Métodos de Conteo

Actividad 1

Bloque 1:

1) Una clave para un juego consta de 1 letra y un número de un dígito, si podemos elegir entre las letras A, B y C y entre los números 2, 3, 4 y 5, ¿cuántas claves se pueden armar?

2) Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y el conjunto $B = \{m,x,y,z,w\}$, ¿Cuántos elementos tiene el conjunto AxB?

3) Dado el conjunto $H = \{1,2\}$ y el conjunto $M = \left\{a,b,c\right\}$ ¿Cuántas funciones inyectivas puede haber con dominio H y codominio M?

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?

b) ¿Y si los números pueden repetirse?

5) Escriban como le explicarían a un grupo de compañeros que tienen en común los problemas anteriores. Describan una estrategia para resolver problemas de este tipo.

6) Piensen un problema que pueda resolverse con la estrategia usada.

1) Una clave para un juego consta de 1 letra y un número de un dígito, si podemos elegir entre las letras A, B y C y entre los números 2, 3, 4 y 5, ¿cuántas claves se pueden armar?

si tomamos la letra A:

A2, A3, A4, A5

2A, 3A, 4A, 5A

→ 8 claves

+

si tomamos la letra B:

B2, B3, B4, B5

2B, 3B, 4B, 5B

→ 8 claves

+

si tomamos la letra C:

C2, C3, C4, C5

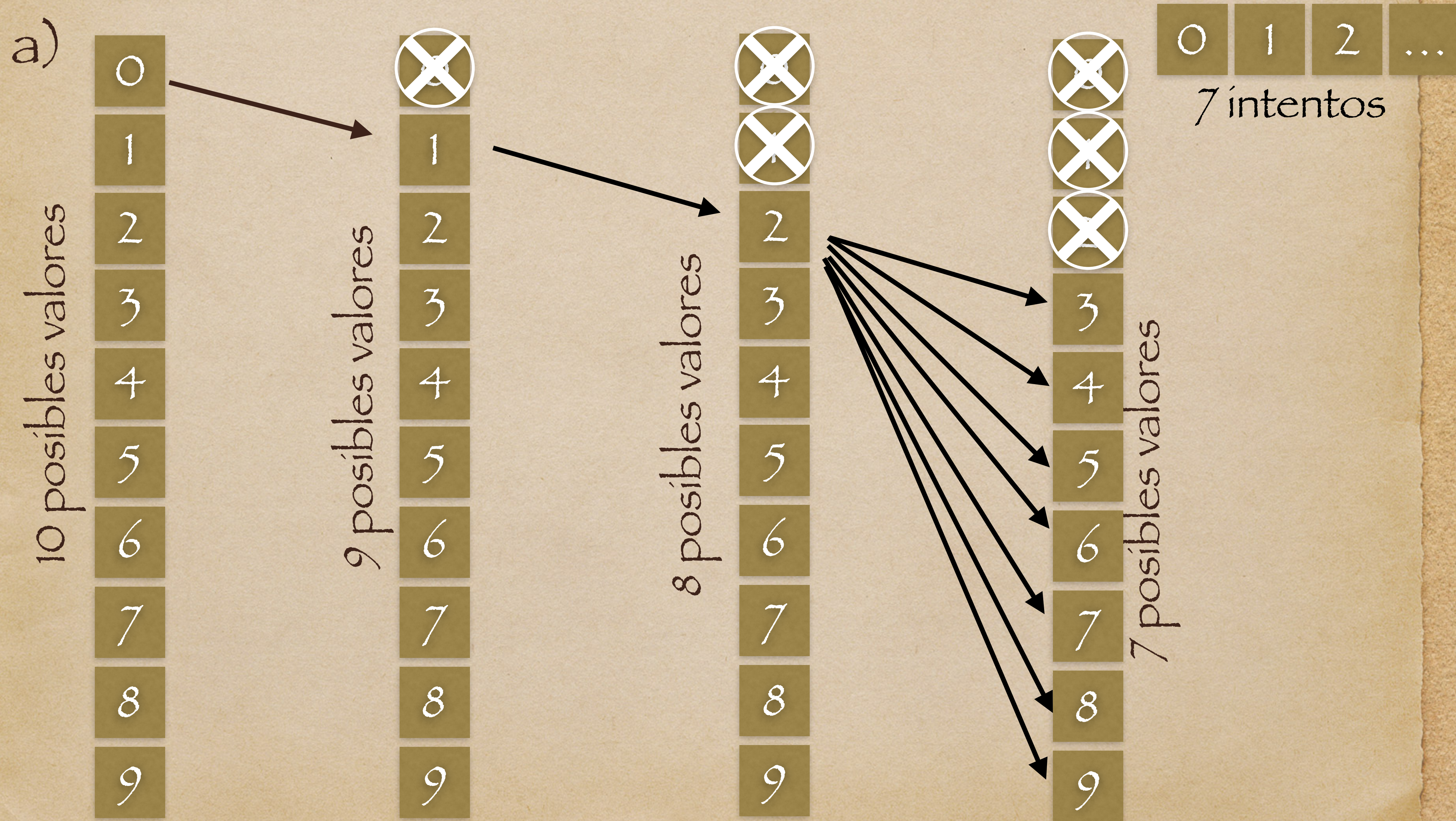
2C, 3C, 4C, 5C

→ 8 claves

Rta: se pueden armar 24 claves

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

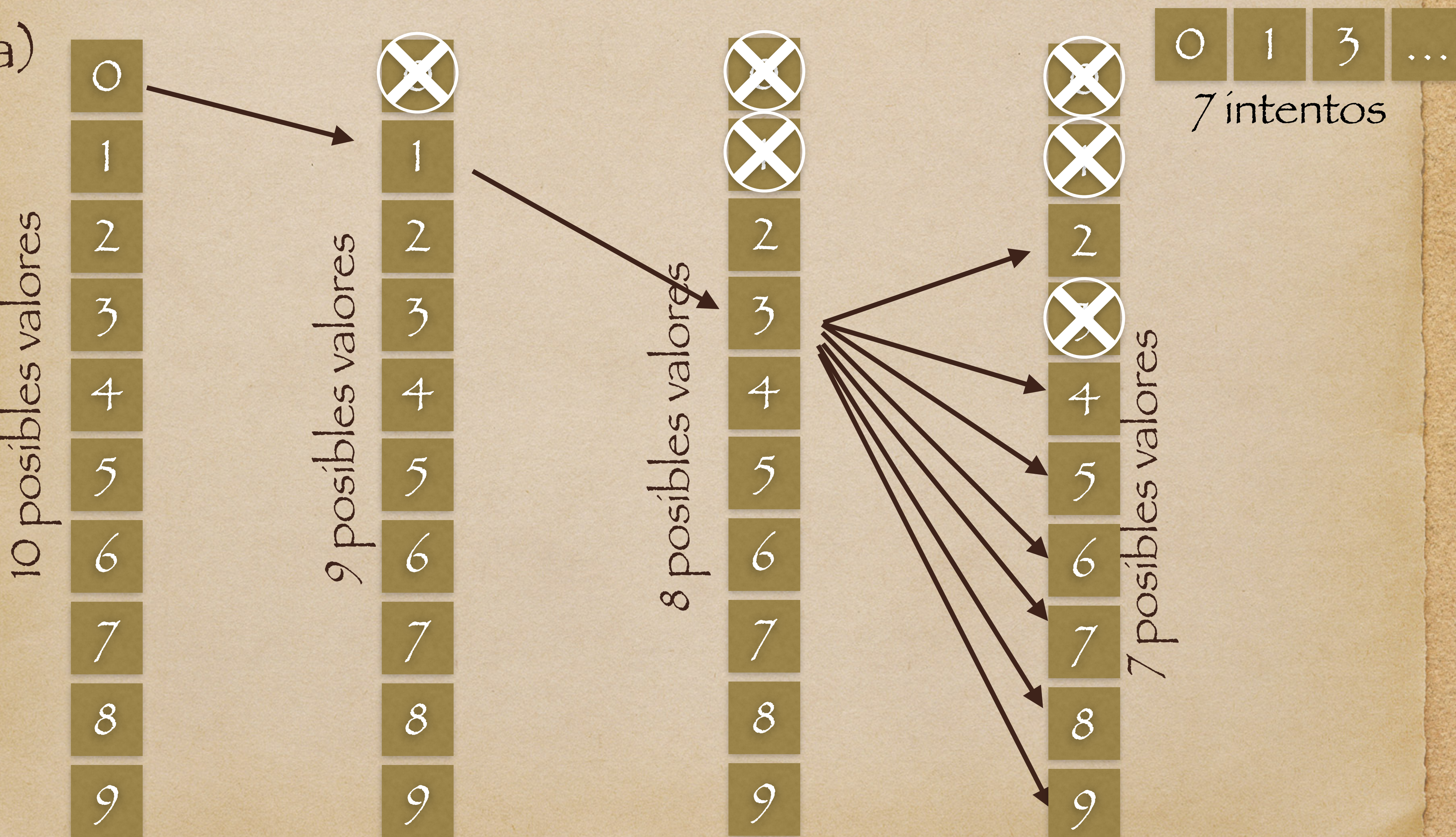
a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?



4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

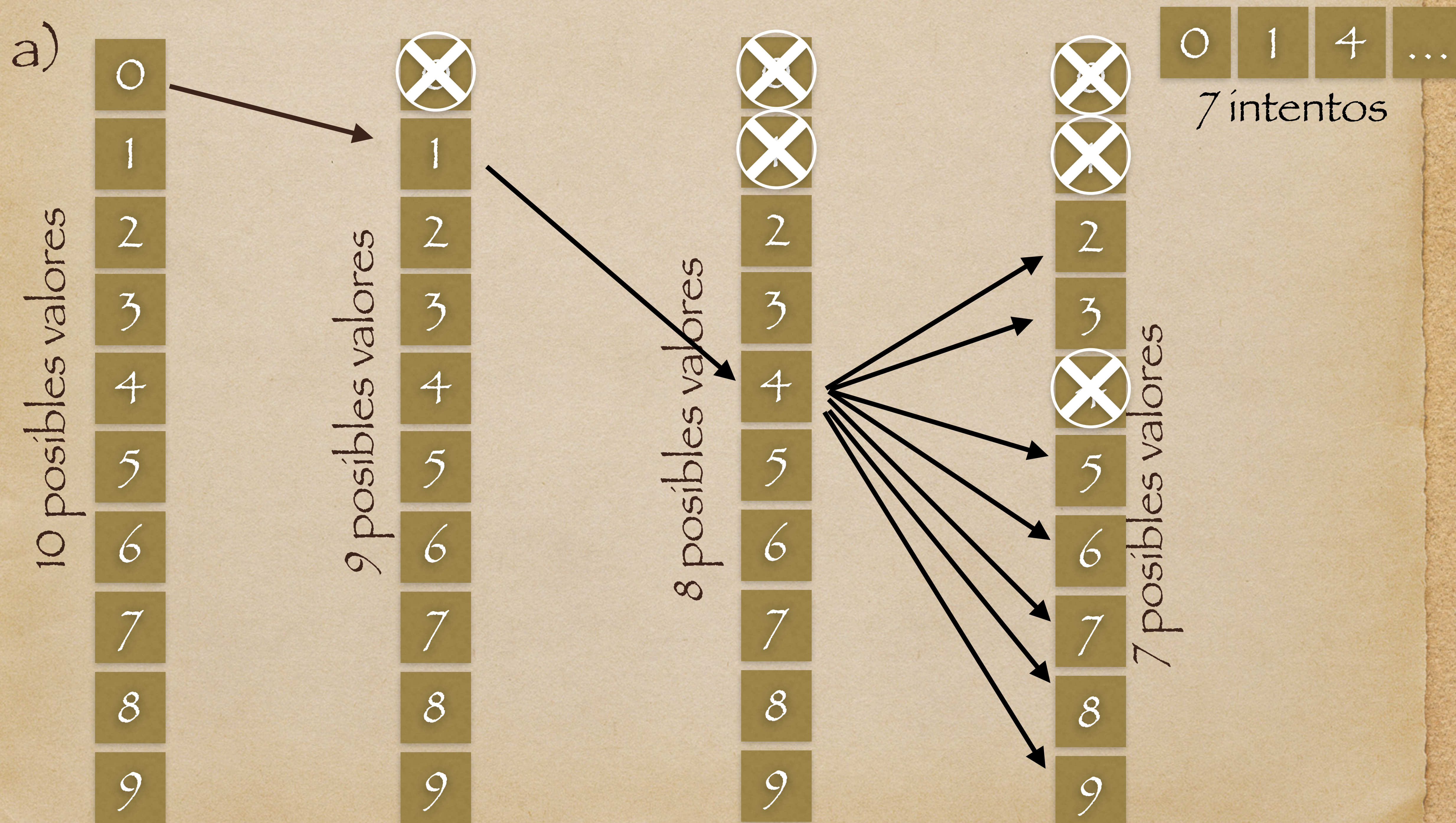
a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?

a)



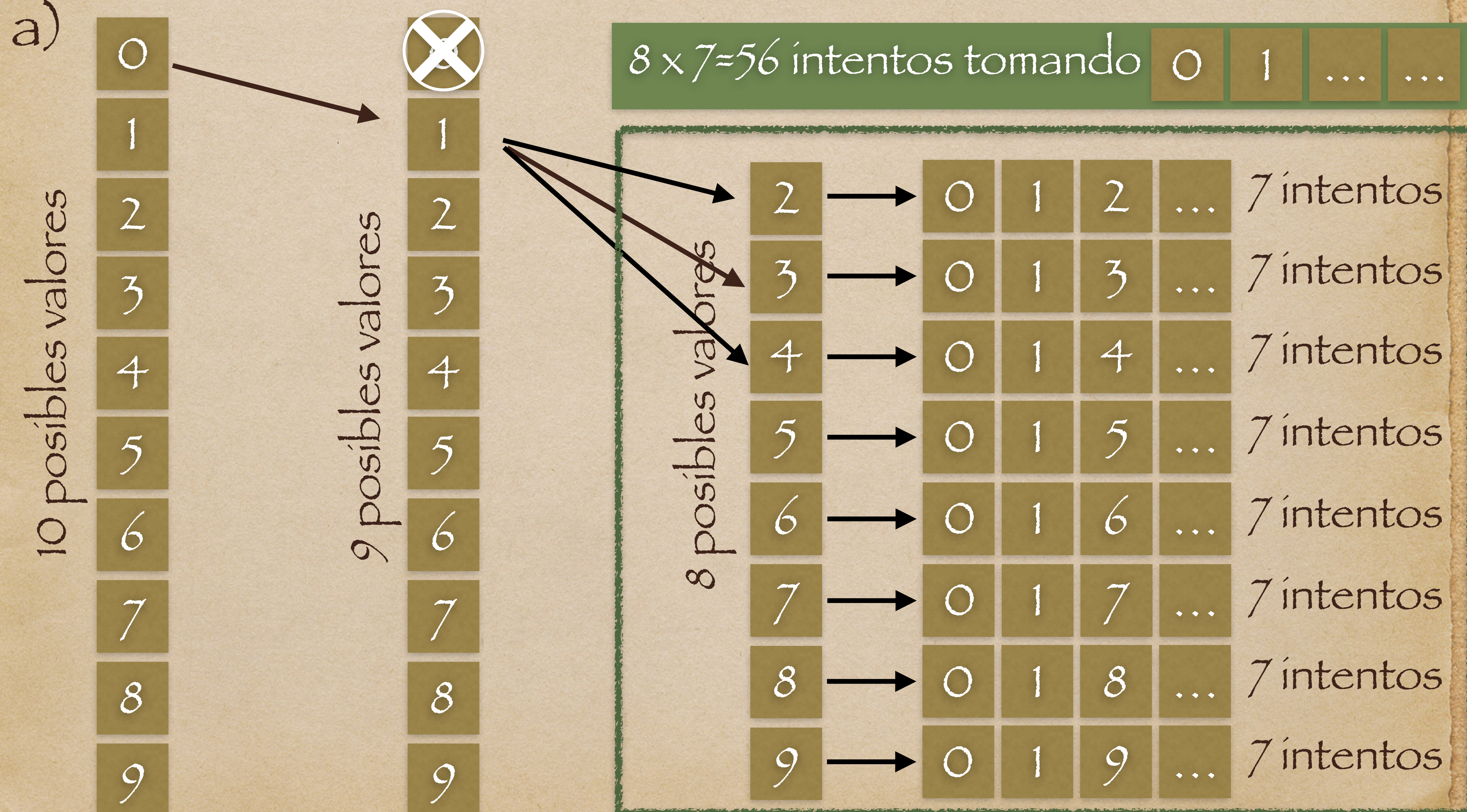
4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?



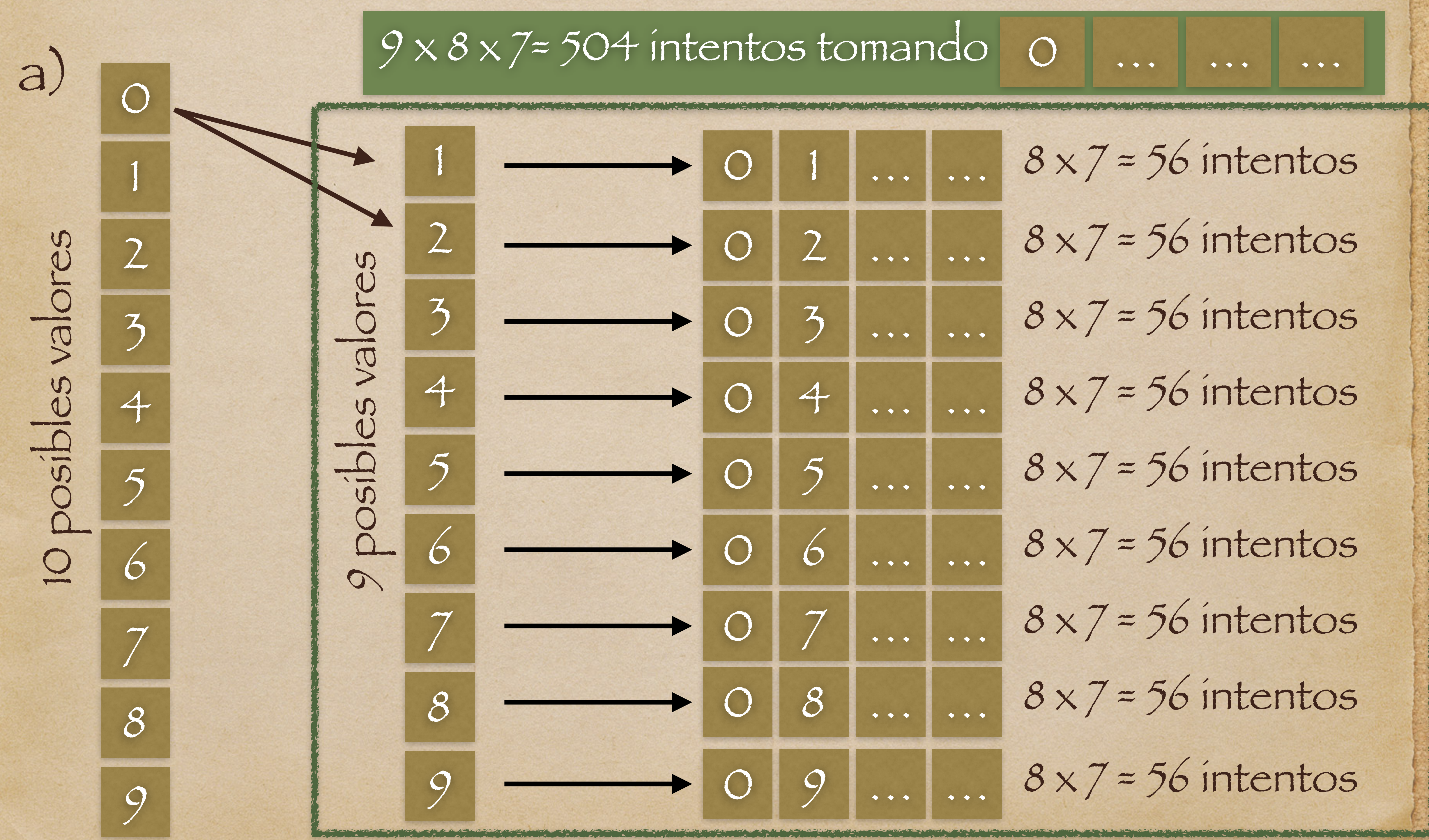
4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?



4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?



4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) Si los números de la clave no pueden repetirse, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?

10 posibles valores

0	$\longrightarrow$	0	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
1	$\longrightarrow$	1	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
2	$\longrightarrow$	2	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
3	$\longrightarrow$	3	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
4	$\longrightarrow$	4	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
5	$\longrightarrow$	5	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
6	$\longrightarrow$	6	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
7	$\longrightarrow$	7	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
8	$\longrightarrow$	8	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos
9	$\longrightarrow$	9	…	…	…	$9 \times 8 \times 7 = 504$ intentos

Rta: tendré que hacer $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ intentos para descubrir la clave

Recordamos:

1) Una clave para un juego consta de 1 letra y un número de un dígito, si podemos elegir entre las letras A, B y C y entre los números 2, 3, 4 y 5, ¿cuántas claves se pueden armar?

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

Bloque 2:

7) Con los datos del ejercicio 1):

a) ¿Cuántas claves se pueden armar si deben empezar con la letra A?

b) ¿Cuántas si debe tener el número 8?

puede empezar con la letra A o con otra letra

c) ¿Cuántas si deben comenzar con la letra A o tener el número 8? Consideren que el "o" es inclusivo, es decir que puede tener la letra A y no el número 8, o el número 8 y no la letra A, o la letra A y el número 8.

8) Con los datos del ejercicio 4:

a) ¿Cuántos intentos tendré que hacer si sé que comienza con 1 o termina con 3?

b) ¿Cuántos intentos tendré que hacer si sé que comienza con 1 o 3?

9) Describan el razonamiento que siguieron para encontrar la respuesta a estos ejercicios. ¿Tienen diferencias o similitudes con los ejercicios del primer bloque? ¿Cuáles?

10) Piensen un problema que sea del mismo tipo que los de este bloque

Teoria

Principio de multiplicación

Si una actividad consta de t pasos sucesivos y:
el paso 1 puede realizarse de n1 formas,
el paso 2 puede realizarse de n2 formas, …
el paso t puede realizarse de nt formas,

entonces el número de diferentes resultados posibles es n1 x n2 x … x nt

Ejemplo

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) ~~Si los números de la clave no pueden repetirse~~, ¿Cuántos intentos tendré que hacer para descubrir la clave?

b) ¿Y si los números pueden repetirse?

el paso 1 es la elección del 1er dígito: hay 10 posibles valores => n1=10
el paso 2 es la elección del 2do dígito: hay 10 posibles valores => n2=10
el paso 3 es la elección del 3ro dígito: hay 10 posibles valores => n3=10
el paso 4 es la elección del 4to dígito: hay 10 posibles valores => n4=10

Entonces el número de intentos que tendré que hacer para descubrir la clave es n1 x n2 x n3 x n4= 10x10x10x10= 10000

Principio de suma

Si una actividad puede separarse en t casos distintos que no tengan intersección (casos disjuntos) y
el caso 1 puede realizarse de n1 formas,
el caso 2 puede realizarse de n2 formas, …
el caso t puede realizarse de nt formas,

entonces la cantidad de formas de realizar la actividad es $n1 + n2 + \ldots + nt$

Ejemplo

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

b) ¿Cuántos intentos tendré que hacer si sé que comienza con 1 o 3?

Principio de suma con intersección

Si una actividad puede separarse en 2 casos distintos de manera que
el caso 1 puede realizarse de $n1$ formas y
el caso 2 puede realizarse de $n2$ formas,
pero tienen casos en común (no son disjuntos) y el número de casos en común es k,

entonces la cantidad de formas de realizar la actividad es $n1 + n2 - k$

Ejemplo

4) Una tablet tiene una clave de acceso de 4 dígitos formada por los dígitos del 0 al 9.

a) ¿Cuántos intentos tendré que hacer si sé que comienza con 1 o termina con 3?

Actividad 2

Bloque 3:

11) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 3 libros en un estante?

12) ¿De cuántas maneras se pueden colgar en una linea 4 cuadros en una pared?

13) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar n personas en una fila?

14) Supongamos que grabo un pendrive con 10 canciones y tengo una opción para que se reproduzcan las 10 canciones en un orden distinto cada vez. Si lo escucho una vez por día, ¿Cuántos días podré escuchar la canciones en distinto orden hasta que vuelva al orden inicial?

15) Piensen un problema que pueda resolverse con la cuenta: 7x6x5x4x3x2x1

Bloque 4:

16) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 3 libros si dos de ellos son idénticos?

17) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 4 cuadros si 2 de ellos son indistinguibles?

18) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los 4 cuadros si 3 de ellos son indistinguibles?

19) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de las siguientes palabras, con o sin significado y considerando que dos letras iguales son indistinguibles?

SOL

ANA

MASA

SESOS

MATEMATICA

20) ¿Cuántos números de 7 dígitos puedo formar con los dígitos del número 1636121?

Teoria

Permutaciones de elementos distintos

De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar **TODOS** los elementos de un conjunto?

Una permutación de n elementos distintos $x1, x2, x3, \ldots, xn$ es un ordenamiento de esos elementos.

La cantidad de permutaciones es $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3.2.1 = n!$

Existen $n!$ permutaciones de n elementos distintos

Ejemplo

De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra MAGO?

Permutaciones con elementos indistinguibles

De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar **TODOS** los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que hay elementos que son iguales?

Una permutación de n elementos entre los cuales hay n1 elementos iguales de tipo 1, n2 elementos de tipo 2, ..., nk elementos de tipo k,

La cantidad de permutaciones distinguibles de esos elementos es $\dfrac{n!}{n1!\, n2! \ldots n3!}$

Ejemplo

De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse las letras de la palabra MAGA?

Actividad 3

Bloque 5:

21) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los números del 1 al 7?

22) ¿De cuántas maneras puede formarse un podio con 1ero, 2do y 3er puesto en una competencia con 30 participantes?

23) ¿De cuántas maneras puedo ordenar 75 alumnos en una fila, de un grupo de 100?

24) ¿De cuántas maneras puede armarse la fórmula Presidente-Vicepresidente de un partido si hay 5 candidatos posibles para cualquiera de los 2 puestos?

26) ¿Cuántos grupos de 3 dígitos diferentes pueden elegirse entre los números del 1 al 9, considerando que por ejemplo 3,4,5 es el mismo grupo que 4,5,3?

27) ¿De cuántas maneras pueden elegirse 3 alumnos de un grupo de 20?

28) ¿De cuántas maneras puedo elegir 5 cartas de un mazo de 50 cartas?

29) ¿Qué similitudes o diferencias encuentran entre los ejercicios 21) a 24) con los ejercicios que resolvieron en Bloque 3?

30) ¿Qué similitudes o diferencias encuentran entre los ejercicios 21) a 24) con los ejercicios 26) a 28)?

Bloque 6:

31) ¿Si un examen de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una con 3 opciones de respuesta, de cuántas maneras se puede responder?

32) ¿Cuántas cadenas de 8 bits hay?

33) ¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen con 101 o con 111?

34) ¿Cuántas cadenas de 8 bits hay que comiencen o terminen con 1?

35) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 5 libros de matemática, 4 de Física y 6 de Informática, si los de la misma materia deben estar juntos entre sí?

36) ¿En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, cuántos saludos hay?

37) ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen exactamente un 1?

38) ¿Cuántas cadenas de 8 bits tienen al menos un 1?

39) De un grupo de 10 estudiantes de Informática, 5 de Física y 8 de Ingeniería, se quiere formar un grupo de 4 estudiantes. ¿De cuántas maneras puede hacerse si debe haber 2 de informática, 1 de Física y 1 de Ingeniería?

40) ¿Con los datos del ejercicio anterior de cuántas maneras puede hacerse si debe haber al menos uno de Ingeniería?

41) ¿Cuántos números impares de 4 cifras hay?

42) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse 3 libros de Ciencia Ficción, 5 de Novelas Policiales y 7 de Poesía si los de Ciencia Ficción deben estar juntos entre sí?

43) ¿Con 21 equipos de futbol cuántos partidos se juegan si deben jugar una vez todos contra todos?

44) En un examen de opción múltiple con 5 preguntas y 3 opciones para cada una:

a) ¿De cuántas maneras se puede sacar 0? ¿De cuántas maneras se puede sacar 10?

b) ¿Si consideramos que cada pregunta vale 2 puntos, de cuántas maneras se puede sacar 4?

c) ¿De cuántas maneras se puede sacar 4 o más?

45) ¿Cuántas patentes de auto hay?

46) ¿De cuántas formas pueden ordenarse las letras de la palabra TELEFONO?

47) En el Quini 6 los apostadores deben elegir 6 números entre el 0 y el 45, ¿Cuántos resultados posibles puede haber?

Teoría

r-Permutaciones (Variaciones)

Formas de elegir solo algunos elementos (distintos) de un conjunto

Sean n y r números naturales tales que $1 \leq r \leq n$.

Una r-permutación de n elementos distintos x1, x2, … xn es un ordenamiento de r elementos del conjunto $\{x1,x2,\ldots,xn\}$

Al número de r-permutaciones de un conjunto de n elementos se lo denota P(n,r)

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejercicio:

Hallar el valor de n tal que $P(n,5) = 7.P(n,4)$

Combinaciones

Formas de elegir solo algunos elementos de un conjunto
(sin que importe el orden)

Dado un conjunto con n elementos distintos $X = \{x1, x2, \ldots, xn\}$ y $r \leq n$, una combinación de r elementos de X o una combinación de n elementos tomados de a r es una selección no ordenada de r elementos de X

El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos se denota C(n,r) o también $\binom{n}{r}$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \text{con} \qquad r \leq n$$

Ejercicio:

36) ¿En una fiesta con 20 invitados donde todos se saludan entre sí, cuántos saludos hay?