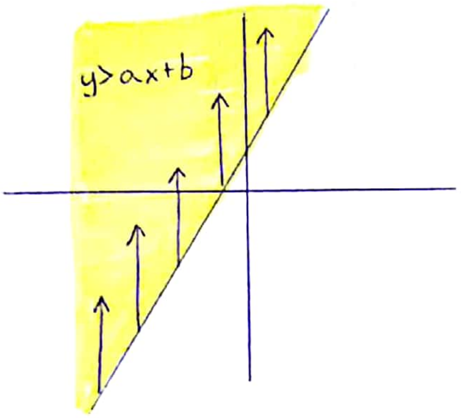
1 Nierówności liniowe na płaszczyźnie kartezjańskiej

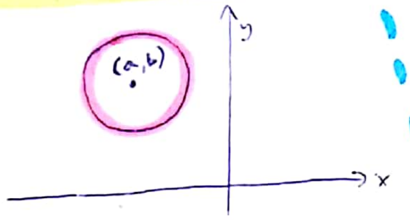


$$\begin{cases} y < -2x+5 \\ y < 4x+9 \end{cases}$$

* Wyobraź sobie strzałki do góry/w dół w zależności od nierówności

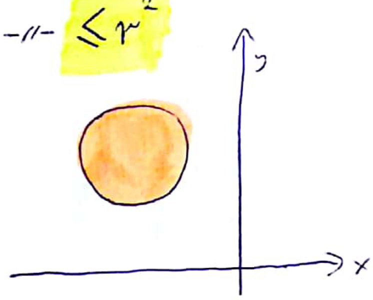
2 Nierówność koła i równanie okręgu

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



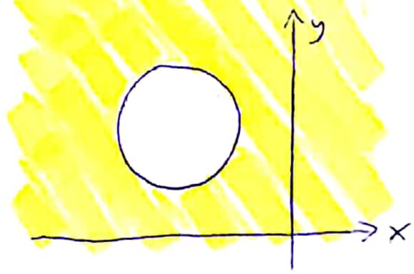
RÓWNANIE OKRĘGU

$$-\text{//}- \leq r^2$$



NIERÓWNANIE KOŁA

$$-\text{//}- > r^2$$



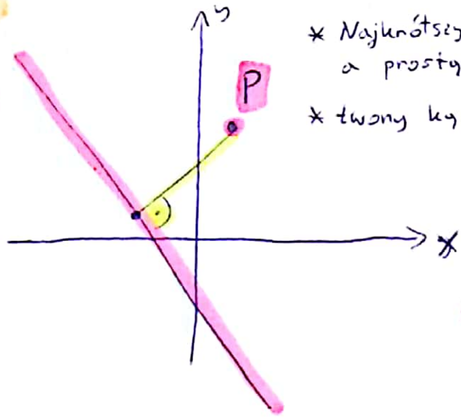
NIERÓWNANIE WSZYSTKIEGO INNEGO NIŻ KOŁO

3. Odległość punktu od prostej

Punkt: $P(x_0, y_0)$

Prosta: $Ax + By + C = 0$

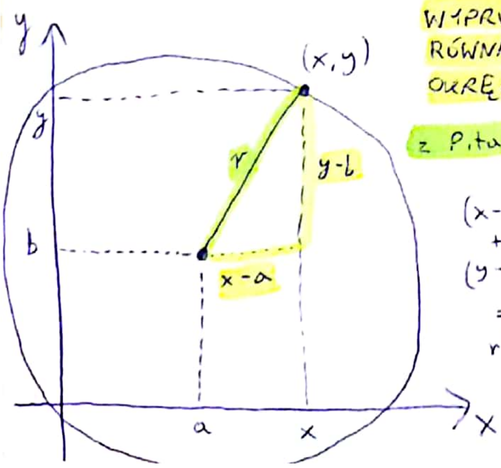
Wzór: $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$



* Najkrótszy odcinek pomiędzy punktem a prostą
* tworzy kąt prosty

① WZÓR PROSTEJ PRZEKSZTAŁĆ DO POSTACI OGÓLNEJ! $y = ax+b \longrightarrow ax+b-y=0$

② WE WZORZE ZASTĄPIĆ x i y W. WART. BEZWZGLĘDNEJ WSPÓŁRZĘDNYMI PUNKTU..



WYPROWADZENIE RÓWNANIA OKRĘGU

z Pitagorasa

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

ODCZYTYWANIE WARTOŚCI Z RÓWNANIA OKRĘGU

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$$

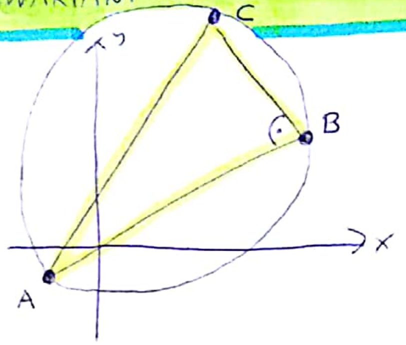
TWORZĘ NAWIASY Z PUSTYMI NAWIASAMI ABY UTWORZYĆ WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$\left(x^2 + 2x + \boxed{1}\right) + \left(y^2 - 2y + \boxed{1}\right) = 3 + \boxed{1} \; \boxed{1}$$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow S=(-1,1), \; r=\sqrt{5}$$

Pigułka: równanie okręgu przechodzącego przez 3 punkty

WARIANT 1 PUNKTY TWORZĄ TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY



$A=(-2,-1)$, $B=(6,3)$, $C=(4,7)$

Wyznaczam współczynniki prostych

$a_{AB}=\frac{3+1}{6+2}=\frac{1}{2}$ $a_{BC}=\frac{7-3}{4-6}=-2$

(Odejmuję ich współrzędne np. $\frac{3-(-1)}{6-(-2)}$ ← y'grekowe ← x'owe)

WAŻNE

Są prostopadłe bo ich iloczyn jest równy -1

więc trójkąt jest prostokątny

więc $|AC|$ to średnica okręgu !!!

$S=\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+7}{2}\right)$ (średnie arytmetyczne) $\Rightarrow S=(1,3)$

x y

$r=|BS|=5$ $(x-1)^2+(y-3)^2=25$

WARIANT 2

PUNKTY NIE TWORZĄ △ PROSTOKĄTNEGO

$A=(-6,0)$
$B=(3,3)$
$C=(1,7)$

Podstawiam (a,b) jako środek okręgu

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, $S=(a,b)$

Tworzę układ równań z moich punktów

$$\begin{cases}(-6-a)^2+(0-b)^2=r^2\\(3-a)^2+(3-b)^2=r^2\\(1-a)^2+(7-b)^2=r^2\end{cases} \Rightarrow \text{wynik bezpośrednio}$$

Równanie okręgu - parametr

$(x-m)^2+y^2=(m-1)^2$ jest równaniem okręgu tylko gdy prawa strona jest większa od zera, czyli: $m-1\neq 0$
$m\neq 1$

$S=(m,0)$

$r=|m-1|$ PROMIEŃ NIE MOŻE BYĆ UJEMNY !!!!

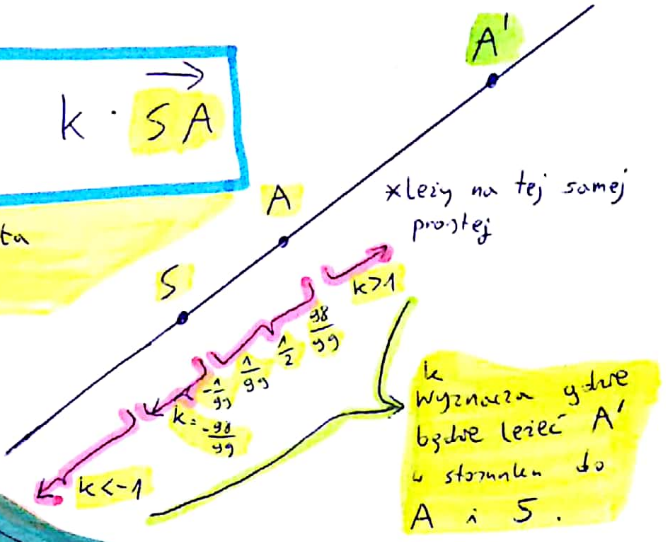
JEDNOKŁADNOŚĆ

$$A' = J_S^k(A) \iff \vec{SA'} = k \cdot \vec{SA}$$

A' jest obrazem punktu A w jednokładności
* o środku S
* w skali k

tylko i wyłącznie wtedy

gdy zachodzi ta zależność



PRZYKŁAD UŻYCIA:

Oblicz współrzędne środka S i skalę jednokładności k, w której obrazem odcinka PR jest odcinek P_1R_1 i wiadomo, że

$P = (-2, 1)$

$R_1 = (3, 1)$

$\vec{SP_1} = [3, 9]$

$\vec{SR} = [2, 1]$

① Wprowadzam dane pomocnicze

$S = (p, q)$

② Zapisuję zależność zgodnie z powyższym wzorem

$\vec{SP_1} = k \cdot \vec{SP}$ $\qquad$ $\vec{SR_1} = k \cdot \vec{SR}$

$[3, 9] = k \cdot \underbrace{[-2-p,\ 1-q]}$ $\qquad$ $[3-p, 1-q] = k \cdot [2, 1]$

Odejmuję odciętą P od odciętej S

KOLEJNOŚĆ ODWROTNA OD TEJ W ZAPISIE

WAŻNE

③ Tworzę układ równań - - - - - - - - - → JAK?

$$\begin{cases} k = 1-q \\ k(1-q) = 9 \\ 2k = 3-p \\ k(2+p) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ q = -2 \\ p = -3 \\ p = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -3, -2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Odp.

$[3, 9] = k \cdot [-2-p, 1-q]$

$k \cdot (1-q)$

$=$

9

Długość odcinka o końcach w punktach $A=(x_a, y_a)$, $B=(x_B, y_B)$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

(!) porównując zależności między odcinkami warto zapisać z góry np. $AC^2 = 4AB^2$, bez pierwiastków

Współrzędne środka odcinka AB

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

TANGENS KĄTA OSTREGO KTÓRY TWORZĄ DWIE PROSTE

ZADANIA TYPU: OKREŚL WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2} \right| \qquad \begin{cases} y: a_1 x + b_1 \\ y: a_2 x + b_2 \end{cases}$$

PRZYKŁAD

PROSTE przechodzące przez punkt $(2,0)$ są postaci $y = a(x-2)$ lub $x = 2$

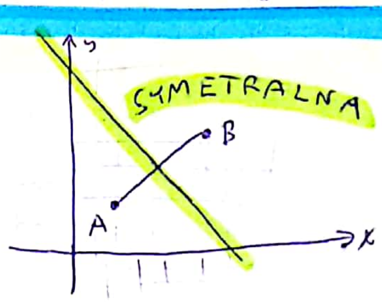
OGÓLNIE: równanie prostej przechodzącej przez jeden punkt:

$P=(x_0, y_0)$	$y - y_0 = a(x - x_0)$	lub	$x = x_0$

PROSTE przechodzące przez punkt $(8,2)$ są postaci $y = a(x-8)+2$

Współczynnik kierunkowy prostej AB

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



Równanie symetralnej odcinka AB

Zbiór punktów, równo odległych od A i B

[Podstawiam sobie taki o to dowolny punkt symetralnej: $P=(x,y)$ do wzoru na długość odcinka]

$$|AP| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}, \quad |BP| = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2}$$

$A=(1,2)$, $B=(5,6)$

Porównuję te długości bo mają być równe

$$AP^2 = BP^2$$

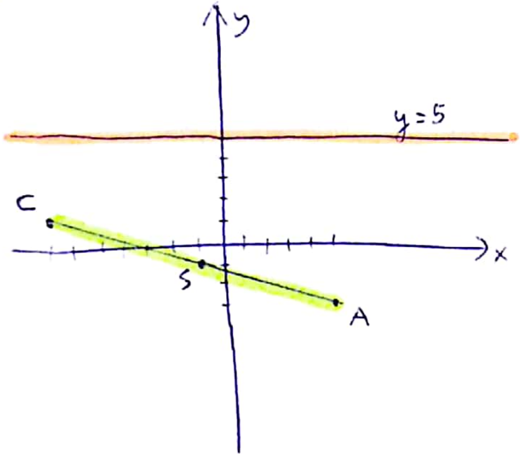
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-5)^2 + (y-6)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = -x + 7}$$

SYMETRALNA

Współrzędne przeciwległych wierzchołków prostokąta ABCD są równe $A=(5,-3)$, $C=(-7,1)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków prostokąta, wiedząc że wierzchołek B leży na prostej $y=5$



PROSTOKĄT I PROSTA

CO ZROBIĆ ???

otóż... szukam czworokąta

Popatrz na to tak: B leży na prostej $y=5$, skoro jest to czworokąt to trójkąt ABC musi być PROSTOKĄTNY

OZNACZA TO ŻE

punkt B leży na (okręgu o średnicy AC)

No więc podejmuję odpowiednie kroki!

(1) Wyznaczam środek okręgu (środek AC)

$$S=\left(\frac{5-7}{2},\frac{-3+1}{2}\right)=(-1,-1)$$

(2) Wyznaczam promień (AS)

$$r=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$$

ZAPISUJĘ POWYŻSZE WG WZORU NA OKRĄG

$$(x+1)^2+(y+1)^2=40$$

(3) Szukam punktów wspólnych okręgu i $y=5$

$$(x+1)^2+(5+1)^2=40$$

$$x=-3 \lor x=1$$

$B_1=(-3,5)$ $B_2=(1,5)$

(4) Wyliczam punkt D

$S=(-1,-1)$ jest środkiem BD, stąd:

$D_1=(1,-7)$, $D_2=(-3,-7)$

2014/OKE Poznań/4

Dany jest okrąg o równaniu $x^2+y^2-10x+4y+25=0$. Napisz równania stycznych do tego okręgu, przechodzących przez początek układu współrzędnych.

ROZWIĄZANIE 1

1) STYCZNA PRZECHODZI PRZEZ POCZĄTEK UKŁADU WIĘC JEJ WZÓR TO

$y=ax$ lub $x=0$

podstawiam $y^2+4y+25=0$, $\Delta<0$ więc nie ma rozwiązań

↓ podstawiam

$$x^2+(ax)^2-10x+4ax+25=0$$

RÓWNANIE TO MUSI MIEĆ TYLKO JEDNO ROZWIĄZANIE WIĘC $\Delta=0$

$$\Delta=0 \iff a=0 \lor a=-\frac{20}{21}$$

RÓWNANIA STYCZNYCH TO:

$$y=0 \; ; \; y=-\frac{20}{21}x$$

ROZWIĄZANIE 2

ODLEGŁOŚĆ STYCZNEJ OD ŚRODKA OKRĘGU JEST RÓWNA PROMIENIOWI!

$$(x^2-10x+25)+(y^2+4y+4)=4 \Rightarrow S=(5,-2),\ r=2$$

liczę środek i promień...

STOSUJĘ WZÓR NA ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ!

wiem że prosta styczna to $y=ax \Rightarrow ax-y=0$ PROSTA

$(5,-2)$ PUNKT

$$\frac{|a\cdot 5-(-2)|}{\sqrt{a^2+1}}=2$$

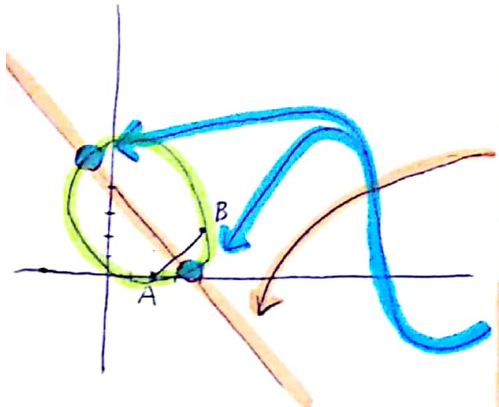
PORÓWNUJĘ DO PROMIENIA!

$$a=0 \lor a=-\frac{20}{21}$$

$$y=0 \lor y=-\frac{20}{21}x$$

STYCZNE DO OKRĘGU

Punkty $A=(2,0)$ i $B=(4,2)$ leżą na okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y-3)^2=10$. Wyznacz na tym okręgu taki punkt C aby trójkąt ABC był trójkątem równoramiennym o podstawie AB



ETAP I WYZNACZENIE SYMETRALNEJ DO ODCINKA AB

$y=ax+b$ (a prostopadłe do a odcinka AB)

$M=\left(\frac{x_a+x_b}{2},\frac{y_a+y_b}{2}\right)=(3,1)$

podstawiam punkt do wzoru
OTRZYMUJE
$y=-x+4$

ETAP II SZUKAM PUNKTÓW WSPÓLNYCH OKRĘGU I SYMETRALNEJ

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=10\\ y=-x+4\end{cases} \Rightarrow (x-1)^2=5 \Rightarrow |x-1|=\sqrt{5}$$

$x_1=1-\sqrt{5}$, $y_1=3+\sqrt{5}$

$x_2=1+\sqrt{5}$, $y_2=3-\sqrt{5}$

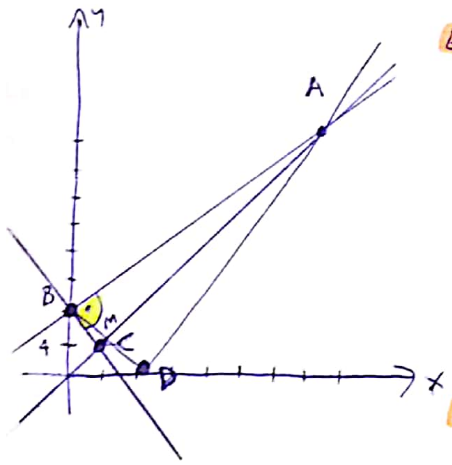
ODPOWIEDŹ
$C=(1-\sqrt{5},\,3+\sqrt{5})$

PUNKTY NA OKRĘGU

CZWOROKĄT WP. W OKRĄG

Z pozoru skomplikowane, a bardzo proste zadanie:

Punkty $A=(30,32)$ i $B=(0,8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x-y+2=0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.



ETAP I - BIORĘ POD UWAGĘ ŻE MAM TU OKRĄG OPISANY NA MOIM CZWOROKĄCIE, tak więc

a) Przekątna AC jest średnicą, więc kąt ABC ma 90 stopni!!!

ZAWSZE OSTRE KĄTY Z BOKU I PROSTY PO DRUGIEJ STRONIE !!! W KOLE

b) Przekątna AC jest osią symetrii = czworokąt jest DELTOIDEM

(punkt D leży symetrycznie do punktu B)

ETAP II DO DZIEŁA :)

1) Równanie prostej BC [prostopadła do BA, punkt wspólny z prostą na której będzie leżeć AC]

2) Punkt C [punkt wspólny prostej ↑ i nowo obliczonej BC]

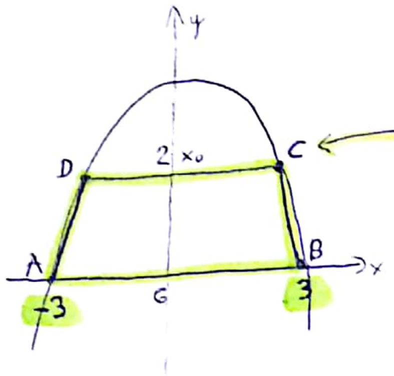
3) Równanie prostej BD [prostopadła do AC]

4) Punkt M [środek BC, wyliczam jako punkt wspólny BD i AC]

5) Punkt D [drugi ~~staw~~ koniec odcinka o początku B i środku M]

WIELOMIANY + TRAPEZ + GEO. ANALITYCZNA

Wszystkie wierzchołki trapezu ABCD ($AB \parallel CD$ i $|AB| > |CD|$) leżą na paraboli o równaniu $y = 3 - \frac{1}{3}x^2$. Wierzchołki A i B są punktami przecięcia tej paraboli z osią OX. Oblicz współrzędne wierzchołka trapezu o obu współrzędnych dodatnich, dla którego pole trapezu jest równe $\frac{25}{3}$.



① MAM. F. KWADRATOWĄ – WYZNACZAM MSC ZEROWE

$y = -\frac{1}{3}x^2 + 3 \Rightarrow x = -3 \lor x = 3$

② ZAPISUJĘ WSPÓŁRZĘDNE PUNKTU C

$C = (x_0, -\frac{1}{3}x_0^2 + 3)$ bo punkt leży na paraboli ....

③ PODSTAWIAM DO WZORU NA POLE TRAPEZU

$P_{\triangle} = \frac{6 + 2x_0}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{3}x_0^2\right) = \frac{25}{3}$ ← dane z polecenia zadania

(górna podstawa to $2x_0$, bo punkt C jest symetryczny do pkt. D)

(wysokość to wartość funkcji w punkcie C, bo licząc od osi OX)

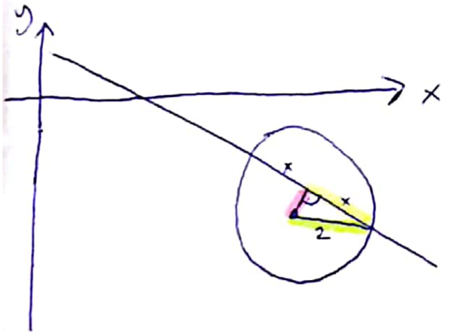
stąd: $x_1 = 2 > 0$ DODATNIE | $x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} < 0$ UJEMNE | $x_3 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} < 0$ UJEMNE

$\Downarrow$

$x_0 = 2 \quad y_0 = \frac{5}{3} \Rightarrow C = (2, \frac{5}{3})$.

PROSTA PRZECINA OKRĄG

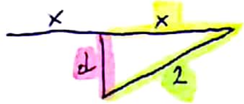
Dany jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 54 = 0$. Prosta l o równaniu $y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$ przecina ten okrąg w punktach A i B. Oblicz długość cięciwy AB. [redacted]



I Wyznaczam promień i środek

$S = (7, -3)$, $r = 2$

II Wpadam na genialny pomysł Otóż oznaczę cięciwę |AB| jako 2X



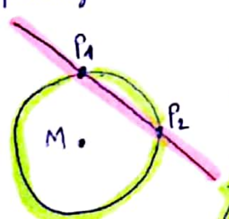
* promień wynosi 2
* umiem policzyć długość (odległość) pomiędzy prostą AB a środkiem (punktem)
* z powyższych i pitagorasa obliczę x'a!

Obliczam d

$d = \frac{|3 \cdot 7 + 4 \cdot (-3) - 17|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$, $x = \frac{4}{5}\sqrt{6}$, $|AB| = \frac{8}{5}\sqrt{6}$

PUNKTY NA PROSTEJ I PUNKT

Dana jest prosta k o równaniu $x + y - 12 = 0$ oraz punkt $M = (-5, 9)$, wyznacz na prostej k takie punkty P i R aby $|MP| = |PR| = 8$



I ETAP ZNAJDUJĘ PUNKTY WSPÓLNE OKRĘGU I PROSTEJ

Sam sobie doryslowałem okrąg!!!

$\begin{cases} y = -x + 12 \\ (x+5)^2 + (y-9)^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (-5, 17),\ P_2 = (3, 9)$

II ETAP ZNAJDUJĘ PUNKT R TAKI ŻE PR = 8

$P_1 = (-5, 17)$

$R = (x, -x + 12)$ ← bo R leży na prostej o takim równaniu

PODSTAWIAM TE WARTOŚCI DO WZORU NA ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PUNKTÓW I DORÓWNUJĘ DO 8MKI.

$8 = \sqrt{(x+5)^2 + (-x+12-17)^2}$

$x_1 = -5 - 4\sqrt{2}$

$x_2 = \frac{-10 + 8\sqrt{2}}{2} = -5 + 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow y_1 = 17 + 4\sqrt{2}$, $y_2 = 17 - 4\sqrt{2}$

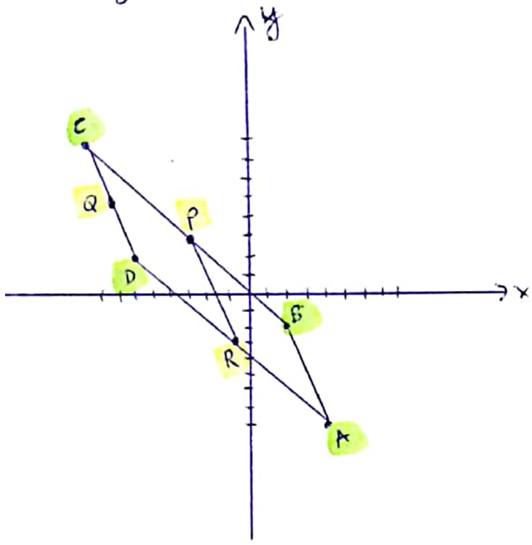
ANALOGICZNIE DLA P_2

$y_1 = 9 + 4\sqrt{2}$

$y_2 = 9 - 4\sqrt{2}$

WEKTORY

Punkty $P=(-3,3)$, $Q=(-7,5)$, $R=(-1,-3)$ są środkami odpowiednio boków BC, CD, DA równoległoboku ABCD. Wyznacz współrzędne wierzchołków tego równoległoboku.



① SZKIC :)

② Liczę wektor $\vec{PR}$ który jest taki sam jak $\vec{CD}$ i $\vec{BA}$

$$\vec{BA} = \vec{CD} = \vec{PR} = [-1+3; -3-3] = [2,-6]$$

③ Wyznaczam współrzędne C i D

$$D = Q + \tfrac{1}{2}\vec{CD} = (-6,2)$$

$$Q = C + \tfrac{1}{2}\vec{CD} = (-8,8)$$

④ Wyznaczam współrzędne A i B

$$P = \frac{B+C}{2} \Rightarrow B = 2P - C = (-6,6) - (-8,8) = (2,-2)$$

$$R = \frac{A+D}{2} \Rightarrow A = 2R - D = (-2,-6) - (-6,2) = (4,-8)$$

WZÓR NA POLE TRÓJKĄTA O WIERZCHOŁKACH

Pole trójkąta ABC o danych wierzchołkach $A=(1,-2)$, $B=(2,3)$, jest równe 4,5. Wyznacz współrzędne trzeciego wierzchołka, wiedząc, że leży on na prostej o równaniu $x+y-2=0$

① Współrzędne wierzchołka C są postaci $C=(x, -x+2)$

② Podstawiam wszystko do wspomnianego wzoru

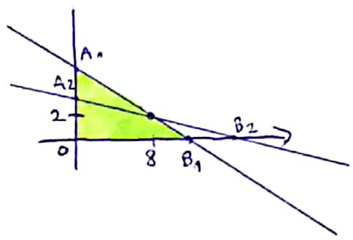
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$$

$x=0 \lor x=3$

$C=(0,2) \lor C=(3,-1)$

OSIE OGRANICZAJĄCE TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY

Prosta l na której leży punkt $P=(8,2)$ tworzy z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt prostokątny o polu równym 36. Wyznacz równanie prostej l



① RÓWNANIE DOWOLNEJ PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ $P=(8,2)$

$2 = 8a + b \Rightarrow b = 2-8a$ więc $y = ax + (2-8a)$

② WYZNACZAM PUNKT A = WYSOKOŚĆ NA OSI OY = WSPÓŁCZYNNIK B

$$A = (0, 2-8a)$$

③ WYZNACZAM PUNKT B = DŁUGOŚĆ OD ŚRODKA NA OSI OX

wartość równa zero bo leży na OX.

$$ax + (2-8a) = 0 \Rightarrow x = \frac{-(2-8a)}{a} \Rightarrow B = \left(\frac{-(2-8a)}{a}, 0\right)$$

dodatnie półosie więc $a < 0$

④ Podstawiam do wzoru na pole trójkąta (standard)

$$36 = P_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO \cdot BO = \frac{1}{2}\cdot(2-8a)\cdot\left(\frac{-(2-8a)}{a}\right) = \quad a = -\frac{1}{2} \lor a = -\frac{1}{8}$$

? ok

$y = ax + (2-8a)$

stąd:

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 6 \qquad y = -\tfrac{1}{8}x + 3$$

WSPÓŁCZYNNIKI KIERUNKOWE

Dane są punkty $A(6,-3)$, $B(1,2)$, $C(2m^3-18m, -m^2)$. Wyznacz wartości m kiedy AB i AC są prostopadłe.

$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ WSPÓŁCZYNNIK KIERUNKOWY PROSTEJ AB

$$= \frac{2+3}{1-6} = -1$$

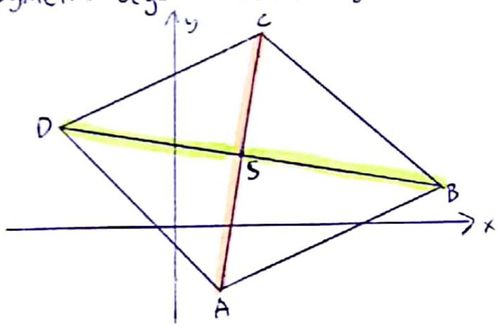
!!! WAŻNE

Zatem współczynnik kierunkowy AC musi być równy 1

$$1 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-m^2+3}{2m^3-18m-6} \longrightarrow m=-3 \lor m=3 \lor m=-\frac{1}{2}$$

PRZEKĄTNE ROMBU → POLE

Punkt $A=(2,-3)$ jest wierzchołkiem rombu ABCD o polu równym 300. Punkt $S=(3,4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne tego rombu wierzchołków.



① WYLICZAM C

*mam podane współrzędne A i S więc spoko

$$S=(3,4)=\left(\frac{2+x_C}{2}, \frac{-3+y_C}{2}\right) \Rightarrow C=(4,11)$$

② WYLICZAM DŁUGOŚĆ PRZEKĄTNEJ AC

$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (11-(-3))^2} = 10\sqrt{2}$$

③ WYLICZAM (ZE WZORU NA POLE ROMBU Z PRZEKĄTNYCH) BD.

$$300 = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 5\sqrt{2}\, BD \Rightarrow BD = 30\sqrt{2}$$

WZÓR NA RÓWNANIE PROSTEJ PRZECHODZĄCEJ PRZEZ PUNKT P I PROSTOPADŁEJ DO WEKTORA

$P=(x_0, y_0)$, $\vec{v}=[p,q]$ $p(x-x_0)+q(y-y_0)=0$ **WAŻNE!**

④ PODSTAWIAM DO WZORU

$P=S=(3,4)$ $\vec{v}=\vec{AS}=[1,7]$

Zatem prosta BD ma równanie

$$(x-3)+7(y-4)=0 \Rightarrow x=31-7y$$

⑤ WYLICZAM D I B

$D=(31-7y, y)$ DLA JAKIEGO Y MAM $DS=15\sqrt{2}$???

$$(3-(31-7y))^2+(4-y)^2=450 \Rightarrow y=1 \lor y=7$$

[PORÓWNUJĘ KWADRATY ODLEGŁOŚCI]

$x_1 = 31-7y = 24$ $x_2 = 31-7y = -18$

$B=(24,1)$

$D=(-18,7)$ ▪