CIĄGI

GDY NIE SĄ PODANE KONKRETNE LICZBY:

* ciąg jest arytmetyczny gdy $a_{n+1} - a_n$ jest stałe (NIEZALEŻNE OD N)

GDY SĄ PODANE KONKRETNE LICZBY

* ciąg jest arytmetyczny gdy $\frac{a+c}{2} = b$

r - różnica ciągu arytmetycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{lub} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot r}{2} \cdot n$$

n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$$

---

* ciąg jest geometryczny gdy q nie jest zależne od n

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

q - iloraz ciągu geometrycznego

a jeśli mamy 3 wyrazy sąsiadujące (a, b, c) to

$b^2 = ac$ (jeśli L=P to jest geometryczny)

UWAGA! Nie może być to ciąg 0, 0, c, gdzie $c \neq 0$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$ gdy $q \neq 1$

i $S_n = na_1$ dla $q = 1$

n-ty wyraz ciągu geometrycznego

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGÓW

* rosnący gdy $a_{n+1} > a_n$ czyli $a_{n+1} - a_n > 0$
* malejący gdy $a_{n+1} < a_n$ czyli $a_{n+1} - a_n < 0$

(dla każdego $n \in C_+$)

11 CIĄGI | 1 SCHEMAT - PORÓWNYWANIE CIĄGÓW G. i A.

Suma trzech różnych liczb tworzących ciąg geometryczny jest równa 156. Liczby te są równocześnie 1, 7 i 25 wyrazem ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

O CO CHODZI ?

Szukamy liczb a, aq i aq^2 (i) jako, że liczby te są różne to $a \neq 0$ i $q \neq 1$

CO WIEMY ?	CO POTRZEBUJEMY WIEDZIEĆ ?
$a + aq + aq^2 = 156$	ile wynosi q

Wg polecenia

CIĄG GEO	CIĄG ARYTM.
a	a_1
aq	a_7
aq^2	a_{25}

$\Rightarrow$ $aq - a = a_7 - a_1$

$\Downarrow$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
ciąg arytmetyczny	a	$a+r$	$a+2r$	$a+3r$	$a+4r$	$a+5r$	$a+6r$
ciąg geometryczny	a	- - - $\cdot q$ - - -					aq
	a_1	- - -					a_2

$a_7 = a + 6r$

$$aq - a = a_7 - a_1$$
$$aq - a = (a + 6r) - a$$
$$aq - a = 6r$$

$\Rightarrow$
$$aq^2 - aq = (a + 24r) - (a + 6r)$$
$$aq^2 - aq = 18r$$

$$aq^2 - aq = 3(aq - a)$$
$$aq(q - 1) = 3a(q - 1)$$
$$q = 3$$

LICZENIE POSZCZEGÓLNYCH WYRAZÓW

$a + aq + aq^2 = 156$. $a(1 + q + q^2) = 156$

$a = 12$
$aq = 36$
$aq^2 = 108$

SCHEMAT - CIĄGI ARYTMETYCZNE

W ciągu arytmetycznym a_n, dla $n \geq 1$ dane są $a_1 = -2$ oraz $r = 3$

Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2012$

JAK SIĘ DO TEGO DOBRAĆ?

jeden prosty wzór

$S_n < 2012$ $\Rightarrow$ prosta nierówność kwadratowa w której obliczymy największy n z tej sumy

$\Downarrow$

gdy $n = 37{,}81$ największy n to 37

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli pierwszą liczbę zmniejszymy o 1, drugą liczbę zwiększymy o 15, a trzecią zwiększymy o 37, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że ich suma jest równa 63.

CO MAMY?

$a + b + c = 63$ * mając sumę 3 wyrazów ciągu arytmetycznego mamy b za darmo

$(b-r) + b + (b+r) = 63$

$b = 21$

* Liczymy dalej a i b wg wzoru $b = \frac{a+c}{2}$

$a + c = 42$

* wg polecenia podstawiamy: $b^2 = ac$

CIĄG GEO: $(a-1, 36, c+37)$

$\Rightarrow \begin{cases} a + c = 42 \\ (a-1)(c+37) = 36^2 \end{cases}$

$\Downarrow$

liczymy c i a

$\Downarrow$

(i) jeśli są dwa c (c_1 i c_2) to są 2 przypadki ciągu, oba ciągi są prawidłowe

(i) można też podstawić $\begin{cases} b-r \text{ jako } a \\ b+r \text{ jako } c \end{cases}$

a po obliczeniu r obliczyć a i c

11) CIĄGI | 3 — SCHEMAT - PROSTE ZADANKA

Wyznacz 1 wyraz i iloraz ciągu geometrycznego mając taki sobie układ

$$\begin{cases} a_7 - a_3 = 120 \\ a_7 - a_5 = 96 \end{cases}$$

1. ZMIEŃ ZAPIS

$$aq^6 - aq^2 = 120$$
$$aq^6 - aq^4 = 96$$

2. WYJMIJ WSPÓLNY CZYNNIK

$$aq^2(q^4-1) = 120$$
$$aq^2(q^4-q^2) = 96$$

3. $aq^2 = \frac{120}{q^4-1}$

4. PODSTAW DO DRUGIEGO RÓWNANIA I ROZWIĄŻ UKŁAD RÓWNAŃ

Ciąg $(a,4,6,c)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a, a+6, 4c)$ geometryczny. Oblicz a, b, c.

WG WŁASNOŚCI CIĄGU ARYTMETYCZNEGO:

$$\begin{cases} 4 = \frac{a+6}{2} \Rightarrow a = 8-6 \\ 6 = \frac{4+c}{2} \Rightarrow c = 2\cdot6-4 \end{cases}$$

1. LICZYMY DWIE LICZBY WG C. ARYT.

WG WŁASNOŚCI CIĄGU GEOMETRYCZNEGO:

$$(a+6)^2 = a\cdot 4c$$
$$(8-6+6)^2 = (8-6)\cdot 4(2\cdot6-4)$$

2. PODSTAWIAMY DO WŁASNOŚCI C. GEO.

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ten ciąg zmieni się w arytmetyczny. Jeśli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby.

1. ZAPISAĆ RÓWNANIE KAŻDEGO CIĄGU

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ b+8 = \frac{a+c}{2} \\ (b+8)^2 = a(c+64) \end{cases}$$

→ można zauważyć, że wyciągnięcie c da nam 2 równanie typu coś = a · coś

→ $2b+16 = a+c$, $c = 2b-a+16$

→ podstawiamy c do 1 i 3 równania i liczymy b

droga tradycyjna

$b = 4a-4$

jako, że c jest zależne od b i a, a obliczyliśmy, że b jest zależne od a to c jest całkiem zależne od b czyli $b^2 = ac \Rightarrow b^2 = \text{coś tam } b$ (PODSTAWIAMY DO 1 RÓWNANIA)

ODEJMUJĄC 1 RÓWNANIE OD 3-GO: $16b+64 = 64a$ (TO SAMO)

droga ultraszybka

WYNIK

CIĄG GEOM. + SZEREG GEO. - SCHEMATY

Trzy pierwiastki wielomianu czwartego stopnia tworzą rosnący ciąg geometryczny o sumie 7 i iloczynie 8. Wyznacz wzór tego wielomianu, jeśli wiadomo, że czwarty pierwiastek to liczba (-1), a wartość tego wielomianu dla $x=3$ wynosi (-16).

CO ROBIĆ? OBLICZYĆ WYRAZY CIĄGU A POTEM PODSTAWIĆ DO WIELOMIANU

Z TREŚCI ZADANIA:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 7 \\ a^3q^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq = 2 \\ q = \frac{2}{a} \end{cases}$$

Z 1 RÓWNANIA

$$a + 2 + \frac{4}{a} = 7$$

$\Delta = 9$

$a_1 = 1 \lor a_2 = 4$

$q = 2 \lor \underbrace{q = 0,5}_{\text{nie spełnia założeń, bo nie jest rosnący}}$

daje to pierwiastki 1, 2, 4

+ w poleceniu dodany jest pierwiastek -1

$1, 2, 4, -1$

$$W(x) = b(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)$$

Liczymy wartość dla $x=3$ (wg polecenia)

$-16 = b \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1(-1)$

$b = 2$

WZÓR

$$W(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)(x-4)$$

SZEREG GEOMETRYCZNY:

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego a_n są dodatnie, a szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ jest zbieżny. Suma wszystkich wyrazów o nieparzystych numerach ciągu a_n jest cztery razy większa od sumy wszystkich wyrazów tego samego ciągu o numerach parzystych. Oblicz iloraz ciągu a_n.

1. SKORO JEST TO SZEREG GEO. TO $|q| < 1$, W POLECENIU MA BYĆ DODATNI WIĘC $q \in (0,1)$

2. MOŻEMY SOBIE ZAPISAĆ DANE:

ciąg a_n	a	aq^2	aq^4
ciąg nieparzysty	a_1	a_3	a_5
ciąg parzysty	a_2	a_4	a_6
ciąg a_n	aq	aq^3	aq^5

↑ ZAMIENIAMY ZAPIS Z CIĄGU NIEPARZ. I PARZ. NA ZAPIS CIĄGU OGÓLNEGO

różnica ciągu to q^2

$$\frac{aq^2}{a} = q^2$$

WZÓR NA SUMĘ SZEREGU GEO:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

SUMA WYRAZÓW NIEPARZYSTYCH $\xrightarrow{4\times \text{ WIĘKSZA}}$ NIŻ SUMA WYRAZÓW PARZYSTYCH

$$\frac{a}{1-q^2} = 4 \cdot \frac{aq}{1-q^2}$$

$$\frac{a}{1-q^2} = \frac{4aq}{1-q^2}$$

$$q = \frac{1}{4}$$

GRANICE - TEORIA

Ciąg jest zbieżny, gdy granica istnieje i jest liczbą np. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=0$

ciąg jest rozbieżny do $+\infty$ gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

do $-\infty$ gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\infty\cdot(-1) = -\infty$

* wyjąć przed nawias najwyższą potęgę
* pomnożyć przez sztuczną „jedynkę"
* także czasem rozłożyć: $6^{n+2} = 6^n\cdot 6^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ granica nie istnieje

Wyrażenia nieoznaczone - nie mają określonej wartości

$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty], [0\cdot\infty], [0^0], [\infty^0], [1^\infty]$

aby obliczyć granicę trzeba wzór przekształcić

SUMA SZEREGU GEOMETRYCZNEGO [ciąg geometryczny który * jest nieskończony * $|q|<1$ $q\in(-1,1)$]

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

* Ciąg geometryczny jest zbieżny gdy $|q|<1$

PROSTE GRANICE...

$\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ dla np. $3n^2, n^7$

$\lim\limits_{n\to\infty}(-n) = -\infty$ dla np. $-3n^2, -n^7$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ dla np. $\frac{-2}{n}, \frac{-9}{n^3}$

Jeśli $a>1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$

Jeśli $|a|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

GRANICE CIĄGÓW ZAWSZE LICZY SIĘ DLA $n\to\infty$

▷ W zadaniach najczęściej wyciąga się przed nawias największą potęgę. (mianownika)

▷ wielomian wyższego stopnia rośnie zawsze szybciej

PRZYKŁAD:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^3-9n^2+1}{7n^3-5n+7} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(15-\overset{\to 0}{\frac{9}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}})}{n^3(7-\underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}+\underset{\to 0}{\frac{7}{n^3}})} = \frac{15}{7}$$

▷ JEŚLI SĄ WIELOMIANY TEGO SAMEGO STOPNIA TO OD RAZU WIDAĆ...

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n}{7n^2+1}\right) = \frac{3}{7}$ BO TO SĄ NAJWYŻSZE STOPNIE (2)

11 CIĄGI 6 SCHEMAT - ARYTMETYCZNY

Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 165, a suma wyrazów o nieparzystych numerach równa jest 88. Z ilu wyrazów składa się ciąg a_n?

CO WIEMY?

* ciąg ma nieparzystą liczbę wyrazów

WIĘC:

ciąg parzystych wyrazów .. k

ciąg nieparzystych wyrazów . $k+1$

ciąg a_n .... $2k+1$

WZÓR NA SUMĘ CIĄGU ARYTM.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

ostatni wyraz ciągu to w tym wypadku $2k+1$

liczba wyrazów ciągu

$$\begin{cases} 165 = \dfrac{a_1 + a_{2k+1}}{2} \cdot (2k+1) & \text{ciąg } a_n \\ 88 = \dfrac{a_1 + a_{2k+1}}{2} \cdot (k+1) & \text{ciąg w. nieparzystych} \end{cases}$$

WYLICZAMY k

Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2n+3$. Wzięto kilka końcowych wyrazów tego ciągu. Ich suma jest równa 145, a suma największego i najmniejszego z wziętych wyrazów równa jest 58. Z ilu wyrazów składa się ciąg a_n?

1. WG OGÓLNEGO WZORU:

$a_1 = 5 \qquad r = 2$

granice wziętych wyrazów

$$\begin{cases} a_m + a_n = 58 \\ \dfrac{a_m + a_n}{2} \cdot (n-m+1) = 145 \end{cases}$$

ostatni wyraz ciągu

liczba wyrazów ciągu „wziętych wyrazów”

pierwszy wyraz ciągu wziętych wyrazów

na przykład:

$m = 15$

$n = 11$

więc

$15 - 11 + 1$

wzór na n-ty wyraz ciągu

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

czyli

$$a_n = 5 + 2(n-1)$$

analogicznie

$$a_m = 5 + 2(m-1)$$

wyliczamy m i n, które jest ostatnim wyrazem

Scanned with CamScanner

Ciekawy przykład - LOGARYTM w granicy ciągu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}\left(3^n+6^n+2^n\right)}{n} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

WYJMUJĘ 6^n PRZED NAWIAS

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}\left(6^n\left(\frac{3^n}{6^n}+1+\frac{2^n}{6^n}\right)\right)}{n} =$$

ROZPISUJĘ ILOCZYN SKŁADNIKÓW LOGARYTMU NA SUMĘ LOGARYTMÓW

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}6^n}{n} + \frac{\log_{10}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\overset{\infty}{n}}+\overset{1}{1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\overset{\infty}{n}}\right)}{n}$$

[illegible]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\log_{10}6}{\cancel{n}} + \log_{10}1$$

$$\log_{10}6 + 0$$

SKRACAM CO SIĘ DA

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{10}\left(3^n+6^n+2^n\right)}{n} = \log_{10}6}$$

WYNIK

Zadanko z granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}} =$$

Są to ciągi geometryczne o ilorazie $q=\frac{1}{2}$ i $q=\frac{1}{3}$

$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$ a właściwie ich sumy

Podstawiam do wzoru

UWAGA! n+1 WYRAZÓW

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}{\frac{3}{2}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \to 0$

$$= \frac{2\cdot(1-0)}{\frac{3}{2}(1-0)} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(n^2+1\right)^{15}}{\left(n^3+1\right)^{10}} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{30}+an^{29}+\ldots+1}{n^{30}+bn^{29}+\ldots+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{1}{1}+\overset{0}{\frac{a}{n}}+\overset{0}{\ldots}+\overset{0}{\frac{1}{n^{30}}}}{\underset{1}{1}+\underset{0}{\frac{b}{n}}+\underset{0}{\ldots}+\underset{0}{\frac{1}{n^{30}}}} = 1$$

11) CIĄGI 8

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n+2} - n \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2-n^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)} = \frac{3}{2}$$

1) Przekształcam wyrażenie nieoznaczone $[\infty - \infty]$ do formy $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (mnożę licznik i mianownik zgodnie ze wzorem $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$)

2) Wyjmuję n przed nawias

GRANICE Z PIERWIASTEK

Analogiczna sytuacja z sześcianem i wzorem $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

$$a_n = \left(\sqrt[3]{n^3+n^2} - n\right) = \frac{n^3+n^2-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2 + n\sqrt[3]{n^3+n^2} + n^2} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} + 1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

(mnożę przez (a^2+ab+b^2) aby otrzymać a^3-b^3 w liczniku)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

PAMIĘTAJ $\frac{1}{x\cdot y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$

Dany jest ciąg geometryczny a_n określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{3x+241}\right)^n$ dla $n \geq 1$ którego wyrazy są ujemne. Wyznacz największą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony ~~ciąg~~ szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny.

To powinno być oczywiste 1

$$q = \frac{1}{3x+241}$$

To powinno być oczywiste 2

niektóre wyrazy ujemne więc

$$q < 0$$

To powinno być oczywiste 3

szereg zbieżny gdy

$$|q| < 1$$

stąd

$$-1 < \frac{1}{3x+241} < 0$$

$$\downarrow$$

$$x < -80\tfrac{2}{3}$$

ODP. $x = -81$

Ciąg a_n jest określony dla $n \geq 1$ i spełnia warunki:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2a_{n+2} = a_n & \text{dla } n \geq 1 \\ 2\sqrt{2}\, a_{n+3} + a_n = 0 & \text{dla } n \geq 1 \end{cases}$$

Oblicz granicę $\lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

(1) PRÓBUJĘ UZYSKAĆ ZALEŻNOŚĆ a_{n+1} OD a_n

A) W drugim warunku podstawiam a_{n+1} zamiast a_n : $2a_{n+3} = a_{n+1}$

B) Podstawiam do trzeciego warunku : $2\sqrt{2}\, a_{n+3} + a_n = 0$

$$\sqrt{2}\, a_{n+1} + a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_n = \frac{-\sqrt{2}}{2} a_n$$

(2) OTRZYMAŁEM WIĘC CIĄG GEOMETRYCZNY O $q = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

(3) OBLICZAM SUMĘ SZEREGU GEO.

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

ODP.

Scanned with CamScanner