Innleveringsoppgave 6 i IN1150 v22

hermagst

17. mars 2022

Oppgave 1

(a) $f(n) = 9 \cdot n$
$f(0) = 9 \cdot 0 = 0 \rightarrow$ basissteget holder.

(b) Induksjonshypotesen er antagelsen om at påstanden holder for en vilkårlig n. Dette er nødvendig for å kunne bevise at påstanden holder for alle naturlige tall siden vi må bevise at hvis $f(n)$ holder følger det at $f(n+1)$ holder.

(c) Vi har induksjonshypotesen $f(n) = 9 \cdot n$
Da vil $f(n+1) = 9 \cdot (n+1) = 9 \cdot n + 9$
Hvis vi bytter ut $f(n)$ i den tidligere definisjonen får vi $f(n+1) = 9 \cdot n + 9$
Induksjonssteget gir oss den rekursivt definerte funksjonen $\rightarrow$ funksjonene er logisk ekvivalente $\rightarrow$ ved matematisk induksjon følger det at påstanden $f(n) = 9 \cdot n$ er sann.

Oppgave 2

(a) Basissteg:
Viser at påstanden er sann for $n = 3$
$\frac{3!}{3}$
$\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{Z} \rightarrow$ basissteget holder

(b) Induksjonssteg:
Gitt induksjonshypotesen $\frac{n!}{3} = q$ der $q \in \mathbb{Z}$ skal vi se at $\frac{(n+1)!}{3} = q \in \mathbb{Z}$

$\frac{(n+1)!}{3} = q =$
$\frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3} = q = \quad | \cdot 3$
$(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot q$

Hvis n er et naturlig tall vil 3q også være et naturlig tall og $(n+1)!$ dermed delbart på 3 $\rightarrow$ ved matematisk induksjon følger det at $n!$ er delelig med 3 for alle naturlige tall n større enn eller like 3.

Oppgave 3

(a) Basissteg:
Viser at påstanden er sann for $n = 0$
$0 \cdot (0 + 1) = 0 \rightarrow$ basissteget holder

(b) Induksjonssteg:
Gitt induksjonshypotesen $0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$, der n er et partall, skal vi se at påstanden holder for n+1.
$0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2 \cdot n + 2 \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 1 + 1)$
$n \cdot (n + 1) + 2 \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot (n + 2)$
$n^2 + n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 2$
$n^2 + 3n + 2 = n^2 + 3n + 2 \rightarrow$ Likheten stemmer $\rightarrow$ ved matematisk induksjon følger det at påstanden er sann for naturlige tall.

Oppgave 4

(a) Beviset har ikke et gyldig basissteg. Med andre ord: beviset beviser aldri at påstanden holder for n = 0, hvilket påstanden ikke holder for.

(b) Selv om n+1 bare er bitte litt større enn n, kan denne forskjellen bli stor nok om vi plusser på 1 mange nok ganger til at n+1 x ganger ikke lenger er mye mindre enn en million.

Oppgave 5

(a) Basissteg:
Viser at påstanden er sann for $x = \Lambda$
$\Lambda \rightarrow$ Antall forekomster av b og d er like i den tomme strengen (0) $\rightarrow$ basissteget holder

(b) Induksjonssteg:
Gitt induksjonshypotesen at påstanden holder for x, skal vi se at påstanden holder for dxb.
Antall forekomster av d og b er like i strengen db
Antall forekomster av d og b er like i strengen x (pga. IH) $\rightarrow$ Antall forekomster av d og b er like i strengen dxb.

Oppgave 6

(a) Basissteg:
Påstand: funksjonen f regner ut tverrsummen av en bitstreng.
Viser at påstanden er sann for s = 0 og s = 1.
$s = 0$: $f(0) = 0$ (definisjon av funksjonen f)
$s = 1$: $f(1) = 1$ (definisjon av funksjonen f)
Funksjonen gjør som den skal for s = 0 og s = 1 $\rightarrow$ basissteget holder

(b) Induksjonssteg:
Gitt induksjonshypotesen at påstanden holder for f(s), skal vi se at påstanden holder for f(s0) og f(s1).
$s0$: $f(s0) = f(s)$ $\rightarrow$ Funksjonen gjør som den skal for s0 fordi f(s0) gjør det samme som f(s) og vi vet at f(s) gjør som den skal (pga. IH).
$s1$: $f(s1) = f(s)+1$ $\rightarrow$ Funksjonen gjør som den skal for f(s1) fordi f(s) gjør som den skal og tverrsummen av s1 er det samme som tverrsummen av s + 1.

Oppgave 7

$\mathsf{FLIP}(P \vee \neg Q) =$
$(\mathsf{FLIP}(\neg Q) \vee \mathsf{FLIP}(P)) =$
$(\neg \mathsf{FLIP}(Q) \vee P) =$
$(\neg Q \vee P)$

$\mathsf{FLIP}(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) =$
$(\mathsf{FLIP}(Q \rightarrow R) \rightarrow \mathsf{FLIP}(P)) =$
$((\mathsf{FLIP}(R) \rightarrow \mathsf{FLIP}(Q)) \rightarrow P) =$
$(R \rightarrow Q) \rightarrow P)$

Oppgave 8

(a) Basissteg:
Påstand: Alle utsagnsvariabler formler F er ekvivalente med $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F))$
Påstanden holder for alle utsagnsvariabler P.
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(P)) \Leftrightarrow \mathsf{FLIP}(P) \Leftrightarrow P$ (def. FLIP) $\rightarrow$ basissteget holder

(b) Induksjonssteg:
Gitt induksjonshypotesen: $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \Leftrightarrow F$ og $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G)) \Leftrightarrow G$ skal vi se at dette er tilfellet for alle konnektiver mellom de to formlene.

$\neg F :$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(\neg F)) =$
$\mathsf{FLIP}(\neg \mathsf{FLIP}(F)) =$
$\neg \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \Leftrightarrow \neg F$

$F \wedge G :$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F \wedge G)) =$
$\mathsf{FLIP}((\mathsf{FLIP}(G \wedge \mathsf{FLIP}(F))) =$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \wedge \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G)) \Leftrightarrow F \wedge G$

$F \vee G :$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F \vee G)) =$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G)) \vee \mathsf{FLIP}(F)) =$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \vee \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G)) \Leftrightarrow F \vee G$

$F \rightarrow G :$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F \rightarrow G)) =$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G \rightarrow \mathsf{FLIP}(F)) =$
$\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F)) \rightarrow \mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(G)) \Leftrightarrow F \rightarrow G$

Funksjonen FLIP$(\text{FLIP}(\neg\text{F}))$ og FLIP$(\text{FLIP}(\text{F} \circ \text{G}))$, der $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ gir samme resultat som input, og basissteget holder $\rightarrow$ ved strukturell induksjon følger det at $\mathsf{FLIP}(\mathsf{FLIP}(F))$ er ekvivalent med F.