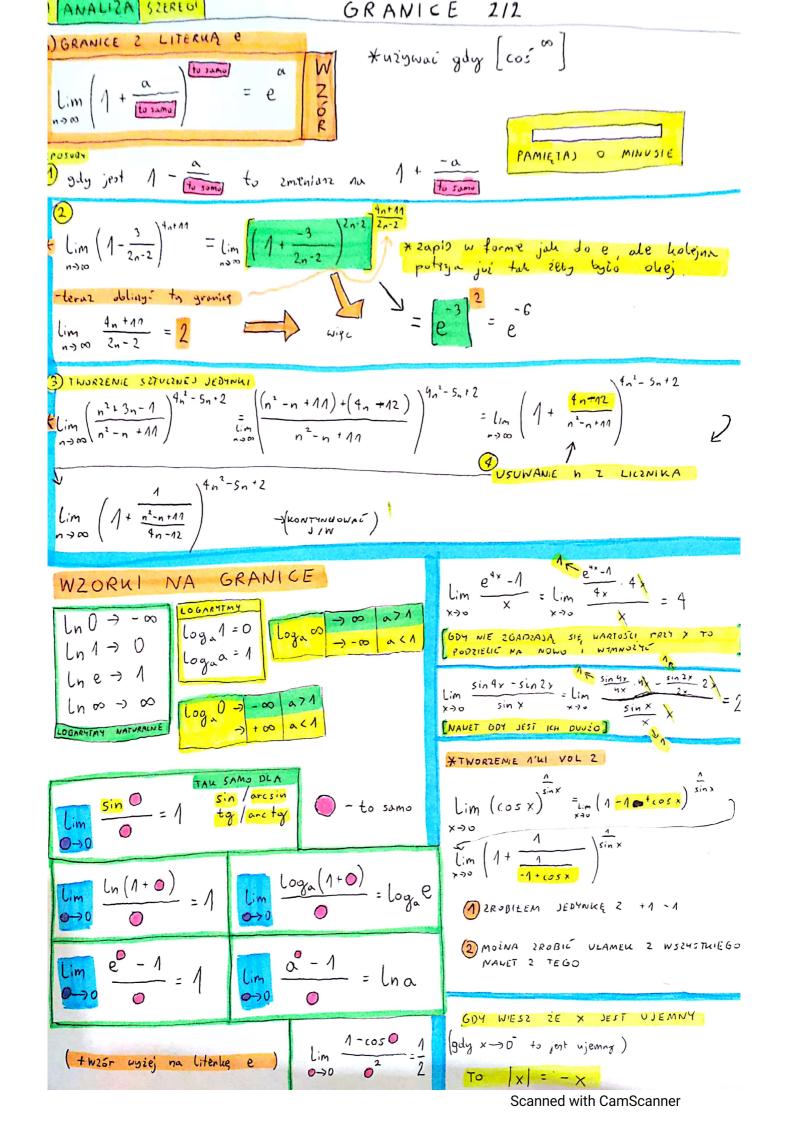
GRANICE 1/2 ANALIZA SZEREGI Najwainiejsze metody: (GRANICE CIAGÓU) 1) WYCIĄGANIE PRZED NAWIAS NO $\frac{(3n-2)^2}{n^{\frac{1}{2}(2n+2)}} = \frac{n^{\frac{1}{2}(3-\frac{2}{n})^2} \binom{n(3-\frac{2}{n})^2}{\binom{n(3-\frac{2}{n})^2}{2}}$ (wyciagone n'hi z nawiosu) $\frac{\sqrt{n+n+3}}{n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}+3}}{n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}\right)}{n} = \frac{\sqrt{n+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}{n^{\frac{2}{n}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n}+\frac{3}{n}}}}{n^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n}+\frac{3}{n}}}}$ $\frac{(1+n^{2})^{30}}{(4n^{2}n)^{40}(-n+2)^{50}} = \frac{\left(n^{3}(\frac{1}{n^{2}}+1)\right)^{30}}{\left(n(4-\frac{1}{n})\right)^{40}\left(n(-1+\frac{1}{n})\right)^{50}} = \frac{n^{30}(\frac{1}{n^{2}}+1)^{30}}{n^{40}(4-\frac{1}{n})^{40}n^{50}(-1+\frac{1}{n})^{50}} \Rightarrow \frac{1}{4^{40}}$ (duie potegi) $(n^2-2n^2+5n-1)=n^3(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{5}{n^2})$ (bez utamba) $\frac{7^{n}-5}{9^{n}+10}=\frac{7^{n}\left(1-\frac{5}{7^{n}}\right)}{9^{n}\left(1+\frac{5}{7^{n}}\right)}=\left(\frac{7}{9}\right)^{n}\cdot\frac{\left(1-\frac{5}{7^{n}}\right)}{\left(1+\frac{5}{7^{n}}\right)}\xrightarrow{n\to\infty}0$ (poteg: do n) $\frac{5^{n}-2^{n}+10^{n}}{11^{n}+5^{n}}=\frac{10^{n}\left(\frac{5^{n}}{10^{n}}-\frac{2^{n}}{10^{n}}+1\right)}{11^{n}\left(1+\frac{5^{n}}{10^{n}}\right)}$ NIE PRZEDMOWAĆ SIĘ I WYCIĄGAĆ LICEBE NASHIEUSTA 2 P-TEGA DO (NA CHAMA) 2) MNOZENIE PRZEZ SPRZĘŻENIE (GDY 5-5, a-5, 5-a) $= \frac{\left[n^{2}+2-\left(n^{2}+4\right)\right]\left[n^{2}-3+\sqrt{n^{2}+1}\right]}{\left[n^{2}-3-\left(n^{2}+1\right)\right]\left[n^{2}+2+\sqrt{n^{2}+4}\right]} + \frac{1}{n^{2}+1} + \frac{1}{n^{$ różnica pierwiasthów (naraz u góng i u dolu (po pospratania nie) (wająć n pned) $\sqrt[3]{n^3 + 1} - n = \frac{n^3 + 1 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + 1}\right)^2 + n^3 \sqrt[3]{n^3 + 1} + n^2}$ * UZYWAM WZORU (pierwostak 3 otopnia) 3-67: (a-6)(a"+a6+6) VACE L D SEUTHART X VACEL CO I SHASIMS MADALIM 4) THIERDZENIE O 3 CIAGACH (GDY Vanto" $\frac{1}{100} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{8}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{2nALEZE}{NAZHIYUSZY NYRAZ}$ $\frac{1}{100} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{5}{8}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{2nALEZE}{NAZHIYUSZY NYRAZ}$ 73.(3) = 73. 73 → 1·3=2 $\frac{n \sin\left(\frac{n!}{n^2+2n^2-1}\right)}{2^2+1} + \frac{x \sin n}{n^2+1} = \frac{n \left(-1\right)}{n^2+1} + \frac{n \left(-1\right)}{n^2+1} \leq c \cos x + c \cos$ (sinusy) $\frac{1}{n^{2+n}} + \frac{2}{n^{2+n}} + \dots + \frac{n}{n^{2+n}} \leqslant ciag \leqslant \frac{1}{n^{2}} + \frac{2}{n^{2}} + \dots + \frac{n}{n^{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$ (* NAJWIEWSET I NAJMNIEJSEY MIANOUNIK) 1+n west no suns clyze ~ arytmetycenego Scanned with CamScanner



2 AVALIZA SZEREGI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0$$

Lim
$$(a_n) = 0$$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ate $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ the gives, we wish again.

) ale
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3}$$

* BADANIE ZBIEZNOSCI SZEREGO Z DEFINICAL

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+2)}$$

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{A}{2n} + \frac{B}{2n+2} + 2n(2n+2)$$

EFEKT

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \implies A^{\frac{1}{2}}, B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \\ 2A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2n(2n+2)} = \frac{\frac{\Lambda}{2}}{2n} + \frac{\frac{\Lambda}{2}}{2n+2}$$

2) ZAPISANIE KILKU PIERUSTYLIT WYRAZEW BY ZOBARYE CZY COS SIE SURECI

WIEL SZEREG NIE JEST ZDIEZNY

$$\frac{\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{2}{4}}{4} + \frac{\frac{4}{2}}{4} - \frac{\frac{2}{2}}{6} + \frac{\frac{2}{2}}{6} - \frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{\frac{2}{4}}{2n} - \frac{\frac{\frac{2}{2}}{2}}{2n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{\frac{n}{2}}{2n+2}\right)=\frac{1}{4}$$

* TRUDNIEJSZY PRZYKŁAD OGARNIE CIA

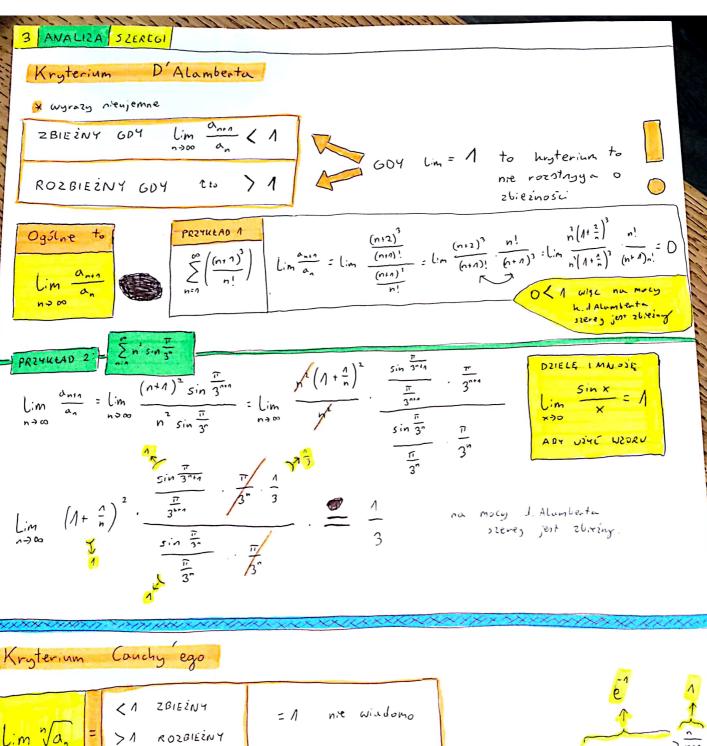
$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}$$

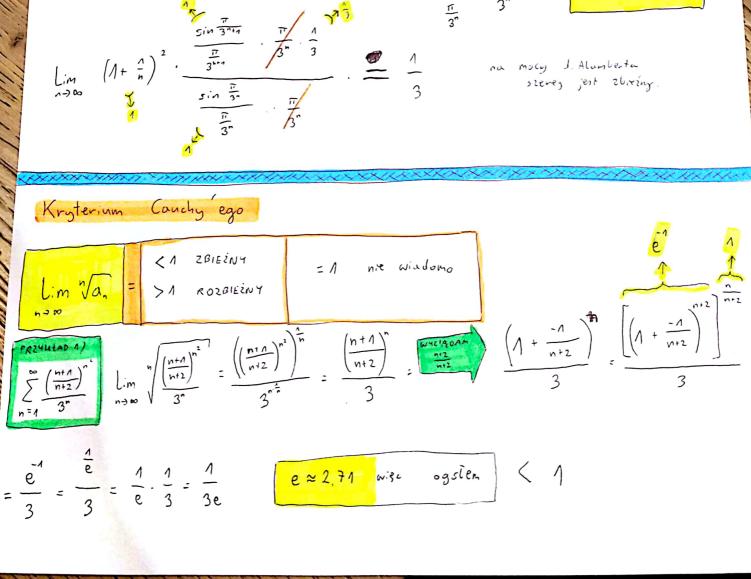
$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\frac{n}{2}}{1} + \frac{-n}{2} + \frac{\frac{n}{2}}{3} \right) + \left(\frac{\frac{n}{2}}{2} + \frac{n}{3} + \frac{\frac{n}{2}}{4} + \frac{\frac{n}{2}}{3} + \frac{\frac{n}{2}}{4} + \frac{\frac{n}{2}}{5} + \frac{\frac$$

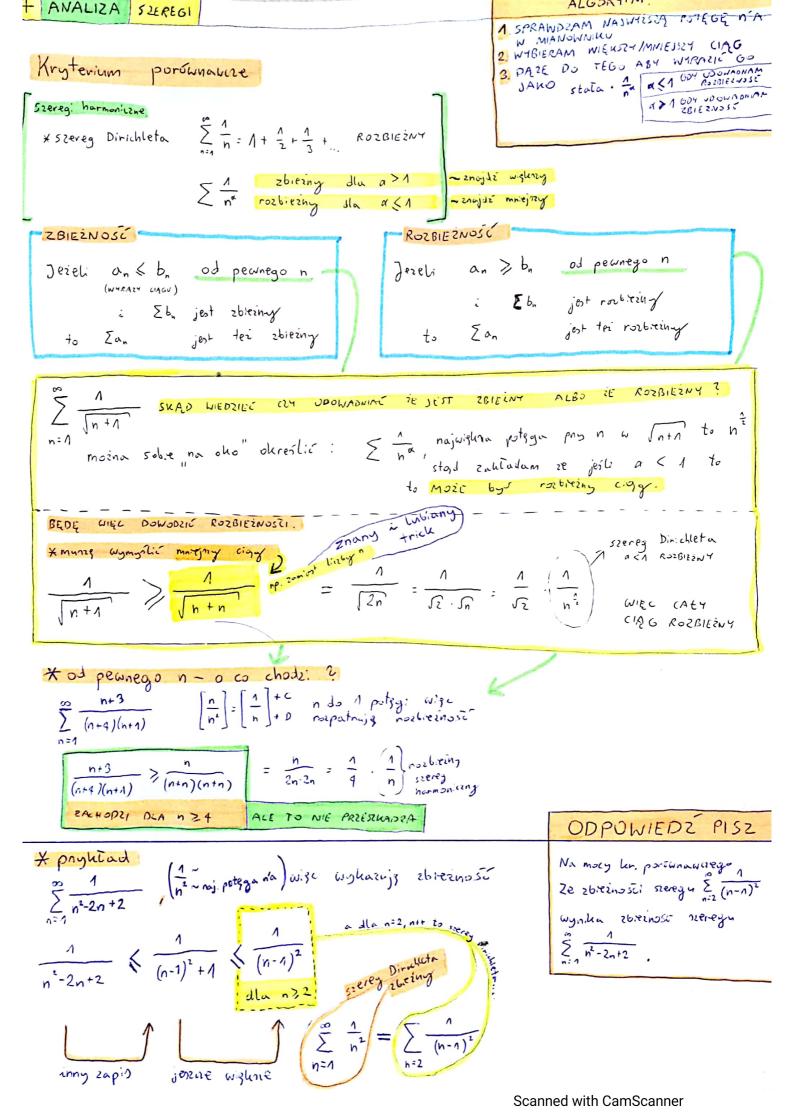
$$+ \left(\frac{1}{2} + \frac{-\eta}{n+\eta} + \frac{\frac{\eta}{2}}{n+2} \right) =$$

Kryteria zbieżności

szereg; o wyrozach nieujemnych





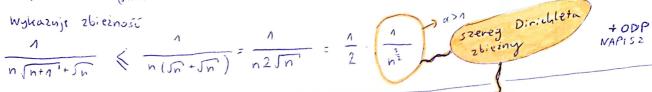


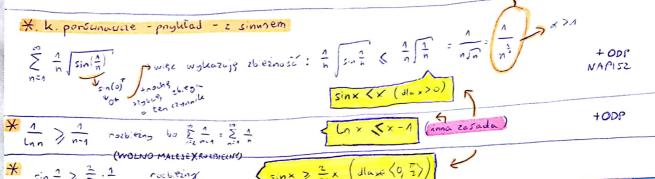
5 ANALIZA SZEREGI

* k. porsunavire - pryhtad - sprezenie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \quad \text{szacuję rubique sprziene} ;$$

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{n+1-n}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\sim n^{\frac{3}{2}}\max n$$





$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{1 +$$

Szereg, Taylora, (szereg Maclaurina to propodel dla xo=0)

* zatoiene: funkcja ma neskontronost pochodných w otorzenia punktu xo

$$\sum_{\infty} \frac{2^{(n)}(x_o)(x-x_o)^n}{n!} = f(x_o) + f'(x_o) \frac{(x-x_o)}{n!} + f''(x_o) \frac{(x-x_o)^2}{2!} + \dots$$

* moina predat nered a doublingin mejora i odiat jego renzta (od peunego n)

Postac renty (Lagrange a):

$$R_{n}(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{(x-x_{0})^{n+1}}{(n+1)!} dl_{n} ce(x_{0},x) lub ce(x_{1},x_{0})$$

- 1) ROZPISAC DWIE KOLUMNY (LEWO: POCHOOME OGCLINE) (PRAWO: PICHODNE DLA WARTISTI X.)
- 2) PRAWA KOLUMNA > WZ. TAYLORA
- 3) ZNAJOŽ ZALEŽNOST -> NAPISZ TO JANO SZEREG
- 4) ZAPISZ TADNIE)

* (w26r) 2 renzton R4 to pierwsze wyrozy ila n=0,1,2,3 (ale dla 4 jui nel) + R4

6 ANALIZA SZEREGI

Pryletad Taylora:

* Rozain funkcją y= Tx w szereg Taylora w otosienia panktu xo=4. Wyznarz renztą.

$$y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{-\frac{3}{2}}{2}$$

$$y^{11} = \frac{\Lambda}{2} \left(-\frac{\Lambda}{2} \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \times \frac{-\frac{9}{2}}{2}$$

$$y'' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}}$$

A) KOLUMNA POCHODNICH DLA X

y(4) = 2

$$y''(q) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$y_y^{(3)}(4) = \frac{-1(-3)(-5)}{2^4} \cdot \frac{1}{2^4}$$

2) POCHODNE DLA DANEGO

3) ZAPISZ WZ. TAYLORA DLA POCHODNYCH Z PRAWE) KOLUMNY

$$2 + \frac{1}{4}(x-y) - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^4} + \dots$$

dua prerune worry me majo naphemennych minussow wige olewam je:

4) szukaj zależności aby napraci scereg

- * gdy minusy sq napnemienne zaptsz cos a (a" (-1)") trality osobnie Lizah i mianowah tj. (x-4)2 jako (x-4)3. 1
- * pomyst jak modern copisaé kolejne nepanyste (2n-1)
- * tak samo z innymi zaposami tj. dla n=2 -1 mozna zaploat jako panistaj jednah, ze (2n-3) dla n=9 1.3.5 1-3-5: (2n-3) to jest ostatni wyroz, NIE NYRAZA ON WSZYSTKICH WYRAZEW 2n-3 \$ 1.3.5. (2n-3)
- * Zaznaczaj na rozpisanym wzone co już ogarnątos jak zapisat, bedien wideral co rostalo (reb kolenha wolot toch rerry)

$$2 + \frac{1}{4}(x-4) + \sum_{n=2}^{\infty} (x-4)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{n!} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)$$

(5) 20pisz powstate cudo Tadniej -poshracjaj lei co sip du np. [to]

$$2 + \frac{1}{4}(x-u) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-n} \frac{1 - 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^{3n-n}} \cdot \frac{(x-4)^n}{n!}$$

7 ANALIZA SZEREGI

Szacowane blyda pnytticenia

$$\int 1 + \chi \approx 1 + \frac{\chi}{2} - \frac{\chi^2}{8}, \quad \chi \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$= \lim_{x \to \infty} \lim_{x \to$$

ZAPISWE WISE NA RESETE DRUGIEGO RZEDU (CZEMU ME TRZEGIEGO!) \$(ro) + \$(ro) 1.

$$R_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2} - 2\right) \left(1 + c\right)^{\frac{1}{2} - 3} \frac{x^3}{3!}$$
 dir $c \in (0, x)$

trecia pochodnu SZUKAM LICZBY ODROBINE WIEUSZES

$$R_{2}(x) = \frac{x^{3}}{16 \cdot \sqrt{(1+c)^{5}}}$$

$$\frac{1}{16} \frac{x \in (0,1)}{16} = \frac{x \in (0,1)}{16}$$

MAM 3 WAPAZY CZYCT (K), \$(x), \$(x)