Theoretische Informatik 1
Übung Blatt 13

Aufgabe 13.1

a)

$$
\begin{aligned}
&G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)\\
&P = \quad \{S \to aaAac|cbBb|\epsilon,\\
&\qquad A \to SF|C|aab,\\
&\qquad B \to aB|Bbba|BD|cbE,\\
&\qquad C \to \epsilon|S,\\
&\qquad D \to a|Ebc,\\
&\qquad E \to b|Bb|BC,\\
&\qquad F \to ACA|CccE\}
\end{aligned}
$$

1. ϵ-Übergänge eliminieren:

$$
\begin{aligned}
&G_1 = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)\\
&P_1 = \quad \{S \to aaAac|cbBb|aaac,\\
&\qquad A \to SF|C|aab|F,\\
&\qquad B \to aB|Bbba|BD|cbE,\\
&\qquad C \to S,\\
&\qquad D \to a|Ebc,\\
&\qquad E \to b|Bb|BC|B,\\
&\qquad F \to A|C|AC|CA|AA|ACA|CccE|ccE\}
\end{aligned}
$$

2. Einheitproduktionen eliminieren:
Einheitsproduktionen:
(A,F),(A,C),(C,S),(A,S),(E,B),(F,A),(F,C),(F,S)

$$
\begin{aligned}
&G_2 = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)\\
&P_2 = \quad \{S \to aaAac|cbBb|aaac,\\
&\qquad A \to SF|AC|CA|AA|ACA|CccE|ccE|aab|aaAac|cbBb|aaac,\\
&\qquad B \to aB|Bbba|BD|cbE,\\
&\qquad C \to aaAac|cbBb|aaac,\\
&\qquad D \to a|Ebc,\\
&\qquad E \to b|Bb|BC|aB|Bbba|BD|cbE,\\
&\qquad F \to SF|aab|aaAac|cbBb|aaac|AC|CA|AA|ACA|CccE|ccE\}
\end{aligned}
$$

3. Erreichbarkeit und Produktion testen
Erreichbar: S,A,B,a,b,c,C,D,E,F
Priduzierend: a,b,c,S,A,B,C,D,E,F
$\Rightarrow$ es wird nichts geändert.

4. Terminale auflösen

$G_3 = (\{S, A, B, C, D, E, F, X_a, X_b, X_c\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{array}{lll}
P_3 = & \{S \rightarrow & X_aX_aAX_aX_c|X_cX_bBX_b|X_aX_aX_aX_c, \\
& A \rightarrow & SF|AC|CA|AA|ACA|CX_cX_cE|X_cX_cE|X_aX_aX_b|X_aX_aAX_aX_c| \\
& & X_cX_bBX_b|X_aX_aX_aX_c, \\
& B \rightarrow & X_aB|BX_bX_bX_a|BD|X_cX_bE, \\
& C \rightarrow & X_aX_aAX_aX_c|X_cX_bBX_b|X_aX_aX_aX_c, \\
& D \rightarrow & X_a|EX_bX_c, \\
& E \rightarrow & X_b|BX_b|BC|X_aB|BX_bX_bX_a|BD|X_cX_bE, \\
& F \rightarrow & SF|X_aX_aX_b|X_aX_aAX_aX_c|X_cX_bBX_b|X_aX_aX_aX_c|AC|CA|AA| \\
& & ACA|CX_cX_cE|X_cX_cE, \\
& X_a \rightarrow & a, \\
& X_b \rightarrow & b, \\
& X_c \rightarrow & c\}
\end{array}
$$

5. Aufspalten von Produktionen

$G_4 = (\{S, A, B, C, D, E, F, Y_{aAac}, Y_{Aac}, Y_{ac}, Y_{bBb}, Y_{Bb}, Y_{aac}, Y_{ba}, Y_{ccE}, Y_{ab}, Y_{bba}, Y_{ac}, Y_{cE}, Y_{CA}, Y_{bE}, Y_{bc}\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$
\begin{array}{ll}
P_4 = & \{S \rightarrow X_aY_{aAac}|X_cY_{bBb}|X_aY_{aac}, \\
& A \rightarrow SF|AC|CA|AA|AY_{CA}|CY_{ccE}|X_cY_{cE}|X_aY_{ab}|X_aY_{aAac}|X_cY_{bBb}|X_aY_{aac}, \\
& B \rightarrow X_aB|BY_{bba}|BD|X_cY_{bE}, \\
& C \rightarrow X_aY_{aAac}|X_cY_{bBb}|X_aY_{aac}, \\
& D \rightarrow X_a|EY_{bc}, \\
& E \rightarrow X_b|Bb|BC|X_aB|BY_{bba}|BD|X_cY_{bE}, \\
& F \rightarrow SF|X_aY_{ab}|X_aY_{aAac}|X_cY_{bBb}|X_aY_{aac}|AC|CA|AA|ACA|CY_{ccE}|X_cY_{cE}\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
Y_{aAac} \rightarrow X_aY_{Aac}, & Y_{Aac} \rightarrow Y_{ac}, \\
Y_{bBb} \rightarrow X_bY_{Bb}, & Y_{Bb} \rightarrow BX_b, \\
Y_{aac} \rightarrow X_aY_{ac}, & Y_{ba} \rightarrow X_bX_a, \\
Y_{ccE} \rightarrow X_cY_{cE}, & Y_{ab} \rightarrow X_aX_b, \\
Y_{bba} \rightarrow X_bY_{ba}, & Y_{ac} \rightarrow X_aX_c \\
Y_{cE} \rightarrow X_cE, & X_a \rightarrow a, \\
Y_{CA} \rightarrow CA, & X_b \rightarrow b, \\
Y_{bE} \rightarrow X_bE, & X_c \rightarrow c\} \\
Y_{bc} \rightarrow X_bX_c, &
\end{array}
$$

b)

$w_1 = aaaabac$

a	a	a	a	b	a	c
$\{D, X_a\}$	$\{D, X_a\}$	$\{D, X_a\}$	$\{D, X_a\}$	$\{E, X_b\}$	$\{D, X_a\}$	$\{X_c\}$
■	■	■	$\{Y_{ab}\}$	$\{Y_{ba}\}$	$\{Y_{ac}\}$	
■	■	$\{A, F\}$	■	■		
■	■	■	■			
■	■	$\{Y_{Aac}\}$				
■	$\{Y_{aAac}\}$					
$\{S\}$						

$\Rightarrow\ w_1 \in L(G_4)$

$w_2 = cbacbbb$

c	b	a	c	b	b	b
$\{X_c\}$	$\{X_b, E\}$	$\{X_a, D\}$	$\{X_c\}$	$\{X_b, E\}$	$\{X_b, E\}$	$\{X_b, E\}$
$\{Y_{cE}\}$	$\{Y_{ba}\}$	$\{Y_{ac}\}$	$\{Y_{cE}\}$	$\{Y_{bE}\}$	$\{Y_{bE}\}$	
■	■	■	$\{B, E\}$	■		
■	■	$\{B, E\}$	$\{Y_{Bb}\}$			
■	$\{Y_{bE}\}$	$\{E, Y_{Bb}\}$				
$\{B\}$	$\{Y_{bE}, Y_{bBb}\}$					
$\{S\}$						

$\Rightarrow\ w_2 \in L(G_4)$

Aufgabe 13.2

Zeige das $L = \{0^m 1^{m*n} 2^n | n, m \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_2$.
Annahme: $L \in \mathcal{L}_2$.
Sei n' beliebig aber fest. Wir wählen $z = 0^m 1^{m*p} 2^p$ mit $m, p \in \mathbb{N}. m, p \geq n'$.
Sei $u, v, w, x, y \in \Gamma^*$ bieliebig mit z=uvwxy,
(1) $v \circ x \neq \epsilon$ und
(2)$|vwx| \leq n'$

1.*Fall*)

$(v \circ x) \in L(0^+ + 1^+ + 2^+)$:
$u = 0^a, v = 0^b, w = 0^c, x = 0^d, y = 0^{m-a-b-c-d}1^{m*p}2^p$
für $b, d \neq 0$ *und* $b + c + d \leq n'$.
Wir wählen: i=2.
$\Rightarrow uv^2wx^2y = 0^{m+b+d}1^{m*p}2^p \notin L.$
da $|vwx| \leq n' \leq m, p$ gilt dies ebenfalls für $vx = 1^+$ *und* $vx = 2^+$.

2.*Fall*)

$(v \circ x) \in L(0^+1^+ + 1^+2^+)$:
$|vx|_0 * p \neq |vx|_1$ gilt immer, denn $p > n' \geq |vwx| \geq |vx|$
$a := |vx|_0, b := |vx|_1$

I.	$a * p = b$
II.	$a + b \leq n$
III.	$p > n$
I in II.	$a + a * p \leq n$
	$\Leftrightarrow a * (p + 1) \leq n$
	$\Leftrightarrow a = 0$
	$\Rightarrow b = 0$
	$\Rightarrow$ (1) ist verletzt

Weiterführend sei i = 0
$\Rightarrow z$ liegt nicht mehr in der Sprache
Der Beweis ist für $|vx| = 1^+2^+$analog.

Da wir in allen Fällen zu Wiedersprüchen gelangen ist $L \notin \mathcal{L}_2$.

Aufgabe 13.3

$G = (V, T, P, S), P \subset \{A \to uBv \vee A \to \epsilon | A, B \in V, u, v \in T^*\}$

(Dabei sei $S, A \in V, u, v, w, x, y, z \in T^*, m, i \in \mathbb{N}$*)*
In jeder Ableitung $S \to^k z$ mit $k = |V| + 1$ kommt mindestens ein Nichtterminal A mindestens zweimal vor. Diese Wiederholung von A erzeugt dabei mindestens ein Terminal:
$A \to^* vAx \Rightarrow |vx| \geq 1$

Sei $S \to^* uAy \to^m uvAxy \to^* z$ eine Ableitung eines Wortes $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$.
Dann existiert auch ein $w' \in L(G)$, mit einer Ableitung:
$S \to^* uAy \to^{m^i} uv^iAx^iy \to^* z'$
$\Leftrightarrow$
Ist L eine lineare Sprache, so existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}^+$,

(Dabei ist n > Summe der Längen aller Terminalteilwörter, die im Rumpf einer Regel von P stehen)

sodass jedes Wort $z \in L$ mit Länge $|z| \geq n$ zerlegt werden kann in z = uvwxy
($S \rightarrow^* uAy \rightarrow^m uvAxy \rightarrow uvwxy$)
mit den Eigenschaften
1. $|uvxy| \leq n$
(, denn uvxy ist bei der Abarbeitung ohne Wiederholung entstanden)
2. $|vx| \geq 1$
(, denn vx ist das Teilwort, dass bei der Wiederholung von A entsteht)
3. $\forall i \geq 0.uv^iwx^iz \in L$

Anmerkung wegen Gruppenwechsel
Aufgrund eines Gruppenwechsels setzt sich unsere Gruppe nun aus den in der Kopfzeile benannten Personen zusammen. Neu hinzu kam dabei Lukas Sprinck. Vorherige Übungsabgaben erfolgten bei:

- Thomas Verweyen (759743):G4 (Tina Beigel),
- Norman Vetter (749229):G4 (Tina Beigel),
- Lukas Sprinck (770616):G3 (Thorsten Alten).