# A Survey of Relaxations and Approximations of the Power Flow Equations

## Capítulos 1-3

Uma análise dos conceitos fundamentais

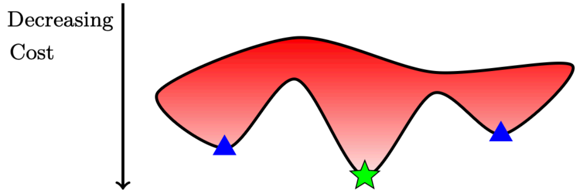
Daniel K. Molzahn e Ian A. Hiskens

# Introdução: O Problema das Equações de Fluxo de Potência

As equações de fluxo de potência são a base para a análise e operação de sistemas elétricos de potência, relacionando as injeções de potência e as tensões no sistema.

**Desafios:**

- **Não linearidade:** As equações são inerentemente não lineares, o que resulta em problemas de otimização não convexos.
- **Complexidade Computacional:** Problemas como o Fluxo de Potência Ótimo (OPF) são geralmente NP-Hard.
- **Múltiplas Soluções:** Podem existir múltiplas soluções locais, tornando difícil encontrar o ótimo global.



## Relaxações vs. Aproximações

Para lidar com a complexidade, duas abordagens principais são utilizadas:

**Relaxações Convexas:**

- Ampliam o espaço de soluções não convexo para um espaço convexo maior que o contém.
- Garantem limites para o valor ótimo da função objetivo e podem certificar a inviabilidade de um problema.
- Em alguns casos, podem garantir a obtenção de ótimos globais.

**Aproximações:**

- Simplificam as equações de fluxo de potência com base em certas premissas sobre as grandezas do sistema.
- Podem representar o comportamento do sistema com boa precisão sob condições

# Visualizando Relaxações e Aproximações

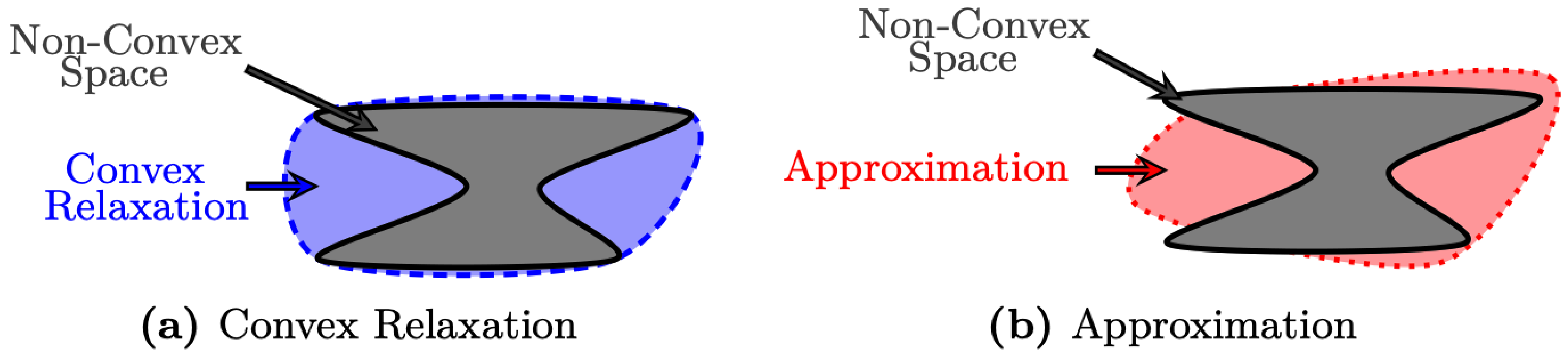



*Figura 2: Ilustração conceitual de uma relaxação convexa (à esquerda) e uma aproximação (à direita) para um espaço não convexo.*

# Capítulo 2: Visão Geral das Equações de Fluxo de Potência

As equações de fluxo de potência modelam a relação entre fasores de tensão e injeções de potência nos nós (barras) de um sistema elétrico.

## Notação Básica:

- $V_i = |V_i|e^{j\theta_i}$: Fasor de tensão no barramento $i$ em coordenadas polares.
- $V_i = V_{di} + jV_{qi}$: Fasor de tensão no barramento $i$ em coordenadas retangulares.
- $S_i = P_i + jQ_i$: Injeção de potência complexa no barramento $i$.
- $Y = G + jB$: Matriz de admitância nodal do sistema.

## Formulação I-V:

Esta formulação se baseia na relação linear entre os fasores de tensão e as injeções de corrente, e na definição de potência complexa:

$$n$$

## Formulações Baseadas em Tensão

Substituindo a corrente na equação de potência, obtemos um sistema de equações polinomiais em termos dos fasores de tensão:

$$P_i + jQ_i = V_i \sum_{k=1}^{n} \overline{Y}_{ik} \overline{V}_k$$

$$|V_i|^2 = V_i \overline{V}_i$$

Dependendo da representação (coordenadas polares ou retangulares), obtemos diferentes formulações matemáticas, como as quadráticas (em coordenadas retangulares) ou as trigonométricas (em coordenadas polares).

## Equações DistFlow (Fluxo de Ramo)

Propostas por Baran e Wu, são válidas para sistemas radiais e focam nas grandezas que fluem nas linhas. Para uma linha entre as barras $i$ e $k$:

- $P_{ik}, Q_{ik}$: Fluxos de potência ativa e reativa na linha.
- $l_{ik}$: Quadrado da magnitude do fluxo de corrente.
- $|V_i|^2, |V_k|^2$: Quadrado das magnitudes de tensão.

As equações são:

$$P_{ik} = R_{ik} l_{ik} - P_k + \sum_{m:k \to m} P_{km}$$

$$Q_{ik} = X_{ik} l_{ik} - Q_k + \sum_{m:k \to m} Q_{km}$$

$$|V_k|^2 = |V_i|^2 - 2(R_{ik} P_{ik} + X_{ik} Q_{ik}) + (R_{ik}^2 + X_{ik}^2) l_{ik}$$

$$l_{ik} |V_i|^2 = P_{ik}^2 + Q_{ik}^2$$

# Capítulo 3: Ferramentas de Otimização

Para criar relaxações e aproximações, são utilizadas ferramentas de otimização convexa.

## Programação Linear (LP)

- **Forma canônica:**
  - minimizar $c^T x$
  - sujeito a $Ax = b, x \geq 0$
- **Envelopes de McCormick:** Formam o casco convexo de produtos bilineares $xy$, muito úteis em relaxações.

## Programação Quadrática (QP)

- Permite uma função objetivo quadrática: minimizar $\frac{1}{2}x^T Cx + c^T x$.
- É um programa quadrático convexo se a matriz C for positiva semidefinida.

## Programação Cônica de Segunda Ordem (SOCP)

Generaliza a LP, permitindo restrições de cone de segunda ordem:

$$||E_i x + b_i||_2 \leq g_i^T x + d_i$$

- Restrições quadráticas convexas podem ser representadas como restrições SOCP.
- A QP convexa é um caso especial da SOCP.
- **Restrições SOCP Rotacionadas** são particularmente úteis:

$$x \cdot y \geq ||z||_2^2, \quad x \geq 0, y \geq 0$$

## Programação Semidefinida (SDP)

Generaliza a SOCP, usando uma matriz simétrica $X$ como variável de decisão.

- **Forma canônica:**
  - minimizar $tr(CX)$

## Conclusões dos Capítulos Iniciais

- **Complexidade:** As equações de fluxo de potência são a fonte de não convexidade em muitos problemas de otimização em sistemas de potência.
- **Soluções:** Relaxações e aproximações são estratégias chave para tornar esses problemas tratáveis computacionalmente.
- **Ferramentas:** A otimização convexa (LP, QP, SOCP, SDP) fornece as ferramentas matemáticas fundamentais para construir essas formulações simplificadas.
- **Trade-off:** A escolha entre diferentes formulações (relaxações ou aproximações) e ferramentas de otimização envolve um compromisso entre precisão, garantias teóricas e tratabilidade computacional.