FUNKCJA LOGARYTMICZNA

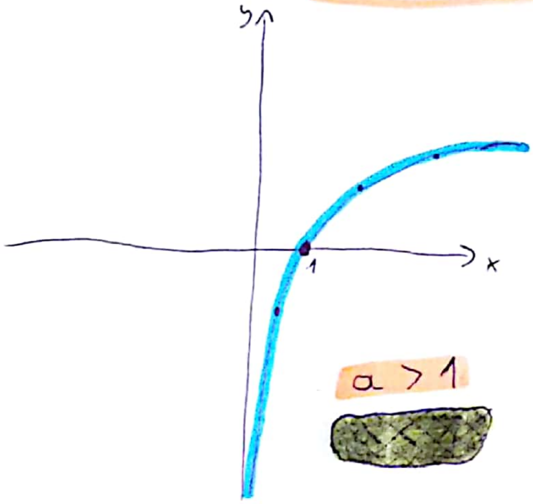
UWAGA! Elementarne pojęcie logarytmu opisane w notatce (X) PRO TIPY cz. 2

FUNKCJA LOGARYTMICZNA

Dziedzina: $\mathbb{R}_+$
ZW: $\mathbb{R}$

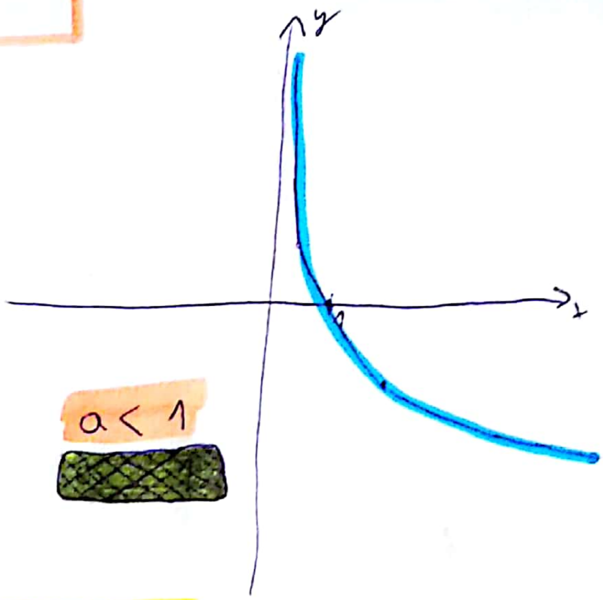
$f(x) = \log_a x$

gdzie $a \in (0; 1) \cup (1, +\infty)$
$x > 0$



$a > 1$

[redacted]



$a < 1$

[redacted]

ZAŁOŻENIA SĄ BARDZO WAŻNE → PRZYKŁADY:

Wyznacz punkt przecięcia funkcji: $f(x) = 7^{\log_7(9-x^2)}$ i $g(x) = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} x} + 5$

ZAŁOŻENIA

dot. $f(x)$	dot. $g(x)$
$9 - x^2 > 0$ $\wedge$ $x \in (-3; 3)$	$x > 0$

$\Rightarrow x \in (0; 3)$

tylko w tym przedziale szukamy punktów przecięcia funkcji

PROSTE UPROSZCZENIE

$f(x) = 7^{\log_7(9-x^2)} = 9 - x^2$

$g(x) = \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} x} + 5 = x + 5$

SZUKANIE PUNKTU PRZECIĘCIA

$9 - x^2 = x + 5$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \notin D$ $\vee$ $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \in D$

$g(x) = x + 5$

$y = x + 5$

$y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} + 5$

→ TO JEST WSPÓŁRZĘDNA X → A TO Y → $A = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} + 5\right)$

PAMIĘTAJ ŻE TEORIA O LOGARYTMACH W ① PRO TIPY 2

Logarytmy - ciekawy przykład

$$\frac{\log_2 36 \cdot \log_3 36}{\log_2 36 + \log_3 36} = m$$

PODSTAWIAM ZMIENNĄ

ZAPISUJĘ ODWROTNOŚĆ

$$\frac{1}{m} = \frac{\log_2 36 + \log_3 36}{\log_2 36 \cdot \log_3 36}$$

ROZDZIELAM + SKRACAM

$$\frac{\cancel{\log_2 36}}{\cancel{\log_2 36} \cdot \log_3 36} + \frac{\cancel{\log_3 36}}{\log_2 36 \cdot \cancel{\log_3 36}}$$

...

$$\frac{1}{\log_3 36} + \frac{1}{\log_2 36}$$

ZAMIENIAM PODSTAWY

$$\log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2} \quad \boxed{= \frac{1}{m}} \Rightarrow m = 2$$

Zadanie) Oblicz wartość wyrażenia $\log_{27} 0{,}8$ jeżeli $\log_4 3 = a$ i $\log_5 3 = b$

KOMENTARZ: W tego typu zadaniach najlepiej sprowadzić wszystkie logarytmy do wspólnej podstawy - im mniejsza tym lepsza

W TYM ZADANIU NAJLEPSZA JEST 3

$$a = \log_4 3 = \frac{1}{\log_3 4} \Rightarrow \log_3 4 = \frac{1}{a}$$

$$b = \log_5 3 = \frac{1}{\log_3 5} \Rightarrow \log_3 5 = \frac{1}{b}$$

$$\log_{27} \frac{4}{5} = \frac{\log_3 \frac{4}{5}}{\log_3 27} = \frac{\log_3 4 - \log_3 5}{3} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{3} = \frac{b-a}{3ab}$$

KIEDY LICZBY SĄ KOLEJNYMI WYRAZAMI CIĄGU ARYTMETYCZNEGO? $\log_{0{,}64} 5, \log_x 45, \log_{0{,}8} 3$

$$2\log_x 45 = \log_{0{,}64} 5 + \log_{0{,}8} 3$$ (warunek na ciąg aryt.)

$$\frac{2\log 45}{\log x} = \frac{\log 5}{\log 0{,}8^2} + \frac{\log 3}{\log 0{,}8} = \frac{\log 5}{2\log 0{,}8} + \frac{\log 3}{\log 0{,}8} = \frac{\log 5 + 2\log 3}{2\log 0{,}8} = \frac{\log(5 \cdot 9)}{2\log 0{,}8}$$

$$\frac{2\log 45}{\log x} = \frac{\log 45}{2\log 0{,}8}$$

JEŚLI SĄ JAKIEŚ POKRĘCONE PODSTAWY TO MOŻNA ZRÓWNAĆ WSZYSTKIE DO DZIESIĘTNEGO

$$\log x = 4\log 0{,}8 = \log (0{,}8)^4 \Rightarrow x = 0{,}4096$$

Uzasadnij, że liczby $7^{\log_{11}5}$ i $5^{\log_{11}7}$ są równe.

DZIELENIE PRZEZ LOGARYTM

$$7^{\log_{11}5} = 5^{\log_{11}7} \quad /:\log_{11}()$$

$$\log_{11}\left(7^{\log_{11}5}\right) = \log_{11}\left(5^{\log_{11}7}\right)$$

$$\log_{11}5\cdot\log_{11}7 = \log_{11}7\cdot\log_{11}5$$

$$L = P$$

WYKORZYSTANIE WZORU

$$\log_a(b^x) = x\cdot\log_a b$$

LOGARYTMOWANIE RÓWNAŃ

$$a^x = b \quad \begin{pmatrix} a,b>0 \\ a\neq 1\end{pmatrix}$$

$$\downarrow \log_a()$$

$$x = \log_a b$$

UWAGA! GDY $a<1$ TO ZMIENIA SIĘ ZNAK

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x \leqslant m \quad /\log_{\frac{1}{7}}()$$

$$\downarrow$$

$$x \geqslant \log_{\frac{1}{7}} m$$

$$3^{1+\log_3 x} = 3\cdot 3^{\log_3 x} = 3\cdot x$$

ZAWSZE DĄŻ DO TEGO BY LOGARYTM W POTĘDZE MIAŁ TĄ SAMĄ PODSTAWĘ JAKA JEST LICZBA PODNOSZONA

Narysuj wykres funkcji: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|f(x)|}$, [$f(x)$ to $\log_2 x$]

$$|f(x)| = |\log_2 x|$$

$$\begin{cases} \log_2 x & \text{dla } x\geqslant 1 \\ -\log_2 x & \text{dla } x\in(0,1)\end{cases}$$

DLA $x\geqslant 1$

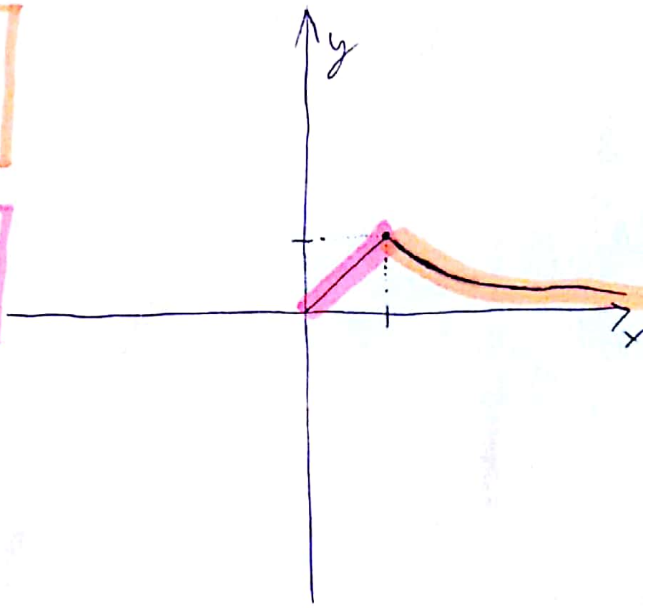
$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2 x} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

DLA $x\in(0,1)$

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\log_2 x} = \left(2^{-1}\right)^{-\log_2 x} = 2^{\log_2 x} = x$$

więc

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x};\ x\geqslant 1 \\ x;\ x\in(0,1)\end{cases}$$



PRZEKSZTAŁCENIA DO RYS. WYKRESÓW

Uprościć:

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{x^2} \cdot \log_{x^2}(x+2)$$

$$f(x) = -2\log_2 x \cdot \frac{1}{2}\log_x(x+2)$$

$$f(x) = -\log_2 \cancel{x \cdot \log_x}(x+2)$$

WZÓR NA ZMIANĘ PODSTAWY

$$\left[-\log_2 x \cdot \frac{\log_2(x+2)}{\log_2 x}\right]$$

$f(x) = -\log_2(x+2)$ ← z tej formy można rysować wykres (przekształcenie $\log_2 x$)

OGÓLNIE JEŚLI JEST MNOŻENIE LOGARYTMÓW TO POWINNO SIĘ TO JAKOŚ SKRACAĆ

Uprościć $f(x) = \log_{0,5} \frac{4}{x-1}$

DĄŻ DO TEGO ABY WYCIĄGAĆ LICZBY CAŁKOWITE

$$\log_{2^{-1}} \frac{4}{x-1} = -\left(\log_2 \frac{4}{x-1}\right) = -\left(\log_2 4 - \log_2 x-1\right)$$

$$-\left(\log_2 2^2 - \log_2 x-1\right)$$

$$-\left(2 - \log_2 x-1\right) = \log_2(x+1) - 2$$

można rysować wykres!

Określ zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{\log_5 7}{\log_x 7}$

zał. $\log_x 7 \neq 0$, $x > 0$, $x \neq 1$

$\log_x 7 = \frac{\log_5 7}{\log_5 x}$ więc $f(x) =$ [redacted]

$$f(x) = \log_5 7 \cdot \frac{\log_5 x}{\log_5 7} = \log_5 x$$

ZAŁOŻENIA

DOMYŚLNY ZW TO $\mathbb{R}$
ALE $x \neq 1$ WIĘC
$\log_5 1 = 0$ TRZEBA WYWALIĆ

$ZW = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Odp.)

Nierówność $\log_{\frac{\pi}{4}} x < 2$

↓ zamiana dwójki na logarytm o tej samej podstawie!!!

$$\log_{\frac{\pi}{4}} x < \log_{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

↓ opuszczenie logarytmów + zamiana znaku bo $\frac{\pi}{4} < 1$!!!

$$x > \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$\log_2 \log_3(x^2-40) = 2$$
$$\log_2 \log_3(x^2-40) = \log_2 2^2$$
$$\log_3(x^2-40) = 4$$
$$\log_3(x^2-40) = \log_3 3^4$$
$$x^2 - 40 = 81$$

BARDZO WAŻNA UMIEJĘTNOŚĆ → ZAMIANA LICZB CAŁKOWITYCH NA LOGARYTMY O POTRZEBNEJ PODSTAWIE

Pamiętaj o założeniu że podstawa logarytmu $\neq 1$. (łatwo przeoczyć logarytmując stronami)

Zadanie: Ustalmy dla jakich „m" ów równanie ma rozwiązanie: $m^{mx-2x}=3$

$$m^{mx-2x}=3 \quad \backslash \log_m \quad + \text{zał } m\neq 1$$

$$mx-2x=\log_m 3$$

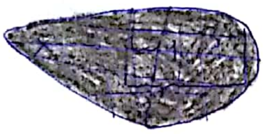
$$x(m-2)=\log_m 3$$

Dla $m=2$ równanie sprzeczne

Dla $m\neq 2$ ma rozwiązanie

TERAZ UWAGA! LOGARYTMUJĄC ZAŁOŻYŁEŚ ŻE $m\neq 1$!

MASZ WIĘC TERAZ OBYWATELSKI OBOWIĄZEK SPRAWDZIĆ CO SIĘ STANIE DLA $m=1$



$$1^{x-2x}=3$$ (sprzeczne bo $1^{\text{cokolwiek}}=1$)

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\underbrace{(x^2-2x+10)}$

minimalna wartość tej funkcji to wierzchołek $\frac{-\Delta}{4a}=9$

więc...

$x^2-2x+10 \geq 9$ dla każdego x

↓ Logarytmuję stronami...

UWAGA! PODSTAWA < 1 WIĘC ZMIANA ZNAKÓW Z $\geq$ NA $\leq$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+10)\leq \log_{\frac{1}{3}}9$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+10)\leq -2$$

ZW$=(-\infty;-2)$