MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE FIZICĂ
Ediție jubiliară Cluj-Napoca 2014
Inspectoratul Școlar Județean Cluj

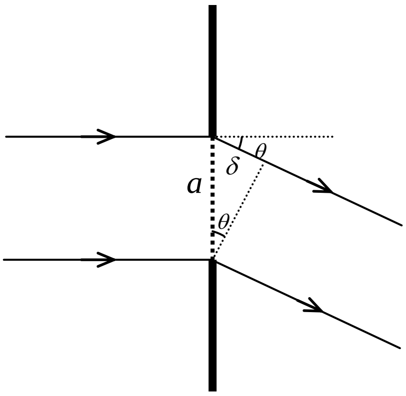
XII

Proba Teoretică
Barem

<table>
<tr><th>Subiect 1</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>Barem subiect 1</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>Sarcina de lucru 1</td><td></td><td>4,50</td></tr>
<tr><td>

a)

Deoarece incidența este normală, planul fantei va coincide cu o suprafață de undă a undei incidente plane. Punctele suprafeței de undă din planul fantei devin, în acord cu principiul Huygens - Fresnel, surse de unde secundare sferice, coerente şi în fază. Împărțind aria fantei în fâşii cu lățimea foarte mică, toate având aceeaşi arie, atunci fiecare fâşie poate fi considerată ca o sursă de unde secundare, fazele, frecvența şi amplitudinile lor a_0 fiind egale.



Pentru razele difractate de marginile fantei (Fig. 1), sub acelaşi unghi θ față de normala la paravan, diferența de drum optic este

$$\delta = a\sin\theta,$$

</td><td>0,25</td><td rowspan="5">1,75</td></tr>
<tr><td>

iar diferența de fază

$$\varphi = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta.$$

Fig. 1

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

Pentru razele difractate pe direcția fasciculului incident, amplitudinea rezultantă este $A_0 = Na_0$, unde N este numărul de surse secundare.

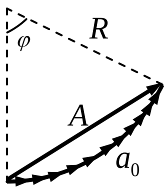


Fig. 2

Pentru razele difractate sub unghiul θ față de normala la paravan, amplitudinea rezultantă este dată de diagrama fazorială din Fig. 2, unde lanțul de fazori corespunzând undelor emise de fiecare sursă secundară se transformă dintr-un contur poligonal într-un arc de cerc, care subîntinde un unghi la centrul cercului egal cu φ.

Prin urmare:

$$A = 2R\sin\frac{\varphi}{2},$$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

iar

$$R = \frac{Na_0}{\varphi} = \frac{A_0}{\varphi},$$

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>

aşa încât

$$A = A_0\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}.$$

</td><td>0,25</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

În concluzie

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2 .$$

0,25

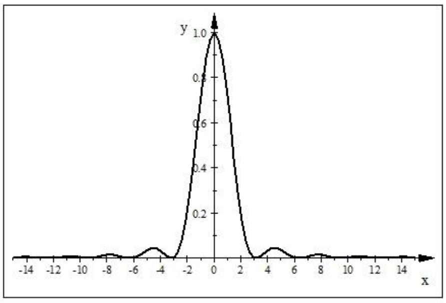


Fig. 3

Maximul central (v. Fig. 3) se obține pentru $\theta = 0$ şi are valoarea $I = I_0$, în timp ce minimele ($I_{\min} = 0$) se obțin pentru $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, adică pentru $\varphi_m = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}^*$, deoarece pentru $m = 0$ se obține maximul central. Ținând cont de expresia pentru diferența de fază, condiția de formare a minimelor devine

$$a\sin\theta_m = m\lambda .$$

0,25

<u>*Observații:*</u>

- *Maximele secundare, mărginite de două minime vecine, au lățimea λ / a, iar maximul central are lățimea dublă, $2\lambda / a$;*
- *Cu cât a scade, lățimea maximului central creşte, astfel încât pentru $a \approx \lambda$, $\theta_1 \approx \frac{\pi}{2}$, adică maximul central se va întinde pe tot ecranul.*

b) Admițând că maximele secundare sunt simetrice, ele se realizează pentru

$$a\sin\theta_m = \left(m + \frac{1}{2} \right)\lambda ,$$

0,25

de unde

$$\varphi_{\max} = (2m+1)\pi ,$$

0,25

ceea ce înseamnă că intensitatea lor relativă va fi

$$\frac{I_m}{I_0} = \left(\frac{2}{(2m+1)\pi} \right)^2 .$$

0,25

În concluzie, $\frac{I_1}{I_0} = \frac{4}{9\pi^2} = 0,045$, $\frac{I_2}{I_0} = \frac{4}{25\pi^2} = 0,016$ şi $\frac{I_3}{I_0} = \frac{4}{49\pi^2} = 0,008$.

3x0,25

Intensitatea relativă a maximului central este

$$\frac{I_0}{I_{tot}} = \frac{I_0}{I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} I_m} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{m=1}^{\infty} I_m}{I_0}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} = \frac{2\pi^2}{3\pi^2 - 8} .$$

0,25

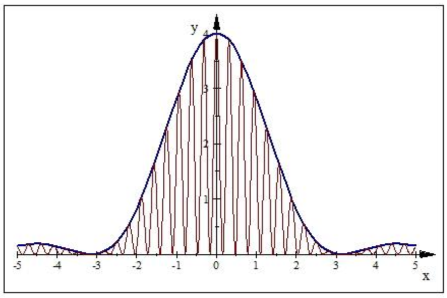
Numeric, $\frac{I_0}{I_{tot}} = 91,35\%$.

0,25

2,00

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

c) Lărgimea imaginii fantei este $$\Delta y = a + 2L\theta_1 = a + 2L\frac{\lambda}{a} = 10{,}1\ \text{mm} \cong 1\ \text{cm},$$ iar lungimea ei $$\Delta x = l + 2L\theta_1' = l + 2L\frac{\lambda}{l} = 1{,}01\ \text{cm} \cong 1\ \text{cm}.$$	2x0,25 0,25	**0,75**
Sarcina de lucru 2		**4,50**
a) Figurile de difracție produse de fiecare fantă se suprapun, dar, în plus, fasciculele difractate de fiecare fantă interferă. Prin urmare, dacă distanța dintre centrele celor două fante este $d = a + b$, atunci diferența de fază dintre undele coerente care provin de la cele două fante este $$\varphi_d = k\delta_d = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta,$$ unde θ este unghiul de difracție. Deoarece intensitatea fiecăreia dintre cele două unde care interferă este cea dată de difracția pe o fantă $$I_a = I_0\left(\frac{\sin\frac{\varphi_a}{2}}{\frac{\varphi_a}{2}}\right)^2,$$ atunci intensitatea totală a undelor care interferă este $$I_d = I_a + I_a + 2\sqrt{I_a \cdot I_a}\cos\varphi_d = 2I_a\left(1+\cos\varphi_d\right) = 4I_a\cos^2\frac{\varphi_d}{2}.$$ Prin urmare, figura de interferență va fi modulată de figura de difracție (Fig. 3). Maximele de interferență se obțin pentru $\cos\frac{\varphi_d}{2} = \pm 1$, adică $\varphi_d = 2m\pi$, de unde rezultă că $$d\sin\theta_m = m\lambda,$$ care este tocmai condiția cerută.  Fig. 4	0,25 0,25 0,25 0,25	**1,00**
b) Maximele de interferență care pot fi observate sunt cele care nu se suprapun peste minimele de difracție. Din condiția pentru obținerea maximelor de interferență $d\sin\theta_m = m\lambda$ și cea pentru obținerea minimelor de difracție $a\sin\theta_m = m'\lambda$, rezultă că $$m = m'\frac{d}{a} = 16m',\ m' = \pm 1,\ \pm 2\ldots.$$	0,25	**0,75**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem

Aşadar dispar maximele de interferență de ordinele $\pm 16,\ \pm 32,\ \pm 48$ etc. În concluzie, în interiorul maximului principal de difracție se formează, împreună cu maximul de ordin zero de interferență, un număr de maxime egal cu $2\left(\left[\frac{d}{a}\right]-1\right)+1=2\left[\frac{d}{a}\right]-1=2\cdot 16-1=31,$ iar în interiorul maximelor secundare de difracție, care au lărgimea egală cu jumătatea lărgimii maximului principal, se formează un număr de 15 maxime de interferență egal cu $\left[\frac{d}{a}\right]-1=16-1=15.$	0,25 0,25	
c) Din condiția de maxim de interferență, $d\sin\theta_m = m\lambda$ şi de minim de difracție, $a\sin\theta_m = m'\lambda$, rezultă că numărul teoretic de maxime de interferență este: $2m_{\max}+1=2\left[\frac{d}{\lambda}\right]+1=6401.$ Cu toate acestea, deoarece dispare un număr de maxime egal cu numărul total al minimelor nule de difracție $2m_{\max}'=2\left[\frac{a}{\lambda}\right]=400,$ atunci numărul de maxime de interferență care se pot observa este $2m_{\max}+1-2m_{\max}'=6001.$ În condițiile de mai sus, dacă toate aceste maxime ar fi observabile, numărul de maxime secundare de difracție observabile ar fi $\frac{6001-31}{15}=398$, adică câte 199 de o parte şi de alta a maximului central. Numărul de maxime de interferență care se observă experimental este egal cu $31+4\cdot 15=91.$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	**1,25**
d) Dacă s este distanța dintre două maxime de interferență vecine, măsurată pe un ecran plasat în planul focal imagine al lentilei, atunci condiția de observabilitate a acestora este $s=f\Delta\theta\geq s_{\min},$ unde $s_{\min}$ este distanța minimă dintre două puncte vecine de pe ecran care pot fi observate ca fiind distincte, atunci când se află la distanța δ de ochi: $s_{\min}=\delta\cdot\beta_{\min}=7{,}5\cdot 10^{-5}$ m.	0,25 0,25	**1,50**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

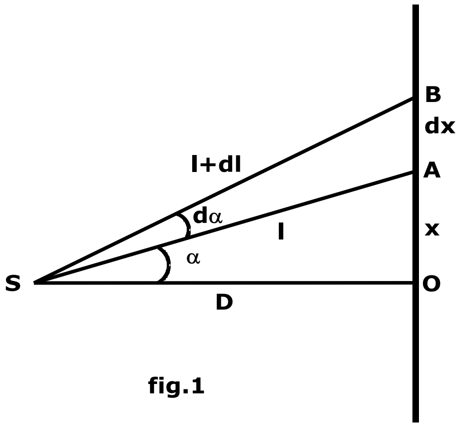
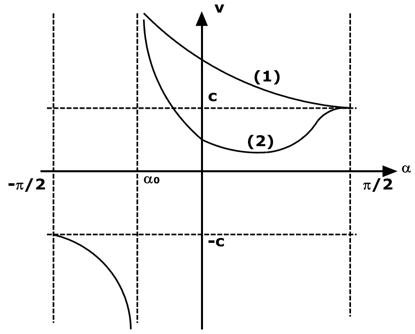
Proba Teoretică
Barem

Distanța unghiulară $\Delta\theta$ dintre două maxime vecine rezultă din scrierea condițiilor pentru maximele de interferență $$\begin{cases} d\cdot\theta_m = m\lambda \\ d\cdot(\theta_m+\Delta\theta)=(m+1)\lambda \end{cases},$$ de unde $$\Delta\theta=\frac{\lambda}{d}=3{,}125\cdot 10^{-4}.$$ Prin urmare $$f\geq\frac{\delta\beta_{\min}d}{\lambda}=24\ \text{cm}.$$	0,25 0,25 2x0,25	
Oficiu		**1**

Problemă propusă de
Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU, Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iaşi

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

Subiect 2. Fotoni…"ciudaţi"	**Parţial**	**Punctaj**
1. Barem subiect 2		**10**
 fig.1 **a.** Conform fig.1, spre B fotonii pleacă mai târziu decât spre A cu $dt_1 = \frac{d\alpha}{\omega}$ şi "zboară" până la B cu dt_2 în plus faţă de cei spre A, $dt_2 = \frac{dl}{c}$. Deci spotul apare în B după $dt = dt_1 + dt_2$ faţă de cel din A. Aşadar, viteza de deplasare a spotului din A în B este $\mathrm{v} = \frac{dx}{dt}$ Din $l = \frac{D}{\cos\alpha} \Rightarrow dl = D\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha$ şi $dt_2 = \frac{D}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha$ Deci $dt = \frac{d\alpha}{\omega} + \frac{D}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha$ Din $tg\alpha = \frac{x}{D} \Rightarrow x = Dtg\alpha \Rightarrow dx = \frac{D}{\cos^2\alpha}d\alpha$. Prin urmare $\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{D}{\cos^2\alpha}d\alpha}{\frac{d\alpha}{\omega} + \frac{D}{c}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}d\alpha}$, adică $\boxed{\mathrm{v} = \frac{\omega D}{\cos^2\alpha + \frac{\omega D}{c}\sin\alpha}}$	**1**	**3**
Graficul are aspectul din fig.2  fig.2	**0,5**	
Prin α_0 trece asimptota verticală pentru care se anulează numitorul $\sin\alpha_0 = \frac{\omega D}{2c} - \sqrt{\left(\frac{\omega D}{2c}\right)^2 + 1}$	**0,25**	

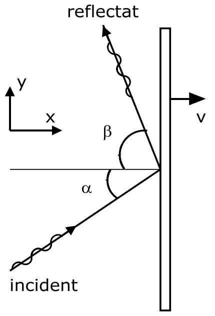
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE FIZICĂ
Ediție jubiliară Cluj-Napoca 2014
Inspectoratul Școlar Județean Cluj

XII

Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

Curba (1) se obţine dacă $\omega D > 2c$ şi curba (2) dacă $\omega D < 2c$	**0,25**	
Deoarece în timp ce α ia valori de la $-\pi/2$ la $+\pi/2$, viteza spotului ia valori negative şi pozitive, înseamnă că spotul se poate mişca în ambele sensuri pe perete. Pentru a evita efectele remanenţei imaginii pe retină, trebuie ca viteza unghiulară să nu fie prea mare, şi atunci se poate observa cum spotul se mişcă şi spre stânga şi spre dreapta pe perete (un fel de dedublare a fasciculului).	**0,5**	
Fenomenul se poate vedea însă numai pentru distanţe D suficient de mari (de ordinul miilor de kilometri). Dacă $\omega D << c$ se obţine $\mathrm{v}(\alpha) = \dfrac{\omega D}{\cos^2 \alpha}$, ca şi cum fasciculul laser ar putea avea viteza infinită.	**0,25**	
Viteza spotului **poate** depăşi valoarea c. Aceasta însă nu contrazice TRR, pentru că cu ajutorul lui nu se poate transmite o informaţie sau un semnal dintr-un punct al planului peretelui în altul.	**0,25**	
b.i)Vom considera o ciocnire elastică între foton şi oglindă şi vom aplica pe baza diagramei din figura alăturată, legile de conservare ale energiei şi impulsului.  $\begin{cases} \dfrac{h}{\lambda}\cos\alpha + M\mathrm{v} = -\dfrac{h}{\lambda'}\cos\beta + M\left(\mathrm{v}+\Delta\mathrm{v}_x\right) \\ \dfrac{h}{\lambda}\sin\alpha = \dfrac{h}{\lambda'}\sin\beta \\ \dfrac{hc}{\lambda} + \dfrac{M\mathrm{v}^2}{2} = \dfrac{hc}{\lambda'} + \dfrac{M\left(\mathrm{v}+\Delta\mathrm{v}_x\right)^2}{2} \end{cases}$	**0,5**	
Ecuaţiile 1 şi 3 pot fi aduse la forma: $M\Delta\mathrm{v}_x = \dfrac{h}{\lambda}\cos\alpha + \dfrac{h}{\lambda'}\cos\beta$ $\dfrac{hc}{\lambda} = \dfrac{hc}{\lambda'} + M\mathrm{v}\Delta\mathrm{v}_x + \dfrac{\left(M\Delta\mathrm{v}_x\right)^2}{2M}$ Având în vedere că $M \to \infty$ (oglindă grea), se obţine $\lambda' = \lambda\dfrac{c+\mathrm{v}\cos\beta}{c-\mathrm{v}\cos\alpha}$ (*)	**0,5**	**4**
iar din ecuaţia 2 din sistem, $\sin\alpha = \dfrac{\sin\beta\left(c-\mathrm{v}\cos\alpha\right)}{c+\mathrm{v}\cos\beta}$	**0,25**	
Această ecuaţie duce, după ridicarea ei la pătrat şi efectuarea calculelor corespunzătoare, la o ecuaţie de gradul al doilea în $\cos\beta$, care are două soluţii: **Soluţia I**: $\boxed{\cos\beta = \dfrac{-2\dfrac{\mathrm{v}}{c} + \left(1+\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2}\right)\cos\alpha}{1+\dfrac{\mathrm{v}^2}{c^2} - 2\dfrac{\mathrm{v}}{c}\cos\alpha}}$, care reprezintă legea reflexiei în acest caz.	**0,5**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

şi **Soluţia II**: $\cos\beta_2=\dfrac{2\dfrac{v}{c}\cos^2\alpha-\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha}{1+\dfrac{v^2}{c^2}-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha}$, de unde rezultă uşor că $\beta_2=\pi-\alpha$. Aceasta ar însemna că fotonul trece dincolo de oglindă, ceea ce nu poate avea loc.	**0,25** **0,25**	
ii) În cazul în care viteza oglinzii face un unghi φ cu normala, se înlocuieşte doar v cu vcosφ şi se obţine: $\cos\beta=\dfrac{-2\dfrac{v\cos\varphi}{c}+\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi\right)\cos\alpha}{1+\dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha\cos\varphi}$	**0,25**	
Analizând soluţia I, se poate observa că pentru v > 0, există un interval de valori pentru α, pentru care β este mai mare decât 90˚. Acest fenomen este cunoscut sub numele de „reflexie înainte” şi începe la un unghi α_{critic} care rezultă din formula dedusă pentru $\beta=90°$	**0,25**	
$\cos\alpha_{critic}=\dfrac{2\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v^2}{c^2}}$. Fenomenul încetează dacă $\cos\alpha_{\max}=\dfrac{v}{c}$, adică componenta vitezei fotonului pe direcţia mişcării oglinzii este egală cu viteza oglinzii.	**0,25**	
Lungimea de undă a fotonului reflectat se află revenind la formula (*) unde înlocuim soluţia I şi după câteva calcule se ajunge la: $\boxed{\lambda'=\lambda\dfrac{1-\dfrac{v^2}{c^2}}{1+\dfrac{v^2}{c^2}-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha}}$, respectiv $\lambda'=\lambda\dfrac{1-\dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi}{1+\dfrac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha\cos\varphi}$	**0,5**	
Din formula pentru lungimea de undă a fotonului reflectat, obţinută mai sus, se obţine imediat că $\lambda'=3\lambda$. Dacă spectrul vizibil este cuprins aproximativ între 400 nm şi 800 nm, atunci lumina reflectată va fi în întregime în infraroşu. Deci în condiţiile date, Einstein nu-şi poate vedea chipul.	**0,5**	
c. Unghiul de deviaţie este adimensional. Evident, el trebuie să depindă de masa Soarelui, de distanţa minimă faţă de Soare şi de constanta atracţiei universale. Numai cu acestea nu sepoate obţine o mărime adimensională, deci introducem şi viteza luminii, *c*. Obţinem: $\langle\theta\rangle_{SI}=\langle M_S^{\alpha}r^{\beta}k^{\gamma}c^{\delta}\rangle=1$ $M^{\alpha}L^{\beta}\dfrac{L^{3\gamma}}{M^{\gamma}T^{2\gamma}}\dfrac{L^{\delta}}{T^{\delta}}=1$ $L^{\beta+3\gamma+\delta}M^{\alpha-\gamma}T^{-\delta-2\gamma}=1$	**0,25**	**2**
Rezultă sistemul: $\begin{cases}\beta+3\gamma+\delta=0\\ \alpha-\gamma=0\\ -\delta-2\gamma=0\end{cases}$ cu soluţiile $\alpha=\gamma$, $\beta=-\gamma$ şi $\delta=-2\gamma$		

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Proba Teoretică
Barem Subiectul 2

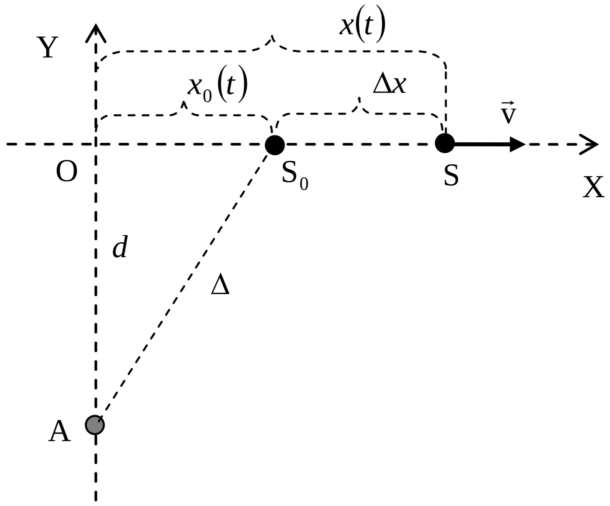
Deci cele patru mărimi formează o combinaţie adimensională dacă sunt grupate ca un raport de forma: $\left(\frac{kM_s}{rc^2}\right)^\gamma$. Deci unghiul de deviere poate fi o funcţie de forma $\theta = A\cdot f\left(\left(\frac{kM_s}{rc^2}\right)^\gamma\right)$	**0,25**	
Cea mai simplă dependenţă este $\theta = A\frac{kM_S}{rc^2}$ Constanta A nu poate fi determinată prin analiză dimensională. Din TRG rezultă valoarea 4. Iar din gravitaţia newtoniană, 2. Noi vom alege 1.	**0,25**	
Calculul numeric dă: $\theta = 1\frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}}{7\cdot 10^{8}\cdot 9\cdot 10^{16}} = 2,117\cdot 10^{-6} rad \approx 0,4''$	**0,50**	
Pentru ca Pămîntul să devină gaură neagră, este rezonabil să presupunem că $\theta \approx 1\,rad$. Astfel toţi fotonii, ar cădea pe Pământ.	**0,25**	
Rezultă: $R \approx \frac{kM_p}{c^2} = \frac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{9\cdot 10^{16}} \approx 4\,mm$	**0,50**	
Oficiu		**1**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

PROBLEMA 3

<table>
<tr><th>Barem de notare</th><th>Parţial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td>Problema 3</td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>a)</td><td></td><td>3 p</td></tr>
<tr><td>
Aşa cum indică desenul din figura alăturată, la momentul iniţial, $t_0 = 0,$ sursa de lumină trece prin originea O a sistemului de coordonate XY şi la momentul t ea este în poziţia $\mathrm{S}(x),$ unde:

$$x = x(t) = \mathrm{v}t.$$



Observatorul din A primeşte lumina trimisă de sursă atunci când aceasta se afla în poziţia $\mathrm{S}_0(x_0).$ Acestui semnal luminos, ca să ajungă de la sursă la observator, parcurgând distanţa:

$$\Delta = \sqrt{x_0^2 + d^2},$$

îi trebuie timpul:

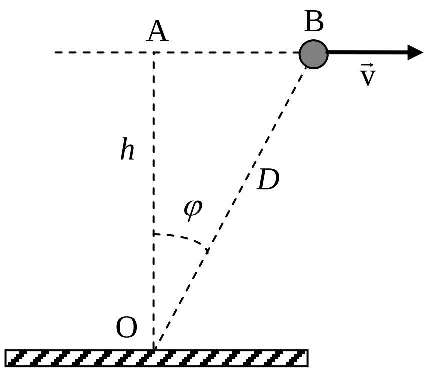
$$\tau = \frac{\Delta}{c} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$$

După timpul τ de la emiterea semnalului luminos, sursa a ajuns în poziţia $\mathrm{S}(x)$, parcurgând distanţa:

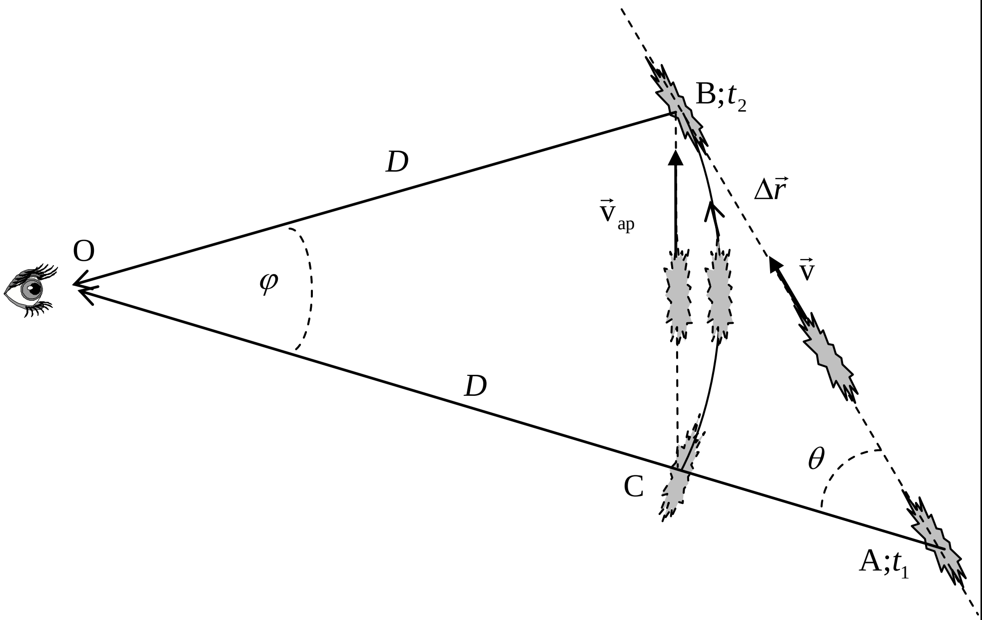
$$\Delta x = x - x_0 = \mathrm{v}\tau,$$

astfel încât:

$$\frac{x - x_0}{\mathrm{v}} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c}.$$
</td><td>0,50</td><td></td></tr>
<tr><td>
Evident, deoarece $x = x(t),$ din relaţia anterioară rezultă că şi $x_0 = x_0(t),$ aceasta fiind coordonata de poziţie a sursei în aprecierea observatorului. Într-adevăr, dacă sursa a fost în poziţia $\mathrm{S}_0(x_0)$ la momentul $(t - \tau)$ şi semnalul luminos a avut nevoie de timpul τ ca să ajungă la observator, atunci, recepţia semnalului la observator s-a făcut la momentul t, exact momentul când sursa este în poziţia S. Ca urmare, coordonata de poziţie x_0 este apreciată de observator la momentul t, astfel
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

încât, pentru observator, $x_0 = x_0(t)$: $$\frac{vt - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_0^2 + d^2}}{c};$$ $$\left(c^2 - v^2\right)x_0^2 - 2vtc^2 x_0 + v^2\left(t^2c^2 - d^2\right) = 0;$$ $$x_0(t) = \frac{vtc^2 \pm \sqrt{v^2t^2c^4 - \left(c^2 - v^2\right)v^2\left(t^2c^2 - d^2\right)}}{c^2 - v^2};$$ $$x_0(t) = v\frac{c^2t - \sqrt{v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}{c^2 - v^2},$$ ceea ce evidenţiază o mişcare neuniformă apreciată de observator pentru sursa de lumină.	1,50	
Pentru calculul vitezei instantanee şi a acceleraţiei instantanee ale sursei apreciate de observator, utilizând noţiuni cunoscute din analiza matematică, rezultă: $$w = \frac{dx_0}{dt} = \frac{vc^2}{c^2 - v^2}\left[1 - \frac{v^2t}{\sqrt{v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)}}\right];$$ $$a = \frac{dw}{dt} = -\frac{v^3c^2d^2}{\left[v^2c^2t^2 + d^2\left(c^2 - v^2\right)\right]^{3/2}} < 0,$$ ceea ce dovedeşte caracterul încetinit al mişcării sursei, apreciată de observator. Evident, pentru $t = 0$, se obţine valoarea maximă a acceleraţiei apreciată de observator pentru mişcarea sursei de lumină: $$a_{\max} = \left\| \frac{v^3c^2d^2}{d^3\left(c^2 - v^2\right)^{3/2}} \right\| = \frac{v^3}{cd}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}.$$	1,00	
b)		**2 p**
Dacă la momentul $t = 0$ obiectul luminos trece prin punctul cel mai apropiat de observator, punctul A, aşa cum indică desenul din figura alăturată şi dacă la momentul oarecare, $\tau > 0$, obiectul luminos a ajuns în punctual B, parcurgând distanţa: $$x = v_0\,\tau = h\tan\varphi,$$ atunci observatorul din O va afla de trecerea obiectului luminos prin punctual B la ora $t > \tau$:  $$t = \tau + \frac{D}{c} = \tau + \frac{\frac{h}{\cos\varphi}}{c} = \tau + \frac{h}{c\cos\varphi}.$$	0,50	
Viteza obiectului luminos, v, înregistrată de observatorul din O la ora $t > \tau$, corespunzătoare momentului τ, atunci când obiectul trece prin punctul B, va fi: $$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = v_0\frac{1}{\frac{dt}{d\tau}};$$		

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\tau+\frac{h}{c\cos\varphi}\right);\ \ \varphi=\varphi(\tau);$$ $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1+\frac{h}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)=1+\frac{h}{c}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau};$$ $$x=\mathrm{v}_0\,\tau=h\tan\varphi,$$ $$\mathrm{d}x=\mathrm{v}_0\mathrm{d}\tau=h\,\mathrm{d}(\tan\varphi)=h\,\mathrm{d}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)=h\frac{\cos\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi-\sin\varphi\,\mathrm{d}\cos\varphi}{\cos^2\varphi};$$ $$\mathrm{d}\sin\varphi=\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi;\ \ \mathrm{d}\cos\varphi=-\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi;$$ $$\mathrm{v}_0\mathrm{d}\tau=h\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi};$$ $$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{v}_0}{h}\cos^2\varphi;$$ $$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=1+\frac{\mathrm{v}_0}{c}\sin\varphi;$$ $$\mathrm{v}=\mathrm{v}_0\frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}_0}{1+\frac{\mathrm{v}_0}{c}\sin\varphi}.$$ Observatorul din O vede obiectul luminos trecând prin punctul B, mai târziu decât momentul când s-a întâmplat această trecere, din cauza valorii finite a vitezei de propagare a luminii.	1,50	
c)		**4 p**
Un jet incandescent relativist pleacă din centrul unui nucleu galactic activ, deplasându-se pe direcția AB, cu viteza v așa cum indică desenul din figura alăturată. Să admitem că la momentul t_1 o rază de lumină părăsește jetul în punctul A și o altă rază de lumină părăsește jetul la momentul t_2 în punctul B, astfel încât: $$\Delta t=t_2-t_1;$$ $$\mathrm{AB}=\Delta r=\mathrm{v}\Delta t.$$		

	0,50	
Observatorul din punctul O nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. El apreciază mișcarea aparentă a jetului, în proiecție pe sfera cerească, de-a lungul arcului de cerc CB. Dacă unghiul φ este foarte mic, atunci $\mathrm{BC} \approx\perp \mathrm{AC}$, astfel încât: $\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\cdot\sin\theta = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta;$ $\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\cdot\cos\theta = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta;$ $\mathrm{BC} \approx D\cdot\varphi;$ $\mathrm{BC} = \mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta = D\cdot\varphi = \mathrm{CB}.$ La observatorul din punctul O, cele două semnale luminoase ajung la momentele τ_1 și respectiv τ_2, astfel încât: $\tau_1 = t_1 + \frac{\mathrm{AO}}{c} = t_1 + \frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CO}}{c} = t_1 + \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta + D}{c};$ $\tau_2 = t_2 + \frac{\mathrm{BO}}{c} = t_2 + \frac{D}{c};$ $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \Delta t - \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\cos\theta}{c};$ $\Delta\tau = \left(1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\cos\theta\right)\Delta t;\ \beta = \frac{\mathrm{v}}{c};$ $\Delta\tau = (1-\beta\cos\theta)\Delta t;\ \Delta t = \frac{\Delta\tau}{1-\beta\cos\theta}.$	1,50	
Observatorul nu poate aprecia mișcarea reală a jetului. În proiecție pe sfera cerească, observatorul apreciază mișcarea aparentă a jetului pe direcția BC, cu viteza transversală: $\mathrm{v}_{\mathrm{ap}} = \frac{\mathrm{BC}}{\Delta\tau} = \frac{D\cdot\varphi}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta}{\Delta\tau} = \frac{\mathrm{v}\cdot\Delta t\cdot\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)\Delta t};$ $\mathrm{v}_{\mathrm{ap}} = \frac{\mathrm{v}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta};\ \beta_{\mathrm{ap}} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{ap}}}{c};\ \mathrm{v}_{\mathrm{ap}} = \beta_{\mathrm{ap}}\cdot c;$ $\frac{\mathrm{v}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} = \beta_{\mathrm{ap}}\cdot c;\ \beta_{\mathrm{ap}} = \frac{\frac{\mathrm{v}}{c}\cdot\sin\theta}{1-\beta\cos\theta};\ \beta = \frac{\mathrm{v}}{c};$ $\beta_{\mathrm{ap}} = \frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta} = f(\theta),$	2,00	

astfel încât, impunând condiția de maxim pentru această funcție, rezultă: $$\frac{\mathrm{d}\beta_{\mathrm{ap}}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\beta\sin\theta}{1-\beta\cos\theta}\right)=0;$$ $$\frac{\beta\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}-\frac{(\beta\sin\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^2}=0;$$ $$\beta\cos\theta(1-\beta\cos\theta)^2=(1-\beta\cos\theta)(\beta\sin\theta)^2;$$ $$\cos\theta(1-\beta\cos\theta)=\beta\sin^2\theta;$$ $$\cos\theta=\beta,$$ astfel încât: $$\beta_{\mathrm{ap,max}}=\frac{\beta\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta^2}=\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}};$$ $$\mathrm{v}_{\mathrm{ap,max}}=c\beta_{\mathrm{ap,max}}=\frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}};\ \mathrm{v}_{\mathrm{ap,max}}=\frac{c\frac{\mathrm{v}}{c}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}}=\frac{\mathrm{v}}{\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{c^2}}};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{ap,max}}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{ap,max}}^2}{c^2}}};\ \mathrm{v}_{\mathrm{ap,max}}=3{,}6\cdot c;\ \ \mathrm{v}\approx 0{,}96\cdot c,$$ reprezentând viteza reală a jetului incandescent relativist.		
Oficiu		**1,00**