

Работа 1.2.4

Определение главных моментов инерции твёрдых тел с помощью крутильных колебаний

Константин Ерёмин Б03-204

Ноябрь 2022

1 Введение

Цель: измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закреплённого в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

В работе используются: установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых твёрдых тел, секундомер.

2 Теоретическое описание работы

Инерционные свойства тела при вращении определяет тензор инерции, матрица которого в некоторой С.О. имеет диагональный вид. Элементы этой матрицы: I_x , I_y , I_z — главные моменты инерции тела. Геометрический образ тензора инерции — эллипсоид, заданный уравнением $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции относительно произвольной оси.

Крутильные колебания описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -f \varphi \quad (1)$$

В уравнении 1 I и I_p — моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, φ — модуль кручения проволоки. В таком случае период крутильных колебаний можно найти по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (2)$$

На рисунке 1 показан прямоугольный параллелепипед с главными осями AA' , BB' , CC' , которым соответствуют моменты инерции I_x , I_y , I_z . Далее приведены формулы, связывающие периоды колебаний относительно главных осей с периодами колебаний относительно некоторых других осей. Данные выражения получены с использованием формулы 2, связывающей моменты инерции с периодами колебаний.

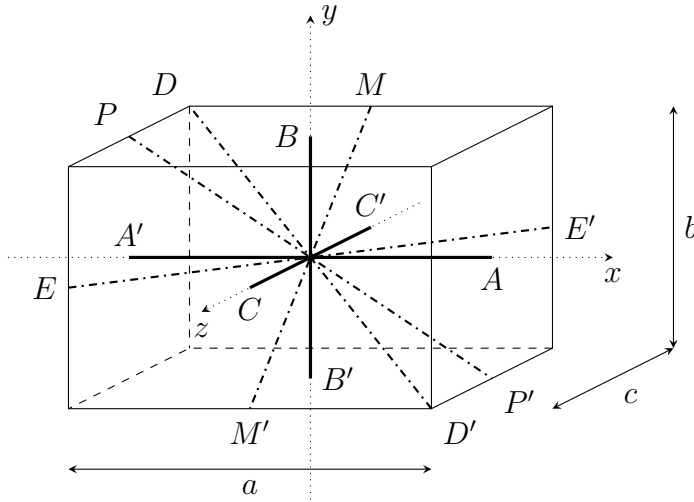


Рис. 1: Оси вращения параллелепипеда

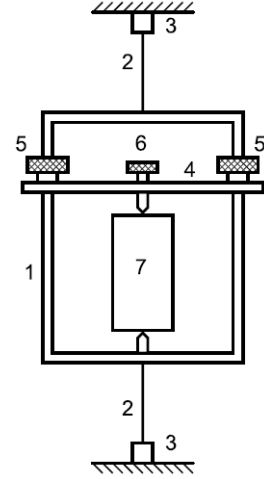


Рис. 2: Установка

$$(a^2 + b^2 + c^2) T_D^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (3)$$

$$(b^2 + c^2) T_M^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (4)$$

$$(a^2 + c^2) T_E^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 \quad (5)$$

$$(a^2 + b^2) T_P^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 \quad (6)$$

Приведённые соотношения будут проверены экспериментально.

Описание установки

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний (рис. 2). Рамка 1 жёстко соединена с проволокой 2, закреплённой зажимами 3, задающими начальное закручивание. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется тело 7, имеющее выемки для его закрепления под различными углами.

3 Ход работы

3.1 Измерение размеров тел

Перед исследованием крутильных колебаний были произведены измерения размеров тел (таблицы 1, 2), при этом для нахождения средних длин сторон и их погрешностей были использованы следующие формулы:

$$\langle d \rangle = \frac{\sum d_i}{N} \quad \sigma_d = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \langle d \rangle)^2}{N - 1}} \quad \sigma_{\langle d \rangle} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{N}} \quad \sigma_{\text{полн}} = \sqrt{\sigma_{\langle d \rangle}^2 + \Delta_d^2}$$

В результате были получены значения с относительной погрешностью не более 0.1%:

- Куб: $a = 92.66 \pm 0.06$ мм

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, мм	92.4	92.6	92.7	92.6	92.7	92.8	92.7	92.8	92.6	92.7

Таблица 1: Измерение размеров куба

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, мм	150.3	150.3	150.3	150.3	150.3	150.4	150.3	150.3	150.3	150.3
b, мм	100.3	100.4	100.5	100.3	100.4	100.4	100.5	100.5	100.5	100.4
c, мм	50.4	50.5	50.5	50.6	50.6	50.5	50.6	50.5	50.5	50.5

Таблица 2: Измерение размеров параллелепипеда

- Параллелепипед: $a = 150.31 \pm 0.05$ мм, $b = 100.42 \pm 0.06$ мм, $c = 50.51 \pm 0.05$ мм

Найдём моменты инерции тел, зная их размеры и массы ($m_{\text{куб}} = 1085.5 \pm 0.05$ г, $m_{\text{пар-д}} = 2081.9 \pm 0.05$ г), по формулам:

$$I_x = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \quad I_y = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad I_{\text{куб}} = \frac{ma^2}{6}$$

- Куб: $I_{\text{куб}} = 15.53 \pm 0.02$ кг · см²
- Параллелепипед: $I_x = 21.92 \pm 0.03$ кг · см², $I_y = 43.62 \pm 0.06$ кг · см², $I_z = 56.65 \pm 0.08$ кг · см²

Тогда для параллелепипеда получаем следующие отношения моментов инерции главных осей:

$$I_y : I_x = 2.000 \pm 0.004 \quad I_z : I_y = 1.299 \pm 0.003 \quad I_z : I_x = 2.584 \pm 0.005$$

3.2 Измерение периодов колебаний

Далее было проведено знакомство с установкой и была проверена корректность её работы: крепление проволоки, работа устройства для возбуждения колебаний, устойчивость крутильных колебаний.

Затем измерялись периоды колебаний куба и параллелепипеда вокруг различных осей. Период считался по времени 12 колебаний. Результаты можно увидеть в таблицах 3 и 4. Погрешность определения периода оценим так: абсолютная погрешность измерения составляет 0.3 с (скорость реакции), так что $\varepsilon_T = \frac{0.3}{12T} \sim \frac{0.3}{12} \approx 0.03 = 3\%$.

n \ T, с	T^p	$T_{1/2}^p$	$T_{г.о.}^k$	T_D^k	T_E^k
1	2.56	2.56	3.03	3.01	3.01
2	2.55	2.58	3.05	3.07	3.02
3	2.63	2.57	3.06	3.03	3.04
$\langle T \rangle$, с	2.58	2.57	3.05	3.04	3.02

Таблица 3: Измерения периодов колебаний рамки и куба

$\begin{matrix} T, \text{ c} \\ n \end{matrix}$	T_A	T_B	T_C	T_E	T_M	T_P	T_D
1	3.18	3.7	3.98	3.28	3.76	3.35	3.4
2	3.18	3.73	3.98	3.28	3.78	3.36	3.41
3	3.2	3.7	3.97	3.31	3.77	3.4	3.41
$\langle T \rangle, \text{ c}$	3.19	3.71	3.98	3.29	3.77	3.37	3.41

Таблица 4: Измерения периодов колебаний параллелепипеда

3.3 Проверка теоретической зависимости

Проверим теоретическую связь между размерами тела и периодами колебаний:

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2 + c^2) T_D^2 &= a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \\
 (b^2 + c^2) T_M^2 &= b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \\
 (a^2 + c^2) T_E^2 &= a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 \\
 (a^2 + b^2) T_P^2 &= a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2
 \end{aligned}$$

Для этого из левой части каждого равенства вычтем правую, и, пренебрегая погрешностью измерения размеров тела по сравнению с погрешностью периода колебаний, получим погрешность разности по формуле:

$$\sigma^2 = ((a^2 + b^2) 2T_M \sigma_M)^2 + (a^2 2T_x \sigma_x)^2 + (b^2 2T_y \sigma_y)^2$$

ось	Δ	σ_Δ
DD'	514	8722
MM'	372	3685
EE'	1837	6611
PP'	2403	8209

для последнего равенства (для остальных формула аналогичная). Полученные разности и их погрешности занесены в таблицу 5. Все разности оказались в пределах погрешностей, так что можно считать теоретические соотношения верными.

Таблица 5: Проверка теории (размерности: $\text{мм}^2 \cdot \text{с}^2$)

3.4 Построение эллипсоида инерции

Для осей в главных плоскостях вычислим величину $1/\sqrt{T^2 - T_p^2}$, пропорциональную расстоянию от центра масс тела до точки пересечения эллипсоида с этой осью. В соответствующих координатах изобразим эллипсоид инерции параллелепипеда и куба (рис. 3 и 4). По длинам осей эллипсоидов находятся отношения между моментами инерции.

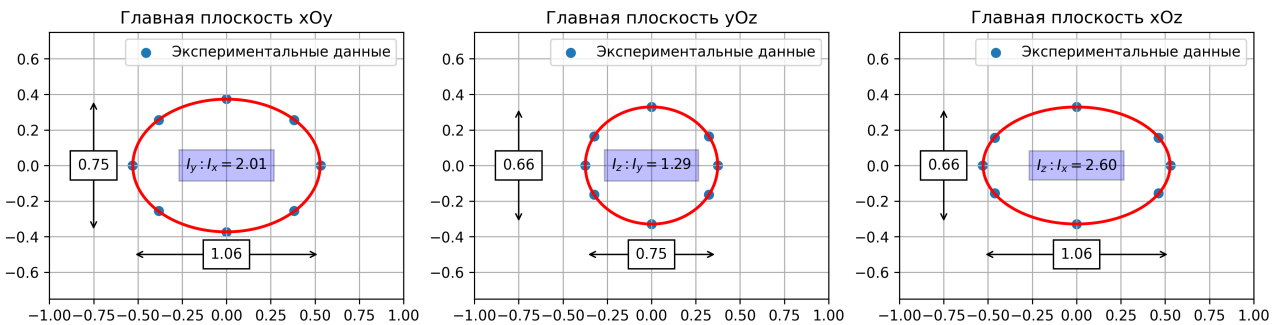


Рис. 3: Эллипсоид инерции параллелепипеда

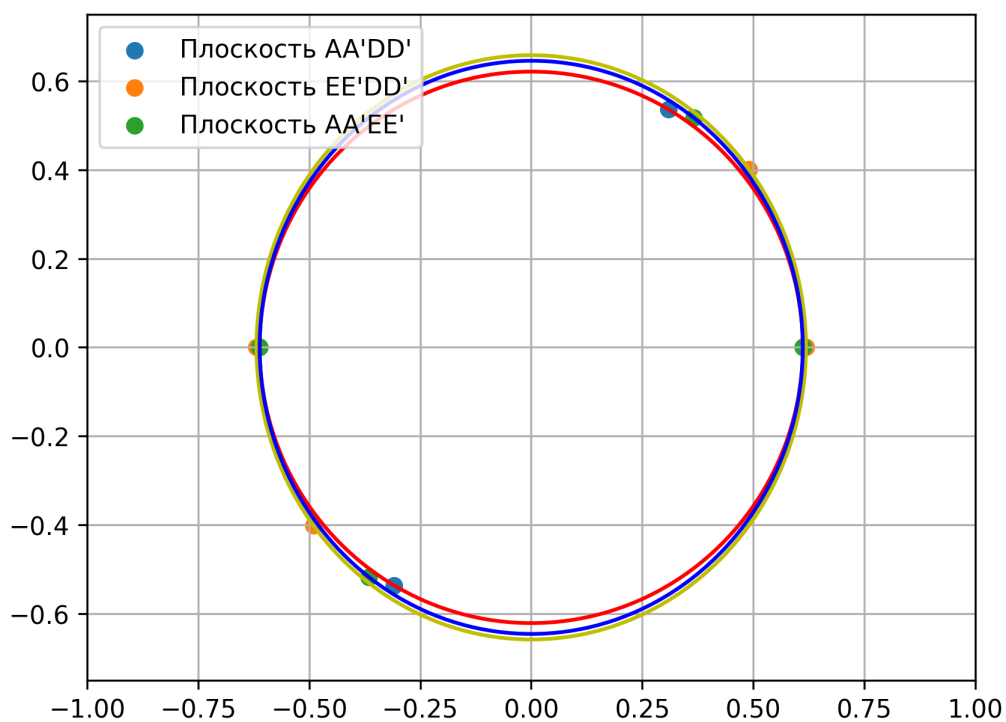


Рис. 4: Эллипсоид инерции куба

4 Вывод

В ходе работы были проверены некоторые теоретические соотношения теории крутильных колебаний и построены эллипсоиды инерции, с помощью которых затем была подтверждена правильность расчётов моментов инерции относительно различных осей тел.