⑥ WIELOMIANY 1 — WIELOMIANY - TEORIA

*współczynnik liczbowy

CEGŁA


(i) wielomian może się składać z samych cegiełek, z samych pustaków albo z tego i z tego.

$$W(x) = a \cdot (x-p) \ldots\ldots \cdot (x^2+bx+c)$$

*czynnik liniowy
- *posiada miejsce zerowe $x_1 = p$
- *jeśli cegiełki są różne to jest tyle msc zerowych jaki jest stopień wielomianu
- *może być zapisany w formie „x" bo to to samo co „$(x-0)$"

*czynnik kwadratowy
- * $\Delta < 0$ więc brak msc. zerowych
- *totalnie nic nie wnosi do tematu ale się go nie pozbędziesz

---

(FAKTORYZACJA)

Rozkład wielomianu na czynniki

- *wzory skróconego mnożenia
- *grupowanie wyrazów
- *podstawianie typu $t = x^2$

NALEŻY PAMIĘTAĆ:

$(2x+1)$ *należy zawsze pozbywać się liczby przez którą mnożone jest x

$\Downarrow$

$2(x+\frac{1}{2})$

PRZYKŁADY:

1) $x^4+x^2+1 = (x^4+2x^2+1)-x^2 = (x^2+1)^2-x^2 = (x^2+1-x)(x^2+1+x)$

2) $3x^2+11x+6 = (3x \pm ?)(x \pm ?) = (3x+2)(x+3)$

($3x^2$)

OGÓLNA POSTAĆ FAKTORYZACJI TRÓJMIANU KWADRATOWEGO O DODATNIEJ DELCIE

*jakie dwie liczby dadzą iloczyn będący wyrazem wolnym?

6, 1 lub 1, 6

2, 3 lub 1, 6

3) $2x^3-3x^2-11x+6 = (x+2)(2x^2-7x+3) = (x+2)(x-\frac{1}{2})(x-3)$

$x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad x_3 = 3$

MIEJSCA ZEROWE

DZIELĘ WYRAŻENIE PRZEZ $(x+2)$

1. ZNALEŹĆ X'A DLA KTÓREGO WARTOŚĆ WYRAŻENIA WYNOSI 0

*jako, że powstałe czynniki będą w formacie:

$(\quad \cdot)(\quad \cdot)$ to pary liczb mogą być następujące:

1	6
-1	-6
2	3
-2	-3

aby dawały końcowy efekt (WYRAZ WOLNY = 6)

2. PODSTAWIAM TE LICZBY AŻ WYRAŻENIE BĘDZIE RÓWNE 0

*jeśli wyrażenie jest równe 0 dla $x = -2$ to $(x+2)$ jest czynnikiem

$(x+2)(\,?\,)$

TRICKI DO RÓWNAŃ KWADR. I SZEŚCIENNYCH

(CUBIC EQUATION)

Równania sześcienne → trick 1

(Tylko jeśli x^3 ma współczynnik 1)

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \rightarrow (x-1)^2(x-2)$$

suma lub różnica tych 3 cyfr które tworzą jako iloczyn ten współczynnik

$(x-1)(x-1)(x-2)$

PRODUKT 3 CYFR

$-1, 1, -2, 2$

wybieram $(-1)+(-1)+(-2) = -4$ (czynniki)

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = +2$

(miejsca zerowe)

miejsca zerowe

$1, 1, 2$

SPRAWDZANIE

1. mnożę miejsca zerowe wzajemnie: pierwszy z drugim, drugie z trzecim, trzecie z pierwszym
2. dodaję te trzy wyniki!
3. otrzymana liczba to [liczba]x

$x^3 - 4x^2 \boxed{+5x} - 2$

Sprawdzanie czy 1 lub −1 jest pierwiastkiem

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$+ = 6$

$+ = -6$

A B C D

Jeśli są przeciwne są sumy czynników A+C i B+D to pierwiastkiem jest −1

Jeśli są równe to pierwiastkiem jest 1

Równania kwadratowe → potężny trick

(QUADRATIC EQUATION)

suma/różnica — produkt

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$\cdot 2$ → -18

jakie dwa dzielniki −18 tworzą sumę/różnicę −3 ?

*jeśli współczynnik b jest ujemny to większa z liczb lub obie są ujemne

-6 $\quad 3$

$-\frac{6}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$

*dzielę przez współczynnik a

CZYNNIKI $(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

MIEJSCA ZEROWE $x_1 = 3$ $\quad x_2 = -\frac{3}{2}$

UWAGA! NALEŻY SPRAWDZIĆ CZY ZNAK PRODUKTU JEST WŁAŚCIWY DO DANYCH M.Z.

$$x^2 - 7x + 8 = 0$$

$-8 \quad 1$

ZNAK NIEWŁAŚCIWY =

ZDRADLIWA RÓWNOŚĆ =

OBLICZAJ DELTĘ

(Zadanie 4/OPERON/2018 PR)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ jest równa 4, a reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x+3)$ jest równa (-16). Wynika stąd, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez $(x-1)(x+3)$ jest równa.

A) $5x+1$ B) $-5x+1$ C) $5x-1$ D) $-5x-1$

WAŻNE!

TWIERDZENIE

Reszta z dzielenia wielomianu W przez dwumian liniowy $(x-p)$ to po prostu $W(p)$

więc:

$W(1)=4$

$W(-3)=-16$

dlatego, że: $W(x)=\text{coś}(x)\cdot(x-1)+4$

więc $W(1)=\text{coś}(x)\cdot 0+4$

zostaje samo: $W(1)=4$

$$W(x)=\text{coś}_2(x)\cdot(x-1)(x+3)+R(x)$$

$$\boxed{R(x)=ax+b}$$

stopień wielomianu o jeden niższy niż ten przez który dzielę bo jakby był tego samego stopnia to dalej by się dzieliło...

po podstawieniu...

$$\begin{matrix} W(1)= \\ W(-3)= \end{matrix}\begin{cases} a+b=4 \\ -3a+b=-16 \end{cases} \quad \begin{cases} a=5 \\ b=-1 \end{cases} \quad \underline{R(x)=5x-1} \quad (\text{Odp.})$$

Zad. Równanie $(x^2+2x-3)(x^2+x-m)=0$ ma cztery różne rozwiązania $\Leftrightarrow$ obie funkc. kwadr. mają po dwa <u>RÓŻNE</u> miejsca zerowe

---

TWIERDZENIE

Jeśli wielomian ma ~~pier~~ całkowite współczynniki to: (właściwie to to co na poprzedniej str.)

* jeśli ma pierwiastek całkowity to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego
* jeśli ma pierwiastek wymierny to jest on postaci $\frac{p}{q}$ ← dzielnik wyrazu wolnego, ← dzielnik współczynnika a (najwyższej potęgi: x^n)

(Zadanie 1/STY/2013/PR)

Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $\boxed{W(x)=x^{2013}-2x^{2012}+2x^{2011}-1}$ przez wielomian $G(x)=x^3-x$.

$$G(x)=x(x-1)(x+1)$$

$$W(x)=\text{coś}(x)\cdot x(x-1)(x+1)+ax^2+bx+c$$

stopień wielomianu o jeden niższy

więc podstawiam miejsca zerowe do $W(x)$...

$W(0)=-1$

$W(1)=0$

$W(-1)=-6$

Licz a,b,c ...

6 WIELOMIANY 4 — WYZNACZANIE WIELOMIANU + PORÓWNYWANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW

(Ciekawy przykład) Dana jest funkcja $f(x)= x^3-(m-2)x+2$ $f(x)=0$ RÓWNANIE

Zbadaj liczbę pierwiastków równania w zależności od m.

!

* KAŻDY WIELOMIAN MA CONAJMNIEJ JEDEN PIERWIASTEK RZECZYWISTY

1) OZNACZAM PIERWIASTEK LITERĄ a

$$x^3-(m-2)x+2 = (x-a)(x^2+bx+c)$$ — wzór ogólny funkcji na podstawie stopni wielomianu ($x^2 \cdot x = x^3$) ↑ mój stopień lewego wielomianu

$$\Leftrightarrow \; x^3+\underbrace{bx^2}+cx\underbrace{-ax^2}-abx-ac$$

↑ moje równanie nie ma żadnego x^2 więc $a=b$

2) PORÓWNUJĄC DALEJ CZYNNIKI... — porównujemy czynniki

$$-ac=2$$
$$\Downarrow$$
$$c=\frac{-2}{a}$$

3) ZAPISUJĘ NOWĄ POSTAĆ

$$f(x)=(x-a)\left(x^2+ax-\frac{2}{a}\right)$$

$$\Delta=a^2+\frac{8}{a}$$

4) $x^3-(m-2)x+2=0 \iff x^3+2=(m-2)x$

SZUKANIE MIEJSCA ZEROWEGO ⟶ SZUKANIE PRZECIĘCIA 2 FUNKCJI

PRZYDAŁABY SIĘ POCHODNA....

Wyznacz wartości współczynników a i b dla których równanie spełnione jest przez każdą liczbę rzeczywistą

$$2x^3=(x-a)^3+(x+b)^3$$

$$P=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3+x^3+3x^2b+3xb^2+b^3$$

$$2x^3-3(a-b)x^2+3(a^2+b^2)x-(a^3-b^3)$$

UWAGA! Skoro prawa strona ma być równa $2x^3$ to pozostałe x^2, x ... muszą być równe 0 !!!

$$\boxed{a^2+b^2=0 \quad \text{więc} \quad a=b=0}$$

Równość wielomianów (współczynników) = równość wyznaczonych przez nie funkcji !

Pozbywanie się pustaków - przykład

wielomian inny ale ten sam przedział rozwiązań !!!

$$(2-x)(2x^2-3x+5)(x+3)(x-2-x^2) \leqslant 0$$

$\leqslant 0$

(zawsze dodatni) (zawsze ujemny)

więc

zmiana znaku bo $(+\cdot -)=(-)$

$$(2-x)(x+3) \geqslant 0$$

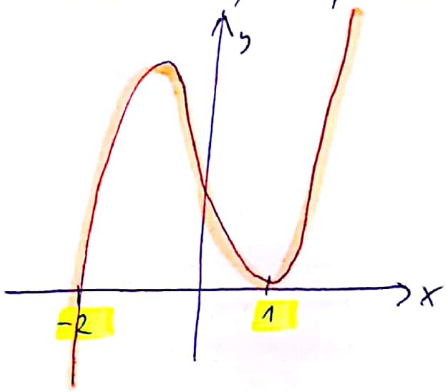
ZAMIANA $(a-x)$ NA $(x-a)$

[WYCIĄGNIĘCIE MINUSA I ZMIANA ZNAKU]

$$(x-2)(x+3) \leqslant 0$$

Poniższy rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby -2 oraz 1, a pochodna $W'(x)$ w punkcie (-2) wynosi 18.

Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$



w $\boxed{-2}$ nie odbija się → pierwiastek 1 krotności

w $\boxed{1}$ odbija się → pierwiastek 2 krotności

Zapisuję jak wygląda owy wielomian

$$W(x)=a(x+2)(x-1)^2$$

↓ mnożę nawiasy

$$W(x)=a(x^3-3x+2)$$

POCHODNA + WZÓR WIELOMIANU

Liczę pochodną

$$W'(x)=a(3x^2-3)$$

wiem, że

$W'(-2)=18$ więc $18=a\cdot(3x^2-3)$ gdzie $x=-2$

więc $18=a\cdot 9$

więc $a=2$

WZÓR WIELOMIANU $W(x)=2(x+2)(x-1)^2$