(X) PRO TIPY | 1

PRO TIPY

$5x^2 - 4x - 12$ — ZAPISANIE W POSTACI SUMY LUB RÓŻNICY

$5x^2 + 6x - 10x - 12$ — ROZKŁAD NA CZYNNIKI

$x(5x+6) - 2(5x+6)$ — WYŁĄCZANIE PRZED NAWIAS

$(x-2)(5x+6)$

INNY PRZYKŁAD

$2y^2 + xy - x^2 = 35$

$2y^2 + 2xy - xy - x^2 = 35$

$2y(y+x) - x(x+y) = 35$

$(2y-x)(y+x) = 35$

---

* JEŚLI DELTA WYNOSI $\Delta = 0$ TO MIEJSCE ZEROWE JEST DWUKROTNE

$\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

$\sqrt{9 + 2 + 2\cdot 3\sqrt{6}}$

$\sqrt{(3+\sqrt{2})^2}$

$|3+\sqrt{2}|$

PRO TIP:
PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻENIA NA WZÓR SKRÓCONEGO MNOŻENIA

INNY PRZYKŁAD:

$\sqrt{7 + 2\sqrt{10}} =$

$\sqrt{2+5 + 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} =$

$\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2} = |\sqrt{2}+\sqrt{5}|$

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

$\sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = |1-2\sqrt{2}|$

$= 2\sqrt{2} - 1$

WAŻNE!

PRO TIP: (GRANICE CIĄGÓW)

$$n + \sqrt{n^2 + 5n} = n + \sqrt{n^2\left(1 + \frac{5}{n}\right)} = n + n\sqrt{1 + \frac{5}{n}}$$

$$\frac{n+6}{n-1} = \frac{n-1+7}{n-1} = \frac{n-1}{n-1} + \frac{7}{n-1} = 1 + \frac{7}{n-1}$$

⇐ żeby podstawowa liczba była całkowita to $n-1$ jest dzielnikiem 7.

KAŻDA LICZBA CAŁKOWITA k, KTÓRA PRZY DZIELENIU PRZEZ 7 DAJE RESZTĘ 2

$k = 7x + 2$

np. $16 = 7\cdot 2 + 2$

JEŻELI SUMA DWÓCH LICZB JEST RÓWNA $2a$ TO TE LICZBY TO $a-b$ i $a+b$

WŚRÓD KOLEJNYCH LICZB CAŁKOWITYCH $k-1, k, k+1$ CONAJMNIEJ JEDNA JEST PODZIELNA PRZEZ 3, CONAJMNIEJ JEDNA PRZEZ 2 (CO 2 LICZBA JEST PODZIELNA PRZEZ 2, CO 3 PRZEZ 3, CO 5 P.5 DOT. LICZB PIERWSZYCH)

PROTIP (SUMA KWADRATÓW LICZB CAŁKOWITYCH GDY $x, y \in C$)

$$5x^2 + 5y^2 = (x^2 + 4y^2) + (4x^2 + y^2) = (x^2 + 4xy + 4y^2) + (4x^2 - 4xy + 4y^2)$$

$$= (x+2y)^2 + (2x-y)^2$$

ⓧ PRO TIPY | 2

PRO TIPY 2 !LOGARYTMY!

$$\frac{3-x}{x-2} < 0 \Rightarrow (3-x)(x-2) < 0 \Rightarrow -(x-3)(x-2) < 0 \quad | \cdot (-1) \Rightarrow (x-3)(x-2) > 0$$

ODEJMOWANIE DUŻYCH I NIEDUŻYCH LICZB – METODA DODAWANIA

$$63128 - 4991 = 9 + 5000 + 58000 + 128 = 58137$$

dopełnienie do 5000; do 10 000; do 63 000; do 63128

LOGARYTMY

OGÓLNIE

$$\log_2 8 = \boxed{x} \qquad 2^x = 8$$

LOGARYTM BEZ OZNACZENIA TO LOGARYTM DZIESIĘTNY $\log_{10}$

ILOCZYNU

$$\log_{\sqrt{2}} 8\sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = \log_{\sqrt{2}}(8\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})$$

ILORAZU

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{\sqrt{3}}$$

METODA KÓŁKA...

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{\sqrt{3}} = x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{9}{\sqrt{3}}$$

$$(3^{-1})^x = \frac{3^2}{3^{\frac{1}{2}}}$$

$$3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$-x = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

STARAM SIĘ DOPROWADZIĆ PRAWĄ STRONĘ DO TEJ SAMEJ CO LEWA

(PRZYKŁAD)

PODSTAWOWE WZORY POMOCNICZE

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \qquad \left(\frac{1}{a^n} = a^{-n}\right)$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$2\log_3 3\sqrt{3} = \log_3 (3\sqrt{3})^2$$

LUB

$$\log_{3^{\frac{1}{2}}}(3\sqrt{3})$$

MOŻNA WYJĄĆ POTĘGĘ ODPOWIEDNIO JAK WYŻEJ

LOGARYTM Z TĄ SAMĄ PODSTAWĄ CO LICZBA

$$a^{\log_a b} = b$$

ZAMIANA PODSTAW LOGARYTMU

$$\frac{\log_2 25}{\log_2 5} = \log_5 25$$

$$\frac{1}{\log_5 25} = \log_{25} 5$$

BO...

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

WZORY PODSTAWOWE:

$$\log_{\text{cokolwiek}} 1 = 0$$

$$\log_{\text{cokolwiek}} \text{cokolwiek} = 1$$

TO SAMO INACZEJ

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$\log_a \cancel{b \cdot \log_b} c = \log_a c$$

X) PRO TIPY 3

GŁUPOTKI MATEMATYCZNE

$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$ wyjmowanie spod nawiasu

$2^{51} - 2^{50} = (2^{50}\cdot 2) - (2^{50}\cdot 1) = (2-1)\cdot 2^{50} = 2^{50}$ także tam

NIERÓWNOŚCI NIE WOLNO KWADRATOWAĆ JEŚLI NIE MAMY PEWNOŚCI, ŻE OBIE STRONY SĄ DODATNIE

ZAPAMIĘTAJ

$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \quad /\cdot{}^4$

$\frac{a^4+b^4}{2} \geq \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$

$(a-b)\underbrace{(b^2a^2-a-b)}_{\text{ten nawias jest ZAWSZE dodatni, więc}} = 0$

TEN musi być równy 0

$x, y < 0$

$\frac{x^3+y^3}{x^2y+xy^2} \geq 1 \quad /\cdot(x^2y+xy^2)$

dodatnie * ujemne = ujemne; to samo; ogólne wyrażenie MUSI być ujemne wg założenia

$x^3+y^3 \leq x^2y+xy^2$

zmiana znaku

GDY SĄ NIERÓWNOŚCI MUSZĘ WIEDZIEĆ NA 102% CZY ~~...~~ DODATNIE CZY UJEMNE JEST WYRAŻENIE PRZEZ KTÓRE MNOŻĘ!!!!!!!!!

$(2k+3n)(k+n) = -1 \Leftrightarrow (2k+3n)(k+n) = -1\cdot 1$

$1^\circ \begin{cases} 2k+3n=-1 \\ k+n=1 \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} 2k+3n=1 \\ k+n=-1 \end{cases}$

SPRYTNE POSUNIĘCIE

Jeśli $a^x > a^y$	i	$0 < a < 1$	to	$x < y$
	i	$a > 1$	to	$x > y$

ILORAZ $\frac{a}{b}$ BĘDZIE ≥ 0 TYLKO GDY:

$\begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$

PAMIĘTAJ ŻE MIANOWNIK NIE MOŻE BYĆ ZEREM →

$\frac{k-5}{k+3} > 0$

$\boxed{\text{zał. } k \neq -3}$!!!

1. ZAWSZE PAMIĘTAJ O ZAŁOŻENIU Z MIANOWNIKA $\neq 0$

DLA $k > -3$

$k-5 > 0$

$k > 5$

$k \in (5, +\infty)$

DLA $k < -3$

$k-5 < 0$

$k < 5$

$k \in (-\infty, -3)$

2. ZAWSZE PAMIĘTAJ O WZIĘCIU POD UWAGĘ PRZEDZIAŁU DLA KTÓREGO COŚ LICZYSZ

(X) PROTIPY 4

GŁUPOTKI C.D.

WZORY SKRÓ[CONEGO] MNOŻENIA W PRAKTYCE

$$x^4+x^2+1 \Rightarrow \underbrace{x^4+2x^2+1}_{(a+b)^2}-x^2 \Rightarrow \underbrace{(x^2+1)^2-x^2}_{a^2-b^2} \Rightarrow (x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

TWORZENIE RÓŻNICY KWADRATÓW Z NICZEGO WAWANIA

$$a^2b+ab^2 = ab(a+b)$$

O PARZYSTYM STOPNIU

$\frac{\text{Licznik}}{\sqrt{x}}$

* to co pod pierwiastkiem ≥ 0
* to co w mianowniku $\neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} \neq 0 + x \geq 0 \Rightarrow x > 0$

WAŻNE! NIERÓWNOŚĆ MOŻNA NA DWA SPOSOBY POMNOŻYĆ PRZEZ MIANOWNIK

$$\frac{x-2}{x-3} \geq 0 \qquad (x-2)(x-3) \geq 0$$

$\boxed{\text{+ zał } x \neq 3}$

1) MNOŻĘ PRZEZ KWADRAT MIANOWNIKA (WIEM ŻE DODATNI)
2) ROBIĘ DWA PRZYPADKI

ROZW. RÓWNAŃ Z PODSTAWIANIEM ZMIENNEJ POMOCNICZEJ

P O T Ę Ż N Y B Ł Ą D

jeśli $t = x^2 \geq 0$ to t musi być NIEUJEMNE!

Przykład: $x^4 - x^2 - 6 < 0$

Podstawiam $t = x^2$

$t^2 - t - 6 < 0$

$\Delta = 25$

$t_1 = -2 \quad t_2 = 3$

$t \in (-2,3)$

TUTAJ POJAWIA SIĘ ZAŁOŻENIE $t \geq 0$

więc $t \in \langle 0,3)$

$\Downarrow$

$x^2 < 3 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}, +\sqrt{3})$

$$\frac{x}{\left(\frac{x}{y}\right)} \neq \frac{\left(\frac{x}{x}\right)}{y}$$

DZIELENIE NIE JEST PRZEMIENNE ;)

O PIERWIASTKACH...

$\sqrt[2n]{x} \quad x \geq 0$ BO PARZYSTY STOPIEŃ

$\sqrt[2n+1]{x} \quad x \in \mathbb{R}$ BO NIEPARZYSTY STOPIEŃ

$$\sqrt[3]{3^{3x}} = 3^x$$

$$\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

X PROTIPY 5

Wartość bezwzględna - przyjemna zasada

$$\begin{array}{c} \wedge \\ < |x| > \\ \vee \end{array}$$

1) PATRZĘ KTÓRY ZNAK
2) KRĘCĘ KOŁEM SZCZĘŚCIA I BIORĘ „i" LUB „lub".

$\lvert x\rvert > 3$	$x>3$	$\vee$	$-x>3$
$\lvert x\rvert < 5$	$x<5$	$\wedge$	$-x<5$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}}}$$

DZIAŁANIA NA PIERWIASTKACH

$$\frac{\sqrt[8]{9}\cdot\sqrt[4]{14}}{\sqrt[4]{42}} =$$

$$= \frac{\sqrt[8]{9}}{\sqrt[4]{\frac{42}{14}}} = \frac{\sqrt[8]{9}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[8]{3^2}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = 1$$

Rozwiązywanie zadań ze stałą:

1. WSTAWIAM JEDNĄ KONKRETNĄ LICZBĘ (ZAMIAST TEJ STAŁEJ) →
2. ROZWIĄZUJĘ NA NIEJ CAŁE ZADANIE JAKBY ONA BYŁA TĄ ZMIENNĄ ↓
3. STARAM SIĘ ZAUWAŻYĆ RÓŻNE MECHANIZMY I ZASADY KTÓRE MOŻESZ ZASTOSOWAĆ W OGÓLNOŚCI

$$\sqrt{x^2+2} : x = 1 + \frac{2}{x^2}$$

WYJMOWANIE X'A Z PIERWIASTKA