Young-Ungleichung $p,q>0$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$a,b>0 \Rightarrow a^{1/p}\cdot b^{1/q} \le \frac{1}{p}\cdot a+\frac{1}{q}\cdot b$

Hölder-Ungl. $x_i, y_i \ge 0$ für $i=1,\dots,n$

(p,q wie oben) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_i y_i^q\right)^{1/q}$

Minkowski $p\ge 1$; $x_i,y_i\ge 0\ \forall i$

$\Rightarrow \left(\sum_i (x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_i x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_i y_i^p\right)^{1/p}$

HS d. Algebra Jedes $\mathbb{C}$-Polynom mit $\deg p\ge 1$ hat eine Nullstelle ($\mathbb{C}$ alg. abgeschlossen)

$K(t)$ "vernünftig" mit Periode L

$\rightarrow K(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi}{L}kt}$ **Fourierreihe**

$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t)|\,dt<\infty$ **Fourier-Transformation**

$\Rightarrow \hat{K}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)e^{-ikt}\,dt$

$K(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(k)e^{ikt}\,dk$

$K(t)$ auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ exp. abfallend

$\Rightarrow K(t)=\int_0^{\infty} L(\lambda)e^{-\lambda t}\,d\lambda$ **Laplace-Transf.**

Fourier-Koeffizient

$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx$

Operatornorm L: lin. Abb.

$\|L\|:=\sup_{v\in\mathbb{R}^n}\frac{\|Lv\|}{\|v\|}=\sup_{\|v\|=1}\|Lv\|$

$X\subset\mathbb{R}^m$ offen, konvex; $f: X\rightarrow\mathbb{R}^m$ diffbar

falls $\exists q\ge 0$ s.d. $\|f'\|\le q$

$\Rightarrow \forall x,y\in X$ gilt: $\|f(x)-f(y)\|\le q\|x-y\|$

Banach'scher Fixpunktsatz

kontrahierende Abb. $f: X\rightarrow X$ (X vollständig)

$\rightarrow \exists!$ Fixpunkt a ($f(a)=a$)

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)=a$; $d(a,x_n)\le\frac{q^n}{1-q}d(x_0,x_1)$

(Ω,d') metr. Raum; $\forall t\in\Omega$ sei $f_t: X\rightarrow X$

wenn gilt: a) $\exists q<1$ s.d. $\forall x,y\in X, t\in\Omega$
$d(f_t(x),f_t(y))\le q\,d(x,y)$

b) $\forall x\in X$: $\Omega\rightarrow X$, $t\mapsto f_t(x)$ stetig

$\rightarrow$ $\Omega\rightarrow X$, $t\mapsto a(t)$ ex. und ist stetig

---

Winkelfunktionen

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$; $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\exp(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$

$\sin x=\operatorname{Im}(e^{ix})=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

$\cos x=\operatorname{Re}(e^{ix})=\underbrace{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}_{*}$

sinh, cosh: * ohne i's

$\sin^2x+\cos^2x=\cosh^2x-\sinh^2x=1$

Träger $\operatorname{supp} f=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\neq 0\}}$

Stetigkeit $f: X\rightarrow Y$ stetig in $a\in X$:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: d(a,x)<\delta\Rightarrow d'(f(a),f(x))<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall U(f(a))\ \exists V(a)$ s.d. $f(V)\subset U$

$\Leftrightarrow \forall U(f(a))$: $f^{-1}(U)$ ist Umg. von a

$\Leftrightarrow$ Urbilder offener Mengen sind offen Urdef.

$\Leftrightarrow$ $x\in E$ Häufungspkt.: $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x)=f(a)$

od. $x\in E$ Einsiedlerpunkt

ZWS $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ stetig

$\forall C\in[f(a),f(b)]\ \exists c\in[a,b]$ mit $C=f(c)$

Extremwertsatz (Weierstrass) (gilt auch für komp. Mengen)

f auf abg. Intervall stetig ($\rightarrow$ glm. stetig)

$\rightarrow$ • beschränkt • nimmt Extrema an.

Homöomorphismus f bijektiv, stetig, f^{-1} stetig

C^m-Diffeom.: Homöom. mit $f, f^{-1}\in C^m$

Kompaktheit u. Stetigkeit $f: X\rightarrow Y$ stetig zw. metrischen Räumen; $K\subset X$ kompakt

$\Rightarrow f(K)\subset Y$ kompakt.

Grenzwert einer Fkt. $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in E}} f(x) = A$

$\Leftrightarrow \forall \{x_n\}$ in $E \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

---

f,g diffbar auf (a,b) **l'Hôpital**

$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Annahme $A = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ex. &

① $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} g(x) = 0$

od. ② $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Wurzel- & Quotientenkriterium

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

$\beta := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

α od. $\beta > 1 \Rightarrow$ div. ; α od. $\beta < 1 \Rightarrow$ konv.

Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$R := 1/\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ od. $R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

$|z| < R \Rightarrow$ konv. ; $|z| > R \Rightarrow$ divergent.

Verdichtungssatz (Cauchy)

~~f(x)~~ $\{a_n\}$ positiv, mon. fallend

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$ konv.

Summe ↔ Integral $f(x)$ auf $[1,\infty)$ def.

$f(x) \geq 0$ mon. fallend, auf jedem Teilintervall R-integrabel

$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konv. $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konv.

Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$;

$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$ für $|q| < 1$;

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$;

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$; $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $(q \neq 1)$

Mengen / metrische Räume

Metrik auf Menge X $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

- $d(x_1,x_2) \geq 0$; $d(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$;
- $d(x_1,x_3) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3)$

$\longrightarrow (X,d)$ metr. Raum

(X,d) heisst **vollständig** falls in X jede Cauchy-Folge konvergent ist

---

d, d' heissen **äquivalent** (Äquivalenzrel.):

$\exists c, C > 0$ s.d. $\forall x,y \in X$:

$c\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C\, d(x,y)$

$G \subset X$ **offen**: $\forall x \in G \; \exists \delta > 0$ s.d.

$K(x,\delta) = \{x' \in X \mid d(x,x') < \delta\} \subset G$

F **abgeschlossen**: $X \setminus F$ offen

Sei $E \subset X$. E abgeschlossen $\Leftrightarrow E = \overline{E}$

$\Leftrightarrow$ alle Häufungspunkte von E liegen in E

(i) Vereinigung offener Mengen offen

(ii) Durchschn. abg. Mengen abg.

(iii) " endl. viele offene M. offen

(iv) Vereinigung endl. viele abg. M. abg.

(X,d) heisst **zusammenhängend**:

$(\neg\exists)$ A,B offen ; $A,B \neq \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = X$

$\Leftrightarrow (\neg\exists)$ A,B abg; $A,B \neq \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = X$

$\Leftrightarrow$ A offen & abg. $\Rightarrow A = X$ od. $A = \emptyset$

(X,d) **weg-zusammenhängend**:

$\forall x,y \in X \; \exists$ stetiger Weg $\gamma: [0,1] \rightarrow X$

mit $\gamma(0) = x$; $\gamma(1) = y$ ($\Rightarrow$ zshgd.)

Umgebung $U \subset X$ s.d. $\exists \delta \geq 0 : K(x,\delta) \subset U$.

x **innerer Pkt.** von E:

$\exists \delta > 0$ s.d. $K(x,\delta) \subset E$

x **Randpkt.** $\forall U(x)$ enthalten min. 1 Pkt von E und $X \setminus E$.

x **Häufungspkt.** $\forall U(x)$ enthalten ∞ viele Pkte von E.

$A \subset X$: $\overline{A}$: kleinste abg. Menge mit $A \subset \overline{A}$ **Abschluss**

Inneres: $\mathring{A} = X \setminus (\overline{X \setminus A})$

$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ **Rand**

$X \subset \mathbb{R}^m$ **konvex**: $\forall x,y \in X \; [x,y] \subset X$.

$K \subset X$ **kompakt:**

jede Überdeckung hat endl. Teilüberd.

$\Leftrightarrow$ $\forall \{x_n\}$ haben Teilfolge, die gegen ein $x \in X$ konv.

$\Leftrightarrow$ (in $\mathbb{R}^n$): K abg. & beschränkt

K kompakt $\rightarrow$ K abgeschlossen

$K_1 \supset K_2 \supset \dots$ abst. Folge nichtleerer kompakter Mengen $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$

Sei $K \subset X$. Eine **Überdeckung** von K ist $(U_i)_{i \in I}$ mit $\bigcup_{i \in I} U_i \supset K$

Gebiet: offene zshgde Teilmenge von $\mathbb{R}^n$

$E \subset \mathbb{R}^n$ **zulässig**, falls:

· E beschränkt · ∂E L-0 Menge

Bsp: **Lebesgue-Nullmenge**

1) abzählbare Menge; 2) Vereinigung abzählbar vieler L-0 Mengen; 3) Teilmenge v. L-0 Menge

aber nicht!: $I_{a,b}$ für $a^i < b^i$ $\forall i$

Differenzieren

1. $(\text{const})' = 0$; 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

3. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$; 4. $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$

5. $\sin x' = \cos x$; 6. $\cos x' = -\sin x$;

7. $\tan x' = 1 + \tan^2 x$;

8. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; 12. $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{x^2+1}$

13. $\sinh' x = \cosh x$; 14. $\cosh' x = \sinh x$

15. $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$;

16. $\coth' x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$;

17. $\text{arsinh}' x = \left(\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

18. $\text{arcosh}' x = \left(\ln(x \pm \sqrt{x^2-1})\right)' = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

19. $(\text{artanh}\, x)' = (\text{arcoth}\, x)' = \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = \frac{1}{1-x^2}$;

Differenzierbarkeit: $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$; $E \subset \mathbb{R}^n$

f diffbar in x, falls $\exists L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lin.: $\forall h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + h \in E$:

$f(x+h) - f(x) = L(h) + \gamma(x,h)$ mit

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\gamma(x,h)\|}{\|h\|} = 0;$$

$L(h) = f'(x) \cdot h = df(x) \cdot h = Df(x) \cdot h.$

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Hat $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ alle part. Ableitungen in allen Pkten $\Rightarrow$ f diffbar

---

Jacobi-Matrix $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ diffbar

$\rightarrow (df(x) \cdot h)_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^j}{\partial x^i} h^i$

$\rightarrow \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)_{i,j}$ Jacobimatrix

---

Sei $f: U \subset \mathbb{R}^n$ offen $\rightarrow \mathbb{R}$. Besitzt f die part. Abl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ und sind diese stetig, so sind sie gleich.

Produkt- & Quotientenregel

$(\lambda_1 f + \lambda_2 g)' = \lambda_1 f' + \lambda_2 g'$

$f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$:

$(fg)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (falls $g(x) \neq 0$)

Bem. (Diffbarkeit folgt aus jener von f, g)

Kettenregel 1-dim: $f, g: E^{(1)} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Sei $X \subset \mathbb{R}^m$; $Y \subset \mathbb{R}^n$;

$f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(X) \subset Y$.

$g: Y \rightarrow \mathbb{R}^k$

f sei diffbar in x und g in $y = f(x)$

$\Rightarrow d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x)$

Spezialfall: $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^{(k)}(U)$, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^m$ s.d. $[x, x+h] \subset U$

$\varphi(t) = f(x + th)$

$\Rightarrow \partial_t^k \varphi = \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right)^k f(x + th)$

Mittelwertsatz

Seien $x(t)$, $y(t)$ stetig auf $[a,b]$, diffbar auf (a,b)

$\Rightarrow \exists \tau \in (a,b)$, s.d.

$$\frac{\dot{x}(\tau)}{\dot{y}(\tau)} = \frac{x(b)-x(a)}{y(b)-y(a)}$$

(1-D)

Spezialfall: $y = t$

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: E \to \mathbb{R}$ diffb (n-D)

$x \in E$, $h \in \mathbb{R}^n$ s.d. $[x, x+h] \subset E$

$\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+h)$ s.d.

$$f(x+h) - f(x) = df(\xi) \cdot h$$

Inverse Funktion

(1-D) Seien $f: X \rightleftarrows Y : f^{-1}$

$(X, Y \subset \mathbb{C})$ zueinander invers.

f diffbar in x_0, $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} stetig

$\Rightarrow f^{-1}$ diffbar in $f(x_0) =: y_0$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

(m-P) Sei $O \subset \mathbb{R}^m$ offen

$f: O \to \mathbb{R}^m \in C^{(p)}$; $x_0 \in O$

$df(x_0)$ invertierbar

$\Rightarrow \exists$ Umgebung U von x_0 & V von $y_0 := f(x_0)$, s.d.

$f|_U : U \to V$ ist $C^{(p)}$-Diffeomorph.

und $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$

Implizite Funktion

$p \geq 1$

Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $F^1, \dots, F^n \in C^{(p)}(U)$;

$(x_0, y_0) \in U$ mit $F^i(x_0, y_0) = 0 \ \forall i$,

s.d. $F_y'(x_0, y_0)$ invertierbar ist.

$\Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0$ und

$f: I_x^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x_0\| < \alpha\}$

$\longrightarrow I_y^n := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - y_0\| < \beta\}$

, $f \in C^{(p)}$, s.d. für $x, y \in I_x^m \times I_y^n$:

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

und $f'(x) = -(F_y'(x, f(x)))^{-1} \cdot F_x'(x, f(x))$

Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial (x^n)^2} = div(grad\, f)$$

Polar: $$\Delta f(r, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Zylinder:

$$\Delta f(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Kugel: $\Delta f(r, \vartheta, \varphi)$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

HS

Sei $f \in R([a,b])$; $x \in [a,b]$

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$$

f stetig in $x \Rightarrow F$ in x diffbar, $F'(x) = f(x)$

f auf $[a,b]$ stückweise stetig $\Rightarrow F$ ver. Stammfkt. von f.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$\alpha(y), \beta(y)$ diffbar auf $[c,d]$,

$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx\right] = f(\beta(y), y)\,\beta'(y)$$

$$- f(\alpha(y), y)\,\alpha'(y)$$ variable Grenzen.

Integrale

$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$; $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{ax+b}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln|cx+d| + C$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \log_a|x|\,dx = x(\log_a|x| - \log_a(e)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

3 (Integrale)

Flächenelemente Kugel: $r^2 \sin \vartheta$
Polar / Zylinder: r

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

Durchmesser von $[a^i, b^i]_{i\in\{1,\dots,n\}}$

$$\sqrt{\sum_i (b^i - a^i)^2}$$

Maschenweite: max. Durchmesser in Unterteilung

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ R-integrabel
$\Leftrightarrow$ f beschränkt & stetig ausserhalb einer Menge von Lebesgue-Mass 0.

part. Int. $\int u'v\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx$

Substitutionsregel:

1-D: F Stammfkt. von f,
$\varphi: \hat{I} \longrightarrow I$ diffbar
$\Rightarrow \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$

(n-dim) Seien $D_x, D_t \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,
$D_x D_t$ offen; $\varphi: D_t \to D_x$ diffeomorph
$f: D_x \to \mathbb{R}$ integrierbar mit komp. Träger
$\Rightarrow f\circ\varphi$ integrierbar,

$$\int f(x)\,dx = \int_{D_t} f(\varphi(t))\,|\det \varphi'(t)|\,dt$$

$D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ zulässig; $\varphi_1, \varphi_2: D \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $\varphi_1 \le \varphi_2$
$\Rightarrow E := \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} \mid y\in[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$
zulässig, für $f\in R(E)$ gilt:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_D \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Fubini: Seien $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^n$ zul.; $f\in R(X\times Y)$
$\Rightarrow \exists$ L-0-Mengen $N_x\subset X$; $N_y\subset Y$ s.d. $\forall x\in X\setminus N_x$:
$y \longmapsto f(x,y) \in R(Y)$
und $x \longmapsto \begin{cases} \int f(x,y)\,dy & x\in X\setminus N_x \\ 0 & x\notin X\setminus N_x\end{cases}$ auf X integrierbar

und $\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx$

f heisst auf $E\subset I$ integrierbar, falls $f\circ\chi(E)$ auf I integrierbar ist **Int. über Menge**

Parameterintegral $P = [a,b]\times[c,d]$
(i) f stetig auf P
$\rightarrow F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ stetig
(ii) f hat auf P stetige part. Abl. nach y
$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$

Linienintegral

$$\int_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{A}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_\gamma \langle \vec{A}, \vec{A}\rangle\, ds$$

über Gradientenfeld:

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f\cdot d\vec{s} = f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))$$

Kurvenintegral $f: E \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma f\,ds := \int_0^1 f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$$

γ: diffbare orientierte Kurve

Oberflächenintegral:
$G \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet; $\phi: G\to\mathbb{R}^3$
s.d. $d\phi(t^1, t^2)$ Rang 2 hat.

$$\vec{n} := \frac{\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\times\frac{\partial\phi}{\partial t^2}}{\left\|\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\times\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right\|}$$ or. Normaleneinheitsvektor

S: parametrisierte Fläche; f stetig auf S

$$\longrightarrow \int_S f\,d\sigma = \int_G f(\phi(t^1,t^2))\left\|\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\times\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right\|dt^1 dt^2$$

Fluss: $\int_{\partial D} \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds = \int_{\partial D} \vec{A}\times d\vec{s}$; $\vec{n}$ nach aussen

parametrisiert:

$$\int_S \vec{B}\,d\vec{\sigma} = \int_G \vec{B}(\phi(t^1,t^2))\left(\frac{\partial\phi}{\partial t^1}\times\frac{\partial\phi}{\partial t^2}\right)dt^1 dt^2$$

Bogenlänge: $\Gamma = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}$
$\Gamma: [a,b]\to$ einf. Weg d. Klasse $C^{(1)}$
$\longrightarrow$ Länge $= \int_a^b \|\dot{\Gamma}(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$

Rotationskörper

$$A = 2\pi\int_a^b f(z)\sqrt{1+f'(z)^2}\,dz$$

Graph einer Fkt. (φ)

$$A = \int_G \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

Eine Ausschöpfung einer Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Folge $\{E_n\}$ kompakter zul. Teilmengen $E_n \subset E$; $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$

uneig. Integral

(1-D) $f(x)$ auf $[a,\infty)$ def. und für $\forall b > a \in R([a,b])$

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

(n-D) f Fkt. auf E s.d. $\forall E' \subset E$ kompakt & zulässig $f|_{E'} \in R(E')$

falls: $\forall \{E_n\} \exists \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx = A$

und A unabh. von $\{E_n\}$ ist:

$$\int_E f(x)\,dx := A$$

E zul. $\Rightarrow$ uneig. Integral = Riemann-Int.

Cauchy-Kriterium

$\int_a^b f(x)\,dx$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in (a,b)$ s.d. $\forall b_1, b_2 > B$

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^{\omega} f(x)\,dx$ ex. 1D-Krit.

$\Leftrightarrow F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ beschränkt auf $[a,\omega]$

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in E$, $f|_{E'} \in R(E')$ n-D Krit.

für alle $E' \subset E$ zulässig,

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx$ ex. für eine Ausschöpfung

$\Rightarrow$ uneig. Integral ex.

Hauptwert: $HW\left(\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-1}^{-\delta} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{x}\right) (=0)$

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ $\leftarrow t = \tan\frac{x}{2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\to \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

Kochrezept: Integration rationaler Fkt.

1. Polynomdivision
2. Partialbruchzerlegung

$$R(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{a_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x-z_i)^j (x-\bar{z}_i)^j}$$

wenn $Q(x) = \prod_{i=1}^{m} (x-x_i)^{r_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} (x-z_i)^{s_i} (x-\bar{z}_i)^{s_i}$

3. Integration von

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}\,dx \leftarrow u = x + \frac{p}{2}, \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

$$\to \int \frac{\alpha u + \beta}{(u^2+a^2)^k}\,du$$

i) $\int \frac{\alpha u}{(u^2+a^2)^k}\,du \underset{t=u^2+a^2}{=} \frac{\alpha}{2} \int \frac{1}{t^k}\,dt$

ii) $I_k := \beta \int \frac{d}{x^2+a^2}$

$I_1 = \beta \int \frac{du}{(u^2+a^2)} = \frac{\beta}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$

$$I_{k+1} = \frac{1}{2ka^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^k} + (2k-1) I_k\right]$$

Vektoranalysis

Gradient: $(\operatorname{grad} f)(x) := (df(x))^t$

$= \vec{\nabla} f$; $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_{x^1} \\ \vdots \\ \partial_{x^n} \end{pmatrix}$

in Kugelkoord.

$$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

in Zylinderkoord.:

$$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergenz: $\operatorname{div} \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial A^n}{\partial x^n}$

Rotation $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Vektorpot. $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, homöom. zu Vollk., $\vec{B}$ Vektorfeld auf ganz U.

$\Rightarrow \exists$ "Vektorpotential" A mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}$

$\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$

4 (Vektoranalysis)

$\vec{A}$ heißt **konservativ**, falls für je 2 Punkte p, q und Wege γ_1, γ_2 mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$; $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = q$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

notwendige Bed.

$U \subset \mathbb{R}^n$ weg-zshgd, $\vec{A}$ ein stetiges, konservatives Vektorfeld auf U.

$\Rightarrow \vec{A}$ ist Gradientenfeld.

$(\exists f: U \to \mathbb{R}$ s.d. $\vec{A} = \text{grad} f)$

Äquiv. Aussage:

$U \subset \mathbb{R}^{2,3}$ offen, s.d. jeder stückweise diffbare, geschlossene Weg Rand $\partial \bar{D}$ eines komp. Gebietes in U ist, $\vec{A}$ auf ganz G def.

$\Rightarrow A$ konservativ $\Leftrightarrow \text{rot} \vec{A} \equiv 0$

Tangentialebene an d. Graphen von f in (x_0, y_0, z_0):

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0 + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)\}$$

$$= \{(x_0, y_0, z_0) + \dot{\gamma}(0) \mid \gamma: [-1,1] \to (x,y,f(x,y))\}$$

$$\gamma(0) = z_0$$

Normalenvektor: Vielfaches von

$$(\partial_x f, \partial_y f, -1)$$

Einheitstangentialvektor an γ:

$$A := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

Green / Stokes Sei $\bar{D}$ komp. Gebiet mit stückw. glattem Rand $\partial \bar{D}$.

$\vec{A}$ stetig diffbares Vektorfeld auf $\bar{D}$

$$\to \int_{\bar{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial \bar{D}} P dx + Q dy$$

$$\int_{\bar{D}} \text{rot} \vec{A}\, dx\,dy = \int_{\partial \bar{D}} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Green'sche Formeln

$$\int_{\bar{D}} \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx\,dy + \int_{\bar{D}} g \Delta f\, dx\,dy = \int_{\partial \bar{D}} (g \nabla f) \times d\vec{s}$$

$$\int_{\bar{D}} (g \Delta f - f \Delta g) dx\,dy = \int_{\partial \bar{D}} (g \nabla f - f \nabla g) \times d\vec{s}$$

Gauss (2-D)

$$\int_{\partial \bar{D}} \vec{A} \times d\vec{s} = \int_{\bar{D}} (\text{div} \vec{A})\, dx\,dy$$

Stokes (3-D)

S: Fläche im Raum mit stückw. glattem Rand ∂S, $\vec{A}$ diffb. Vektorfeld in einer Umgebung von S.

$$\int_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S (\text{rot} \vec{A})\, d\vec{\sigma}$$

Divergenzsatz (Gauss) 3-D

V kompaktes Gebiet in $\mathbb{R}^3$, berandet durch stückw. glatte, orientierte Fläche ∂V

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \vec{B}\, d\vec{\sigma} = \int_V \text{div} \vec{B}\, dx^1 dx^2 dx^3$$

diffbare orientierte Kurve / (Integral. über Weg)

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen: diffb. or. Kurve:

Bild von $[0,1]$ unter γ (diffbar, injektiv außerhalb endl. vieler Punkte)

$\dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

f auf $\gamma([0,1])$ def.

$$\Rightarrow \int_\gamma f\, ds := \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

Differentialgleichungen

lineare DGL n-ter Ordnung: $a_n y^{(n)} + \ldots + a_0 y = K(t)$

homogen: $K(t) = 0$

$\chi(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_0 \lambda$ char. Polynom

NST $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Vielf. $r_1, \ldots, r_k$

$\to$ Basis d. Lösungsraumes: (hom)

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1 - 1} e^{\lambda_1 t}$$

$$e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \ldots, t^{r_k - 1} e^{\lambda_k t}$$

Eindeutigkeit DGL-Lösung (~~...~~, 1. Ordn.)

Es gebe $M \geq 0$ s.d. $\forall u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $|f(u,v_1) - f(u,v_2)| \leq M |v_1 - v_2|$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall y_0 \in \mathbb{R}\ \exists U(x_0)$ und $\exists!$ diffbare Fkt. $y(x)$ mit:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$
$$y(x_0) = y_0$$

partikuläre Lösung (1. Ordnung)

$Y'(x) = P(x)Y(x) + Q(x)$

$Y_1(x)$ Lsg. d. hom. Gleichg

$$\Rightarrow Y^*(x) = \left(\int \frac{Q(x)}{Y_1(x)}\,dx\right) e^{\int P(x)\,dx}$$

Variation d. Konstanten (2. Ordnung)

Y_1, Y_2 Basis d. Lösungsraumes

$\to Y^* = C_1(t)Y_1(t) + C_2(t)Y_2(t)$

$\Rightarrow C_1 = -\int \frac{Y_2}{W} K\,dt$; $C_2 = \int \frac{Y_1}{W} K\,dt$

$$W = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ \dot{Y}_1 & \dot{Y}_2 \end{vmatrix}$$

$K(t) = e^{\lambda_0 t}$

$\chi(\lambda_0) \neq 0 \Rightarrow Y^*(t) = \frac{1}{\chi(\lambda_0)} e^{\lambda_0 t}$

$\chi(\lambda_0) = 0 \Rightarrow Y^*(t) = p(t)\, e^{\lambda_0 t}$

DGL n-ter Ordnung

$y^1 := y;\ y^2 := \partial_x y, \dots, \partial_x^{n-1} y =: y^n$

$$\eta(x) := \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$\to \partial_x \eta = A\eta; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & \dots & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

für $y^{(n)} = a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$

Bessel'sche DGL

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0$$

$$\to Y(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin(\varphi))\, d\varphi$$

Taylor

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

f sei n-mal diffbar in x_0

$$P_n(x_0; x) := f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Taylor-Polynom (Grad n) für f an d. Stelle x_0

Restglied d. Taylorapprox. von f an x_0

$$r_n(x_0; x) := f(x) - P_n(x_0; x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_n(x_0, x)}{h^n} = 0 \quad (h = |x - x_0|)$$

$$r_{n-1}(a; x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\, dt$$

Sei f in x_0 $(n+1)$-mal diffbar

(Wollmilchsau) $\varphi: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar mit $\varphi'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists\, \xi$ zw. x_0 & x, s.d.

$$r_n(x_0; x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{n!\, \varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n$$

Cauchy-Restglied

$\exists\, \xi$ zw. x_0 & x, s.d.:

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n (x - x_0)$$

Lagrange-Restglied

$$r_n(x_0; x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

m-dimensionale Taylor

$f \in C^{(n)}(U)$, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^m$ s.d. $[x, x+h] \subset U$

$\Rightarrow f(x+h) - f(x) =$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right)^k f(x) + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left(h^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + h^m \frac{\partial}{\partial x^m}\right)^n f(x + th)\, dt}_{O(\|h\|^n)}$$

Taylor-Reihe

f in x_0 C^∞

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ Taylor-R. von f um x_0

! kann "falsch" konv. ! (nicht geg. f)

5 Extremalprobleme

(1-D) $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, notw.

$x_0 \in (a,b)$ lok. Extr. $\to f'(x_0) = 0$

hinr.: $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$\to$ x_0 lok. Extremum $\Leftrightarrow$ n gerade

$f^{(n)}(x_0) > 0 \to$ Minimum

$< 0 \Rightarrow$ Maximum.

Lagrange-Fkt.

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(\vec{x})$$

$\to \nabla L = 0$ notw.

---

mehrdim., ohne NB

$G \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f: G \to \mathbb{R} \in C^{(2)}$

(1) notwendig: grad $f(x_0) = 0$

(2) hinreichend (mit (1))

$$H = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{i,j} \quad \text{Hesse-Matrix}$$

pos. definit $\Rightarrow$ Min.; neg. def. $\Rightarrow$ Max.

indefinit $\Rightarrow$ Sattelpkt.

Extrema unter NB $D \subset \mathbb{R}^n$

$f, g_1, \ldots, g_m \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$

$S = \{\vec{x} \in D \mid g_i(\vec{x}) = 0 \ \forall i\}$

Falls: $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \neq 0$ & $\vec{\nabla} g_i(x_0)$ lin. unabh.

x_0 extremal auf S:

$\Rightarrow$ (1) $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \in (T_{x_0} S)^{\perp}$

(2) $\vec{\nabla} f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{\nabla} g_i(\vec{x}_0)$

(3) $T_{x_0} S \subset T_{x_0} N$;

$N := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$

---

hinreichend: (falls notw. Bed. erfüllt)

Lagrange

$HL|_{T_{x_0}S}$ pos. def $\to$ Min.

Hesse

neg. def $\to$ Max.

indef $\to$ Sattelpkt.

Variationsprobleme (notw. Bed.) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in C^{(1)}$

$F: \{f \in C^{(1)}([a,b]) \mid f(a) = \alpha;\ f(b) = \beta\} \to \mathbb{R}$

$f \longmapsto \int_a^b L(x, f(x), f'(x))\,dx$

$$\to \frac{\partial L}{\partial u^3}(x, f(x), f'(x)) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial L}{\partial u^3}(x \ldots) = 0$$

Mannigfaltigkeiten

$S \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dim Untermannigfaltigkeit, (C^r-glatt) von $\mathbb{R}^n$, falls:

- $\forall x_0 \in S \ \exists \ U(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ & ein C^r-Diffeomorphismus

$\Phi: U(x_0) \to I^n = \{t \in \mathbb{R}^n \mid |t^i| < 1\}$

s.d. $\Phi(U \cap S) = \{t \in I^n \mid t^{k+1} = \ldots = t^n = 0\}$

Eine **topologische Mannigfaltigkeit** d. Dimension k in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$, deren Punkte alle eine zu $\mathbb{R}^k$ homöomorphe Umgebung in S besitzen.

S eine top. Mgfk. in $\mathbb{R}^n$ (dim k)

$\to$ ein Homöomorphismus

$\varphi: \mathbb{R}^k \to U \subset S$ heißt **Karte** auf S.

Atlas: abzählbare Menge von Karten

$\varphi_i: \mathbb{R}^k \to U_i \subset S$

mit $\bigcup_i U_i = S$.

$H^k := \{t \in \mathbb{R}^k \mid t^1 \leq 0\}$

Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt **berandete Mgfk.**, falls jeder Pkt. von S eine zu $\mathbb{R}^k$ od. H^k homöomorphe Umgebung besitzt.

- $x \in S$ heißt **Randpunkt** von S, falls $\exists$ Homöom. φ s.d. $\varphi^{-1}(x) \in \partial H^k$

Eine k-dim Mgfk. heißt von der **Klasse C^n**, falls ein Atlas ex., dessen Karten C^n-Abb. mit rang$(d\varphi_i) = k$ in jedem Pkt $\forall i$ sind (für top. Mgfk.)

---

für ber. Mgfk. C^r-Karte: Homöom.

$\varphi: \mathbb{R}^k \to U \subset S$ offen; rang$(d\varphi(x)) = k \ \forall x$

od. $\varphi: H^k \to U \subset S$

$$\text{rang}(d\varphi(x)) = \begin{cases} k; & x \text{ kein Randp.} \\ k-1; & x \text{ Randpunkt.} \end{cases}$$

S Umgfk. $\to$ **Tangentialraum $T_{x_0} S$**

$:= \{\gamma'(0) \mid \gamma: (-1,1) \to S \text{ diffbar}, \gamma(0) = x_0\}$

$= d\Phi^{-1}(x_0) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$

Tangentialraum (Umgfh): Parametrisierung
$G \subset \mathbb{R}^n$ offen; $\phi: G \to \mathbb{R}^n$; $t_0 \in G$
mit rang $d\phi(t_0) = k$. U eine Umgebung von t_0 s.d. $\phi(U)$ k-dim. Umfh.
$x_0 = \phi(t_0)$
$\Rightarrow \underline{T_{x_0} S} = \text{im}\, d\phi(t_0)$

an Mannigfaltigkeit:
$S \subset \mathbb{R}^n$ diffb. Mgfk.
$\Rightarrow T_x S := \text{Im}(d\varphi(\varphi^{-1}(x)))$
$\varphi: \mathbb{R}^k \to U \subset S$ Karte, $x \in U$

an implizit beschr. Umfk.
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F: G \to \mathbb{R}^{n-k}$ diffbar,
$S = \{x \in G \mid F(x) = 0\}$
Sei $x_0 \in G$ s.d. $\text{rang}(dF(x_0)) = n-k$
Sei U Umg. von x_0, s.d. $U \cap S$ Umgfh.
$\Rightarrow T_{x_0} S = \ker(dF(x_0))$
$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid \text{grad} F^1 \cdot v = \ldots = \text{grad} F^n = 0\}$

Orientierung
- 2 Karten heissen verträglich, falls d. Kartenwechsel $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : (\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2))$ überall pos. Funktionaldeterminante hat.
- Ein Atlas heisst orientiert, falls er aus paarweise vertr. Karten besteht
- Ein Mgfh. heisst orientierbar, falls $\exists$ orientierter Atlas
- 2 or. Atlanten heissen äquivalent, falls die Vereinigung ein or. Atlas ist.
- Auf einer or. Mgfh. $\exists$ genau 2 Orientierungen

Konvention: auf $\mathbb{R}^n$ durch id gegeben

Ein Basis von $\mathbb{R}^n$ $\eta_1, \ldots, \eta_n$ heisst orientiert, falls $\det(\eta_1 \ldots \eta_n) > 0$

S orientiert $\to$ Basis $\xi_1, \ldots, \xi_k$ von $T_x S$ orientiert, falls $d\varphi(\varphi^{-1}(x))^{-1} \xi_i$; $i = 1..k$ or. Basis von $\mathbb{R}^k$ ist.

Sei S eine Mgfh. mit Rand ∂S.
Sei $S \setminus \partial S$ orientiert.
Eine Karte $\varphi: H^k \to S$ heisst mit d. Orientierung verträglich, falls:
$\forall t \in H^k$ mit $t^1 < 0$:
$\partial\varphi(t) e_1, \ldots, d\varphi(t) e_k$ or. Basis von $T_{\varphi(t)} S$ ist.
$\to$ def. die Or. des Randes durch
$d\varphi|_{\partial H^k} e_2, \ldots, \partial\varphi|_{\partial H^k} e_k$

k-dim. Volumen
Sei $D \subset \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi: D \to S$ homöomorph aufs Bild.
$\forall t \in D$ $\text{rang}(d\varphi(t)) = k$
$\Rightarrow$ Volumen v. $\varphi(D) \subset S$
$$V_k(\varphi(D)) = \int_D \sqrt{\det\left(\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial t^i}, \frac{\partial\varphi}{\partial t^j} \right\rangle\right)}\, dt^1 \ldots dt^k$$

(Differential) formen

Multilinearform: multilin. Abb. nach $\mathbb{R}$
antisymmetrisch: $L(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(n)}) = \text{sign}\,\sigma\; L(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $\forall \sigma \in S_n$

Raum d. alt. k-Formen auf V
Dimension: $\binom{\dim V}{k}$
$L_1, \ldots, L_n$ Basis v. V^*
$\to L_{i_1} \wedge \ldots \wedge L_{i_k}$ $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$
Basis durch Ramme

$\wedge$-Prod. $L_1, \ldots, L_k \in V^*$
$\to (L_1 \wedge \ldots \wedge L_k)(\xi_1, \ldots, \xi_k)$
$:= \det((L_i(\xi_j))_{i,j})$

$$A^p \wedge B^q(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \left(\text{sign}\,\sigma \cdot A^p(\xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)})\, B^q(\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)})\right)$$

Pull-Back Sei $F: V \to W$ eine lin. Abb.
L alt. k-Form auf $W \to$ Pull-Back v. L
$F^*(L)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = L(F(\xi_1), \ldots, F(\xi_k))$
es gilt:
$F^*(L_1 \wedge \ldots \wedge L_k) = F^*(L_1) \wedge \ldots \wedge F^*(L_k)$

6 (Differentialformen)

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine **Differentialform** auf D vom Grad p ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ eine alt. p-Form auf $T_x D$ zuordnet.

jede p-Form lässt sich schreiben als

$$\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

allg. Form

auf Mgfk.:

Sei S k-dim. Mgfk. ~~auf~~ in $\mathbb{R}^n$. Eine p-Form ω auf S ist eine Vorschrift, die jedem $x \in S$ eine alt. Multilinearform vom Grad p auf $T_x S$ zuordnet.

Bem.: $\varphi: U \to S$ Karte $\to \varphi^*(\omega)$ p-Form

p-Form auf U.

Pull-Back (0-Formen)

$$\varphi^*(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_n) := \omega(d\varphi(x)\xi_1, \dots, d\varphi(x)\xi_n)$$
$$= d\varphi(x)^*(\omega(\varphi(x)))(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$d\varphi(x): T_x U \to T_x S$

$\omega_1, \dots, \omega_r$ 1-Formen auf S

$\to$ i) $\varphi^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge \varphi^*(\omega_r)$

ii) ω k-Form auf V

$\to \varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$

äusseres Differential:

0-Form f: $f \longmapsto df$

p-Form $\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$

$$\longrightarrow \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} da_{i_1 \dots i_p}(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

ω 2x stetig diffbar p-Form

$\Rightarrow d(d\omega) = 0$

ω_1 p-Form, ω_2 q-Form

$\Rightarrow d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$

Integration: $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\omega(x) = a(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ k-Form auf U

$$\to \int_U \omega := \int_U a(x)\, dx^1 \dots dx^k$$

Int. unter Pull-Back

$\varphi: U \to V$ orientierungserh. Diffeomorphismus, ω k-Form auf V

$$\to \int_V \omega = \int_U \varphi^*(\omega)$$

Poincaré-Lemma

Sei ω diffbare $(p+1)$-Form auf $\mathbb{R}^n$ mit $d\omega = 0 \Rightarrow \exists$ p-Form α mit $d\alpha = \omega$

allg. Satz v. Stokes

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine or. k-dim. Mannigfaltigkeit mit Rand, ~~ist~~ ω $(k-1)$-Form auf einer Umgebung von S.

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

Volumenform $\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix}$ or. Normaleneinheitsv.-feld

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \eta^i\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

Bsp.: $\omega^1_{\vec{F}} := \langle \vec{F}, \vec{\xi} \rangle$

$\omega^2_{\vec{v}}(\xi_1, \xi_2) := \det(\vec{v}, \vec{\xi_1}, \vec{\xi_2})$ $(n=3)$

$\omega^{n-1}_{\vec{v}}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) := \det(\vec{v}, \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_{n-1})$

$$= \sum_{i=1}^{n} v^i (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$$

$d\omega^1_{\vec{F}} = \omega^2_{\mathrm{rot}\vec{F}}$ $(n=3)$

$d\omega^2_{\vec{v}} = (\mathrm{div}\,\vec{v})\, dx \wedge dy \wedge dz$

	Zylinder	Kugel
$\nabla\cdot\vec{A}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r s\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta)+\frac{1}{r s\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\nabla\times\vec{A}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho}+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\varphi}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{z}$	$\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi\sin\vartheta)-\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\hat{r}+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\hat{\vartheta}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta)-\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)\hat{\varphi}$
Einheitsv.	$\vec{e}_\rho=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix};\ \vec{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$; $\vec{e}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$\vec{e}_r=\begin{pmatrix}s\vartheta c\varphi\\ s\vartheta s\varphi\\ c\vartheta\end{pmatrix};\ \vec{e}_\vartheta=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix}$; $\vec{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$
Volumenelement	$dV=\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$	$dV=r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$
Flächenelement	$dA=\rho\, d\varphi\, dz\,\hat{\rho}+d\rho\, dz\,\hat{\varphi}+\rho\, d\rho\, d\varphi\,\hat{z}$	$dA=r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,\hat{r}+r s\vartheta\, dr\, d\varphi\,\hat{\vartheta}+r\, dr\, d\vartheta\,\hat{\varphi}$
Verschiebung	$dl=d\rho\,\hat{\rho}+\rho\, d\varphi\,\hat{\varphi}+dz\,\hat{z}$	$dl=dr\,\hat{r}+r\, d\vartheta\,\hat{\vartheta}+r\sin\vartheta\, d\varphi\,\hat{\varphi}$
Koord.	$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z$ $\Rightarrow \rho=\sqrt{x^2+y^2};\ \varphi=(\mathrm{sgn}\,y+1-\lvert\mathrm{sgn}\,y\rvert)\arccos\frac{x}{\rho}$; $z=z$;	$x=r\cos\varphi\sin\vartheta;\ y=r\sin\varphi\sin\vartheta;\ z=r\cos\vartheta$ $\rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\ \vartheta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$; $\varphi=\begin{cases}\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & y\geq 0\\ 2\pi-\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & y<0\end{cases}$

Rechenregeln: Nabla-Operator

1. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f))=\nabla^2 f=\Delta f$; 2. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f)=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}f)=0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$; 4. $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A})=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}$
5. $\Delta(f\cdot g)=f\Delta g+2\nabla f\cdot\nabla g+g\Delta f$
6. $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B})+\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$
7. $\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{C})=\vec{\nabla}_C(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{C}=(\vec{\nabla}\vec{C})\cdot\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{C}$
8. $\nabla\times(B\times C)=B(\nabla\cdot C)-C(\nabla\cdot B)+(C\cdot\nabla)B-(B\cdot\nabla)C$

gleichm. Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D_f}\lvert f_n(x)-f(x)\rvert=0$$

od. $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ s.d. $\forall n\geq N,\ \forall x\in D_f$:

$$\lvert f_n(x)-f(x)\rvert<\varepsilon$$

7 (Zusatz)

Winkel

Grad	0	30	45	60	90
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Trigonometrie

$$\arcsin(x) = -i \ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arccos(x) = -i \cdot \ln\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$$

$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha \cosh\beta \pm \sinh\beta \cosh\alpha$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha \cosh\beta \pm \sinh\alpha \sinh\beta$$

$$\sin(\arccos(\alpha)) = \cos(\arcsin(\alpha)) = \sqrt{1-\alpha^2}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = \infty \; ; \; \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty \; ; \; \lim_{x\to 0} x^a \ln x = 0 \; (a>0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)} \; ; \; \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \; ; \; \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \; ;$$

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-ax} = 0 \; (a>0);$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-a} \ln(x) = 0 \; (a>0);$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

Reihen (fortg.)

harm.: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n) + 0.577$ (div.)

alt. harm. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$

binomische: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k = (1+z)^\alpha$

Potenzreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k z^k = \frac{1}{1-az} \; ; \; \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{c+k-1}{k} a^k z^k\right) = \frac{1}{1-az}^{c}$$

$$c_k = k^2 \Rightarrow \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

$$c_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-z}\right);$$

Taylorreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \; ; \; \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \; ;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}\right)$$

Integrale

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, dx = x \operatorname{arccot} x + \tfrac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arsinh} x \, dx = x \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \operatorname{arcosh} x \, dx = x \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \operatorname{artanh} x \, dx = x \operatorname{artanh} x + \tfrac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$$

$$\int \operatorname{arcoth} x \, dx = x \operatorname{arcoth} x + \tfrac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x} (\ln(x))^n \, dx = \frac{1}{n+1} \ln(x)^{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} \ln(x^n) \, dx = \frac{1}{2n} (\ln(x^n))^2 + C$$

$$\int x e^{cx} \, dx = \frac{cx-1}{c^2} e^{cx} + C$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right) (n \neq -1) + C$$

Integrale (fortg.)

$$\int \sin^n x\,dx \leftarrow S_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}S_{n-2}$$

$$S_0 = x;\quad S_1 = -\cos x$$

$$\int \cos^n x\,dx \leftarrow C_n = \frac{1}{n}\sin(x)\cos^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}C_{n-2}$$

$$C_0 = x;\quad C_1 = \sin x$$

zu l'Hôpital:

- $u(x)v(x) = \frac{u(x)}{(1/v(x))}$ $(0\cdot\infty)$
- $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ $(0^0, \infty^0, 1^\infty)$
- $u(x) = \frac{u^2(x)}{u(x)}$; $\sqrt{u(x)} + v(x) = \frac{u(x) - v^2(x)}{\sqrt{u(x)} - v(x)}$
- $u(x)+v(x) = \frac{[u(x)+v(x)][u(x)-v(x)]}{u(x)-v(x)}$
- $u(x)-v(x) = \frac{\frac{1}{v(x)} - \frac{1}{u(x)}}{1/(u(x)v(x))}$ falls $\infty - \infty$

Standardsubstitutionen

Integral	Substitution	Differential	Bem.:
$\int f(g(x))g'(x)\,dx$	$t = g(x)$	$dx = \frac{dt}{g'(x)}$	Lsg.: $\frac{1}{2}[f(x)^2] + C$
$\int f((ax+b))\,dx$	$t = ax+b$	$dx = \frac{dt}{a}$	Lsg: $\frac{1}{a}\int f(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{ax+b})\,dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2t}{a}dt$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$	$x = \alpha t + \beta$	$dx = \alpha\,dt$	wähle α, β s.d.: $ax^2+bx+c = \gamma\cdot(\pm t^2 \pm 1)$
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$	$x = a\sin t$	$dx = a\cos t\,dt$	$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$	$x = a\sinh t$	$dx = a\cosh t\,dt$	$t \in R$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$	$x = a\cosh t$	$dx = a\sinh t\,dt$	$t \geq 0$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x)\,dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{dt}{t}$	$t>0$: $\sinh x = \frac{t^2-1}{2t}$, $\cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x)\,dx$	$\tan\frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$	$-\pi/2 < t < \pi/2$: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

spez. Maße

Zylinder	$V = \pi r^2 h$	Torus:	$V = 2\pi r^2 R$
Kegel	$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$		$S = 4\pi^2 R r$
Kegelst.:	$V = \frac{\pi h}{3}(r_1+r_2)^2$	Kugel:	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$
Pyramide	$V = \frac{1}{3} G h$		$S = 4\pi r^2$
Ellipsoid	$V = \frac{4\pi}{3} abc$		

Ansätze part. Lsg

$P(x)$: char. Polynom; $S_n(x)$: polyn. Störfkt.

$R_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ mit unb. Koeff

$g(x)$	Ansatz
Ce^{mx}	$\cdot\, Ae^{mx}$ falls $P(m) \neq 0$ $\cdot\, Ax^q e^{mx}$ falls m q-fache NST von P
$S_n(x)$	$\cdot\, R_n(x)$, falls $P(0) \neq 0$ $\cdot\, x^q R_n(x)$ falls 0 q-fache NST von P
$P_n(x)e^{mx}$	$\cdot\, R_n(x)e^{mx}$, falls $P(m) \neq 0$ $\cdot\, x^q R_n(x)e^{mx}$ falls m q-fache NST v. P
$\sin\omega x, \cos\omega x$	$\cdot\, \underbrace{A\cos\omega x + B\sin\omega x}$, falls $P(\pm i\omega) \neq 0$ $\cdot\, x^q(\ldots)$ falls $\pm i\omega$ q-fache NST
$\sinh\omega x, \cosh\omega x$	$\cdot\, A\cosh\omega x + B\cosh\omega x$, falls $P(\omega) \neq 0$ $\cdot\, x^q(\ldots)$, falls ω q-fache Nst von P

ausklammern:

$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k\right)$$

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots + x + 1)$$