IN1150 – Logiske metoder

Prøveeksamen høsten 2020 (med løsningsforslag)

Dette er et løsningsforslag til eksamen, og feil kan forekomme. Hvis du finner feil eller har forslag til forbedringer, send en e-post til `rantonse@ifi.uio.no`.

Sist oppdatert: 12. november 2020

Om eksamen:

- Denne eksamen består av to deler. Disse delene vektes slik at de er verdt omtrent like mye.
- Den første delen består av 70 små oppgaver av typen «sant/usant». Her er det ingen forskjell mellom ubesvart og feil svar; det betyr at det lønner seg å svare på alle oppgavene.
- Den andre delen består av litt større oppgaver hvor du i større grad må skrive og resonnere. Her får du mellom null og ti poeng per oppgave, bortsett fra én oppgave hvor du får mellom null og tjue poeng. Dersom det ikke er oppgitt i en oppgave, trenger du ikke å begrunne svaret.
- Besvarelsen skal være et selvstendig arbeid.
- Alle hjelpemidler er tillatt (lærebok, nettressurser, notater, etc.).
- Under eksamen er det ikke tillatt å samarbeide eller kommunisere med andre personer om oppgaven eller å dele sitt arbeid med andre.
- I to av de større oppgavene (om grafteori og om naturlig deduksjon) må besvarelsen lastes opp som en fil. Her er det tillatt å ta bilde med et kamera, skanne et dokument, bruke et tegneprogram eller tilsvarende, men filformatet må være .pdf, .png eller .jpg. I alle de andre oppgavene skal besvarelsen skrives rett inn i Inspera.
- På nettsiden om brukerstøtte for hjemmeeksamen finner du kontaktpunkter for spørsmål knyttet til gjennomføringen.
- For øvrig gjelder informasjonen på nettsiden om eksamensavvikling ved MN høsten 2020.

Kommentarer:

- Det kanskje viktigste tipset er *å lese oppgaveteksten og definisjonene svært nøye*.
- Pass på at du svarer på nøyaktig det som oppgaven spør om.
- Pass på at du leser og forstår oppgaveteksten og alle definisjonene som er gitt.
- Pass på at det du leverer fra deg er klart, presist og enkelt å forstå, både når det gjelder form og innhold.
- Hvis du står fast på en oppgave, bør du gå videre til en annen oppgave først.

Om sensur:

- Eksamen vil bli vurdert med en bokstavkarakter. Det legges stor vekt på at besvarelsene er oversiktlige og at forklaringene er gode.
- Det gis ikke kontinuasjonseksamen eller utsatt eksamen i dette kurset. Grunnen er at emnet undervises både vår og høst.
- Etter eksamen kan man trekkes ut til en samtale for å kontrollere eierskap til sin besvarelse. Denne samtalen har ikke noen innvirkning på sensuren eller karakteren, men kan lede til at instituttet oppretter en fuskesak. Dette er beskrevet på UiOs nettside om kontrollsamtaler og nettside om rutiner for behandling av mistanke om fusk.

Små oppgaver [70 poeng]

1 Mengdelære og bevis

1.1

Hvis $A = \{\{a, \{a\}\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, så vil $\{a\} \in A$.

Dette er usant fordi $\{a\}$ ikke er et element i A.

1.2

Hvis $A = \{\{a, \{a\}\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, så vil $\{b\} \in A$.

Dette er sant fordi $\{b\}$ er et element i A.

1.3

Hvis $A = \{\{a, \{a\}\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, så vil $\{a\} \subseteq A$.

Dette er usant fordi a ikke er et element i A.

1.4

En formel som ikke er oppfyllbar, må være kontradiktorisk.

Dette er sant. Hvis en formel ikke er oppfyllbar, kan den ikke gjøres sann, og da må den per definisjon være kontradiktorisk.

1.5

For å vise at «hvis vi har $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$, så har vi også $A \subseteq C$» er det tilstrekkelig å finne tre mengder slik at $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ og $A \subseteq C$.

Dette er usant. Et moteksempel vil være tre mengder A, B og C slik at $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, men *ikke* $A \subseteq C$. (Det har ingenting å si hvorvidt påstanden faktisk er sann.)

1.6

Er en påstand bevist, kan det ikke finnes et moteksempel til den.

Det er sant. Et moteksempel viser at en påstand er usann, og da kan det ikke finnes et bevis for den.

1.7

Et moteksempel til påstanden «F er en falsifiserbar formel» er en valuasjon som gjør F sann.

Dette er usant. Det er vanligvis universelle påstander som har moteksempler. I dette tilfellet er påstanden eksistensiell. Påstanden «F er en falsifiserbar formel» betyr det samme som at *det finnes* en valusjon som gjør F usann. En valuasjon som gjør F sann er ikke noe moteksempel til dette, men heller til en påstand som sier «F er en kontradiktorisk formel».

1.8

For alle mengder A er det slik at potensmengden til A har større kardinalitet enn A.

Dette er sant. Det finnes aldri en bijeksjon mellom en mengde og dens potensmengde.

1.9 Kardinaliteten til unionen av A og B er lik kardinaliteten til A pluss kardinaliteten til B.

Dette er usant. Et moteksempel er $A = \{1, 2\}$ og $B = \{2, 3\}$. Da vil $(A \cup B)$ har kardinalitet 3, men A og B vil begge ha kardinalitet 2, som summerer til 4.

1.10 Mengden av heltall $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ er tellbar.

Dette er sant. Det finnes en bijeksjon mellom de naturlige tallene og heltallene.

2 Utsagnslogikk

2.1 Hvis S står for «du er inspirert» og T står for utsagnet «du er utålmodig», vil formelen $(S \to \neg T)$ stå for utsagnet «du er ikke utålmodig hvis du er inspirert».

Dette er sant. En annen måte å uttrykke dette utsagnet på er «hvis du er inspirert, så er du ikke utålmodig», som nokså direkte kan formaliseres som $(S \to \neg T)$.

2.2 Hvis S står for «du er inspirert» og T står for utsagnet «du er utålmodig», vil formelen $(\neg S \vee \neg T)$ stå for utsagnet «du er hverken inspirert eller utålmodig».

Dette er usant. Formelen $(\neg S \vee \neg T)$ står for utsagnet «du er ikke inspirert eller ikke utålmodig», og utsagnet i oppgaven kan formaliseres som $(\neg S \wedge \neg T)$.

2.3 Hvis S står for «du er inspirert» og T står for utsagnet «du er utålmodig», vil formelen $(T \to \neg S)$ stå for utsagnet «du er utålmodig bare hvis du ikke er inspirert».

Dette er sant. Det er slik vi tolker «bare hvis». En annen måte å si det samme på er «hvis du er utålmodig, så er du ikke inspirert».

2.4 Formelen $(\neg P \to \neg P)$ er sann for alle valuasjoner.

Dette er sant fordi hvis $\neg P$ er sann, så må $\neg P$ være sann.

2.5 Formelen $(\neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R))$ er ekvivalent med $(P \to (Q \to R))$.

Dette er sant. Ved å bruke ekvivalensen $\neg(Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow (Q \to R)$, ser vi at $(\neg P \vee \neg(Q \wedge \neg R))$ er ekvivalent med $(\neg P \vee (Q \to R))$. Ved å bruke ekvivalensen $(\neg F \vee G) \Leftrightarrow (F \to G)$, ser vi at denne formelen er ekvivalent med $(P \to (Q \to R))$.

2.6 Formelen $(P \vee \neg P)$ kan gjøres usann.

Dette er usant. Enhver valuasjon må gjøre P sann eller P usann. I begge tilfeller blir $(P \vee \neg P)$ sann.

2.7 Det finnes en utsagnslogisk formel som er både gyldig og kontradiktorisk.

Dette er usant. En formel kan ikke både være sann og usann for alle valuasjoner.

2.8 Formelen $(Q \to P)$ er en logisk konsekvens av $\{(\neg R \to \neg Q), (\neg R \vee P)\}$.

Dette er sant. Anta at $(\neg R \to \neg Q)$ og $(\neg R \vee P)$ er sanne. Legg merke til at disse er ekvivalente med henholdsvis $(Q \to R)$ og $(R \to P)$. Fra dette ser vi at $(Q \to P)$ må være sann.

2.9 Hvis $(P \to Q)$ er usann, kan P være sann.

Dette er sant. Hvis $(P \to Q)$ er usann, må P være sann og Q være usann.

2.10 Alle gyldige formler er ekvivalente med hverandre.

Dette er sant. Det at en formel er gyldig betyr at den er sann for alle valuasjoner.

3 Funksjoner og relasjoner

3.1 Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er refleksiv.

Dette er sant fordi alle tupler på formen $\langle x, x\rangle$ er med, for $x \in \{a, b, c\}$.

3.2 Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er symmetrisk.

Dette er usant fordi for eksempel $\langle a, b\rangle$ er med, men $\langle b, a\rangle$ mangler.

3.3 Relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\}$ på $\{a, b, c\}$ er transitiv.

Dette er usant fordi for eksempel $\langle b, c\rangle$ og $\langle c, a\rangle$ er med, men $\langle b, a\rangle$ mangler.

3.4 Det finnes en funksjon f slik at f også er en transitiv relasjon.

Dette er sant. For eksempel er identitetsfunksjonen lik identitetsrelasjonen, som er transitiv.

3.5 For enhver refleksiv relasjon R finnes det en funksjon f slik at $f \subseteq R$.

Dette er sant fordi hvis R er refleksiv, vil identitetsfunksjonen være en delmengde av R.

3.6 Det finnes funksjoner som er hverken injektive eller surjektive.

Dette er sant. For eksempel er funksjonen $\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ på $\{0, 1\}$ hverken injektiv eller surjektiv.

3.7 Relasjonen $\{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på $\{a, b, c, d\}$ er en partiell ordning.

Dette er usant. For å være en partiell ordning må den være refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk. Den er anti-symmetrisk, men ikke refleksiv eller transitiv. Den er ikke refleksiv, fordi den mangler $\langle a, a\rangle$. Den er ikke transitiv, fordi den den inneholder $\langle a, b\rangle$ og $\langle b, c\rangle$, men mangler $\langle a, c\rangle$.

3.8 Relasjonen $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er en ekvivalensrelasjon på $\{1, 2, 3\}$.

Dette er sant fordi relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

3.9 Hvis f er en bijektiv funksjon, så vil $f^{-1}(f(x)) = x$.

Dette er sant. Dette følger fra definisjonen av en invers funksjon.

3.10 Det finnes en relasjon på mengden $\{1, 2, 3\}$ som ikke er identitetsrelasjonen og som både er en ekvivalensrelasjon og en partiell ordning.

Dette er usant. En slik relasjon måtte i så fall utvide identitetsrelasjonen, på grunn av kravet om refleksivitet, og da vil kravene om symmetri og anti-symmetri være i konflikt med hverandre. Det vil si, det vil finnes to elementer a og b slik at $a \sim b$ og $b \sim a$.

4 Induksjon og rekursjon

4.1 La M være den minste mengden slik at $0 \in M$, og hvis $x \in M$, så er $2 \cdot x \in M$ og $2 \cdot x + 1 \in M$. Da er det slik at $4 \in M$.

Dette er sant. Hvis $0 \in M$, må $2 \cdot 0 + 1 = 1 \in M$. Da må $2 \cdot 1 = 2 \in M$, og da må $2 \cdot 2 = 4 \in M$.

4.2

La M være den minste mengden slik at $0 \in M$, og hvis $x \in M$, så er $2 \cdot x \in M$ og $2 \cdot x + 1 \in M$. Da inneholder M alle positive oddetall.

Dette er sant. Mengden M er mengden av naturlige tall. Se neste oppgave for et argument.

4.3

La M være den minste mengden slik at $0 \in M$, og hvis $x \in M$, så er $2 \cdot x \in M$ og $2 \cdot x + 1 \in M$. Da finnes det uendelig mange naturlige tall som ikke er i M.

Dette er usant. Mengden M er mengden av naturlige tall. Her er et argument, et motsigelsesbevis, som viser dette: Anta at M ikke inneholder alle naturlige tall. La m være det *minste* naturlige tallet som ikke er med i M. Tallet m må være et partall på formen $2 \cdot n$ eller et oddetall på formen $2 \cdot n + 1$, for et naturlig tall n som er *mindre* enn m. Siden m er det minste tallet som ikke er i M, må n være i M. Induksjonssteget gir at $m \in M$, noe som gir en motsigelse fordi vi har antatt at m ikke er med i M. Vi kan dermed konkludere med at $m \in M$.

4.4

Hvis f er funksjonen på naturlige tall definert rekursivt ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$, så er $f(f(2)) = 7$.

Dette er sant. Vi får at $f(1) = 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Vi får at $f(2) = 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Vi får at $f(3) = 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$. Dermed blir $f(f(2)) = f(3) = 7$.

4.5

Hvis f er funksjonen på naturlige tall definert rekursivt ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$, så inneholder bildemengden til f alle positive oddetall.

Dette er usant. Det er for eksempel ingen måte å få tallet 5 på.

4.6

Hvis f er funksjonen på naturlige tall definert rekursivt ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$, så er f er identisk med funksjonen g som er slik at $g(n) = 2^n - 1$.

Dette er sant. Begge bildemengdene består av tallene $0, 1, 3, 7, 15, 31, \ldots$. Dette kan vises ved matematisk induksjon.

4.7

Et bevis ved matematisk induksjon trenger ikke en induksjonshypotese.

Dette er usant. Et bevis ved matematisk induksjon består per definisjon av et basissteg og en induksjonssteg. Induksjonssteget inneholder en induksjonshypotese.

4.8

Basissteget i et induksjonsbevis kan ikke være et motsigelsesbevis.

Dette er usant. Hvordan basissteget beviset avhenger av hva påstanden er, og definisjonen av induksjonsbevis sier ingenting om hvordan basissteget skal bevises.

4.9

Bevis ved strukturell induksjon kan også fungere for endelige mengder.

Dette er sant. Hvorvidt induksjonssteget resulterer i en uendelig mengde, sier definisjonen ingenting om.

4.10 I et bevis ved strukturell induksjon på mengden av lister er induksjonshypotesen at påstanden holder for den tomme listen.

Dette er usant. Det at påstanden holder for den tomme listen er basissteget, ikke induksjonshypotesen.

5 Førsteordens logikk

5.1 Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall» og Qx tolkes som «x er et karantenetall», så vil formelen $(\forall x Px \lor \forall y Qy)$ representere utsagnet «ethvert tall er enten et positivt tall eller et karantenetall».

Dette er usant. Formelen $(\forall x Px \lor \forall y Qy)$ uttrykker «alle tall er karantenetall eller alle tall er positive tall». Utsagnet «ethvert tall er enten et positivt tall eller et karantenetall» kan formaliseres som $\forall x(Px \lor Qx)$.

5.2 Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall» og Qx tolkes som «x er et karantenetall», så vil formelen $\exists x(Qx \to Px)$ representere utsagnet «det finnes et karantenetall som også er et positivt tall».

Dette er usant. Det er uvanlig å ha $\exists$ foran en $\to$-formel. Direkte blir dette: «Det finnes en x slik at hvis x er et karantenetall, så er x et positivt tall.» Dette er en rar ting å si, og merk at $\exists x(Qx \to Px)$ er ekvivalent med $\exists x(\neg Qx \lor Px)$ som er sant dersom det finnes minst ett tall som ikke er et karantenetall. Utsagnet «det finnes et karantenetall som også er et positivt tall» kan uttrykkes som $\exists x(Qx \land Px)$.

5.3 Hvis Px tolkes som «x er et positivt tall», Qx tolkes som «x er et karantenetall» og Rxy tolkes som «tallet x er relatert til tallet y», så vil formelen $\exists x(Qx \land \forall y(Rxy \to Py))$ representerer utsagnet «det finnes et karantenetall som bare er relatert til positive tall».

Dette er sant. Formelen $\exists x(Qx \land \forall y(Rxy \to Py))$ uttrykker «det finnes en x slik at x er et karantenetall og for alle y, hvis x er relatert til y, så er y et positivt tall», som er det samme utsagnet uttrykt mindre naturlig, men mer likt formelen.

5.4 La M være en modell med domene $\{1, 2, 3\}$ slik at $P^M = \{1, 2, 3\}$ og $Q^M = \{1, 2\}$. Da er det slik at $M \models \forall x(\neg Qx \lor Px)$.

Dette er sant. I denne modellen blir $\forall x Px$ sann, og da må også $\forall x(\neg Qx \lor Px)$ bli sann.

5.5 La M være en modell med domene $\{1, 2, 3\}$ slik at $R^M = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. Da er det slik at $M \models \forall x \exists y Rxy$.

Dette er usant. Formelen uttrykker at for alle x, så finnes det et tuppel på formen $\langle x, y\rangle$ i R^M, men det finnes ikke noe tuppel med 3 som første element.

5.6 La M være en modell med domene $\{1,2,3\}$ slik at $Q^M = \{1,2\}$ og $R^M = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$. Da er det slik at $M \models \forall x(\neg Qx \vee \exists y Rxy)$.

> Dette er sant. Formelen uttrykker essensielt at hvis x er et element i $Q^{\mathcal{M}}$, så finnes det et tuppel i $R^{\mathcal{M}}$ på formen $\langle x, y\rangle$, og det er sant.

5.7 La M være en modell med domene $\{1,2,3\}$ slik at $R^M = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$. Da er det slik at $M \models \exists y \forall x Rxy$.

> Dette er usant. Formelen uttrykker at det finnes et element y slik at alle elementer er relatert til dette elementet. Dette er usant for eksempel for elementet 3 fordi kun $\langle 1,3\rangle$ og $\langle 2,3\rangle$ er med, men $\langle 3,3\rangle$ mangler.

5.8 Formelen $(\forall x Px \vee \forall x Qx)$ er en logisk konsekvens av $\forall x(Px \vee Qx)$.

> Dette er usant fordi det finnes en modell som gjør $\forall x(Px \vee Qx)$ sann, men $(\forall x Px \vee \forall x Qx)$ usann. En enkel modell som er slik har domene $\{1,2\}$ og tolkningen $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

5.9 Det finnes en modell som gjør både $\forall x(Px \to \neg Qx)$ og $\exists x Qx$ sanne.

> Dette er sant. En slik modell er for eksempel en modell med domene $\{1,2\}$ og tolkningen $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

5.10 Enhver modell som gjør $\forall x \exists y Rxy$ sann, må også gjøre $\exists y \forall x Rxy$ sann.

> Dette er usant. Det finnes en modell som gjør $\forall x \exists y Rxy$ sann og $\exists y \forall x Rxy$ usann. En slik modell er for eksempel en modell med domene $\{1,2\}$ og tolkningen $R^{\mathcal{M}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.

6 Partisjoner og kombinatorikk

6.1 Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på $\{a,b,c,d,e\}$ slik at ekvivalensklassene er $\{a,d,e\}$ og $\{b,c\}$. Da vil $d \sim e$.

> Dette er sant fordi d og e er i samme ekvivalensklasse. Da må de per definisjon være relatert til hverandre.

6.2 Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på mengden M. Husk at $[x]$, hvor $x \in M$, står for ekvivalensklassen til x. Hvis $[x] = [y]$, må det være slik at $x = y$.

> Dette er usant fordi det kan finnes en ekvivalensklasse med to forskjellige elementer, a og b. Da vil $[a] = [b]$, men $a \neq b$.

6.3 Den tomme mengden er en partisjon av $\{1,2,3\}$.

Dette er usant fordi en partisjon av $\{1, 2, 3\}$ må inneholde mengder som til sammen dekker hele $\{1, 2, 3\}$.

6.4 Det finnes nøyaktig tolv delmengder av mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

Dette er usant. Det finnes $2^4 = 16$ delmengder av denne mengden.

6.5 Det finnes nøyaktig åtte funksjoner fra $\{1, 2, 3\}$ til $\{1, 2\}$.

Dette er sant. For hvert av de 3 elementene er det 2 mulige verdier. Vi får $2^3 = 8$.

6.6 Det finnes nøyaktig 24 bijektive funksjoner fra $\{1, 2, 3, 4\}$ til $\{1, 2, 3, 4\}$.

Dette er sant fordi $4! = 24$.

6.7 Det er mer enn femti forskjellige permutasjoner av strengen `001122`.

Dette er sant. Det er $6!/(2! \cdot 2! \cdot 2!) = 90$ permutasjoner. Dette er det samme som $\binom{6}{2} = 15$ ganget med $\binom{4}{2} = 6$.

6.8 Antall permutasjoner av en mengde med n elementer er $n!$.

Dette er sant. Det er akkurat slik vi teller permutasjoner.

6.9 Antall funksjoner fra en mengde med k elementer til en mengde med n elementer er n^k.

Dette er sant. For hvert av de k elementene er det n mulige verdier.

6.10 Antall injektive funksjoner fra en mengde med n elementer til en mengde med n elementer er $n!$.

Dette er sant. Det er akkurat slik vi teller injektive funksjoner.

7 Diverse

7.1 Funksjonen $f(x) = x - 1$ er en operasjon på de naturlige tallene.

Dette er usant fordi $f(0) = 0 - 1 = -1$ ikke er et naturlig tall.

7.2 Funksjonen $f(x) = x + 1$ er en idempotent operasjon på de naturlige tallene.

Dette er usant fordi det ikke er slik at $f(f(x)) = f(x)$ for alle naturlige tall x. For eksempel er $f(f(0)) = f(1) = 2$ forskjellig fra $f(0) = 1$.

7.3 Funksjonen $f(x, y) = x + y + 1$ er en assosiativ operasjon på de naturlige tallene.

Dette er sant fordi $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z) = x + y + z + 2$ for alle naturlige tall x, y, z.

7.4 Multiplikasjonsfunksjonen er en idempotent operasjon på de rasjonale tallene.

Dette er usant fordi det ikke er slik at $x \cdot x = x$ for alle naturlige tall x. For eksempel er $2 \cdot 2 = 4$ forskjellig fra 2.

7.5 Den algebraiske strukturen $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, hvor $\mathbb{Q}$ står for de rasjonale tallene, er en gruppe.

Dette er sant. Operasjonen $+$ er assosiativ, vi har et identitetselement, nemlig 0, og alle elementer har en invers.

7.6 Det finnes en komplett graf som er et tre.

Dette er sant for den komplette grafen med to noder og én kant er et tre.

7.7 Strengen `001` er i språket definert av det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(00 \mid 1)(000 \mid 1)^*$.

Dette er usant. Enhver streng i dette språket må begynne med `000`, `01`, `100` eller `11` når vi leser fra venstre mot høyre.

7.8 Strengen `0101` er i språket definert av det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(00 \mid 1)(000 \mid 1)^*$.

Dette er usant. Enhver streng i dette språket som begynner med `01`, må fortsette med noe som passer med $(000 \mid 1)^*$, og det gjør ikke `01`.

7.9 Språket $\{0^{3n} \mid n \geqslant 1\}$ er en delmengde av språket definert av det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(00 \mid 1)(000 \mid 1)^*$.

Dette er sant. En streng i dette språket som kun består av `0` begynner med `000` og fortsetter med null eller flere forekomster av `000`.

7.10 Språket $\{1^n \mid n \geqslant 1\}$ er en delmengde av språket definert av det regulære uttrykket $(0 \mid 1)(00 \mid 1)(000 \mid 1)^*$.

Dette er usant fordi strengen 1 ikke er et element i dette språket.

Større oppgaver [70 poeng]

8 Mengdelære [10 poeng]

La A være mengden $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(a) [2 poeng] Hva er $\mathcal{P}(A)$?

$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(b) [2 poeng] Gi alle partisjonene av A.
(*Angi svarene på én linje med ordet «og» mellom hvert svar.*)

$\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ og $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

(c) [2 poeng] Hva kardinaliteten til $A \cup \mathcal{P}(A)$?

4

(d) [2 poeng] Er det slik at $\emptyset \in \mathcal{P}(A \cup \mathcal{P}(A))$?

Ja.

(e) [2 poeng] Anta at X er en partisjon av Y. Hva er $X \cap \mathcal{P}(Y)$?

X

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen våren 2019.)

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen for korrekt svar og null poeng for feil svar, bortsett fra (b), hvor det gis ett poeng for hver korrekt partisjon.

9 Relasjoner og tillukninger [10 poeng]

La M være en mengde. La R være relasjonen på potensmengden til M som er slik at $\langle A, B \rangle \in R$ hvis og bare hvis $A = B$ eller $A \cap B \neq \emptyset$. La R^* være den transitive tillukningen av R.

(a) [2 poeng] Bevis at R er refleksiv og symmetrisk.

> R er refleksiv: For enhver mengde $A \subseteq M$ vil $A = A$ og dermed $\langle A, A \rangle \in R$.
>
> R er symmetrisk: La A og B være delmengder av M slik at $\langle A, B \rangle \in R$. Da vil enten $A = B$ eller $A \cap B \neq \emptyset$. Hvis $A = B$, vil $B = A$ og dermed $\langle B, A \rangle \in R$. Hvis $A \cap B \neq \emptyset$, vil $B \cap A \neq \emptyset$, og dermed $\langle B, A \rangle \in R$.

(b) [6 poeng] Anta at A og B er to ikke-tomme delmengder av M. Bevis at $\langle A, B \rangle \in R^*$.

> Anta at A og B er to ikke-tomme delmengder av M. For å vise at $\langle A, B \rangle \in R^*$ er det tilstrekkelig å finne en delmengde X slik at $\langle A, X \rangle \in R^*$ og $\langle X, B \rangle \in R^*$, for da vil det følge av transitivitet av R^* at $\langle A, B \rangle \in R^*$. Ved å la X være mengden M, får vi dette til. Da får vi at $\langle A, M \rangle \in R$ og $\langle M, B \rangle \in R$, og dermed at $\langle A, B \rangle \in R^*$.

(c) [2 poeng] Hvor mange ekvivalensklasser gir R^* opphav til? Begrunn svaret.

> R^* gir opphav til nøyaktig to ekvivalensklasser. Den ene ekvivalensklassen er $\{\emptyset\}$, og den andre består av alle de andre delmengdene av M. Vi får at $\langle \emptyset, \emptyset \rangle \in R$ fordi $\emptyset = \emptyset$. Ved (b) er alle ikke-tomme delmengder relatert til hverandre. Og den tomme mengden kan ikke være relatert noen annen mengde A fordi $\emptyset \cap A = \emptyset$. (Ett unntak her er dersom M er den tomme mengden. Da finnes kun én ekvivalensklasse.)

> **Kommentar:** For å få full uttelling i **(a)**, **(b)** og **(c)** må kandidaten gi fullstendige bevis. Dersom kandidaten definerer refleksiv og symmetrisk og forsøker å bruke dette på en fornuftig måte, gis ett poeng. Dersom idéen i **(b)** er på plass, får kandidaten fra ett til tre poeng, avhengig av hvor godt det er forklart.

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2018.)

10 Førsteordens logikk [10 poeng]

Anta at P, O, D og M er relasjonssymboler slik at

> Px tolkes som «*x er et partall*», Ox tolkes som «*x er et oddetall*»,
> Dxy tolkes som «*det dobbelte av x er y*» (eller «*$2x$ er lik y*») og
> Mxy tolkes som «*x er mindre enn y*» («*y er større enn x*»).

Vi antar at alt handler om tall. Finn førsteordens formler for følgende setninger:

(a) [2 poeng] Alle tall er oddetall eller partall.

> $\forall x(Ox \vee Px)$

(b) [2 poeng] Det finnes et tall som er det dobbelte av seg selv.

> $\exists x Dxx$

(c) [2 poeng] For alle partall finnes det et oddetall som er større.

> $\forall x(Px \rightarrow \exists y(Oy \wedge Mxy))$

Finn *gode* og *naturlige* setninger for følgende førsteordens formler:

(d) [2 poeng] $\forall x \forall y(Px \wedge Oy \rightarrow Mxy)$

> *«alle partall er mindre enn alle oddetall»*

(e) [2 poeng] $\exists x \neg(Px \vee Ox)$

> *«det finnes et tall som hverken er et partall eller et oddetall»*

Kommentar: For **(a)**, **(b)** og **(c)** gis det full uttelling for svar som er ekvivalente med løsningsforslaget. For **(d)** og **(e)** gis det i utgangspunktet full uttelling så lenge setningene betyr det samme som løsningsforslagene og ikke er tvetydige. Dersom setningene er entydige og korrekte, men unødvendig vanskelige å lese, trekkes det ett poeng.

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen våren 2019.)

11 Grafteori [10 poeng]

I denne oppgaven skal tegne grafer, og besvarelsen skal lastes opp som én fil. Filformatet må være .pdf, .png eller .jpg. Alle grafene skal tegnes ved siden av hverandre på den samme siden. Forsøk å gjøre grafene så pene og enkle å lese som mulig. Du trenger ikke å begrunne hvorfor grafene har de aktuelle egenskapene, og du trenger ikke å sette navn på nodene eller kantene. Forsøk å bruke så få noder og kanter som mulig.

Tegn en enkel, sammenhengende graf

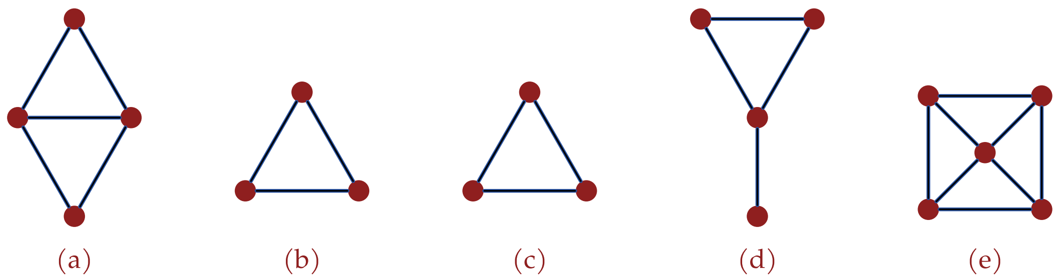
(a) [2 poeng] …som har flere kanter enn noder.

(b) [2 poeng] …hvor alle noder har grad to.

(c) [2 poeng] …som ikke er et tre.

(d) [2 poeng] …med fire noder og fire kanter og som ikke har en eulerkrets.

(e) [2 poeng] …med fem noder, en hamiltonsti, men ingen eulervei.



Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen dersom grafene oppfyller de angitte egenskapene og null poeng ellers. For noen av deloppgavene er det flere korrekte grafer.

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen våren 2019.)

12 Naturlig deduksjon [10 poeng]

I denne oppgaven skal du gi bevis og utledninger i naturlig deduksjon, og besvarelsen skal lastes opp som én fil. Filformatet må være .pdf, .png eller .jpg. Alle bevisene og utledningene skal være på samme side. Forsøk å være så nøyaktig som mulig, og gjør bevisene så enkle å lese og forstå som mulig.

(a) [2 poeng] Gi et *bevis* for $(P \land Q) \to (P \lor R)$ i naturlig deduksjon.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \land Q]^1}{P}\,\land\mathrm{E}}{P \lor R}\,\lor\mathrm{I}}{(P \land Q) \to (P \lor R)}\,\to\mathrm{I}_1$$

(b) [4 poeng] Gi en *utledning* av $(\neg A \lor \neg B)$ med $\neg(A \lor B)$ som eneste åpne antakelse.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{A \lor B}\,\lor\mathrm{I} \qquad \neg(A \lor B)}{\bot}\,\to\mathrm{E}}{\neg A}\,\to\mathrm{I}_1}{\neg A \lor \neg B}\,\lor\mathrm{I}$$

(c) [4 poeng] Gi en *utledning* av $((A \lor B) \to B)$ med $\neg A$ som eneste åpne antakelse.

$$\dfrac{\dfrac{[A \lor B]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^1 \qquad \neg A}{\bot}\,\to\mathrm{E}}{B}\,\bot \qquad [B]^1}{B}\,\lor\mathrm{E}_1}{(A \lor B) \to B}\,\to\mathrm{I}_2$$

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen våren 2019.)

Kommentar: I denne oppgaven gis den angitte poengsummen dersom bevisene og utledningene er korrekte, det vil si, i prioritert rekkefølge, at reglene er anvendt på en korrekt måte (ca. 70%), at konklusjonen samsvarer med oppgaven (ca. 10%), at mengden av åpne og lukkede antakelser samsvarer med oppgaven (ca. 10%), og at reglene er angitt med korrekte navn (ca. 10%). Dersom noen av disse ikke er oppfylt kan det trekkes poeng proporsjonalt med de angitte prosentene. Det trekkes ikke poeng dersom kandidaten har tatt unødvendige "omveier".

13 Bevis ved matematisk induksjon [10 poeng]

Bevis ved matematisk induksjon at for alle naturlige tall n større enn eller lik 2, er det slik at $n!$ er et partall.

Påstanden vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall $n \geqslant 2$ er: «$n!$ er et partall».

Basissteget er å bevise at påstanden holder for tallet 2. Siden $2! = 2 \cdot 1 = 2$ er et partall, får vi at påstanden holder.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et tall n, det vil si at $n!$ er et partall. Dette er induksjonshypotesen (IH). Fra denne må vi vise at påstanden også holder for $n + 1$, det vil si at $(n + 1)!$ er et partall. Per definisjon av fakultetsfunksjonen, er $(n + 1)!$ lik $(n + 1) \cdot (n!)$. Ved induksjonshypotesen må $n!$ være et partall. Når vi multipliserer et partall med et hvilket som helst tall, får vi et partall, og derfor må også $(n + 1)!$ være et partall.

Ved matematisk induksjon følger det at påstanden holder for alle naturlige tall større enn eller lik 2.

(Denne oppgaven er hentet fra prøveeksamen våren 2018.)

14 Formelle språk [10 poeng]

La $A = \{0, 1, 2\}$ og M være den minste mengden slik at følgende holder. Her står t står for et vilkårlig element i A^*.

$\Lambda \in M$	Hvis $t0 \in M$, så $t01 \in M$.
$0 \in M$	Hvis $t1 \in M$, så $t10 \in M$.
$1 \in M$	Hvis $t1 \in M$, så $t12 \in M$.
$2 \in M$	Hvis $t2 \in M$, så $t21 \in M$.

(a) [2 poeng] Er det slik at $101 \in M$? Er det slik at $0120 \in M$?

Ja. Vi får at $1 \in M$, som gir at $10 \in M$, som gir at $101 \in M$. Nei. Dersom 2 er tegnet lengst til høyre i en streng, kan vi kun legge til 1, ikke 0, til høyre. Da kan ikke noen streng inneholde 20.

(b) [2 poeng] La L være språket som representeres av det regulære uttrykket `(01|21)*(0|2)`. Er det slik at $L \subseteq M$?

Ja. Enhver streng som representeres av `(01|21)*(0|2)` må inneholde en endelig sekvens av 01 og 21 etter hverandre. Fordi begge disse har 1 lengst til høyre, og 0 eller 2 lengst til venstre, vil vi alltid få strenger i M som har 1 lengst til høyre. Det å legge til 0 eller 2 helt til slutt gir oss også en streng i M.

(c) [3 poeng] Forklar hvorfor det ikke er slik at det regulære uttrykket `(0|2)(10|12)*(Λ|1)` representerer M, og gi et moteksempel.

Dette regulære uttrykket krever at en streng begynner med 0 eller 2, og ingen strenger som begynner med 1 blir representeret. For eksempel er strengen 10 med i M, men ikke representert av det regulære uttrykket. Et regulært uttrykk som representerer M er `(Λ|0|2)(10|12)*(Λ|1)`.

(d) [3 poeng] Definer en rekursiv funksjon f på M som er slik at f teller antall forekomster av strengen $\mathtt{12}$. For eksempel vil $\mathsf{f}(\mathtt{2}) = 0$, $\mathsf{f}(\mathtt{12}) = 1$ og $\mathsf{f}(\mathtt{2121210}) = 2$.

La f være definert rekursivt på følgende måte.

$\mathsf{f}(\Lambda) = 0$	$\mathsf{f}(\mathtt{t01}) = \mathsf{f}(\mathtt{t0})$
$\mathsf{f}(\mathtt{0}) = 0$	$\mathsf{f}(\mathtt{t10}) = \mathsf{f}(\mathtt{t1})$
$\mathsf{f}(\mathtt{1}) = 0$	$\mathsf{f}(\mathtt{t12}) = \mathsf{f}(\mathtt{t1}) + 1$
$\mathsf{f}(\mathtt{2}) = 0$	$\mathsf{f}(\mathtt{t21}) = \mathsf{f}(\mathtt{t2})$

Kommentar: For å få full uttelling, kreves kun et korrekt svar for **(a)**, **(b)** og **(c)**. For **(d)** kreves både et argument og et moteksempel. For å få full uttelling for **(e)** må den rekursive funksjonen være definert korrekt, med korrekt basissteg og korrekt rekursjonssteg. I tillegg må definisjonsområdet til funksjonen være M, slik som den er definert i oppgaveteksten. (Merk: Dersom ett av tilfellene er $\mathsf{f}(\mathtt{t01}) = \mathsf{f}(\mathtt{t})$ eller $\mathsf{f}(\mathtt{t21}) = \mathsf{f}(\mathtt{t})$, vil ikke funksjonen være korrekt, fordi den kan "hoppe over" etterfølgende forekomster av $\mathtt{2}$.)

(Denne oppgaven er hentet fra eksamen høsten 2018.)