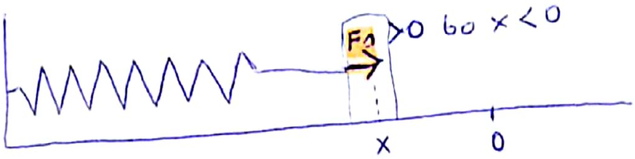
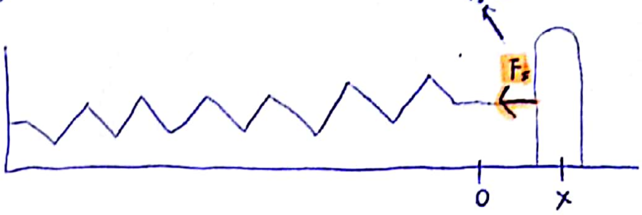
RUCH HARMONICZNY PROSTY

* działająca siła: SIŁA SPRĘŻYSTOŚCI (k - współczynnik sprężystości sprężyny) $\left[\frac{N}{m}\right]$

$$F_s = -kx$$

(przeciwny wzór)





* RÓWNANIE!

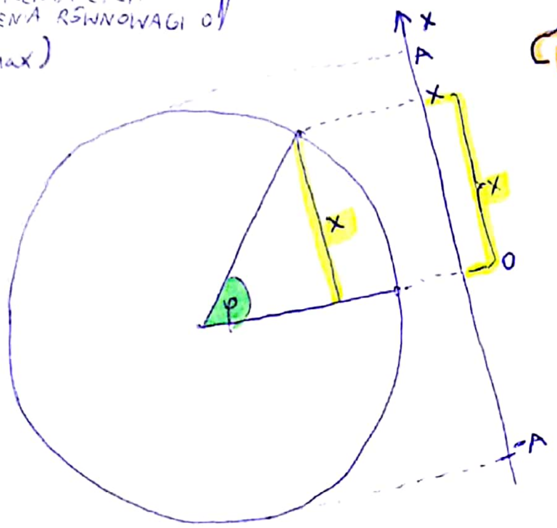
$$x = A\sin(\underbrace{\omega t + \varphi_0}_{\text{FAZA}})$$

φ_0 - faza początkowa

ω - częstość kołowa

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ zależy od okresu!

A - amplituda (WARTOŚĆ MAKSYMALNEGO WYCHYLENIA CIAŁA Z POŁOŻENIA RÓWNOWAGI 0) (x_{max})



TAK WIĘC: FAZA POCZĄTKOWA TO TAKA WARTOŚĆ SINUSA DLA JAKIEJ KĄT JEST TAKI ŻEBY BYŁ TAKI X

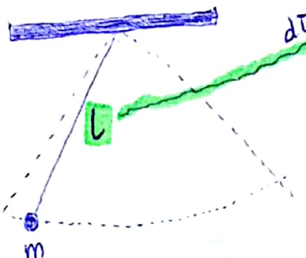
ĆW. OBLICZ wartość fazy początkowej jeśli wychylenie dla czasu $t=0$ było równe 86,6% wychylenia maksymalnego

$$0{,}866\cancel{A} = \cancel{A}\sin(\cancel{\omega t} + \varphi)$$

(t=0)

$$0{,}866 = \sin(\varphi) \Rightarrow \boxed{\varphi = 60^\circ}$$

* WAHADŁO MATEMATYCZNE



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l - długość wahadła

g - przyśpieszenie ziemskie

WAŻNE INFO O COSINUSACH

* w obecnej wersji tej kartki zakładam, że $t=0$ w położeniu równowagi
* jeśli założę, że $t=0$ w chwili wychylenia maksymalnego to cosinusy zamienić na sinusy i na odwrót

* PRĘDKOŚĆ - (pierwsza pochodna z wychylenia po czasie)

$$V = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$[V_{max} = \omega A]$$

* PRZYŚPIESZENIE - (druga pochodna.....)

$$a = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$[a_{max} = -\omega^2 A]$$

* RUCH HARMONICZNY – przykład 1

Oscylator harmoniczny (jakiś tam układ drgający) wykonuje drgania o równaniu $x = 0{,}02 \sin(\pi t + \frac{\pi}{2})$

1) Ile wynoszą AMPLITUDA i FAZA POCZĄTKOWA?

$A = 0{,}02$ $\qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

2) Oblicz częstotliwość drgań i wartość maksymalnej prędkości liniowej

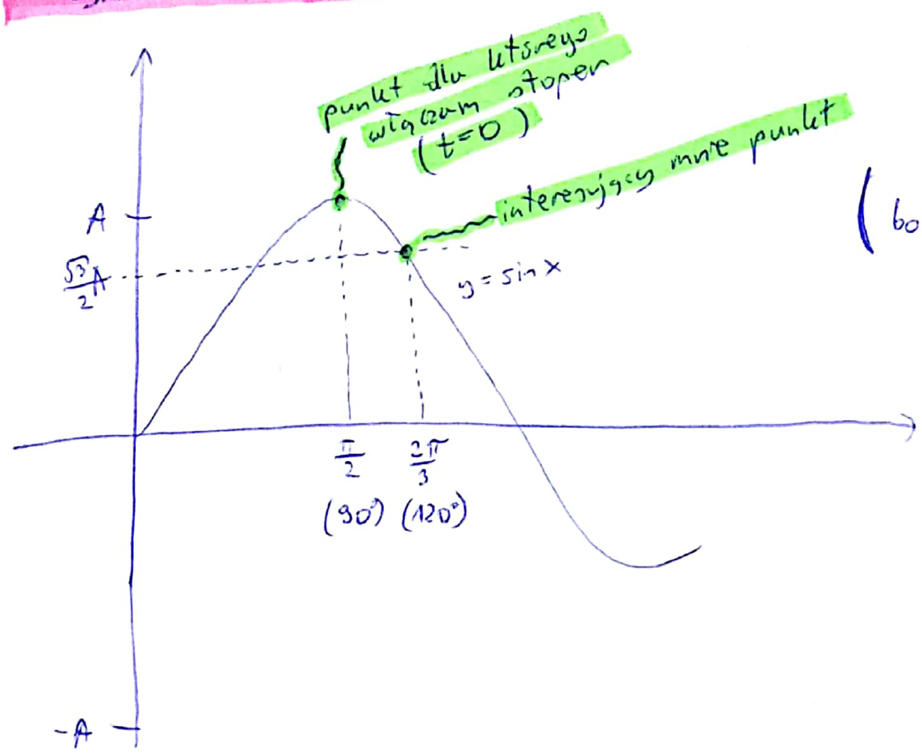
* częstotliwość to f
* jako, że znam omegę ($\omega = \pi$) mogę sobie podstawić $\omega = 2\pi f$

$$2\pi f = \pi$$
$$2f = 1$$
$$f = \frac{1}{2}\ \text{Hz}$$

* prędkość liniowa max zachodzi dla $\left[v = \omega A \overbrace{\cos(\omega t + \varphi)}^{1} \right]$ dla cosinusa równego 1

czyli $V_{max} = 0{,}02\pi \ \frac{m}{s}$

3) Oblicz najkrótszy czas, po jakim wychylenie z położenia równowagi wyniesie $x = \frac{\sqrt{3}}{2} A$



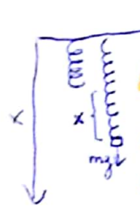
dlatego:

$$\frac{2}{3}\pi = \pi t + \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{1}{6} s$$

$$\left(\text{bo } \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \right)$$

* sprężyna z ciężarkiem: przykład: bez drgań harmonicznych

- gdy na sprężynę o długości 10 cm zawieszono ciężarek o masie 100g jej długość zwiększyła się do 10,5 cm. Oblicz współczynnik sprężystości sprężyny



~ normalnie sprężyna jest w stanie równowagi

* zawieszono 100g
* długość zwiększyła się o 0,5 cm

$F_s = kx$

$\underbrace{mg}_{\text{ciężar ciężarka}} = k \cdot \underbrace{0{,}005}_{\text{wychylenie}}$

$k = \frac{0{,}1 \cdot 10}{0{,}005} = 200 \frac{N}{m}$

- tym razem zawieszono obciążnik 200g. Oblicz długość sprężyny

$F = kx \rightarrow x = \frac{F}{k} = \frac{0{,}2 \cdot 10}{200} = 0{,}01 \text{ m} \rightarrow L = 11 \text{ cm}$

* okres drgań wahadła sprężynowego - wzór

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

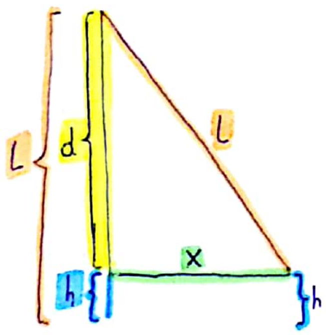
* wahadło sprężynowe

* zasada zachowania energii w wahadle matematycznym

* długość : 1 m
* masa : 0,01 kg

[wahadło wprawiono w drgania odchylając 4cm od pionu]

* odchylenie : 4 cm = 0,04m
* czas : 0
* V_{MAX} = ?



$E_{pMAX} = E_{kMAX}$

$mgh = \frac{mv^2}{2}$

$gh = \frac{v^2}{2}$

$\underbrace{v = \sqrt{2gh}}_{\text{wz na prędkość}}$

$d^2 + x^2 = L^2$

$d = \sqrt{L^2 - x^2}$

$d = \sqrt{1 - 0{,}04^2} = 0{,}9992$

$h = L - d$

$h = 0{,}0008$

(V_{MAX})

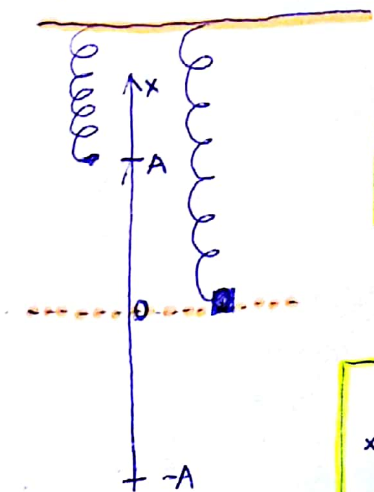
$V = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}0008} = 0{,}125 \frac{m}{s}$

* sprężyna z ciężarkiem: przykład: drgania harmoniczne

drgania harmoniczne więc $F \sim x$

* okres drgań : T = 1s

[o ile zmniejszy się długość sprężyny po odczepieniu ciężarka w porównaniu do wcześniejszego położenia równowagi ???]



$F = kx$

$mg = kx$

$x = \frac{mg}{k}$

$ma = kx$

$m\omega^2 \cancel{x} = k\cancel{x}$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$a(t) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$

$a_{max} = \omega^2 x$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

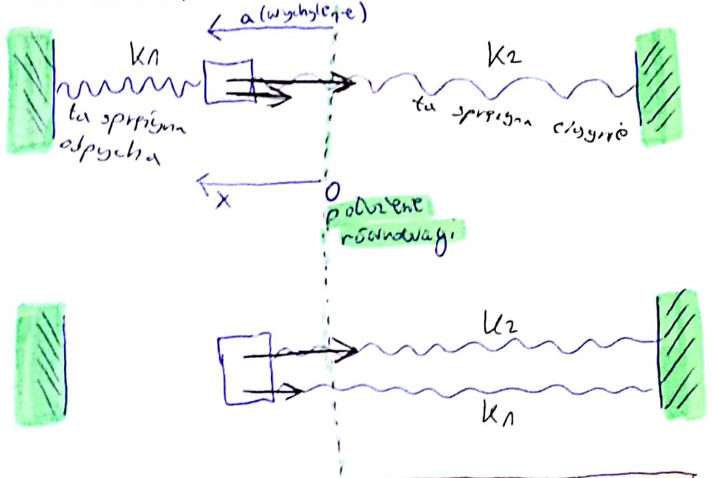
$\frac{k}{m} = \frac{4\pi^2}{T^2}$

$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$

$x = \frac{mg}{\frac{4\pi^2 m}{T^2}}$

$x = \frac{gT^2}{4\pi^2}$ (ODP.)

RUCH HARMONICZNY: DWIE SPRĘŻYNY



$$\boxed{\vec{F} = -k\vec{x}}$$

* sprężyna nie czuje czy jest rozciągana czy ciągnięta → można przerysować tak:

* potrzebuję częstości ω

* TERAZ DĄŻĘ DO TEGO BY MÓC ZAPISAĆ TAKIE COŚ (RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE OSCYLATORA)

$$\ddot{x} + \bigcirc\, x = 0$$

$\ddot{x}$ – druga pochodna

$\bigcirc$ – puste miejsce → tutaj będzie stało ω^2

* MUSZĘ DOPROWADZIĆ DO POWYŻSZEJ FORMY

gdy wyjdzie takie coś to można użyć wzoru

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

ZAPISUJĘ II Z. DYNAMIKI

$\vec{F_w} = m\vec{a}$ ale to też mogę zapisać jako $\vec{F} = -k\vec{x}$ więc

$$-k_1x - k_2x = m\underbrace{a_x}_{\text{przyśpieszenie to przecież druga pochodna położenia po czasie}} = m\ddot{x}$$

stąd

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x}$$

$$0 = m\ddot{x} + (k_1+k_2)x$$

$$0 = \ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x$$

no i to jest pragnione równanie

więc to jest ω^2

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

większe k – szybciej goni na boki (większe oscylacje)

a dla jednej sprężyny to jest $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

CZYLI DWIE ZACHOWUJĄ SIĘ JAK JEDNA

ZAPISUJĘ OGÓLNY WZÓR:

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\,t + \varphi\right)$$

teraz założenia początkowe:

$x(0) = a$ WYCHYLENIE
$v(0) = 0$ PRĘDKOŚĆ
} POCZĄTKOWE

PRĘDKOŚĆ TO PIERWSZA POCHODNA $x(t)$

$$v = A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\omega$$

pochodna funkcji złożonej, mnożę razy pochodną nawiasu (argument: t) (pochodna: ω)

DO ZAŁOŻENIA:

$$v(0) = 0 = A\cos(\varphi)\omega$$

$A \neq 0$ bo inaczej by stało w środku, nie wahało

$\omega \neq 0$

więc $\cos(\varphi) = 0 \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$

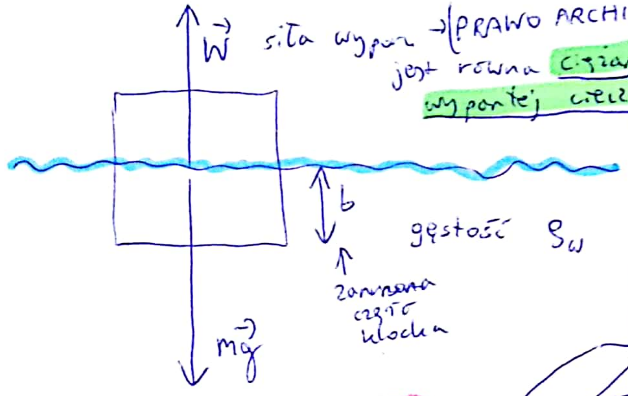
PODSTAWIAM DO OGÓLNEGO WZORU

$$x(0) = a = A\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} \rightarrow A = a$$

równanie ruchu

$$\rightarrow x(t) = a\sin\left(\frac{k_1+k_2}{m}t + \frac{\pi}{2}\right) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\,t\right)$$

* ZANURZONY KLOCEK

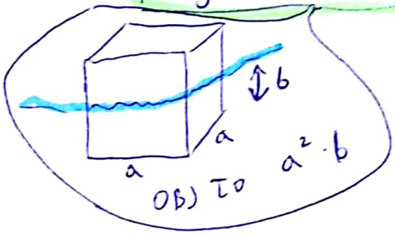


WARUNEK RÓWNOWAGI

$$\boxed{W = m \cdot g}$$

odczytany z rysunku

masa wypartej cieczy	· przyspieszenie ziemskie	= ciężar wypartej cieczy
GĘSTOŚĆ · OBJĘTOŚĆ KLOCKA		
$\rho_w \cdot a^2 \cdot b$	$\cdot\ g$	



CIĘŻAR CAŁEGO KLOCKA

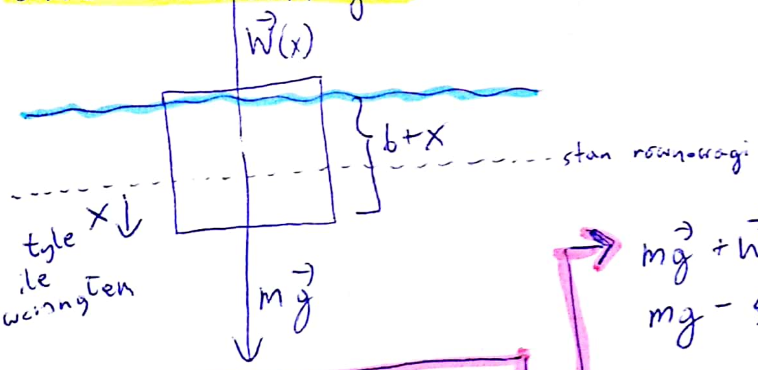
$$mg = \rho_k \cdot a^3 \cdot g$$

SIŁY SIĘ RÓWNOWAŻĄ
I Z. DYNAMIKI

(stan równowagi)

$$\underbrace{\rho_w \cdot a^2 \cdot b \cdot g = \rho_k \cdot a^3 \cdot g}_{\text{WARUNEK RÓWNOWAGI}}$$

teraz zanurzam go



teraz $\vec{W}(x) > m\vec{g}$
SIŁA WYPORU WIĘKSZA

SIŁY SIĘ NIE RÓWNOWAŻĄ
II Z. DYNAMIKI

$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \rightarrow \vec{F} = \vec{a} \cdot m$
PORÓWNUJĘ SIŁY DO $\vec{a}m$

$$m\vec{g} + \vec{W} = m\vec{a}$$

$$mg - \rho_w a^2 (b+x) \cdot g = m\vec{a} = m\ddot{x}$$

$\uparrow$ druga pochodna

$$mg - \rho_w a^2 b g - \rho_w a^2 x g = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{g - \frac{\rho_w}{m} a^2 b = \ddot{x} + \left(\frac{\rho_w}{m} a^2 g\right) x}_{\text{równanie niejednorodne}}$$

$$\underbrace{x_{0\ \text{JEDNORODNE}} = A \sin\left(\sqrt{\frac{\rho_w}{m} a^2 g}\, t + \varphi\right)}$$

(jakiś dziwny wzór)(2)

$\ddot{x} + (\quad) x = 0$

RÓWNANIE PODOBNE DO RÓWNANIA OSCYLATORA

$x_{\text{SZCZEGÓLNE}} = \beta \quad \ddot{x} = 0$

$\beta = g - \frac{\rho_w}{m} a^2 b$

$\frac{\rho_w}{m} a^2 g$