ZESPOLONE - PODSTAWY

$i^2 = -1$

POSTAĆ KARTEZJAŃSKA $z = a + ib$

LICZBA SPRZĘŻONA $\overline{z} = a - ib$

$i^{133} = (i^2)^{66} \cdot i = (-1)^{66} i = 1 \cdot i = i$

*** dzielenie** → POMNOŻENIE PRZEZ SPRZĘŻENIE LICZNIKA I MIANOWNIKA

* MODUŁ

$$|z| = \sqrt{\left(\text{część rzeczywista}\right)^2 + \left(\text{część urojona}\right)^2}$$

* PIERWIASTEK DRUGIEGO STOPNIA

$z = \sqrt{-3-4i}$

$x + yi = \sqrt{-3-4i} \quad (\,.\,)^2$ (PODNIEŚĆ DO KWADRATU)

$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = -3-4i$ (ZAMIENIAM i^2 MINUS JEDEN)

$x^2 + 2xyi - y^2 = -3-4i$

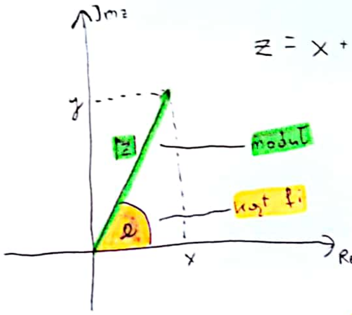
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \end{cases}$$

(TWORZĘ UKŁAD RÓWNAŃ)

„PATENT" CZYLI DOPISANE TRZECIE RÓWNANIE

zsumowane kwadraty cz. rzecz, cz. urojonej = moduł tego na prawo

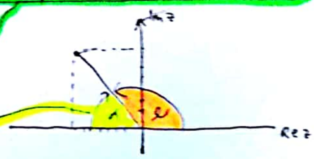
* POSTAĆ TRYGONOMETRYCZNA



$z = x + iy = |z|(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

ĆWIARTKA - KĄT α			
I	II	III	IV
α	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$



PRZYKŁAD:

$z = 1 - \sqrt{3}i$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

SPRAWDZAM ĆWIARTKĘ → IV

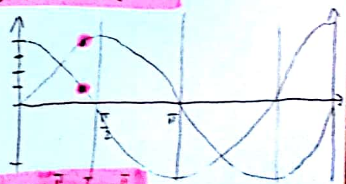
ZAPISUJĘ POMOCNICZY KĄT α

$$\begin{cases} \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \end{cases}$$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

WYZNACZAM KĄT α



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

DOPISUJĘ α DO COSINUSA

$$\begin{cases} \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} \\ \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

OBLICZAM φ

$\varphi = \frac{5\pi}{3}$

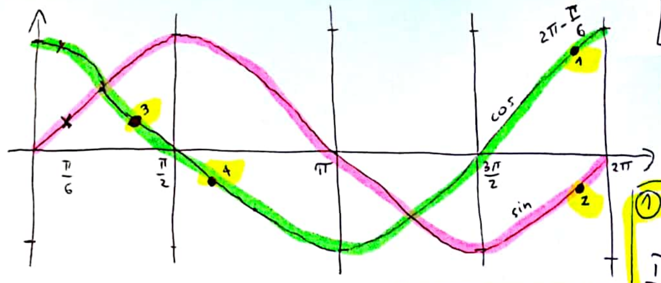
$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

1 ALGEBRA ZESPOLONE

WZORY REDUKCYJNE + POTĘGI + PIERWIASTKI

* jak szybko ogarnąć wzory redukcyjne w praktyce gdy ich nie umiesz

1) RYSUJESZ - SZYBKO - WYKRES SIN I COS



2) DORYSOWUJESZ 4 KRESKI ABY PRECYZYJNIE ZOBACZYĆ $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

3) NO I TERAZ ZASTANAWIASZ SIĘ JAK WYGLĄDA

(1) $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha)$

I PODSTAWIASZ NP $\frac{\pi}{6}$ POD α I MASZ $2\pi - \frac{\pi}{6}$

II ZAZNACZASZ TO NA WYKRESIE

III TERAZ WIDAĆ NA GOŁE OKO ŻE TO PO PROSTU $\cos \alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

(2) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha)$

WYOBRAŹ SE ŻE $\alpha = \frac{\pi}{6}$ TAK WIĘC ZGADZA SIĘ WYKRES SINSA ALE JEST NA ODWRÓT WIĘC

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(3) DLA $\cos(90° - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

I PODSTAWIAM $\alpha = \frac{\pi}{6}$

II ZAZNACZAM $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

III SPRAWDZAM CO MA TAKĄ SAMĄ WARTOŚĆ DLA $\alpha = \frac{\pi}{6}$ JEST TO SINUS

DLATEGO;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

(4) DLA $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)$

I PODSTAWIAM $\alpha = \frac{\pi}{6}$

II ZAZNACZAM $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$

III SPRAWDZAM JAKIE WARTOŚCI MAM DO DYSPOZYCJI NA $x = \frac{\pi}{6}$ W TEJ SAMEJ ODLEGŁOŚCI OD OSI X

* cosinus jest wyżej/dalej od osi x niż sinus

* no ale sinus jest na odwrót!

* więc: $\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

POTĘGI wzór Moivre'a

$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

*pamiętaj że to jest $n \cdot \left[\begin{matrix}\text{MIARA} \\ \text{KĄTA}\end{matrix}\right]$

PIERWIASTKI

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

z tym, że $k = 0, 1, \dots, n-1$ CZYLI DLA $n = 5$ MAM 5 PIERWIASTKÓW

* jeśli ω_0 (pierwszy pierwiastek) wyjdzie prosty to kolejne można liczyć z wzoru

$\omega_k = \omega_{k-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$

RÓWNANIA WIELOMIANOWE

$z^2 - 4z + 13 = 0$

NORMALNIE LICZĘ DELTĘ

$\Delta = b^2 - 4ac = -36$ WYJMUJĘ i BO MOGĘ

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-36} = \sqrt{(-1)(+36)} = \sqrt{i^2 \cdot 36} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{36} = |i| \cdot 6 = \begin{cases} 6i \\ -6i \end{cases}$

$\sqrt{x^2} = |x|$ *pamiętaj, że to wartość bezwzględna

MOGĘ WYBRAĆ DOWOLNY PIERWIASTEK Z TYCH

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - 6i}{2a} = 2 - 3i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dots\dots = 2 + 3i$ (ODP.)

PIERWIASTEK Z DELTY TO:

PIERWIASTEK Z UJEMNEJ L. RZECZYWISTEJ

DRUGI STOPIEŃ = DWA ROZWIĄZANIA

$(1+i)z^2 - (5+i)z + 10 = 0$

$\Delta = -16 - 30i$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-16 - 30i} = z_1$

$(x + iy)^2 = \sqrt{-16 - 30i} \quad (^2)$

$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = -16 - 30i$

$x^2 + 2xyi - y^2 = -16 - 30i$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = -16 \\ 2xy = -30 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-16)^2 + (-30)^2} \end{cases}$ PORÓWNYWANIE STRON

PATENT NA PIER. 2 STOPNIA

$\begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$

$x = 3 \vee x = -3$

$\sqrt{\Delta} = \begin{cases} 3 - 5i \\ -3 + 5i \end{cases}$ BO $z = x + iy$

PIERWIASTEK DRUGIEGO STOPNIA Z L. ZESPOLONEJ

$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 6i}{2 + 2i}$ SPRZĘŻENIE $\cdot \frac{2 - 2i}{2 - 2i} = \frac{(2 + 6i)(2 - 2i)}{(2 + 2i)(2 - 2i)} = \frac{16 + 8i}{8} = 2 + i$

$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 1 - 3i$ (ODP.)

ROZKŁAD NA CZYNNIKI

$z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0$

$z = 3$ ODP z_1 $\vee$ $z^2 = -4$

$z = \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = |i| 2 = \begin{cases} 2i & \text{ODP } z_2 \\ -2i & \text{ODP } z_3 \end{cases}$

POSTAĆ WYKŁADNICZA

$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}$ więc

$z = |z| e^{i\varphi} = r e^{i\varphi}, \ r \geq 0$

ZAPIS MODUŁU JAKO r

SPRZĘŻENIE

JEŚLI $z = re^{i\varphi}$ to

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$

Scanned with CamScanner

3 ALGEBRA ZESPOLONE

Zadane z równaniem zespolonym → postać wykładnicza

$$(\bar{z})^6 = 8z\bar{z}|z|$$

$$(re^{-i\varphi})^6 = 8re^{i\varphi}re^{-i\varphi}r$$

$$r^6(e^{-i\varphi})^6 = 8r^3\underbrace{e^{i\varphi-i\varphi}}_{e^0}$$

$$r^6(e^{-6i\varphi}) = 8r^3e^0$$

* PORÓWNUJĘ CZ. RZECZYWISTĄ PO LEWEJ I PRAWEJ
* TAK SAMO UROJONĄ

$$r^6 = 8r^3 \quad \lor \quad -6\varphi = 0 + 2k\pi$$

* PORÓWNUJĘ SAME WYKŁADNIKI NAD e
* PAMIĘTAJ ŻE KĄT MOŻE MIEĆ WARTOŚĆ + 2kπ

$r^6 = 8r^3$

$r^6 - 8r^3 = 0$

$r^3(r^3 - 8) = 0$

$r = 0$ | $r^3 - 8 = 0$, $r^3 = 8$

$r = 0$ | $r = 2$

2 ROZW RZECZYWISTE

$-6\varphi = 0 + 2k\pi$

$\varphi = -\frac{2k\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}k$

* TERAZ PODSTAWIAM POD k = 0,1,2,3..... AŻ OSIĄGNĘ 2π

$\varphi_0 = 0$

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$

$\varphi_2 = -\frac{2}{3}\pi$

$\varphi_3 = -\pi$

$\varphi_4 = -\frac{4}{3}\pi$

$\varphi_5 = -\frac{5}{3}\pi$

6 ROZW

równoznaczne z $\varphi_0 = 0$ → $\cancel{\varphi_6 = 2\pi}$

PRZEKSZTAŁCAM NA ZESPOLONĄ

$z_1 = 0$ — dla $r=0$ jedno rozw. bo każde takie samo jak byłyby podstawiać różne kąty

$z_2 = 2e^{0i} = 2$

$z_3 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$z_4 = 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

$z_5 = 2e^{-\pi i}$

$z_6 = 2e^{-\frac{4}{3}\pi i}$

$z_7 = 2e^{-\frac{5}{3}\pi i}$

7 rozw.

można przekształcić wynik

$= 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 1 - \sqrt{3}i$

2X PIERWIASTEK 3 STOPNIA

$$z^4 + z^2(1+i) + 2i - 2 = 0$$

Podstawiam $t = z^2$, wtedy

$\Delta = 8 - 6i$

$z^2 = 8 - 6i$

$(x+yi)^2 = 8 - 6i$

$(x^2 - y^2) + 2xyi$

PORÓWNUJĘ CZĘŚĆ RZECZ. I ZESPOLONĄ

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xyi = -6i \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \rightarrow z = \pm(3 - i)$$

DODATKOWO

$$x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

$t_1 = 1 - i$ $\qquad t_2 = -2$

TAK SAMO

$(x^2 - y^2) + 2xyi = 1 - i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases}$$ EXTRA

$\rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}$

$x = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2(1+\sqrt{2})}}$

$t_2 = -2$, wtedy

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -2 \\ 2xy = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0,\ y = -\sqrt{2}$$

$x = 0,\ y = \sqrt{2}$

* graficznie

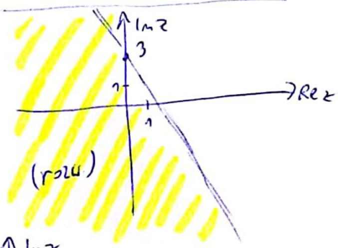
$\mathrm{Im}[(1+2i)z-3i]<0$ ROZPISAĆ $z=x+iy$

$w=(1+2i)(x+yi)-3i=x-2y+i\underbrace{(y+2x-3)}$ WYJMUJĘ i PRZED NAWIAS!

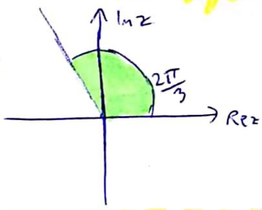
$\mathrm{Im}\, w<0$, wtedy $\rightarrow$ $\boxed{y+2x-3<0}$

$\boxed{y<-2x+3}$

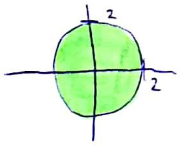
BIORĘ TYLKO CZĘŚĆ ZESPOLONĄ



* $\mathrm{Arg}\, z\leq \frac{2}{3}\pi$



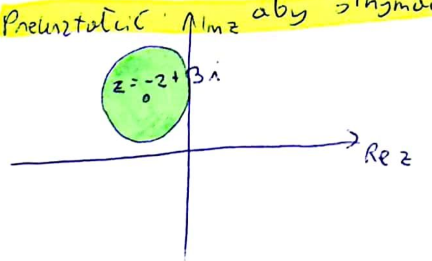
* $|z|\leq 2$



* $|z+2-3i|<2$

$|z-z_0|<r$, $r>0$ opisuje zbiór liczb leżących w odległości mniejszej niż r

Przekształcić aby otrzymać różnicę $|z-(-2+3i)|<2$



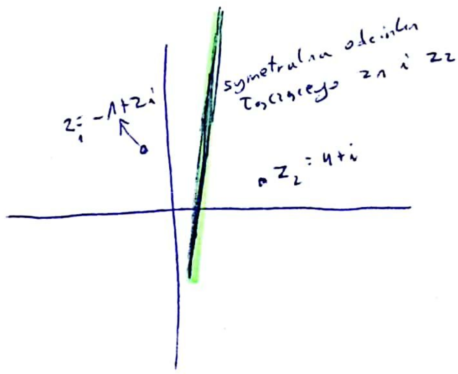
* $|z-z_1|=|z-z_2|$

zbiór liczb zespolonych leżących w tej samej odległości

$|z-2i+1|=|z-4-i|$

przekształcam na różnicę

$|z-(-1+2i)|=|z-(4+1i)|$



5 | ALGEBRA | ZESPOLONE

graficzne – c.d.

$$\pi \leqslant \arg\left[(-1+i)z\right] \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

wzór $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$

ZNAJDUJĘ WARTOŚĆ ARGA

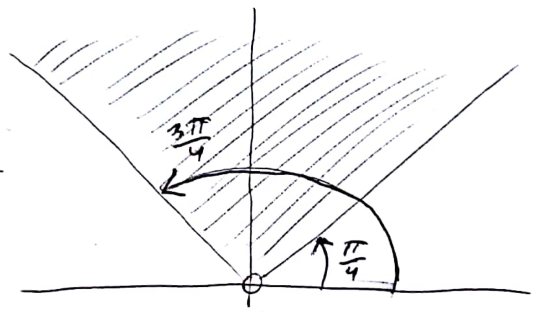
$\arg(-1+i)$ to $\frac{3\pi}{4}$

więc rozpisuję to jako

$$\pi \leqslant \frac{3\pi}{4} + \arg z + \underbrace{2k\pi}_{k=0} \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

$$\pi - \frac{3\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{4}$$



$$\frac{\pi}{2} < \arg(z^3) < \pi$$

wzór $z^n = n \cdot \arg z + 2k\pi$

$$\frac{\pi}{2} < 3 \cdot \arg z + 2k\pi < \pi \quad | :3 \quad | -2k\pi$$

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3} - \frac{2k\pi}{3}$$

WARUNEK $0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi$ więc piszę k...

$k=0$	$k=-1$	$k=-2$
$\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\pi < \arg z < \pi$	$\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{5}{3}\pi$