

Solución Primer Parcial Matemática 1 - 2012

1 Dados los puntos $P_1(5, 4)$ y $P_2(2, 4)$ hallar:

- (a) Ecuación, elementos y gráfico de la parábola con vértice en P_1 y foco en P_2 .

El eje de la parábola es paralelo al eje x , hace falta usar la ecuación:

$$(y - \beta)^2 = 4c(x - \alpha)$$

Los valores α y β son las coordenadas del vértice de la parábola. El valor c indica la distancia entre el vértice y el foco. Para tener correcto el signo de c hace falta hacer:

$$c = P_{2x} - P_{1x} = 2 - 5 = -3$$

$$(y - 4)^2 = 4 \times (-3)(x - 5)$$

$$(y - 4)^2 = -12(x - 5)$$

- (b) Ecuación y gráfico de la circunferencia con centro en P_1 y que pasa por P_2 .

Hace falta calcular el radio r a partir de la distancia entre P_1 y P_2 , y después reemplazar los valores en la ecuación canónica de la circunferencia.

$$D(P_1, P_2) = r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 3^2$$

2 Expresar por comprensión los conjuntos: M de los múltiplos de 36, T de los múltiplos enteros de 12.

$$M = \{x/x = 36k, k \in \mathbb{Z}\} \tag{1}$$

$$T = \{y/y = 12m, m \in \mathbb{Z}\} \tag{2}$$

- (a) Probar que M está incluido en T .

Sea x perteneciente a M , entonces $x = 36k$, donde k es un entero. Luego $x = (12 \times 3)k$, por asociatividad del producto $x = 12(3k) = 12m$, m es un entero por ser producto de los enteros 3 y k (propiedad cerrada del prod de enteros). Entonces $x = 12m$, con m entero, por lo tanto x pertenece a T .

- (b) Mostrar que T y M no son iguales.

Los conjuntos M y T no son iguales, ya que hay elementos que están en un conjunto y no están en el otro. Por ejemplo, el número $12 \in T$ ya que un elemento cualquiera de T es $12k \in T, k \in \mathbb{Z}$. En el caso del elemento $12, k = 1, 12k = 12, k \in \mathbb{Z}$, pero $12 \notin M$, ya que los elementos de M tienen la forma $36m \in M, m \in \mathbb{Z}$. Se puede ver que si el 12 estuviese en $M, 12 = 36m, m \notin \mathbb{Z}$ (m no sería un entero) por lo que $M \neq T$.

- 3 (a) Definir una función inyectiva. Probar que $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = 4x - 5$ es inyectiva.

Función inyectiva: una función $f(x)$ es inyectiva si a dos elementos diferentes del dominio le corresponden dos imágenes diferentes en el codominio. Sea $f : A \rightarrow B, f(x)$ es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Para probar que $f(x)$ es inyectiva hace falta demostrar que para todo par de números diferentes, los valores de la función en esos dos números son diferentes. Una forma de resolverlo es suponer por el absurdo que el valor de la función es el mismo evaluando en dos variables x, y diferentes.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \neq y, f(x) = 4x - 5, f(y) = 4y - 5$$

Si

$$f(x) = f(y)$$

entonces

$$4x - 5 = 4y - 5$$

sumando 5 a ambos miembros y luego dividiendo por 4 a ambos miembros se tiene que

$$x = y$$

Llegamos a una contradicción: $x = y$ habiendo asumido que $x \neq y$ por lo que la única manera que las dos funciones den el mismo valor es cuando se las evalúa con el mismo elemento del dominio. Por lo tanto, la función es inyectiva.

- (b) Determinar los dominios $D \subseteq \mathbb{R}$ de las funciones:

Hallar el dominio de la función significa ver para qué valores la función está definida y permite calcular un número válido. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ no está definida para cuando $x = 0$, por lo que el dominio será: $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$$g(x) = \frac{5x^3 + 1}{(x^2 - 9)(1 - x^2)(x - 12)}$$

La función no está definida cuando el denominador de la división es cero, por lo que el dominio serán los números reales excepto esos que hacen que el denominador sea cero.

$$(x^2 - 9)(1 - x^2)(x - 12) = 0$$

A su vez, hay tres posibles casos que resulten esa ecuación igual a cero, y son que cada paréntesis por separado sea cero:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$1 - x^2 = 0$$

$$x - 12 = 0$$

Resolviendo tenemos:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x = 12$$

El dominio resultante será entonces:

$$D(g) = \mathbb{R} - \{+3, -3, +1, -1, 12\}$$

$$j(x) = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$$

En el caso de $j(x)$, hay dos cosas a tener en cuenta. Como en el anterior, no se puede dividir por cero. Además, no es posible calcular la raíz cuadrada de un número negativo (dentro de \mathbb{R}). Por ejemplo, $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.

$$\sqrt{3-x} \neq 0 \wedge 3-x > 0 \rightarrow x < 3$$

El dominio resultante será entonces:

$$D(j) = \{x/x \in \mathbb{R} \wedge x < 3\}$$

- 4 En una sucesión aritmética $a_{91} = 350$ y $a_{11} = 30$, encontrar la suma de los primeros 131 términos de esta sucesión.

Primero hay que averiguar los valores de a_1 y d de la sucesión.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{91} = 350 = a_1 + (91-1)d$$

$$a_{11} = 30 = a_1 + (11-1)d$$

Igualando las ecuaciones anteriores, queda:

$$350 - 90d = 30 - 10d, 320 = 80d, d = \frac{320}{80} = 4$$

$$a_1 = 30 - 10d = 30 - 40 = -10$$

El siguiente paso es aplicar la fórmula de la suma de los elementos de una sucesión:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$a_{131} = -10 + 4(131 - 1) = 510$$

$$\sum_{k=1}^{131} a_k = \frac{131(-10 + 510)}{2} = 32750$$

Otra forma de resolver el ejercicio es hacer la sumatoria de la fórmula general de la sucesión y separar la suma:

$$\sum_{j=1}^{131} a_1 + (j - 1)d = \sum_{j=1}^{131} -10 + 4(j - 1)$$

$$\sum_{j=1}^{131} -10 + \sum_{j=1}^{131} 4(j - 1) = -1310 + 4 \left(\sum_{j=1}^{131} j - 1 \right)$$

$$= -1310 + 4 \left(\frac{131(131 + 1)}{2} - 131 \right) = 32750$$

5 (a) Probar por inducción:

$$\sum_{j=1}^n 18j(j + 1) = 6n(n + 1)(n + 2), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Se desea demostrar el valor de verdad de la siguiente proposición por medio de inducción:

$$P(n) : \sum_{j=1}^n 18j(j + 1) = 6n(n + 1)(n + 2), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad (3)$$

Para ello la demostración se divide en tres partes, caso base, hipótesis, y tesis o desarrollo inductivo.

Se verifica el caso base:

$$P(1) : \sum_{j=1}^1 18j(j + 1) = 6(1 + 1)(1 + 2) \quad (4)$$

$$18 \times 2 = 6(2)(3) \quad (5)$$

$$36 = 36 \quad (6)$$

$P(1)$ es verdadera y el caso base se cumple. Luego, se procede a plantear la hipótesis de la inducción y se asume como cierta:

$$P(k) : \sum_{j=1}^k 18j(j + 1) = 6k(k + 1)(k + 2), k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad (7)$$

Una vez asumido $P(k)$ como cierto para algún $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, se busca verificar que $P(k + 1)$ se cumpla.

Dado que la proposición es una igualdad, un camino para resolverlo es comenzar a la izquierda de la igualdad e intentar llegar a la derecha. Llegado a ese punto, se puede afirmar que la igualdad es cierta.

Se plantea $P(k+1)$:

$$P(k+1) : \sum_{j=1}^{k+1} 18j(j+1) = 6(k+1)(k+2)(k+3), \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} 18j(j+1) = \left(\sum_{j=1}^k 18j(j+1) \right) + 18(k+1)(k+1+1) \quad (9)$$

Aplicando la hipótesis y reemplazando la sumatoria se tiene:

$$= 6k(k+1)(k+2) + 18(k+1)(k+2) \quad (10)$$

¿Será cierto que estas dos ecuaciones son iguales $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$?

$$6k(k+1)(k+2) + 18(k+1)(k+2) = 6(k+1)(k+2)(k+3) \quad (11)$$

Tomando la primer ecuación:

$$6k(k+1)(k+2) + 18(k+1)(k+2) \quad (12)$$

$$= 6(k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)) \quad (13)$$

$$= 6((k+3)((k+1)(k+2))) \quad (14)$$

$$= 6(k+1)(k+2)(k+3) \quad (15)$$

Empezando por la izquierda, se llega al valor de la derecha.

Por lo tanto, queda demostrado que $P(n)$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

(b) Usando la parte (a) indicar el valor de:

$$\sum_{j=13}^{32} 18j(j+1)$$

Hace falta usar la definición anterior, $6n(n+1)(n+2)$, reescribiendo la sumatoria como dos sumatorias.

$$\begin{aligned} \sum_{j=13}^{32} 18j(j+1) &= \left(\sum_{j=1}^{32} 18j(j+1) \right) - \left(\sum_{j=1}^{12} 18j(j+1) \right) \\ &= (6 \times 32(32+1)(32+2)) - (6 \times 12(12+1)(12+2)) \\ &= 215424 - 13104 = 202320 \end{aligned}$$