Работа 1.4.1
Изучение физического маятника

Константин Ерёмин Б03-204

Ноябрь 2022

1 Введение

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции.

В работе используются: физический маятник в виде однородного стержня, опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

2 Теоретическое описание работы

Физическим маятником называют твёрдое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Его движение описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I — момент инерции маятника, φ — угол отклонения маятника от положения равновесия, t — время, M — момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (1) используется стальной стержень длиной l. На призме закрепляется опорная призма, ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перремещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника равен

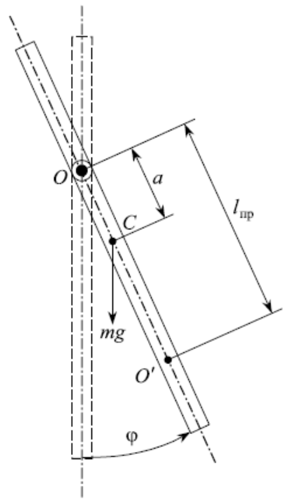

Рис. 1: Физический маятник

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \tag{2}$$

где m — масса маятника.

Период колебаний *физического* маятника определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}}. \tag{3}$$

Период колебаний *математического* маятника определяется формулой

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}}, \tag{4}$$

где l' — длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{5}$$

называют приведённой длиной физического маятника. Точку O', отстоящую от точки опоры O на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания обратимы, т.е. при качании вокруг точки O' период будем таким же, как и при качании вокруг точки O. Справедливость этого утверждения проверяется в настоящей работе, также проверяется формула 3. В качестве математического маятника используется маленький свинцовый шарик, длину подвеса которого можно изменять.

3 Ход работы

3.1 Подбор амплитуды

Найдём период колебаний по продолжительности одной сотни колебаний при различных начальных отклонениях φ_0, что отражено в таблице. Учтём ошибки измерения: абсолютная погрешность измерения времени человеком составляет 0.3 секунды (время реакции), погрешнось секундомера — 0.1 секунды. Таким образом, при отсчёте сотни колебаний ошибки уменьшатся в *сто* раз и полная погрешность составит

$$\sigma_T = \sqrt{\left(\frac{0.3}{100}\right)^2 + \left(\frac{0.1}{100}\right)^2} \approx 0.003 \text{ с}$$

.

$\varphi_0,^\circ$	10	6	2.5
τ, с	161.0	160.8	162.4
T, с	1.610	1.608	1.624

Таблица 1: Измерение периодов колебаний при различных углах отклонения

При непосредственной экспериментальной работе период будет измеряться по времени *20* колебаний, и в таком случае погрешность составляет $\underline{\sigma_T \approx 0.016 \text{ с}}$, поэтому в эсперименте можно использовать начальные отклонения в диапазоне 2.5–10°, так как в пределах данной погрешности периоды колебаний совпадают.

3.2 Проведение серии измерений

Исследуем зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс: будем измерять T при различных a, занося результаты в таблицу 2. Построим график $T(a)$ (рисунок 2). Как и ожидалось, зависимость $T(a)$ не является линейной. Преобразуем формулу 3 и построим линейный график $T^2a\,(a^2)$ (рис. 3):

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g}a^2 + \frac{4\pi^2}{g}\frac{l^2}{12} \tag{6}$$

a, м	0.46	0.44	0.4	0.38	0.34	0.3	0.25	0.18	0.12	0.06
t, с	32.2	31.9	31.32	31.16	30.81	30.5	30.55	31.9	35.45	45.27
T, с	1.61	1.60	1.57	1.56	1.54	1.53	1.53	1.56	1.77	2.26

Таблица 2: Измерения периодов колебаний

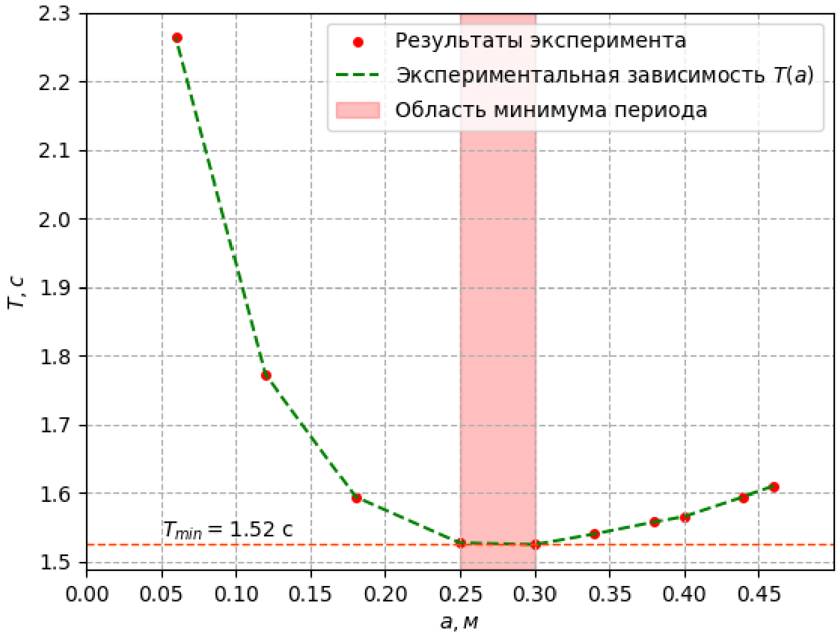

Рис. 2: График $T(a)$

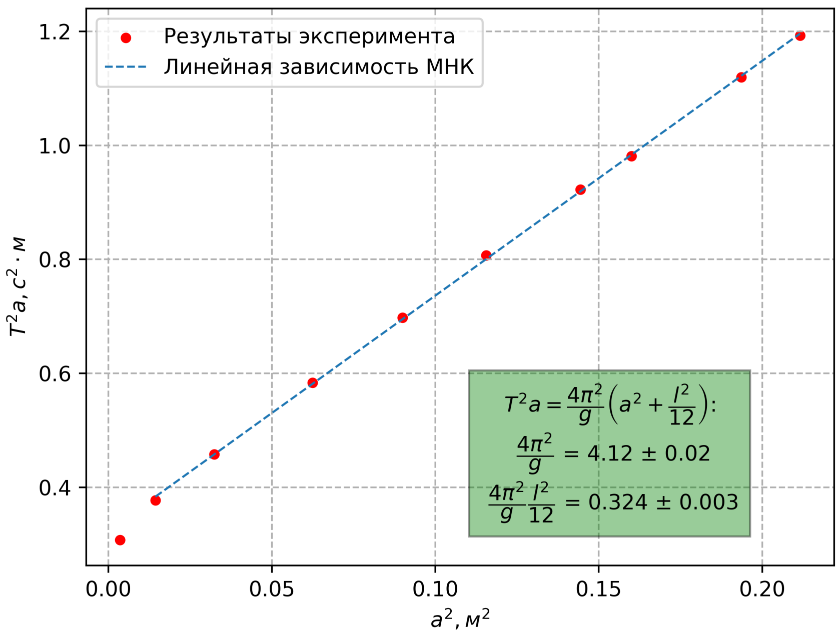

Рис. 3: График $T^2 a\,(a^2)$

По методу наименьших квадратов определим коэффициенты $\frac{4\pi^2}{g}$ и $\frac{l^2}{12}$. Погрешности коэффициентов найдём по формулам:

$$k = \frac{4\pi^2}{g} = 4.12: \quad \varepsilon_k^2 = 4 \cdot \varepsilon_T^2 + \varepsilon_a^2 \approx 4 \cdot \frac{0.016}{1.5}^2 + \frac{0.0025}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_k \approx 0.033 \Rightarrow \sigma_k = \sqrt{0.02^2 + (0.033 \cdot 4.12)^2} \approx 0.14$$

$$b = \frac{4\pi^2}{g}\frac{l^2}{12} = 0.324: \quad \varepsilon_b^2 = 4 \cdot \varepsilon_T^2 + \varepsilon_a^2 + \varepsilon_k^2 \approx 4 \cdot \frac{0.016}{1.5}^2 + \frac{0.0025}{0.1}^2 + 0.033^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon_b \approx 0.047 \Rightarrow \sigma_b = \sqrt{0.003^2 + (0.324 \cdot 0.047)^2} \approx 0.016$$

Находим искомые величины и их погрешности из полученных коэффициентов:

$$g = \frac{4\pi^2}{4.12} \approx 9.58 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \quad \varepsilon_g = \varepsilon_k \Rightarrow \sigma_g = g \cdot 0.033 = 0.32 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$l = \sqrt{12 \cdot 0.324 \cdot \frac{g}{4\pi^2}} \approx 0.97 \text{ м} \quad \varepsilon_l = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_g\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_b\right)} \approx 0.074 \Rightarrow \sigma_l = l \cdot 0.074 = 0.072 \text{ м}$$

3.3 Определение приведённой длины

Подберём длину математического маятника, у которого период совпадает с периодом физического маятника с $a = 20$ см. При визуальном наблюдении 30 колебаний периоды равны (то есть, принимая погрешность измерения равной 0.03 секунды, получаем, что периоды равны с погрешностью $\sigma = \sqrt{2 \cdot 0.03^2} \approx 0.04$ секунды) при $l \approx 60.5 \pm 0.2$ см. Приведённая длина, полученная экспериментально, следовательно, равна 60.5 ± 0.2 см. Согласно формуле 5 $l_{\text{прив.}} = 61.7$ см, что не совпадает в пределах погрешности с экспериментально полученным значением. Для более точного определения приведённой длины следовало сравнивать периоды колебаний мат. и физ. маятников по большему промежутку времени.

3.4 Проверка обратимости маятника

Проверим обратимость маятника при $a = 20$ см, $l_{\text{прив.}} = 61.7$ см. Измерим время двадцати колебаний и найдём период: $T_a = 31.52 \div 20 = 1.576 \pm 0.015$ с.

Теперь точку подвеса разместим на расстоянии $a' = l_{\text{прив.}} - a = 41.7$ см от центра масс маятника. Период равен $T_{a'} = 31.78 \div 20 = 1.589 \pm 0.015$ с.

В пределах погрешностей периоды совпадают.

4 Вывод

В ходе работы по косвенным измерениям были найдёны ускорение свободного падения и длина стержня.

$$g_{\text{экс}} = 9.58 \pm 0.32 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \qquad \left(g = 9.81 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}\right)$$
$$l_{\text{экс}} = 0.97 \pm 0.07 \text{ м} \qquad (l = 1\text{м})$$

Также не вполне успешно была проверна формула для приведённой длины:

$$l_{\text{экс}} = 60.5 \pm 0.2 \text{ см} \neq l_{\text{теор}} = 61.7 \text{ см}$$

Однако обратимость маятника, при наблюдении которой использовалась теоретическая формула, была доказана точно.