Theoretische Informatik 1
Übung Blatt 12

Aufgabe 12.1

$P' = \Big(\{q\}, \{a,b,c\}, \{S, S_1, S_2, C, A\}, \delta, q, S, \emptyset\Big)$

mit δ:

Q	$\Sigma \cup \{\epsilon\}$	Γ	*Resultat*
q	a	a	$\{(q,\epsilon)\}$
q	b	b	$\{(q,\epsilon)\}$
q	c	c	$\{(q,\epsilon)\}$
q	ϵ	S	$\{(q, S_1aC), (q, AcS_2)\}$
q	ϵ	S_1	$\{(q, aS_1bb), (q, acbb)\}$
q	ϵ	S_2	$\{(q, bbS_2c), (q, bbac)\}$
q	ϵ	C	$\{(q, Cc), (q, c)\}$
q	ϵ	A	$\{(q, Aa), (q, a)\}$

Aufgabe 12.2

(a)
$h_1(0) = a,\ h_2(0) = b,\ h_2(1) = cc$
$L_1 = (h_1(L_0))^* \ \circ\ h_2(L_{01}) \underset{Abschlusseigenschaften}{\Rightarrow} L_1 \in L_2$

(b)
$h_1(0) = 0101, h_2(0) = 01, h_2(1) = 1010, h_3(2) = 202$
$h_1(L_0)\ \circ\ L_2 = \Big\{(01)^n(10)^{2n}(202)^n | n \in \mathbb{N}, n \geq 2\Big\}$
$(h_2^{-1}(h_1(L_0)\ \circ\ L_2)) = L_{012} \underset{Abschlusseigenschaften}{\Rightarrow} L_2 \notin L_2$

(c)
$h_1(0) = a, h_1(1) = bb, h_2(0) = c, h_3(0) = a, h_4(0) = b, h_4(1) = cc$
$L_3 = \Big(h_1(L_{01})\ \circ\ (h_2(L_0))^*\Big) \cup \Big((h_3(L_0))^* \circ h_4(L_{01})\Big)$

$\underset{Abschlusseigenschaften}{\Rightarrow} L_3 \in L_2$

(d)
$h_1(0) = 0a, h_1(1) = a1, h_2(0) = a0, h_2(1) = 1a, h_2(2) = aa, h_3(0) = a, h_4(0) = 2s$
$L_H := h_2^{-1}\Big(h_3(L_0) \circ h_1(L_{01}) \circ h_3(L_0)\Big) = \Big\{0^n21^n \mid n \in \mathbb{N}\Big\}$
$L_4 = L_H \circ (h_4(L_0) \circ L_H)^* \underset{Abschlusseigenschaften}{\Rightarrow} L_4 \in L_2$

Aufgabe 12.3

$G = (V, T, P, S), P \subseteq \{A \to a\beta | A \in V, a \in T, \beta \in V^*\}$

Zuerst benutzen wir das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren um aus der Grammatik G einen PDA P_G mit nur einem Zustand zu erzeugen, mit $L(G) = L_\epsilon(P)$. Danach eliminieren wir alle $\epsilon-$Übergänge.

$PDA\ P_G = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S, \emptyset)$

$\forall A \in V.\ \delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \alpha) \mid A \to \alpha \in P\}$
$\forall a \in T.\ \delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$

$\Rightarrow\ \delta'(q, a, A) = \{(q, \beta) \mid A \to \alpha \in P \wedge \alpha = a\beta\}$
$\forall a \in T.\ \delta'(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$
δ' ist damit definiert.
$PDA\ P_G$'$= (\{q\}, T, V \cup T, \delta', q, S, \emptyset)$

Also hat unser neuer PDA P_G' keine $\epsilon-$Übergänge mehr und entspricht damit allen Voraussetzungen.
Zu Beweisen ist allerdings noch L(P_G) = L(P_G'), also:
(Dabei sei $w \in T^*$, $a \in T$, $\beta, \gamma \in V^*$, $n, m \in \mathbb{N}$)

$$(q, w, \gamma) \vdash^*_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Leftrightarrow (q, w, \gamma) \vdash^*_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$$

Induktion über die Anzahl der Übergänge.

$\Rightarrow$:
$\underline{IA:}(q, w, \gamma) \vdash_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\Rightarrow$ w = a, γ = a, also wegen Def. δ' (q,a,a) $\vdash_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\underline{IS:}\quad \underline{IVor:}(q, w, \gamma) \vdash^n_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, w, \gamma) \vdash^m_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\underline{IBeh:}(q, aw, A\gamma') \vdash^{n+2}_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash^{m+1}_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\underline{IBeweis:}$
$(q, aw, A\gamma') \vdash^{n+2}_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash^{m+1}_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$ mit $\gamma = \beta\gamma'$
$\Leftrightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash_{P_G} (q, aw, a\beta\gamma) \vdash_{P_G} (q, w, \beta\gamma) \vdash^n_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash (q, w, \beta\gamma') \vdash^m_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$

$\Leftarrow$:
$\underline{IA:}(q, w, \gamma) \vdash_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\Rightarrow$ w = a, γ = a, also (q,a,a) $\vdash_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$

$\underline{IS:}$ $\underline{IVor:}(q, w, \gamma) \vdash^n_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, w, \gamma) \vdash^m_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\underline{IBeh:}(q, aw, A\gamma') \vdash^{n+1}_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash^{m+2}_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\underline{IBeweis:}$
$(q, aw, A\gamma') \vdash^{n+1}_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash^{m+2}_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$ mit $\gamma = \beta\gamma'$
$\Leftrightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash (q, w, \beta\gamma') \vdash^n_{P'_G} (q, \epsilon, \epsilon)$
$\Rightarrow (q, aw, A\gamma') \vdash_{P_G} (q, aw, a\beta\gamma) \vdash_{P_G} (q, w, \beta\gamma) \vdash^m_{P_G} (q, \epsilon, \epsilon)$