w miejsce stałych.

* **Rozwiązanie / całka osobliwa** – całka, której nie da się otrzymać z całki ogólnej.

* **Krzywa całkowa** – wykres całki tego równania

* **Zagadnienie początkowe / Cauchy'ego** – znalezienie całki, spełniającej warunki początkowe

Równanie o zmiennych rozdzielonych – to takie równanie różniczkowe I rzędu, które można tak zapisać:

$$g(y)\, y' = f(x)$$

, f i g określone każde w przedziałach I_1, I_2

Jeśli funkcje f i g są w tych przedziałach ciągłe to można je zapisać tak:

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

~ można zapisać jako: $G(y) = F(x) + C$, gdzie F i G to funkcje pierwotne (całkowane) f i g.

Jest to postać uwikłana. Jeśli się da to wyznaczamy $y = y(x)$

Uwaga! RR postaci $y' = f(x)\, g(y)$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych, gdy $g(y) \neq 0$ bo można je zapisać tak: $\frac{1}{g(y)}\, y' = f(x)$

Przykładowy schemat:

zagadnienie Cauchy'ego

$y' + 1 = y$, $y(0) = -1$

czyli znaleźć tę krzywą, która przechodzi przez punkt $[0, -1]$

① ZAPISAĆ RÓWNANIE JAKO ROZDZIELONE

$y' = y - 1$

$\frac{1}{y-1}\, dy = dx$

UWAGA! WARUNEK

$y \neq 1$

$y = 1$ JEST CAŁKĄ RÓWNANIA WIĘC TRAKTUJĘ JĄ OSOBNO

② ZAPISAĆ CAŁKĘ OGÓLNĄ RÓWNANIA

$\int \frac{1}{y-1}\, dy = \int dx$

③ POLICZYĆ

$\ln|y-1| = x + C_1$

$|y-1| = e^x e^{C_1}$

$y - 1 = \pm e^{C_1} e^x$

$C_1 \in R$

Oznaczam $\pm e^{C_1} = C_2$, wtedy

$y = 1 + C_2 e^x$, $C_2 \neq 0$

DOPUSZCZAJĄC $C_2 = 0$ WYJDZIE $y = 1$ CZYLI CAŁKA KTÓRA BYŁA ALTERNATYWĄ

$y = 1 + C_2 e^x$, $C \in R$

④ PODSTAWIAM [x,y] ŻEBY ZNALEŹĆ CAŁKĘ SZCZEGÓLNĄ

$1 + Ce^0 = -1 \iff C = -2$

$y = 1 - 2e^x$ (ODP.)

R. sprowadzalne do równań o zmiennych rozdzielonych

*** RR jednorodne**: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ można sprowadzić do R. o zmiennych rozdzielonych wykonując jeden prosty trick: $u = \left(\frac{y}{x}\right)$

Wtedy $y = ux$, różniczkujemy...

$y' = u'x + u$, a to podstawiam do głównego równania

$u'x = f(u) - u$, przy zał. $f(u) \neq u$ jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

gdy $f(u) = u$ to $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, czyli można zapisać $y' = \frac{y}{x}$
jest R. o zmiennych rozdzielonych gdy $y \neq 0$
[bo wtedy $y'(x) \cdot x = y$]

*** RR postaci** $y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$, gdzie $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

można sprowadzić do równania jednorodnego przez podstawienie

$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$, gdzie α i β są rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0 \\ a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0 \end{cases}$

[układ ma dokładnie jedno rozwiązanie bo gł. wyznacznik $\neq 0$]

po podstawieniu $v' = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$

RR Liniowe I rzędu:

tak to wygląda: $y' + p(x)y = f(x)$, p, f - funkcje określone w przedziale I.

---

* gdy $f \equiv 0$ to: $y' + p(x)y = 0$ ~ **RÓWNANIE LINIOWE JEDNORODNE** (w przeciwnym wypadku jest niejednorodne)

- przy założeniu $y \neq 0$ jest ono zawsze R. o zmiennych rozdzielonych
- funkcja $f = 0$ jest zawsze całką równania liniowego jednorodnego.

ROZWIĄZYWANIE RÓWNANIA LINIOWEGO JEDNORODNEGO

$$\frac{1}{y}\, dy = -p(x)\, dx$$

[$y' = \frac{dy}{dx}$, więc cały mechanizm polega na pomnożeniu całego równania razy dx.]

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int p(x)\, dx + C_1$$

~ całka ogólna równania tego

$$\ln|y| = e^{-\int p(x)\, dx} \cdot e^{C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)\, dx}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = C_2\, e^{-\int p(x)\, dx}, \quad C_2 \neq 0$$

gdybyśmy dopuścili $C_2 = 0$, byłoby $y = 0$ czyli rozwiązanie szczególne, które znamy

$$\boxed{y = C \cdot e^{-\int p(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

CAŁKA OGÓLNA RÓWNANIA JEDNORODNEGO

Rozwiązywanie R. liniowego I rzędu niejednorodnego ~ metoda uzmienniania stałej.

zał. p, f są ciągłe na przedziale I , $y' + p(x)y = f(x)$

2 Etapy:

* rozwiązanie równania liniowego jednorodnego → otrzymanie całki ogólnej równania jednorodnego (tej co na poprzedniej stronie)

* uzmiennienie stałej C występującej w tym wzorku, czyli zamiana jej na nieznaną funkcję C(x) dla której $y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ będzie (rozwiązaniem ogólnym) (całką ogólną) równania niejednorodnego.

Twierdzenie 2

[CAŁKA OGÓLNA RÓWNANIA LINIOWEGO NIEJEDNORODNEGO] = [CAŁKA OGÓLNA RÓWNANIA L. JEDNORODNEGO] + [CAŁKA SZCZEGÓLNA RÓWNANIA L. NIEJEDNORODNEGO]

Przykład:

$y' = \frac{2x^3 + y}{x} \rightarrow y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$

PRZEKSZTAŁCAM, BY BYŁO WIDAĆ ŻE JEST LINIOWE

$\xrightarrow{\text{ROZWIĄZUJĘ JEDNORODNE}} y' - \frac{1}{x}y = 0$

czyli tworzę zero po znaku równości

CAŁKĄ RJ JEST ZAWSZE FUNKCJA $y=0$

dlatego zakładam, że $y \neq 0$ i rozwiązuję dalej.

$\rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \xrightarrow{\text{ROZDZIELAM}}$ I TWORZĘ CAŁKĘ OGÓLNĄ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$\rightarrow \ln|y| = \ln|x| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0$

$\ln|y| = \ln C_2|x|$

$y = \pm C_2 x$

$\underbrace{y = C_3 x}$, $C_3 \neq 0$

CAŁKA OGÓLNA RÓWNANIA $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

PONIEWAŻ MAM JESZCZE CAŁKĘ SZCZEGÓLNĄ $y = 0$

CAŁKA OGÓLNA

$y = Cx$

wyjściowe równanie wyglądało tak

$y' - \frac{1}{x}y = 2x^3$

MUSZĘ ZNALEŹĆ FUNKCJĘ $C(x) = C$

ŻEBY FUNKCJA $y = C(x)x$ BYŁA CAŁKĄ RÓWNANIA

* LICZĘ y' NA PODSTAWIE CAŁKI OGÓLNEJ RJ. $y = C(x) \cdot x$

$y' = C'(x)x + C(x)$

* WSTAWIAM y i y' DO RÓWNANIA WYJŚCIOWEGO

$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = 2x^2$

$C'(x) = 2x$

! to nie przypadek że wszystko się uprościło, zawsze otrzymujemy w RLNJ równanie postaci $C'(x) = g(x)$

↓ całkujemy

$C(x) = x^2 + A, \quad A \in \mathbb{R}$

podstawiam to do wzoru na całkę ogólną RJ

$y = (x^2 + A)x$

jest to na pewno całka równania niejednorodnego. ALE CZY JEST OGÓLNA ? rozkładam...

$y = \underbrace{x^3}_{\substack{\text{całka} \\ \text{szczególna} \\ \text{RN} \\ \text{(równania niejednorodnego)}}} + \underbrace{Ax}_{\substack{\text{całka} \\ \text{ogólna} \\ \text{RJ} \\ \text{(równania jednorodnego)}}}, \quad A \in \mathbb{R}$

więc zgodne z Twierdzenie 2

JEST GIT ✓

RR Liniowe rzędu II

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

~ o stałych współczynnikach gdy p, q są stałymi funkcjami

~ jednorodne gdy $f \equiv 0$

Odnośnie RJ:

Twierdzenie 3

[Jeżeli funkcje $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ są całkami RÓWNANIA JEDNORODNEGO to funkcja $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ też jest całką TEGO równania.]

Definicja

[Dane całki $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ równania jednorodnego nazywamy UPC: (układ fundamentalny rozwiązań) (układ podstawowy całek), gdy

wyznacznik Wrońskiego $\neq 0$, czyli $W(x,y) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, $x \in I$]

Twierdzenie 4

[Jeżeli całki $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ RJ stanowią UPC to $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ jest całką ogólną RJ]

Odnośnie całki ogólnej RN, stosujemy tą samą zasadę co dla stopnia I tj. CORN = CORJ + CSRN

Rozw. R. o stałych współczynnikach (II rzędu)

tj. $y'' + py' + qy = f(x)$

- najpierw znajdziemy CORJ $y'' + py' + qy = 0$

Ponieważ $(e^{rx})' = re^{rx}$ to będziemy szukać całek równania postaci $y = e^{rx}$. Po podstawieniu...

$y = e^{rx}$ jest całką równania $\Leftrightarrow$ r spełnia równanie $\underbrace{r^2 + pr + q = 0}_{\text{równanie charakterystyczne}}$

wtedy gdy

$\Delta > 0$ $y_1 = e^{r_1 x}$ i $y_2 = e^{r_2 x}$ są całkami równania + stanowią układ podstawowy całek

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ – to CORJ

$\Delta = 0$ jeden pierwiastek podwójny r; $y_1 = e^{rx}$ i $y_2 = xe^{rx}$ są całkami równania + stanowią układ podstawowy całek

$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$ – to CORJ.

$\Delta < 0$ dwa pierwiastki zespolone $\alpha + i\beta$ i $\alpha - i\beta$; $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ~ j.w. to całki i UPC

$\therefore$ $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

Wyznaczanie CORN metodą uzmienniania stałych

1. Rozwiązać RJ → otrzymamy CORJ postaci $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$, gdzie y_1, y_2 to UPC
2. Uzmiennić stałe tj. $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$ to CORN

* Ogólny wzór na równanie II rzędu o stałych współczynnikach to $y'' + py' + qy = f(x)$
Do tego wzorku wstawiamy funkcję y z punktu 2.

* Wychodzi jakiś dziwny wzór, ale możemy założyć, że $C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0$
wtedy tworzymy taki o to układ równań:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

~ są tu dwie niewiadome $C_1'(x)$ i $C_2'(x)$

[Ponieważ funkcje y_1, y_2 to UPC to powinny układ ma wyznacznik Wrońskiego $\neq 0$
czyli ma dokładnie JEDNO ROZWIĄZANIE]

Teraz załóżmy, że:

$$C_1'(x) = \varphi(x) \qquad C_2'(x) = \psi(x)$$

FUNKCJE BĘDĄCE ROZWIĄZANIEM UKŁADU

wyznaczamy →

$$C_1(x) = \int \varphi(x)\,dx + A_1, \quad A_1 \in \mathbb{R}$$

$$C_2(x) = \int \psi(x)\,dx + A_2, \quad A_2 \in \mathbb{R}$$

... a te funkcje wstawiam do równania z punktu 2

$$y = \underbrace{y_1(x) \cdot \int \varphi(x)\,dx + y_2(x) \cdot \int \psi(x)\,dx}_{CSRN} + \underbrace{A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x)}_{CORJ}$$

Zgodnie z twierdzeniem CORN = CORJ + CSRN, całka ta jest CORN, nawet pomimo nanucenia extra warunku

---

Metoda przewidywania

* pozwala wyznaczyć CSRN, gdy funkcja po prawej stronie równania ma postać:

$$f(x) = e^{\alpha x} \left(P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x \right)$$

, P_n, Q_m to wielomiany stopnia n i m.

* może to być też suma takich funkcji

Całkę szczególną przewidujemy jako:

a) GDY LICZBA $\alpha + i\beta$ NIE JEST PIERW. RÓWN. CHARAKTERYSTYCZNEGO:

$$y_s = e^{\alpha x} \left(R_N(x) \cos\beta x + S_N(x) \sin\beta x \right)$$

b) GDY JEST

$y_s = x^k \cdot$ TA FUNKCJA , gdzie k - krotność tego pierwiastka

} gdzie R_N, S_N to wielomiany stopnia $N = \max\{n, m\}$ (gdy $\beta = 0$ to $N = n$) !!!

* gdy funkcja po prawej stronie to suma funkcji postaci j/w to używamy twierdzenia:

Twierdzenie:

Jeżeli y_1 to całka równania $y'' + py' + qy = f_1(x)$

y_2 — // — $y'' + py' + qy = f_2(x)$

to $y = y_1 + y_2$ — // — $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$

CORN = CORJ + CSRN, czyli CSRN przewidujemy, CORJ liczymy (NAJPIERW) i mamy CORN.

Ogólny schemat:

1. Całka jednorodna CORJ
2. Metoda przewidywania CORN
   - zapisuję jakie jest $\alpha, \beta, P_n(x), Q_m(x)$
   - patrzę czy $\alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego.
   - zapisuję przewidywanie
   - podstawiam to przewidywanie np. $y_s = Ae^{-x}$ jako y we wzorze ogólnym i liczę to A
3. Sumuję CORJ + CORN.

Równanie zupełne

$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0$ jest równaniem zupełnym gdy istnieje taka funkcja $U(t,x)$,

taka że $dU(t,x) = M(t,x)dt + N(t,x)dx$