

Глава 7

СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Зачастую сложную задачу, возможно, решать не только последовательно, но и делая некоторые действия параллельно. Например, пока не замешано тесто, лепить пироги смысла не имеет. И при этом можно при постройке дому переносить кирпичи и готовить раствор в одно и то же время. В более сложных операциях возможны очень замысловатые структуры действий, которые называются сетевыми графиками.

7.1. Введение в сетевое планирование

7.1.1. Метод сетевого планирования и управления

Метод сетевого планирования и управления является методом решения задач исследования операций, в которых необходимо оптимально распределить сложные комплексы работ (например, строительство большого промышленного объекта, выполнение сложного проекта и т.п.). Метод, система ПЕРТ – оценка программ и способ проверки, возник в 1958 г. в США, затем быстро был признан во всём мире, в том числе и в СССР.

Методы СПУ используются при планировании сложных комплексных проектов, например, таких как:

- строительство и реконструкция каких-либо объектов;
- выполнение научно-исследовательских и конструкторских работ;
- подготовка производства к выпуску продукции;
- перевооружение армии;
- развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий.

Характерной особенностью таких проектов является то, что они состоят из ряда отдельных, элементарных работ. Они обуславливают друг друга так, что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. Например, укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы; эти материалы не могут быть доставлены раньше, чем будут построены подъездные пути; любой этап строительства не может быть начат без составления соответствующей технической документации и т.д.

СПУ состоит из трех основных этапов.

1. Структурное планирование.
2. Календарное планирование.
3. Оперативное управление.

Структурное планирование начинается с разбиения проекта на четко определенные операции, для которых определяется продолжительность. Затем строится сетевой график, который представляет взаимосвязи работ проекта.

Это позволяет детально анализировать все работы и вносить улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Календарное планирование предусматривает построение календарного графика, определяющего моменты начала и окончания каждой работы и другие временные характеристики сетевого графика. Это позволяет, в частности, выявлять критические операции, которым необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Во время календарного планирования определяются временные характеристики всех работ с целью проведения оптимизации сетевой модели, которая улучшает эффективность использования какого-либо ресурса.

В ходе **оперативного управления** используются сетевой и календарных графики для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. При этом сетевая модель может подвергаться оперативной корректировке, вследствие чего будет разрабатываться новый календарный план остальной части проекта.

7.1.2. Структурное планирование

Сущность метода сетевого планирования и управления (СПУ) заключается в особом моделировании исследуемого процесса, а именно – создаётся информационно-динамическая модель задачи.

В качестве такой модели в методе СПУ используется графическая модель в виде сетевого графика. Весь комплекс операций в модели расчленён на отдельные, чётко определённые работы. Сетевой график изображается в виде ориентированного графа (множество вершин, соединённых направленными дугами).

Основными понятиями сетевых моделей являются понятия события и работы.

Работа – это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата и требующий затрат каких-либо ресурсов, имеет протяженность во времени.

Термин «работа» может иметь следующие значения:

1. действительная работа, требующая затрат времени и ресурсов на определённую операцию;
2. «ожидание» – т.е. процесс, не требующий затрат труда, но занимающий время (например, процесс отвердения бетона, высыхание краски и т.п.);
3. фиктивная работа, которая указывает на логическую связь между двумя или несколькими операциями, не требующая ни затрат времени, ни ресурсов. Она изображается на графике пунктирной линией (стрелкой) и указывает на то, что начало последующей операции, зависит от результатов предыдущей.

По своей физической природе работы можно рассматривать как:

- действие: заливка фундамента бетоном, составление заявки на материалы, изучение конъюнктуры рынка;
- процесс: старение отливок, выдерживание вина, травление плат;

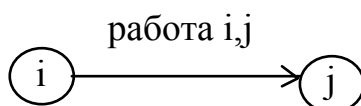
- ожидание: ожидание поставки комплектующих, пролеживание детали в очереди к станку.

По количеству затрачиваемого времени работа, может быть:

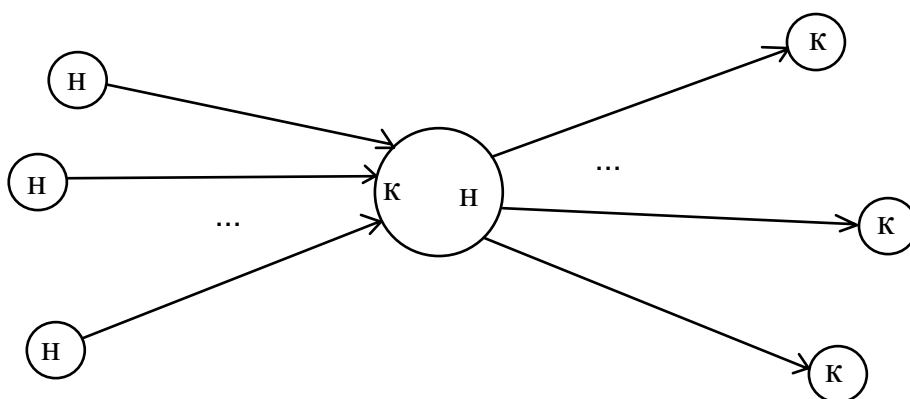
- действительной, т.е. требующей затрат времени;
- фиктивной, не требующей затрат времени и представляющей связь между какими-либо работами: передача измененных чертежей от конструкторов к технологам, сдача отчета о технико-экономических показателях работы цеха вышестоящему подразделению.

Событие – момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие. Событие представляет собой результат проведенных работ и, в отличие от работ, не имеет протяженности во времени. Например, фундамент залит бетоном, старение отливок завершено, комплектующие поставлены, отчеты сданы и т.д.

Таким образом, начало и окончание любой работы описываются парой событий, которые называются **начальным и конечным событиями**. Поэтому для идентификации конкретной работы используют код работы (i, j) , состоящий из номеров начального (i -го) и конечного (j -го) событий, например $(2,4)$; $(3,8)$; $(9,10)$.

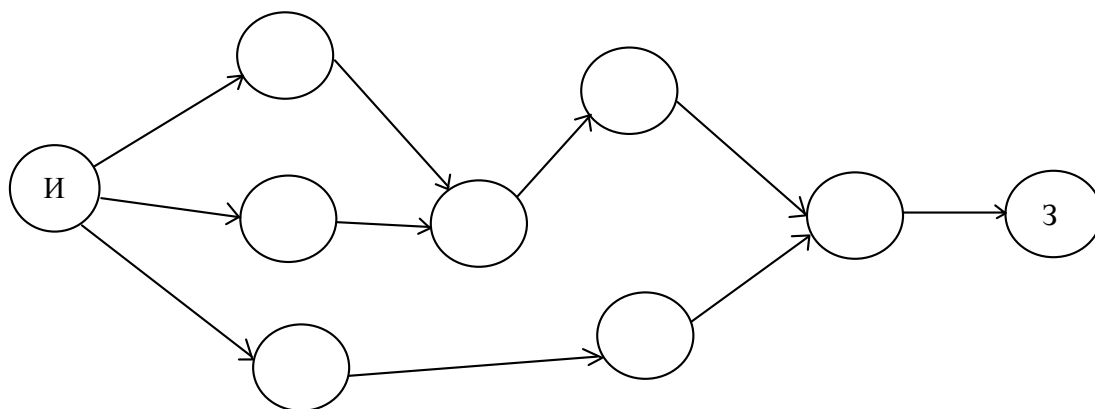


На этапе структурного планирования взаимосвязь работ и событий изображаются с помощью сетевого графика, где работы изображаются стрелками, которые соединяют вершины, изображающие события. Работы, выходящие из некоторого события не могут начаться, пока не будут завершены все операции, входящие в это событие.



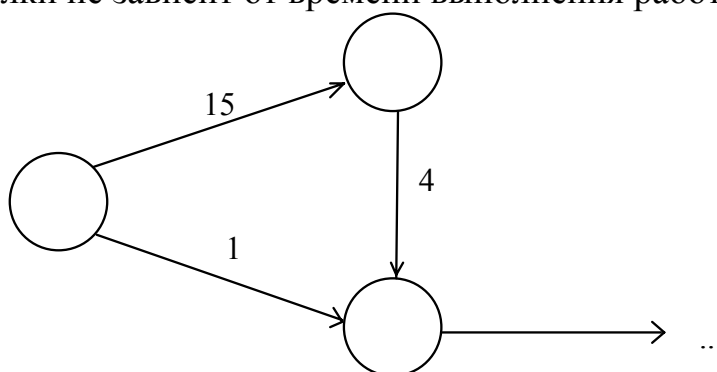
Событие, не имеющее предшествующих ему событий, т.е. с которого начинается проект, называют **исходным** событием.

Событие, которое не имеет последующих событий и отражает конечную цель проекта, называется **завершающим**.

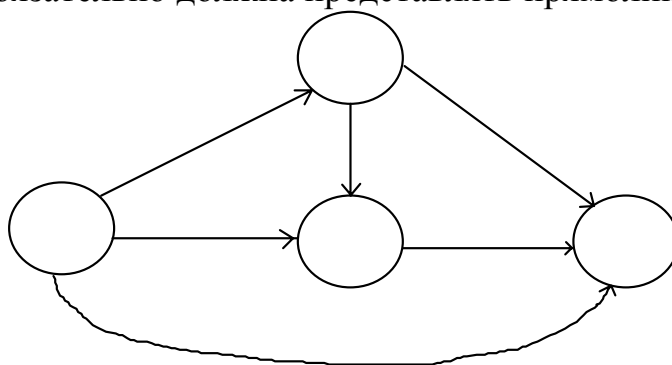


При построении сетевого графа необходимо следовать следующим правилам:

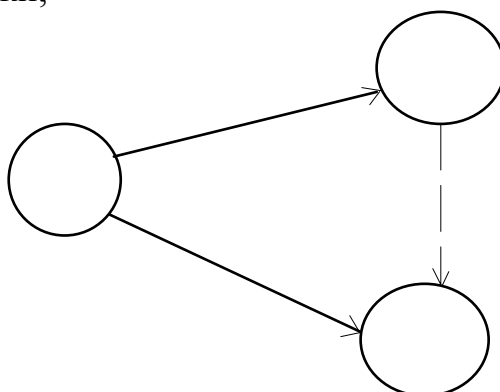
- длина стрелки не зависит от времени выполнения работы;



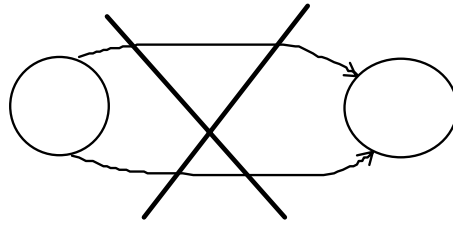
- стрелка не обязательно должна представлять прямолинейный отрезок;



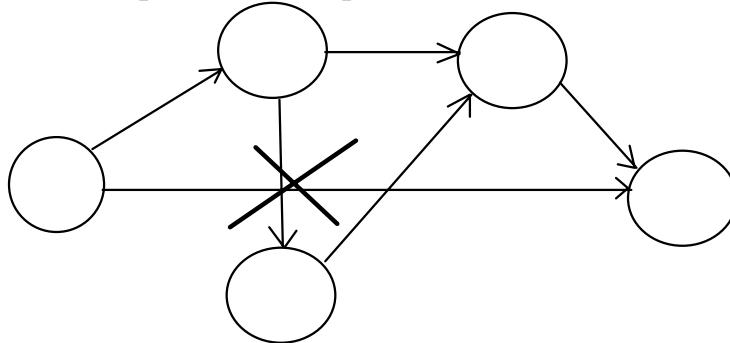
- для действительных работ используются сплошные, а для фиктивных – пунктирные стрелки;



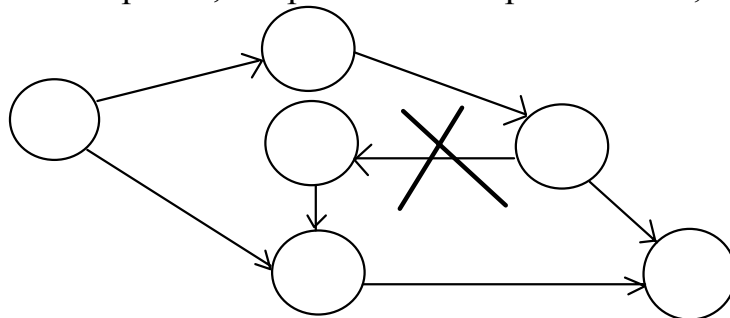
- каждая операция должна быть представлена только одной стрелкой;
- не должно быть параллельных работ между одними и теми же событиями, для избежания такой ситуации используют фиктивные работы;



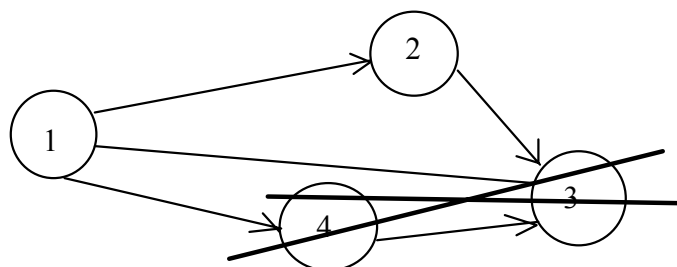
- следует избегать пересечения стрелок;



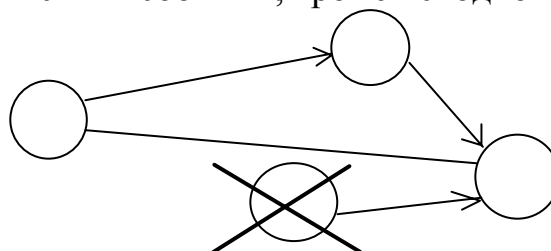
- не должно быть стрелок, направленных справа налево;



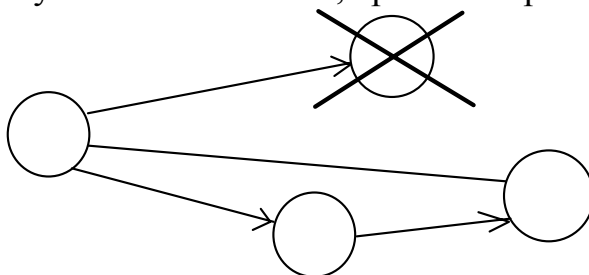
- номер начального события должен быть меньше номера конечного события;



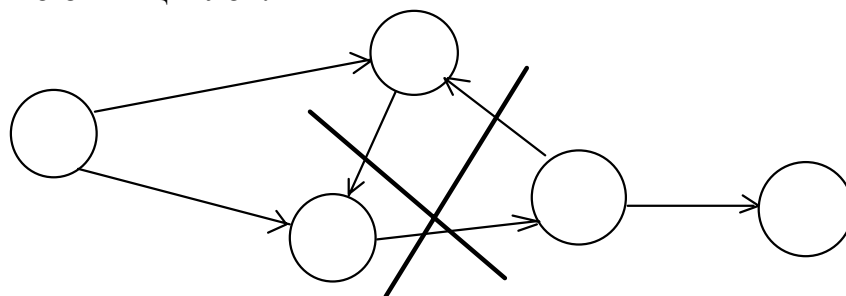
- не должно быть висячих событий, кроме исходного;



- не должно быть тупиковых событий, кроме завершающего;



- не должно быть циклов.



Поскольку работы, входящие в проект могут быть логически связаны друг с другом, то необходимо всегда перед построением сетевого графика дать ответы на следующие вопросы:

- какие работы необходимо завершить непосредственно перед началом рассматриваемой работы?
- какие работы должны непосредственно следовать после завершения данной работы?
- какие операции могут выполняться одновременно с рассматриваемой работой?

7.1.3. Пример построения сетевого графика

Пусть необходимо спроектировать, изготовить и сдать в эксплуатацию стенд согласно полученному техническому заданию (табл. 7.1.). Известно, что для этого необходимо выполнить следующие работы.

Кроме того, известно, что

- информация о характеристиках стенда может быть получена только в процессе создания электрической и механической частей стенда и после получения покупных элементов;
- рабочая документация по эксплуатации стенда может быть разработана и без проведения сборки самого стенда;
- контрольные испытания должны проводиться при наличии готовой документации по эксплуатации.

Таблица 7.1.

N	Содержание работы	Пред.	Парал.	По
A	Разработка технических условий на стенд	-	-	

В	Общая компоновка стенда	A	C	D
С	Разработка и выдача ТЗ на составление рабочей документации по эксплуатации стенда	A	B,D,E,F,G,H,I	
D	Разработка технологии изготовления электрической части стенда	B	E,F	
E	Разработка технологии изготовления механической части стенда	B	D,F	
F	Оформление и размещение заказов на покупные элементы, необходимые для сборки стенда	B	D,E	
G	Изготовление электрической части стенда	D	H,I	
H	Изготовление механической части стенда	E	G,I	
I	Выполнение заказов на покупные элементы	F	H,G	
J	Передача информации о характеристиках стенда для разработки рабочей документации по эксплуатации стенда	G,H,I	K	
K	Сборка стенда	G,H,I	J,L	
L	Разработка рабочей документации по эксплуатации стенда	J	K	
M	Контрольные испытания стенда	L,K	-	

Кроме того, известно, что

- информация о характеристиках стенда может быть получена только в процессе создания электрической и механической частей стенда и после получения покупных элементов;
- рабочая документация по эксплуатации стенда может быть разработана и без проведения сборки самого стенда;
- контрольные испытания должны проводиться при наличии готовой документации по эксплуатации.

7.1.4. Календарное планирование

Применение методов СПУ в конечном счете должно обеспечить получение календарного плана, определяющего сроки начала и окончания каждой операции. Построение сети является лишь первым шагом на пути к достижению этой цели. Вторым шагом является расчет сетевой модели, который выполняют прямо на сетевом графике, пользуясь простыми правилами.

Показать расчет временных параметров событий на примере. К временным параметрам событий относятся:

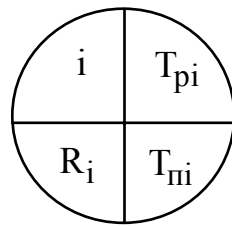
- ранний срок наступления события i – $T_p(i)$;
- поздний срок наступления события i – $T_n(i)$;
- резерв времени наступления события i – $R(i)$.

$T_p(i)$ – это время, необходимое для выполнения всех работ, предшествующих данному событию i .

$T_{\Pi}(i)$ – это такое время наступления события i , превышение которого вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети.

$R(i)$ – это такой промежуток времен, на который может быть отсрочено наступление этого события без нарушения сроков завершения разработки в целом.

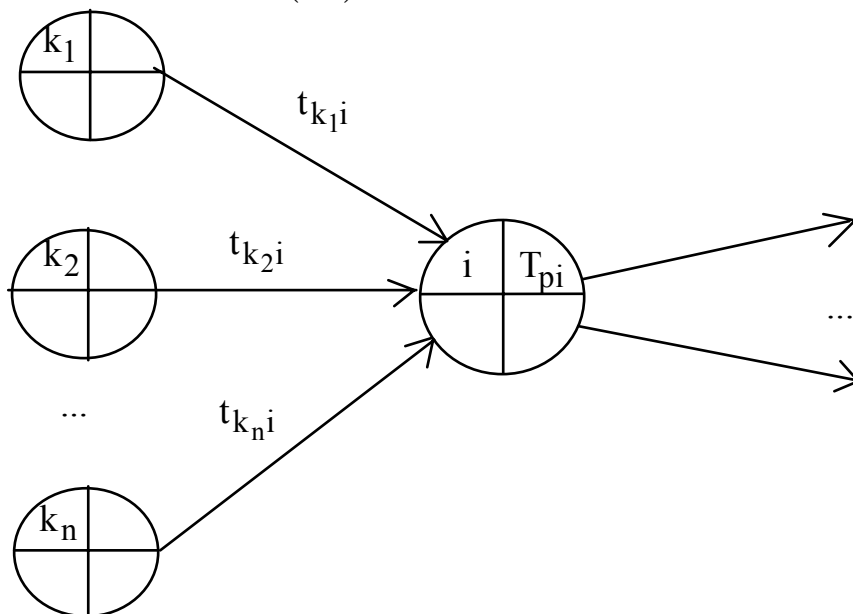
Значения временных параметров записываются прямо в вершины на сетевом графике следующим образом.



Методика расчета временных параметров событий. Расчет ранних сроков свершения событий ведется от исходного к завершающему событию.

1) Для исходного события $T_p(i) = T_{\Pi}(i) = 0$.

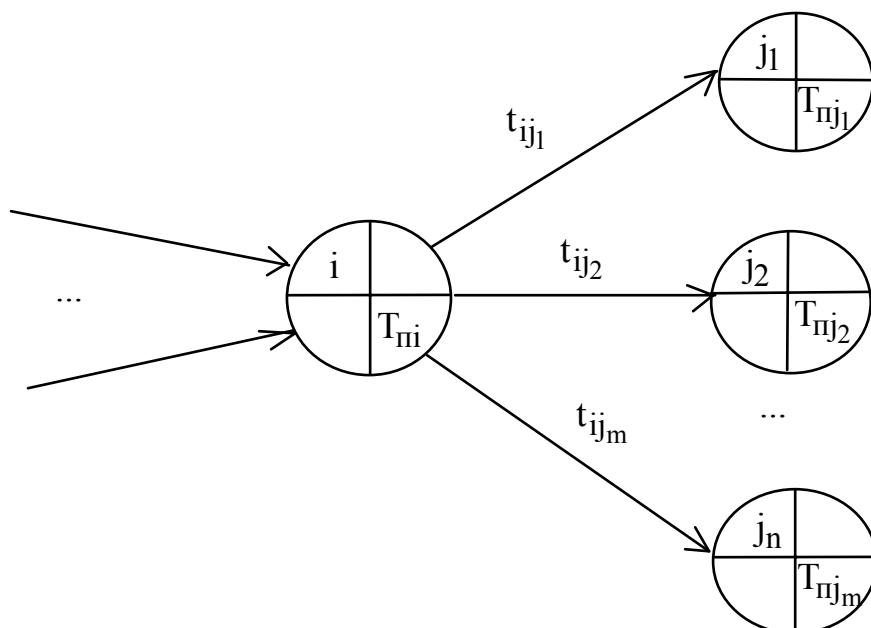
2) Для всех остальных событий $T_p(i) = \max_{k < i} [T_p(k) + t(k, i)]$, где максимум берется по всем работам (k, i) , входящим в событие i .



Поздние сроки свершения событий рассчитываются от завершающего к исходному событию.

3) Для завершающего события $T_{\Pi}(i) = T_p(i)$.

4) $T(i) = \min_{j>i} [T(j) - t(i, j)]$, где минимум берется по всем работам (i, j) , выходящим из события i .



5) $R(i) = T_{\Pi}(i) - T_p(i)$.

На основе ранних и поздних сроков событий можно определить временные параметры работ сети.

Показать расчет временных параметров работ на примере. При составлении таблицы (см. табл. 7.2.), для записи временных параметров работ, обычно коды работ записывают в определенном порядке. Сначала записываются все работы, выходящие из исходного, первого, события, затем – выходящие из второго события, потом – из третьего и т.д.

Таблица 7.2.

Код работы	$t(i, j)$	$T_{\text{рн}}(i, j)$	$T_{\text{по}}(i, j)$	$T_{\text{пн}}(i, j)$	$T_{\text{по}}(i, j)$	$R_{\text{п}}(i, j)$	$R_{\text{с}}(i, j)$
1,2	5	0	5	0	5	0	0
2,3	5	5	10	5	10	0	0
2,8	3	5	8	52	43	35	35
3,4	8	10	18	10	18	0	0
3,5	6	10	16	19	25	9	0
3,6	10	10	20	18	28	8	0
4,7	25	18	43	18	43	0	0
5,7	18	16	34	25	43	9	9
6,7	15	20	35	28	43	8	8
7,8	0	43	43	55	43	0	0
7,9	12	43	55	43	55	0	0
8,9	12	43	55	43	55	0	0
9,10	10	55	65	55	65	0	0

К наиболее важным временным параметрам работы относятся:

- ранний срок начала работы $T_{рн}(i, j)$;
- поздний срок начала работы $T_{пн}(i, j)$;
- ранний срок окончания работы $T_{ро}(i, j)$;
- поздний срок окончания работы $T_{по}(i, j)$;
- полный резерв $R_{п}(i, j)$;
- свободный резерв $R_{с}(i, j)$.

- 1) $T_{рн}(i, j) = T_p(i)$;
- 2) $T_{пн}(i, j) = T_{п}(j) - t(i, j)$ или $T_{пн}(i, j) = T_{по}(i, j) - t(i, j)$;
- 3) $T_{ро}(i, j) = T_p(i) + t(i, j)$ или $T_{ро}(i, j) = T_{рн}(i, j) + t(i, j)$;
- 4) $T_{по}(i, j) = T_{п}(j)$;
- 5) $R_{п}(i, j) = T_{п}(j) - T_p(i) - t(i, j)$;
- 6) $R_{с}(i, j) = T_p(j) - T_p(i) - t(i, j)$.

Вывод. Мы формализовали задачу сетевого планирования. Теперь можно переходить к задачам связанным с составлением планов и их оптимизацией.

7.2. Методика расчета временных параметров работ

Путь – это любая последовательность работ в сетевом графике, в которой конечное событие одной работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

Например, в рассмотренном сетевом графике путями являются следующие последовательности работ:

2-3, 3-4, 4-7 или 2,3,4,7;
8-9 или 8,9;
1-2, 2-3, 3-6, 6-7, 7-9, 9-10 или 1,2,3,6,7,9,10.

Полный путь – это путь от исходного до завершающего события, например 1,2,3,6,7,9,10.

Критический путь – максимальный по продолжительности полный путь.

Критическая работа – любая работа на критическом пути. Особенность критических работ состоит в том, чтобы каждая из них начиналась точно в момент времени, когда закончилась предыдущая и, кроме того, продолжаться она должна не более того времени, которое ей отведено по плану. В противном случае критический путь увеличится. Следовательно, критический путь должен

быть всегда под контролем руководителей работ, ибо от выполнения критических работ целиком зависит выполнение плана строительства.

Подкритический путь – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Работы, лежащие на критическом пути, называют **критическими**. Они имеют ряд особенностей:

- начальные и конечные события критических работ имеют нулевые резервы событий;
- временно пропустить (это касается соотношения между $T_{\text{рн}}(i, j)$ и $T_{\text{пн}}(i, j)$, а также между $T_{\text{ро}}(i, j)$ и $T_{\text{..}}(i, j)$);
- временно пропустить (о значениях резервов работ).

Первую особенность критических работ можно использовать при поиске критического пути. Для этого надо выявить все события, имеющие нулевой резерв. В рассматриваемом примере это события 1,2,3,4,7,8,9,10. Но через эти события проходят три пути:

- 1) 1,2,8,9,10;
- 2) 1,2,3,4,7,8,9,10;
- 3) 1,2,3,4,7,9,10.

Непосредственное суммирование длительностей работ этих путей показывает, что путь 1) не является критическим, несмотря на то, что лежащие на нем события имеют нулевой резерв. Отсюда следует вывод, что требование нулевых резервов событий является необходимым, но не достаточным условием критического пути.

Дополнительное задание: сформулировать достаточное условие для определения критического пути.

Разность между продолжительностью критического пути $T_{\text{кр}}$ и продолжительностью любого другого пути T_L называется полным резервом времени пути L , т.е. $R_L = T_{\text{кр}} - T_L$. Этот резерв показывает, на сколько в сумме может быть увеличена продолжительность всех работ данного пути L , чтобы при этом не изменился общий срок окончания всех работ, т.е. $T_{\text{кр}}$.

$R_{\text{п}}(i, j)$ показывает максимальное время, на которое может быть увеличена продолжительность работы (i, j) или отсрочено ее начало, чтобы продолжительность проходящего через нее максимального пути не превысила продолжительности критического пути. Важнейшее свойство полного резерва работы (i, j) заключается в том, что если его использовать частично или полностью, то уменьшится полный резерв у работ, лежащих с работой (i, j) на одних путях. Т.о. полный резерв времени принадлежит не одной данной работе (i, j) , а всем работам, лежащим на путях, проходящим через эту работу.

Пример на сетевом графике. $R_{\text{с}}(i, j)$ показывает максимальное время, на которое можно увеличить продолжительность отдельной работы или отсрочить ее начало, не меняя ранних сроков начала последующих работ, при условии,

что непосредственно предшествующее событие наступило в свой ранний срок. Использование свободного времени на одной из работ не меняет величины свободных резервов времени остальных работ сети.

Пример на сетевом графике.

Дополнительное задание: обуславливает ли нулевой полный резерв работы (i, j) нулевой свободный резерв этой работы и наоборот, обуславливает ли нулевой свободный резерв работы (i, j) нулевой полный резерв этой работы. Аргументировать ответ и привести пример.

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является календарный график, который иногда называют **графиком привязки**.

График привязки отображает взаимосвязь выполняемых работ во времени и строится на основе данных о ранних сроках начала и окончания работ. Для удобства дальнейшей работы на этом графике могут быть указаны величины полных и свободных резервов работ. По вертикальной оси графика привязки откладываются коды работ, по горизонтальной оси – длительность работ (раннее начало и раннее окончание работ).

График привязки можно построить без предварительного расчета ранних сроков начала и окончания всех работ, используя только данные о продолжительности работ. При этом необходимо помнить, что работа (i, j) может начать выполняться только после того, как будут выполнены все предшествующие ей работы (k, j) .

Пример построения графика привязки. Построим график привязки для следующих исходных данных (см. табл. 7.3.).

Таблица 7.3.

(i, j)	$t(i, j)$	Количество исполнителей
1,2	4	5
2,3	5	6
2,4	6	3
2,7	11	4
3,6	10	2
4,5	9	1
5,7	11	3
6,7	9	5
7,8	12	6

Практическая ценность графика привязки заключается в том, что с его помощью можно улучшать эффективность использования ресурса рабочей силы, т.е. проводить оптимизацию сетевой модели.

Вывод. Мы ввели такие понятия как критический путь, критическая работа и другие, которые помогут нам формализовать задачу оптимизации нашего планирования.

7.3. Оптимизация сетевых моделей

7.3.1. Оптимизация использования ресурса рабочей силы

При оптимизации использования ресурса рабочей силы сетевые работы чаще всего стремятся организовать таким образом, чтобы:

- количество одновременно занятых исполнителей было минимальным;
- выровнять потребность в людских ресурсах на протяжении срока выполнения проекта.

Для проведения подобных видов оптимизации необходим **график загрузки**.

На графике загрузки по горизонтальной оси откладывается время, например в днях, по вертикальной – количество человек, занятых работой в каждый конкретный день. Для построения графика загрузки необходимо:

- на графике привязки над каждой работой написать количество ее исполнителей;
- подсчитать количество работающих в каждый день исполнителей и отложить на графике загрузки.

Для удобства построения и анализа, графики загрузки и привязки следует располагать один над другим.

Пример построения графика загрузки. Описанные виды оптимизации могут быть выполнены с помощью сдвига работ, который осуществляется за счет резервов времени: свободного или полного. После сдвига работы, работники выполняют ее уже в другие дни, и поэтому для каждого дня изменяется количество исполнителей занятых одновременно.

Резервы работ можно определить без специальных расчетов, только с помощью графика привязки.

Показать на рис. как ищутся резервы

Т.о. мы установили, что свободные резервы есть у работ:

$$R_c(2,7) = 15; R_c(6,7) = 2,$$

а полные резервы у работ:

$$R_{\Pi}(2,3) = R_{\Pi}(3,6) = R_{\Pi}(6,7) = 2; R_{\Pi}(2,7) = 15.$$

На рис. 7.1. показаны результаты оптимизации по критерию «min исполнителей». Для снижения максимального количества одновременно

занятых исполнителей с 13 до 9 человек достаточно работу (2,7) сдвинуть на 5 дней, а работу (6,7) – на 1 день (пунктирной линией) – изменения на графике загрузки).

Показать на графике загрузки изменения пунктирной линией.

На рис. 7.2. показаны результаты оптимизации с целью выравнивания загрузки. Для этого необходимо чуть дальше сдвинуть указанные работы, а именно: работу (2,7) сдвинуть на 6 дней, а работу (6,7) – на 2 день (пунктирной линией – изменения на графике загрузки).

Показать на графике загрузки улучшение равномерности загрузки.

Проведенная оптимизация была основана на использовании свободных резервов работ, но использование и полных резервов также возможно.

Дополнительный вопрос: в чем различие при использовании для сдвига работ свободных и полных резервов? Решить задачу минимизации исполнителей (условие) (см. табл. 7.2.).

Таблица 7.2.

(i, j)	t(i, j)	Кол-во исп.
1,2	10	2
1,3	0	1
1,5	3	8
2,3	6	2
2,4	4	1
3,6	7	3
4,5	6	1
4,6	1	2
5,6	10	1

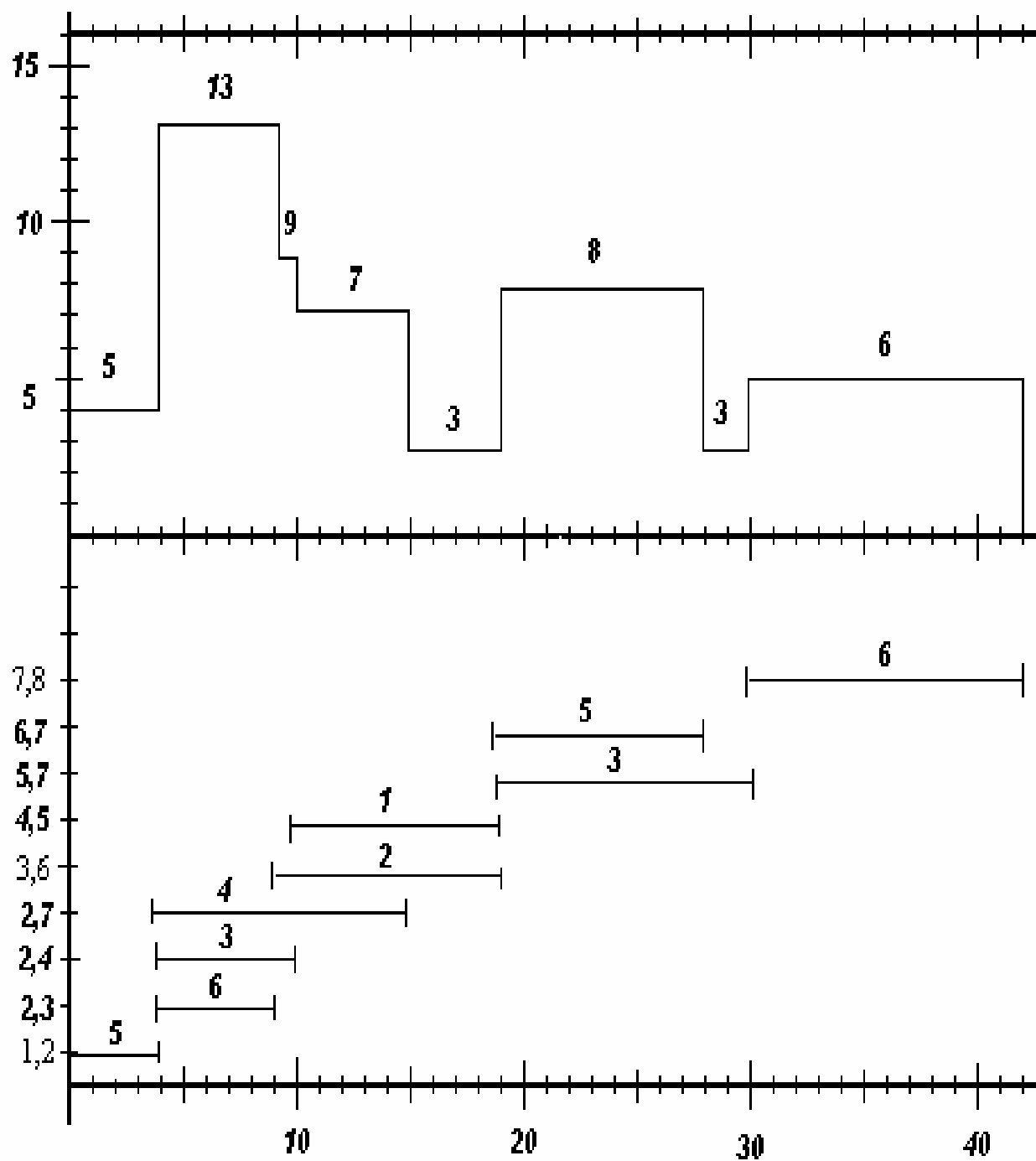


Рис. 7.1. Результаты оптимизации по критерию «min исполнителей»

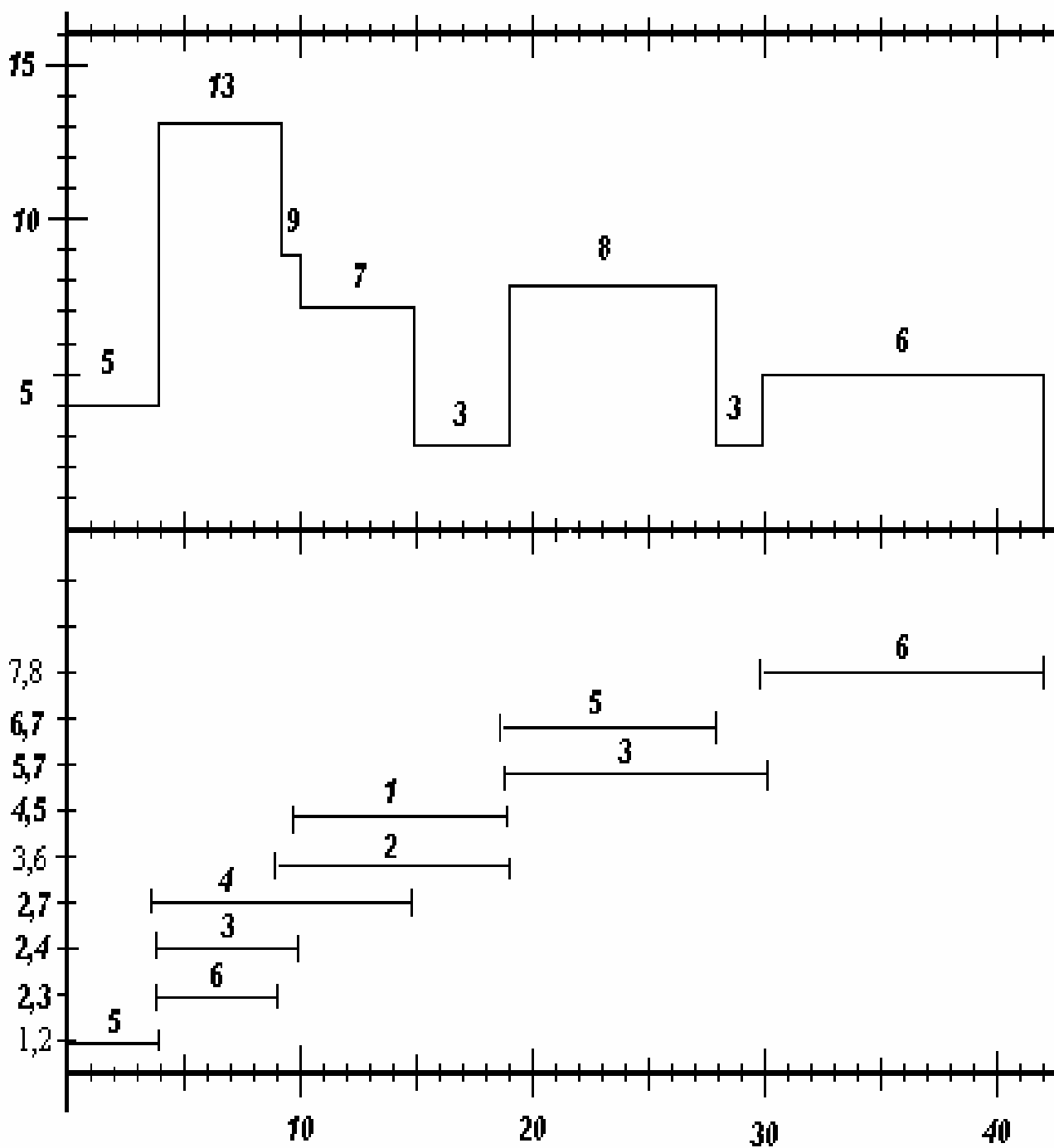


Рис. 7.2. Результаты оптимизации с целью выравнивания загрузки

Различие в использовании свободных и полных резервов заключается в том, что при сдвиге работы, с использованием свободного резерва, моменты начала следующих за ней работ остаются неизменными (т.е. последующие

работы не сдвигаются). При сдвиге работы, с использованием полного резерва, все последующие работы сдвигаются (см. рис. 7.3.).

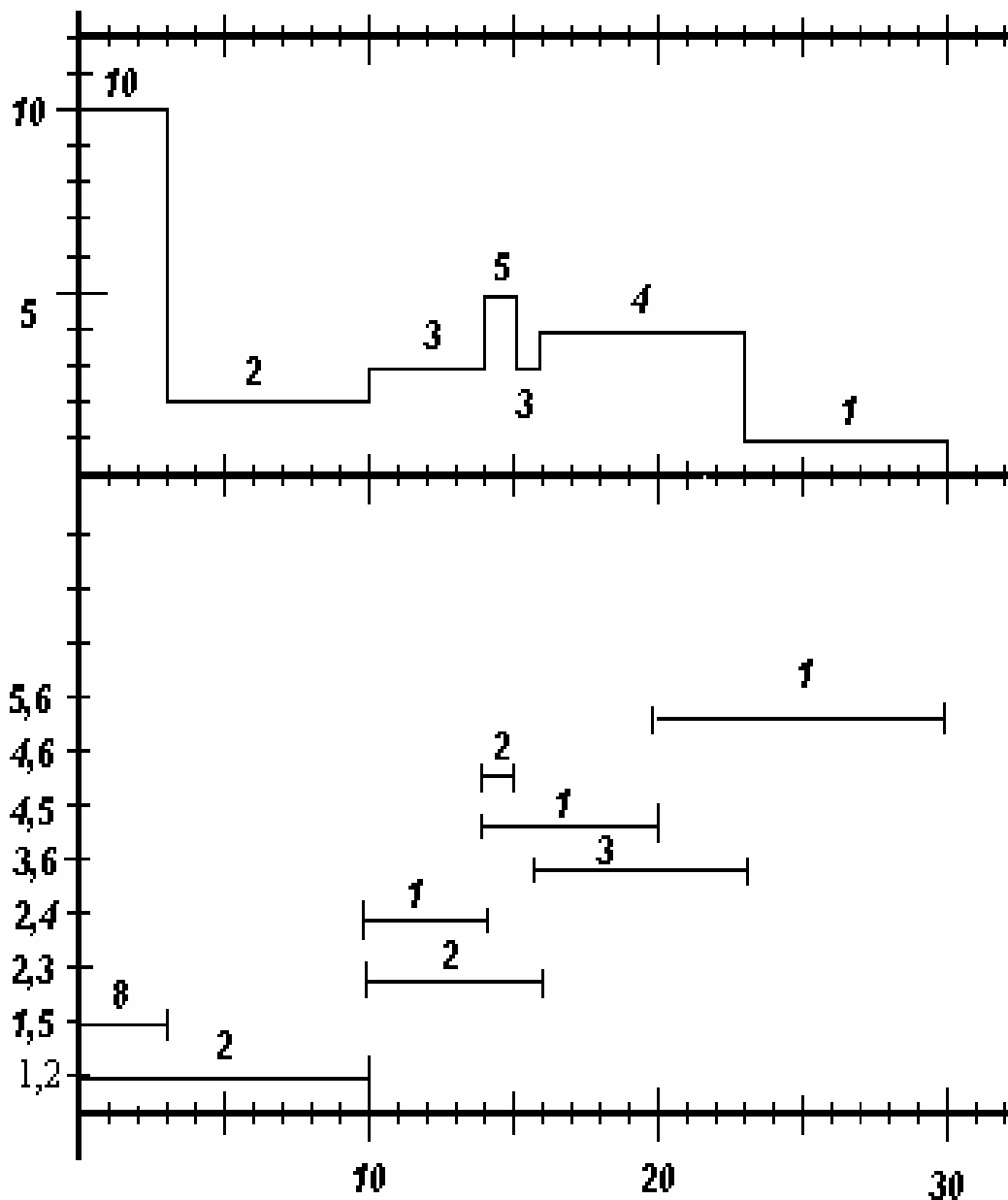


Рис. 7.3. Задача минимизации исполнителей

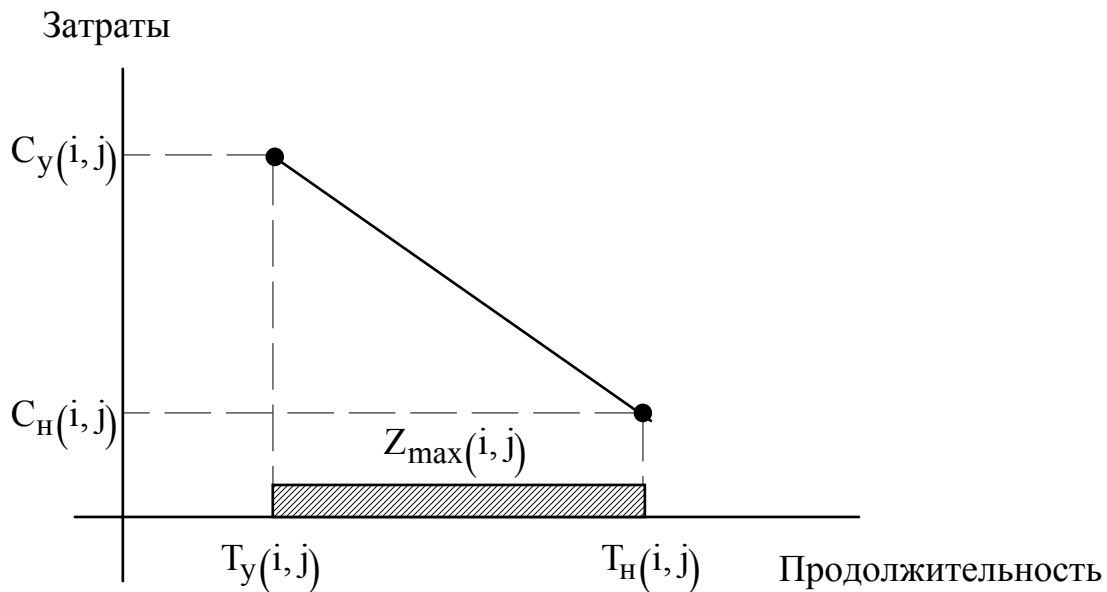
7.3.2. Оптимизация типа «время – затраты»

Целью оптимизации по критерию «время – затраты» является сокращение времени выполнения проекта в целом. Эта оптимизация имеет смысл только в том случае, когда длительность выполнения работ может быть уменьшена за счет задействования дополнительных ресурсов, что влечет повышение затрат на выполнение работ. Для оценки величины дополнительных затрат, связанных с ускорением выполнения той или иной работы, используются либо нормативы, либо данные о выполнении аналогичных работ в прошлом.

Исходными данными для проведения оптимизации являются:

- $T_H(i, j)$ – нормальная длительность работы;
- $T_Y(i, j)$ – ускоренная длительность;
- $C_H(i, j)$ – затраты на выполнение работы в нормальный срок;
- $C_Y(i, j)$ – затраты на выполнение работы в ускоренный срок.

Т.о. каждая работа имеет некоторый максимальный запас времени для сокращения своей длительности $Z_{\max}(i, j) = T_H(i, j) - T_Y(i, j)$.



Для анализа сетевой модели в данном виде оптимизации используется коэффициент нарастания затрат (коэффициент ускорения)

$$k(i, j) = \frac{C_Y(i, j) - C_H(i, j)}{T_H(i, j) - T_Y(i, j)},$$

который имеет смысл (**Дополнительный вопрос:** какой смысл?) затрат денежных средств для сокращения длительности выполнения работы (i, j) на один день.

Оптимизация критического пути. Оптимизация критического пути заключается в улучшении его в соответствии с принятым критерием.

В принципе, этими критериями могут быть: время, стоимость, людские и материальные ресурсы и др.

В настоящее время оптимизация сетевых графиков выполняется в основном только по критерию времени.

Оптимизация может производиться с различными целями:

1. если критический путь со временем T превышает заданные сроки T_0 , то оптимизация по времени заключается в сокращении критического пути.

2. если $T < T_0$, то имеется известный резерв времени $R = T_0 - T$, поэтому работы можно растянуть с целью экономии затрачиваемых средств.

Дадим математическую постановку каждой из поставленных задач:

Задача 1. Известен критический путь T , причём

$$T = \sum_{(кр.)} t_i > T_0, \quad (7.1.)$$

где $\sum_{(кр.)}$ – распространяется только на критические работы;

T_0 – заданный (директивный) срок выполнения работ.

Для сокращения критического пути, естественно, имеет смысл форсировать критические работы. Их можно ускорить, например:

1. за счёт дополнительных сил и средств;
2. за счёт переброски сил и средств с некритических работ на критические.

Если используется пункт 1, то возникает типичная задача исследования операций: какие дополнительные средства x_1, x_2, \dots, x_n и в какие критические работы нужно вложить, чтобы критический путь $T \leq T_0$, а расход дополнительных средств был минимальным.

1. Допустим, что при вложении дополнительных средств x_i в работу a_i , сокращает время выполнения этой работы до времени

$$t'_i = f_i(x_i) < t_i. \quad (7.2.)$$

Таким образом, требуется определить неотрицательные значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n (дополнительные вложения) при которых бы выполнялось условие:

$$T' = \sum_{(кр.)} f_i(x_i) \leq T_0, \quad (7.3.)$$

где $\sum_{(кр.)}$ – распространяется по всем критическим работам нового критического пути (после распределения средств);
и чтобы при этом общая сумма дополнительных средств

$$X = \sum_{(кр.)}^n x_i = \min, \quad (7.4.)$$

была минимальной.

В общем виде ограничения (7.3.) нелинейны, т.к. вложение каких-то средств в работу a_i не обязательно вызывает линейное уменьшение времени, затрачиваемого на эту работу. Поэтому поставленная задача относится к классу

задач нелинейного программирования. Однако, при небольших изменениях плана, когда ограничения (7.3.) линейны, поставленная задача оптимизации критического пути решается методом линейного программирования.

2. Если используется пункт 2, т.е. для оптимизации критического пути перебрасываются имеющиеся средства с некритических работ на критические.

Снова известен критический путь T (7.1.) и, кроме того, имеется определённый запас подвижных средств B , который распределён между работами a_1, a_2, \dots, a_n в количествах b_1, b_2, \dots, b_n .

Обозначим: x_i — количество подвижных средств перебрасываемых с работы a_i (x_i берётся отрицательным, если с работы a_i перебрасываются средства).

Естественно, что сумма средств, снимаемых с каких-то работ, должна быть равна сумме средств, добавляемых другим работам, т.е.

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0. \quad (7.5.)$$

Величины x_i должны удовлетворять ограничениям:

$$-x_i \leq b_i \text{ или } x_i \geq -b_i \quad i = \overline{1, n}. \quad (7.6.)$$

Известно:

1. Если количество средств x_i снимается с работы a_i , то время её выполнения возрастает:

$$t'_i = f_i(|x_i|) > t_i; \quad (7.7.)$$

2. Если количество средств x_i вкладывается в работы a_i , то время её выполнения уменьшается:

$$t''_i = \varphi_i(|x_i|) < t_i. \quad (7.8.)$$

При таких обозначениях общий срок выполнения всех работ (новый критический путь) будет:

$$T' = \sum_{(кр.)} f_i(|x_i|) + \sum_{(кр.)} \varphi_i(x_i) \rightarrow \min, \quad (7.9.)$$

где первая $\sum_{(кр.)}$ включает в себя все работы, с которых переносятся средства, а вторая $\sum_{(кр.)}$ — все работы, в которые вкладываются средства, если они входят в критический путь.

Казалось бы, что перенос средств имеет смысл делать только с некритических на критические. Однако в процессе таких переносов может получиться, что некритические работы могут переходить в критические и наоборот. Поэтому в уравнении (7.9.), в общем случае, присутствует первое слагаемое $\sum_{(кр.)} f_i(|x_i|)$. Следовательно, задача стоит так: найти такие значения переменных x_1, x_2, \dots, x_n , при которых бы удовлетворялись ограничения (7.5.) и (7.6.), а общий срок выполнения работ T' из (7.9.) обращался бы в минимум. Это также задача нелинейного программирования, т.к. уравнение (7.9) является всегда нелинейной функцией.

Задача 2. Известен критический путь T

$$T = \sum_{(кр.)} t_i < T_0. \quad (7.10.)$$

Предполагается увеличить время выполнения некоторых критических работ, так, чтобы $T = T_0$ и получить максимальную экономию средств. Если увеличим время выполнения критической работы a_i на величину τ_i , то высвобождается некоторое количество средств на этой работе x_i :

$$x_i = f_i(\tau_i). \quad (7.11.)$$

Требуется выбрать такие значения неотрицательных переменных τ_i , чтобы общая сумма критических времён

$$T' = \sum_{(кр.)} (t_i + \tau_i) \leq T_0, \quad (7.12.)$$

при которых сумма высвободившихся средств

$$\sum_i x_i = \sum_{(кр.)} f_i(\tau_i) = \max, \quad (7.13.)$$

достигала максимума.

Эта задача так же относится к задачам нелинейного программирования. В случаях, когда увеличение срока работ τ_i малó, удаётся свести эту задачу к методу линейного программирования.

Общая схема проведения оптимизации:

1. проводится расчет сети исходя из нормальных длительностей работ;
2. определяется сумма затрат на выполнение всего проекта при нормальной продолжительности работ;
3. рассматривается возможность сокращения продолжительности проекта. Поскольку этого можно достичь за счет уменьшения продолжительности какой-либо критической работы, то только такие операции подвергаются анализу;
- 3.1. для сокращения выбирается критическая работа с min коэффициентом нарастания затрат $k(i, j)$, у которой есть запас сокращения времени;

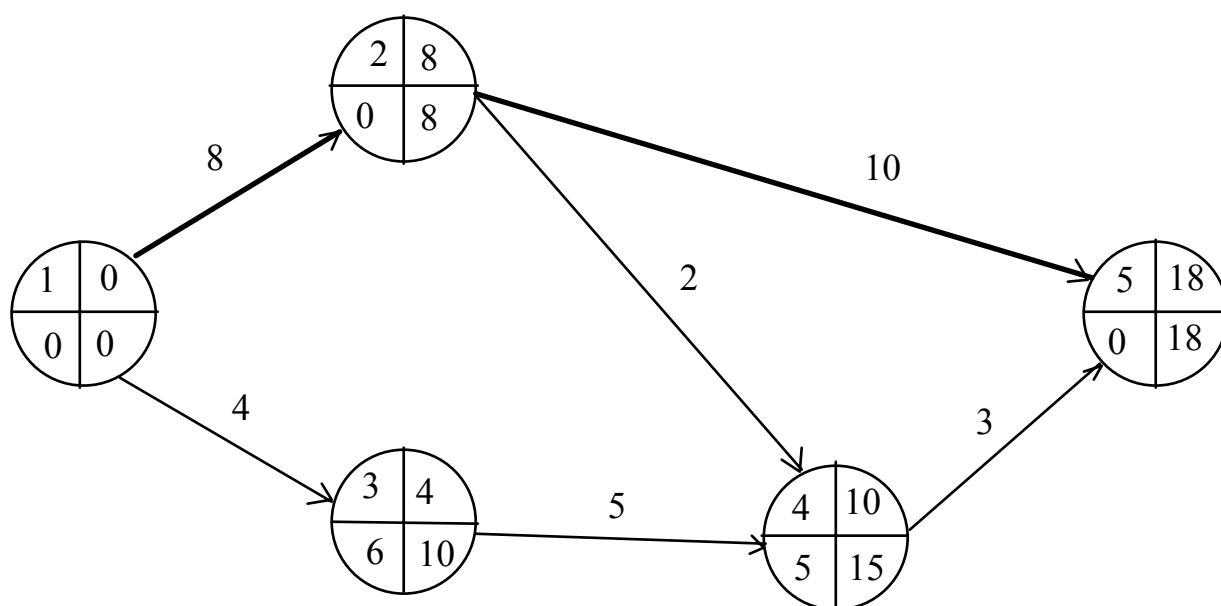
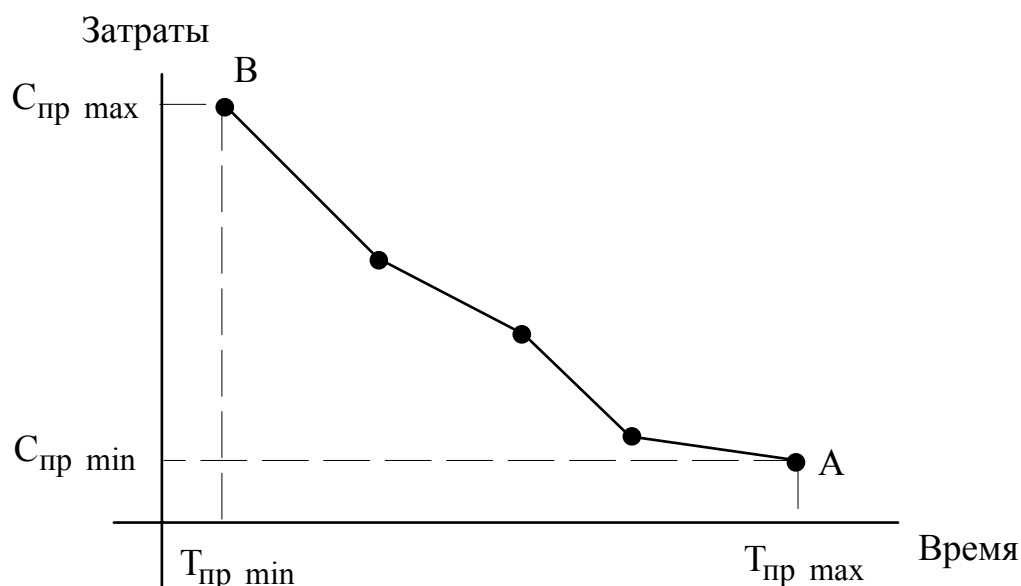
- 3.2. определяется время $\Delta t(i, j)$, на которое необходимо сжать длительность работы (i, j) . При этом руководствуются следующими соображениями;
- 3.2.1. максимально возможный запас времени для сокращения работы на текущий момент $Z(i, j)$ ограничивается значением $T_y(i, j)$, т.е. $Z(i, j) = t_T(i, j) - T_y(i, j)$, где $t_T(i, j)$ - текущее время выполнения работы ($t_T(i, j) = T_H(i, j)$ только для работ еще не подвергшихся сокращению);
- 3.2.2. кроме критического пути длительностью $T_{кр}$ в сети есть подкритический путь длительностью $T_{п}$. Критический путь нельзя сократить больше, чем $\Delta T = T_{кр} - T_{п}$, поскольку в этом случае критический путь перестанет быть таковым, а подкритический путь наоборот станет критическим;
- 3.2.3. исходя из вышесказанного, время сокращения длительности выбранной работы (i, j) равно $\Delta t = t_T(i, j) - \min[Z(i, j), \Delta T]$. Другими словами, если разность между длительностью критического и подкритического путей ΔT меньше текущего запаса времени сокращения работы $Z(i, j)$, то имеет смысл сокращать работу только на ΔT дней. В противном случае можно сокращать работу полностью на величину $Z(i, j)$;
4. в результате сжатия критической операции получают новый календарный план, возможно с новыми критическими и подкритическими путями, и обязательно с новыми более высокими затратами на выполнение проекта. Это происходит вследствие удорожания ускоренной работы. Общая стоимость проекта увеличивается на $\Delta C = k(i, j)\Delta t$;
5. переход на шаг 3, который повторяется до тех пор, пока стоимость проекта уменьшается.

В результате оптимизации строится график «Время – затраты».

Пример проведения оптимизации. Провести максимально возможное уменьшение сроков выполнения проекта при минимально возможных дополнительных затратах (см. табл. 7.3.).

Таблица 7.3.

(i, j)	Нормальный режим		Ускоренный режим		k(i, j)
	$T_H(i, j)$	$C_H(i, j)$	$T_y(i, j)$	$C_y(i, j)$	
(1,2)	8	100	6	200	50
(1,3)	4	150	2	350	100
(2,4)	2	50	1	90	40
(2,5)	10	100	5	400	60
(3,4)	5	100	1	200	25
(4,5)	3	80	1	100	10

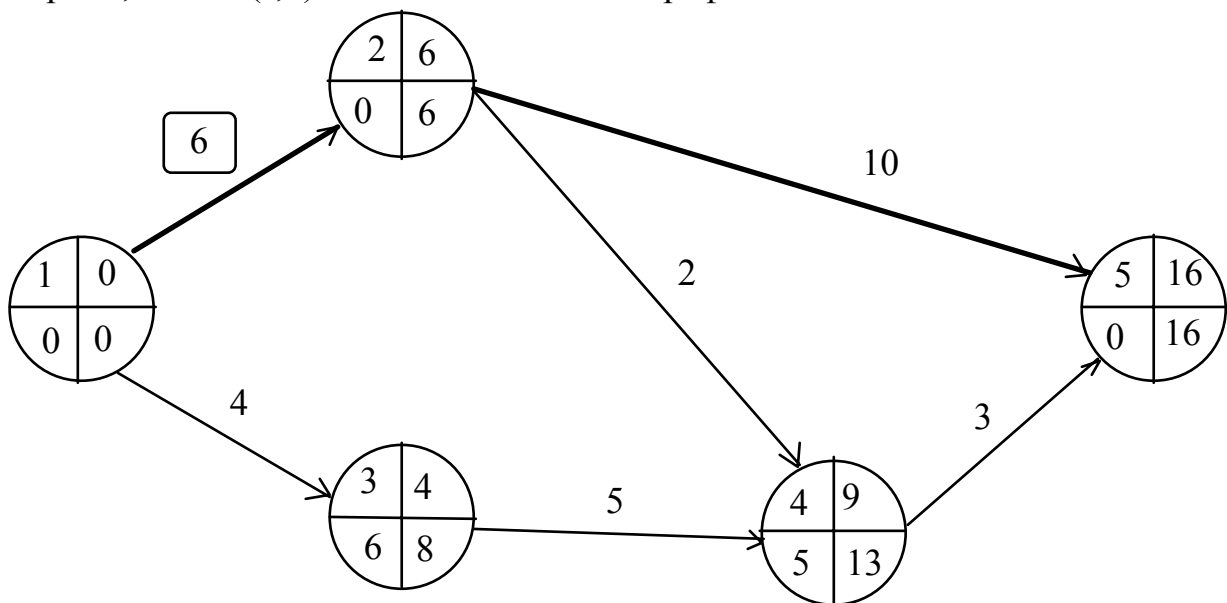


1. Исходя из нормальных длительностей работ получаем следующие характеристики сетевой модели.

- Общие затраты на проект $C_{пр}^0 = \sum_{\forall(i,j)} C_n(i,j) = 580$ руб.
- Длительность проекта $T_{кр}^0 = 18$ дней.
- Критический путь $L_{кр}^0 = 1,2,5$ или $L_{кр}^0 = (1,2);(2,5)$.
- Подкритический путь $L_{п}^0 = 1,2,4,5$ или $L_{п}^0 = (1,2);(2,4);(4,5)$, $T_{п}^0 = 13$ дней.

2. Для ускорения выбираем работу (1,2) с $k(1,2) = 50$ руб./день. Текущий запас сокращения или предел сокращения работы (1,2) на данный момент равен $Z^0(1,2) = 8 - 6 = 2$. Разность между продолжительностью критического и подкритического путей $\Delta T = 18 - 13 = 5$ дней. Поэтому согласно п. 3.2.

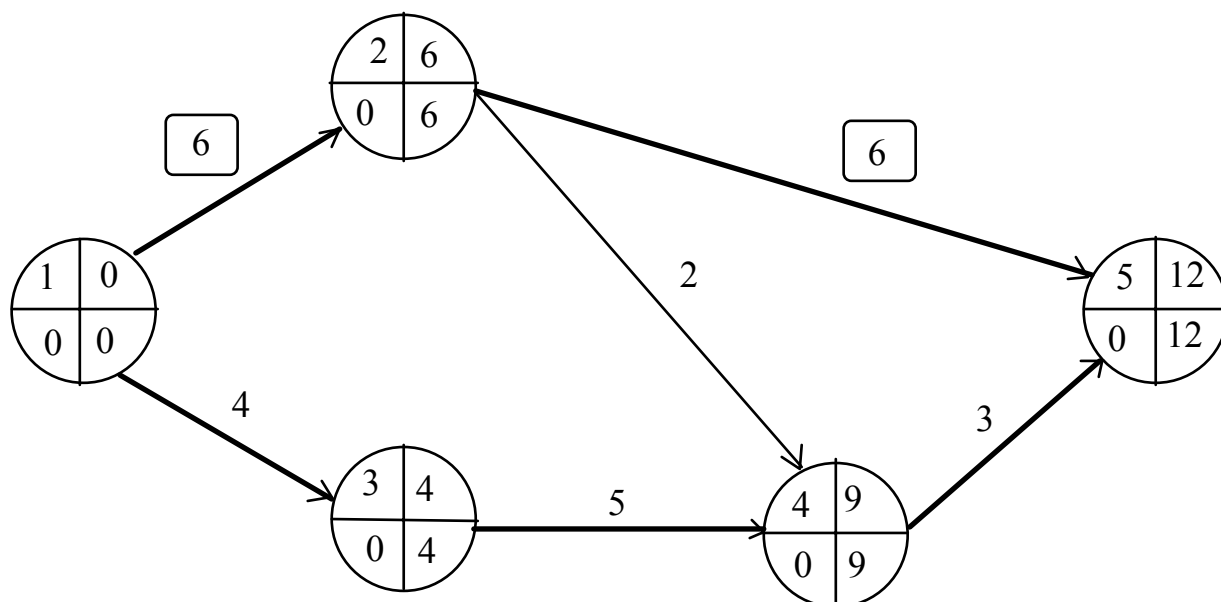
сокращаем работу (1,2) на $\Delta t = \min[2,5] = 2$ дня. Новое текущее значение $t^1(1,2) = 8 - 2 = 6$ дней, а запас ее дальнейшего сокращения полностью исчерпан, т.е. $Z^1(1,2) = 0$. Новый сетевой график имеет вид.



3. Исходя из новой длительности работы (1,2) получаем.

- Затраты на работу (1,2) возросли на $2 \text{ дня} \cdot 50 \frac{\text{руб.}}{\text{день}} = 100 \text{ руб.}$, поэтому общие затраты на проект составили $C_{\text{пр}}^1 = 580 + 100 = 680 \text{ руб.}$
- Длительность проекта $T_{\text{кр}}^1 = 16$ дней.
- Критический путь $L_{\text{кр}}^1 = (1,2); (2,5)$.
- Подкритический путь $L_{\text{п}}^1 = (1,3); (3,4); (4,5)$, $T_{\text{п}}^1 = 12$ дней.

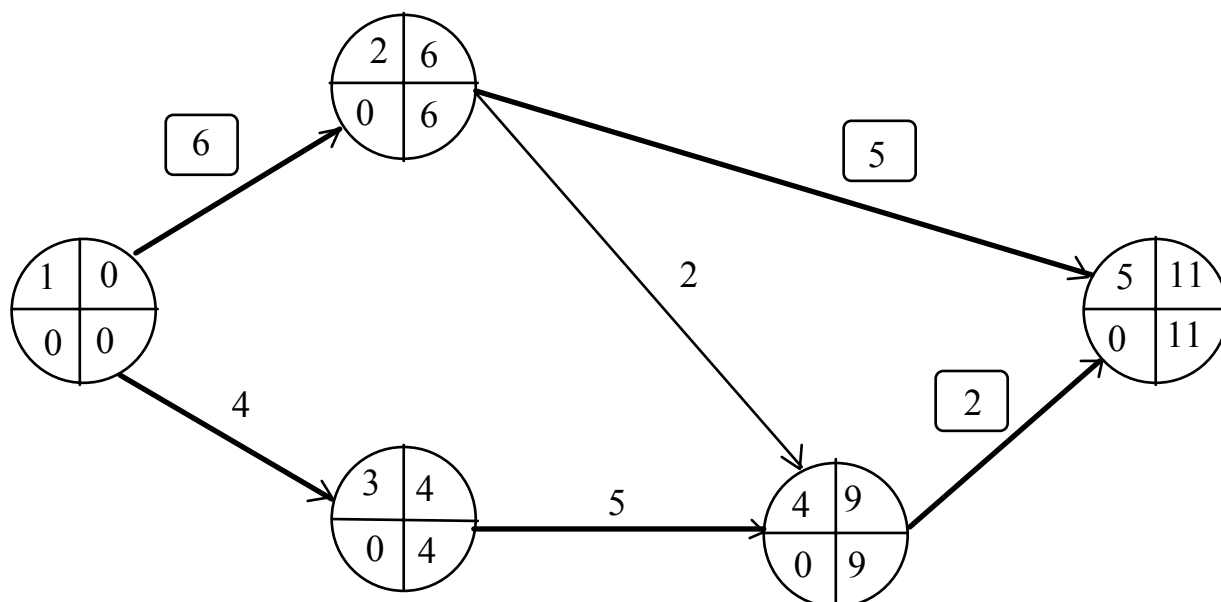
4. Работу (1,2) не имеет смысла рассматривать, т.к. $Z^1(1,2) = 0$. Для рассмотрения остается единственная критическая работа (2,5) с $k(2,5) = 60$ руб./день и пределом сокращения $Z^1(2,5) = 10 - 5 = 5$ дней. $\Delta T = 16 - 12 = 4$ дня, поэтому сокращаем работу (2,5) на $\Delta t = \min[5,4] = 4$ дня. Новое текущее значение $t^2(2,5) = 10 - 4 = 6$ дней, а запас ее дальнейшего сокращения $Z^2(2,5) = 1$ день. Новый сетевой график имеет вид.



5. Исходя из новой длительности работы (2,5) получаем.

- Затраты на работу (2,5) возросли на $4 \text{ дня} \cdot 60 \frac{\text{руб.}}{\text{день}} = 240 \text{ руб.}$, поэтому общие затраты на проект составили $C_{\text{пр}}^2 = 680 + 240 = 920 \text{ руб.}$
- Длительность проекта $T_{\text{кр}}^2 = 12 \text{ дней.}$
- Два критических пути $L_{\text{кр}}^2 = (1,2);(2,5)$ и $L_{\text{кр}}^2 = (1,3);(3,4);(4,5)$.
- Подкритический путь $L_{\text{п}}^2 = (1,2);(2,4);(4,5)$, $T_{\text{п}}^2 = 11 \text{ дней.}$

6. Появление нескольких критических путей говорит о том, что для дальнейшего сокращения длительности проекта необходимо уменьшать длину всех критических путей одновременно. Из первого критического пути $L_{\text{кр}}^2 = (1,2);(2,5)$ можно сократить только работу (2,5) с пределом сокращения $Z^2(2,5) = 1$, а из второго пути - работу (4,5) с $k(4,5) = 10 \text{ руб./день}$ и пределом сокращения $Z^2(4,5) = 3 - 1 = 2 \text{ дня.}$ $\Delta T = 13 - 12 = 1 \text{ день}$, поэтому сокращаем работу (2,5) и работу (4,5) на $\Delta t = \min[1, 2, 1] = 1 \text{ день}$, где первые два элемента при выборе минимума это $Z^2(2,5) = 1$ и $Z^2(4,5) = 2$. Новое текущее значение $t^3(2,5) = 6 - 1 = 5 \text{ дней}$, и запас ее дальнейшего сокращения исчерпан $Z^3(2,5) = 0$, для работы (4,5) новое текущее значение $t^3(4,5) = 3 - 1 = 2 \text{ дня}$ и $Z^3(4,5) = 1 \text{ день}$. Новый сетевой график имеет вид.

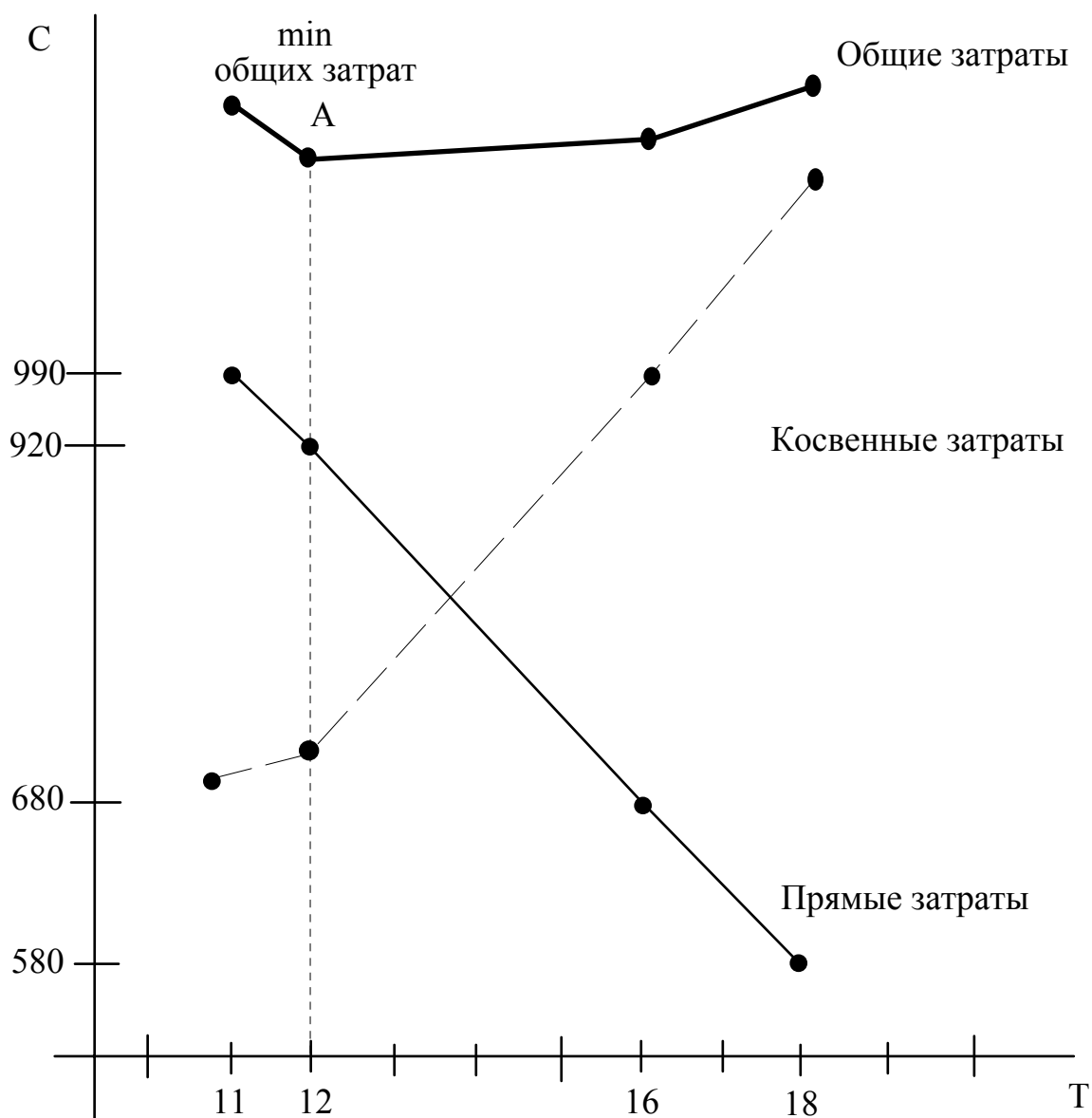


7. Исходя из новой длительности работ (2,5) и (4,5) получаем.

- Затраты на работу (2,5) возросли на $1 \text{ дня} \cdot 60 \frac{\text{руб.}}{\text{день}} = 60 \text{ руб.}$, а для работы (4,5) на $1 \text{ дня} \cdot 10 \frac{\text{руб.}}{\text{день}} = 10 \text{ руб.}$, поэтому общие затраты на проект составили $C_{\text{пр}}^3 = 920 + 60 + 10 = 990 \text{ руб.}$
- Длительность проекта $T_{\text{кр}}^3 = 11 \text{ дней.}$
- Два критических пути $L_{\text{кр}}^3 = (1,2);(2,5)$ и $L_{\text{кр}}^3 = (1,3);(3,4);(4,5)$.
- Подкритический путь $L_{\text{п}}^3 = (1,2);(2,4);(4,5)$, $T_{\text{п}}^3 = 10 \text{ дней.}$

8. Поскольку все критические операции пути $L_{\text{кр}}^3 = (1,2);(2,5)$ сжаты до установленного предела $T_y(i, j)$, то дальнейшее сокращение продолжительности проекта невозможно. Результаты проведенной оптимизации иллюстрируются графиком.

Под параметрами работ $C_H(i, j)$ и $C_Y(i, j)$ понимаются так называемые прямые затраты, т.е. косвенные затраты типа административно-управленческих во внимание не принимаются. Однако их влияние учитывается при выборе окончательного календарного плана проекта. В отличие от прямых затрат косвенные затраты при уменьшении продолжительности проекта убывают, что показано на графике. Оптимальный календарный план соответствует минимуму общих затрат (точка А).



7.3.3. Неопределенность времени выполнения операций

В описанных методах анализа сетей предполагалось, что время выполнения работ точно известно, однако на практике сроки выполнения работ обычно довольно неопределенны. В таких случаях обычно используют экспертные оценки минимальной (a), максимальной (b) и наиболее вероятной длительности (m) работ для расчета их ожидаемой продолжительности. Тогда ожидаемая продолжительность работы определяется по формуле

$$t_o = \frac{a + 4m + b}{6}.$$

Данный метод основан на предположении, что время выполнения каждой отдельной работы аппроксимируется β – распределением. При таком подходе можно оценивать вероятности наступления событий в пределах их ранних и

поздних сроков, вероятность завершения проекта к заранее установленной дате и другие вероятностные характеристики.

Выводы. Мы рассмотрели некоторые способы оптимизации наших сетевых графиков. Были продемонстрированы алгоритмы, позволяющие оптимизировать любые сетевые графики.

Мы рассмотрели задачу планирования сложных комплексных проектов, состоящих из большого числа операций. Было введено понятие сетевого графика – удобного средства для планирования такого рода проектов. Также были представлены некоторые методы оптимизации подобных планов.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение сетевого графика.
2. Дайте определение критического пути.
3. Назовите методы оптимизации критического пути.