$$V=H^1(0,L),\quad (u,v)=\int_0^L uv\,dx,\quad \|u\|=(u,u)^{1/2},\quad \|u\|_V^2=\|u\|^2+\|u'\|^2$$

$$(A_1\theta,v)=a(\theta',v')+\beta(\theta(0)v(0)+\theta(L)v(L)),\quad (A_2\varphi,v)=\alpha(\varphi',v')+\gamma(\varphi(0)v(0)+\varphi(L)v(L))$$

$$k_1=\inf_{v\in V,\|v\|_V=1}(A_1v,v),\quad k_2=\inf_{v\in V,\|v\|=1}(A_2v,v)$$

Оценим k_1,k_2 снизу. Пусть $u\in V$. Рассмотрим интегралы

$$\int_0^L x(u^2)'\,dx = xu^2|_0^L-\int_0^L u^2\,dx = Lu^2(L)-\|u\|^2,$$
$$\int_0^L (x-L)(u^2)'\,dx=(x-L)u^2|_0^L-\int_0^L u^2\,dx=Lu^2(0)-\|u\|^2$$

и сложим данные равенства:

$$2\|u\|^2=L(u^2(0)+u^2(L))-\int_0^L(2x-L)uu'\,dx\le L(u^2(0)+u^2(L))+L\|u\|\cdot\|u'\|\le$$
$$\le L(u^2(0)+u^2(L))+\|u\|^2+\frac{L^2}{4}\|u'\|^2,$$

отсюда

$$\|u\|^2\le\frac{L^2}{4}\|u'\|^2+L(u^2(0)+u^2(L))\le\max\left\{\frac{L^2}{4\alpha},\frac{L}{\gamma}\right\}\big(\alpha\|u'\|^2+\gamma(u^2(0)+u^2(L))\big).\qquad(1)$$

Следовательно, $k_2\ge\underline{k_2}\equiv\min\left\{\frac{4\alpha}{L^2},\frac{\gamma}{L}\right\}$.

Из (1) следует, что

$$\|u\|_V^2=\|u\|^2+\|u'\|^2\le\left(\frac{L^2}{4}+1\right)\|u'\|^2+L(u^2(0)+u^2(L))\le$$
$$\le\max\left\{\frac{L^2/4+1}{a},\frac{L}{\beta}\right\}\big(a\|u'\|^2+\beta(u^2(0)+u^2(L))\big).$$

Следовательно, $k_1\ge\underline{k_1}\equiv\min\left\{\frac{a}{L^2/4+1},\frac{\beta}{L}\right\}$.

Чтобы оценить k_2 сверху, рассмотрим функции $u_1(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}$, $u_2(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\|=\|u_2\|=1$. Поскольку $(A_2u_1,u_1)=\frac{\pi^2\alpha}{L^2}$, $(A_2u_2,u_2)=\frac{2\gamma}{L}$, то $k_2\le\overline{k_2}\equiv\min\left\{\frac{\pi^2\alpha}{L^2},\frac{2\gamma}{L}\right\}$.

Чтобы оценить k_1 сверху, рассмотрим функции $u_1(x)=\left(\frac{L}{2}+\frac{\pi^2}{2L}\right)^{-1/2}\sin\frac{\pi x}{L}$, $u_2(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\|_V=\|u_2\|_V=1$. Поскольку $(A_1u_1,u_1)=\frac{\pi^2a}{L^2+\pi^2}$, $(A_1u_2,u_2)=\frac{2\beta}{L}$, то $k_1\le\overline{k_1}\equiv\min\left\{\frac{\pi^2a}{L^2+\pi^2},\frac{2\beta}{L}\right\}$.

Далее оценим $\|A_1\|$ сверху. Из результатов [1, с. 244] следует, что для любой функции $u \in V$:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} u'(\xi)\,d\xi + \frac{1}{L}\int_0^L u(\xi)\,d\xi, \quad \text{где } x_0 \in [0, L],$$

отсюда, используя неравенство $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$, получаем, что

$$\|u\|_{C[0,L]} \le \int_0^L |u'(x)|\,dx + \frac{1}{L}\int_0^L |u(x)|\,dx \le \sqrt{L}\|u'\| + \frac{1}{\sqrt{L}}\|u\| \le$$
$$\le \left(2L\|u'\|^2 + \frac{2}{L}\|u\|^2\right)^{1/2} \le (2\max\{L, 1/L\})^{1/2}\|u\|_V.$$

Следовательно,

$$\|A_1\| = \sup_{\|v\|_V=1}(A_1 v, v) = \sup_{\|v\|_V=1}\big(a\|v'\|^2 + \beta(v^2(0) + v^2(L))\big) \le$$
$$\le \sup_{\|v\|_V=1}\big(a\|v\|_V^2 + 2\beta\|v\|^2_{C[0,L]}\big) \le \overline{N_1} \equiv a + 4\beta\max\{L, 1/L\}.$$

Чтобы оценить $\|A_1\|$ снизу, рассмотрим функции $u_1(x) = \left(\frac{L}{2} + \frac{\pi^2}{2L}\right)^{-1/2}\sin\frac{\pi x}{L}$, $u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$, $\|u_1\|_V = \|u_2\|_V = 1$. Поскольку $(A_1 u_1, u_1) = \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}$, $(A_1 u_2, u_2) = \frac{2\beta}{L}$, то $\|A_1\| \ge \underline{N_1} \equiv \max\left\{\frac{\pi^2 a}{L^2+\pi^2}, \frac{2\beta}{L}\right\}$.

Список литературы

[1] Zeidler E. Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators. Springer, 1990.