Innleveringsoppgave 2 i IN1150 v22

hermagst

8. februar 2021

Oppgave 1

(a) Usant - 63/7 = 9 (ikke et desimaltall)

(b) Sant - Det motsatte av en kontradiksjon er en tautologi ($\neg\neg F = F$)

(c) Usant - $P \vee 1$ er en tautologi med kun ett konnektiv.

(d) Usant - Så lenge F ikke er en tautologi eller en kontradiksjon finnes det valuasjoner for både F og ¬ F som er sanne. For eksempel hvis $F = P \wedge Q$ vil både F og ¬ F ha sanne valuasjoner (er oppfyllbare).

Oppgave 2

$b, c, d \Rightarrow a$ - Fordi hver av påstandene b,c,d inneholder minst en valuasjon som gjør F sann, og dermed har a som en logisk konsekvens.
$d \Leftrightarrow c$ - Fordi at noe aldri er usant er det samme som at noe alltid er sant.

Oppgave 3

Ikke gyldig - For at $(F \to G)$ skal være en tautologi og G alltid skal være sann kan F enten være sann eller usann (på grunn av definisjonen av $\to$). Alle valuasjoner gjør F derfor ikke sann. For eksempel hvis: $F = (P \wedge Q)$ og $G = (P \vee \neg P)$. Da vil $(F \to G)$ være en tautologi og G vil alltid være sann uten at F trenger å være sann.

Oppgave 4

Anta at $(P \to (Q \to P))$ er en kontradiksjon.
Da må P være 1 og $(Q \to P)$ være 0 (på grunn av definisjonen av $\to$).
For at $(Q \to P)$ skal være 0 må Q være 1 og P være 0.
P kan ikke være 0 og 1 samtidig, dermed er motsigelsen usann og $(P \to (Q \to P))$ en tautologi.

Oppgave 5

(a) $\langle 2,2\rangle \notin R$ og $\langle 1,1\rangle \in R \Rightarrow$ **Hverken refleksiv eller irrefleksiv**.

$\langle b,1\rangle \in R$ men $\langle 1,b\rangle \notin R \Rightarrow$ **Ikke symmetrisk**.

$\langle 1,a\rangle \in R$ og $\langle a,1\rangle \in R \Rightarrow$ **Ikke anti-symmetrisk**.

$\langle b,1\rangle \in R$ og $\langle 1,a\rangle \in R$ men $\langle b,a\rangle \notin R \Rightarrow$ **Ikke transitiv**.

(b) Alle elementer i A relaterer til seg selv i R ($\langle 1,1\rangle \in R$ og $\langle 2,2\rangle \in R$ og $\langle 3,3\rangle \in R$ og $\langle a,a\rangle \in R$ og $\langle b,b\rangle \in R$)$\Rightarrow$ **Refleksiv**. A er ikke en tom mengde og R er ikke en tom relasjon + relasjonen R er refleksiv på A $\Rightarrow$ **Ikke irrefleksiv**.

Alle elementene i relasjonen R er refleksive. En refleksiv relasjon bryter ikke med symmetriske egenskaper siden hvis $\langle x,x\rangle \in R$ vil x ha en symmetrisk relasjon til seg selv. $\Rightarrow$ **Symmetrisk**.

Alle elementene i relasjonen R er symmetriske på mengden A $\Rightarrow$ **Ikke anti-symmetrisk**.

Ingen av elementene i relasjonen R bryter med påstanden hvis aRb og bRc så aRc siden alle elementene relaterer til seg selv $\Rightarrow$ **Transitiv**.

(c) $\langle 2,2\rangle \notin R$ og $\langle 1,1\rangle \in R \Rightarrow$ **Hverken Refleksiv eller irrefleksiv**.

$\langle 1,a\rangle \in R$ og $\langle a,1\rangle \in R$ og alle andre elementer i relasjonen R relaterer til seg selv $\Rightarrow$ **Symmetrisk**.

$\langle 1,a\rangle \in R$ og $\langle a,1\rangle \in R \Rightarrow$ **Ikke anti-symmetrisk**.

For x, y, z i relasjonen R relaterer x aldri til z, mens alle relasjoner mellom x og y er symmetriske $\Rightarrow$ **Transitiv**.

(d) Ingen av elementene i mengden A relaterer til seg selv i relasjonen R $\Rightarrow$ **Irrefleksiv**.

$\langle 1,3\rangle \in R$ men $\langle 3,1\rangle \notin R \Rightarrow$ **Ikke symmetrisk**.

For enhver relasjon $\langle x,y\rangle$ i relasjonen R finnes det ingen tilsvarende relasjon $\langle y,x\rangle \Rightarrow$ **Anti-symmetrisk**.

Ingen av elementene i relasjonen R bryter med påstanden hvis aRb og bRc så aRc. $\langle 1,3\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 1,a\rangle$ stemmer overens med denne påstanden. Siden 2 og b ikke blir relatert til, eller relaterer til noe annet enn 1 bryter heller ikke $\langle 1,2\rangle, \langle 1,b\rangle$ med påstanden. $\Rightarrow$ **Transitiv**.

Oppgave 6

For at x/y skal være et naturlig tall større enn 1 må relasjonen R bestå av delelige par x, y av tallene i A. Dette gir oss følgende mengde for R der hvert element kan dele det første tallet på det andre og få et tall innenfor de spesiserte kravene.

$$R = \{\langle 3,1\rangle, \langle 6,1\rangle, \langle 7,1\rangle, \langle 12,1\rangle, \langle 15,1\rangle, \langle 17,1\rangle, \langle 15,3\rangle, \langle 12,3\rangle, \langle 12,6\rangle\}$$

Relasjonen R vil ha egenskapene:
Irrefleksiv - Fordi et hvert tall delt på seg selv = 1. Dermed ville kravet om at R skal være en relasjon bestående av naturlige tall større enn 1 ikke vært oppfylt dersom refleksive relasjoner hadde vært med.
Ikke symmetrisk - Fordi når du deler et tall på et annet vil du kun få et naturlig tall når du deler den ene veien. Altså $x/y \in \mathbb{N} \Rightarrow y/x \notin \mathbb{N}$
Antisymmetrisk - Fordi forklaringen gitt for symmetri gjelder for alle tall i R.
Ikke transitiv - Fordi for en vilkårlig x, y, z i R har at $x/y \in \mathbb{N}$ ingen sammenheng med hvorvidt $y/z \in \mathbb{N}$ eller $x/z \in \mathbb{N}$

Oppgave 7

(a) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

(b) $\emptyset$

(c) $\{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle\}$

(d) $\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}$

Oppgave 8

(a) Relasjonen er irrefleksiv fordi hvis A hadde relatert til seg selv hadde vi fått en tom mengde, hvilket bryter med kravet om at mengden må bestå av ett element.

(b) For at $A \backslash B$ skal ha ett element, må $B \subseteq A$. Siden delmengde-relasjonen $\subseteq$ er transativ (På grunn av definisjonen av transitivitet) vil derfor relasjonen være transitiv.

(c) Ikke symmetrisk fordi hvis vi gjør $B \setminus A$ får vi ikke det samme som når vi gjør $A \setminus B$. F.eks: $\{1,2\} \setminus \{1\} \neq \{1\} \setminus \{1,2\}$

(d) Anti-symmetrisk fordi forklaringen for at relasjonen ikke er symmetrisk gjelder for alle elementer i relasjonen.