Soluție - Problema a III-a

A. Coeficient termic al rezistenței (5 puncte)

Conductivitatea electrică a materialelor σ în materiale în care conducţia electrică este asigurată de electronii liberi depinde direct proporţional de concentraţia n a purtătorilor de sarcină electrică şi de mobilitatea acestora μ (mobilitatea este coeficientul de proporţionalitate dintre viteza de drift a electronilor şi intensitatea câmpului electric care determină apariţia deplasării ordonate a purtătorilor de sarcină). Lărgimea benzii interzise E_g se defineşte ca energia necesară unui electron pentru a deveni liber în cristalul semiconductor(prin trecerea de pe cel mai înalt nivel energetic ocupat în banda de valenţă pe cel mai de jos nivel liber din banda de conducţie). Această energie poate fi furnizată termic sau prin alte modalităţi.
Pentru semiconductori puri, concentraţia de purtători liberi creşte puternic cu temperatura conform relaţiei

$$n \approx T^{3/2} \cdot \exp\left(-E_g/(2k_B \cdot T)\right) \qquad (1)$$

Tot pentru semiconductori puri, la temperaturi absolute T ridicate mobilitatea scade cu creşterea temperatura

$$\mu \sim T^{-3/2}. \qquad (2)$$

În concluzie, rezistenţa electrică variază cu temperatura. Coeficientul termic al rezistenţei α reprezintă variaţia relativă a rezistenţei electrice raportată la o mică variaţie a temperaturii. Se presupun cunoscute: $c = 3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; $h = 6{,}64\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$; $e = 1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$.

Pentru germaniu pur, la temperaturi foarte joase, lungimea de undă de prag pentru apariţia efectului fotoelectric este $\lambda_{prag} = 1{,}7\mu m$

1. Determină lărgimea benzii interzise (exprimată în eV) a germaniului pur.
2. Determină coeficientul termic al rezistenţei germaniului la temperatura camerei .

Soluție

1. Apariţie efectului fotoelectric este legată de „eliberare”electronilor. Deoarece conform enunţului temperatura este foarte scăzută, energia furnizată de fotonii din infraroşu asigură energia necesară electronilor pentru eliberare.
Prin urmare

$$E_g = \frac{hc}{\lambda_{prag}} \qquad (3)$$

Valoarea numerică este

$$\begin{cases} E_g = \dfrac{6{,}64\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{1{,}7\times10^{-6}} = 1{,}17\times10^{-19}\,\mathrm{J} \\ E_g = 0{,}73\,\mathrm{eV} \end{cases} \qquad (4)$$

2.Conductivitatea electrică are expresia

$$\sigma = n\cdot e\cdot\mu = \aleph\cdot T^{3/2}\exp\left(-E_g/(2k_B\cdot T)\right)\cdot T^{-3/2} = \aleph\cdot\exp\left(-E_g/(2k_B\cdot T)\right) \qquad (5)$$

unde $\aleph$ nu depinde de temperatură.

Corespunzător, rezistivitatea electrică a materialului semiconductor intrinsec la temperaturi ridicate are expresia

$$\rho = \aleph^{-1} \cdot \exp\left(E_g / (2k_B \cdot T)\right). \qquad (6)$$

Rezistenţa electrică are expresia

$$R = \frac{\ell}{S} \cdot \aleph^{-1} \cdot \exp\left(E_g / (2k_B \cdot T)\right) \qquad (7)$$

Coeficientul termic al rezistenţei se poate scrie ca

$$\alpha = \frac{1}{R(T)} \frac{R(T+\Delta T) - R(T)}{\Delta T} = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{dR}{dT} \qquad (8)$$

Cum

$$\frac{dR}{dT} = \frac{\ell}{S} \cdot \aleph^{-1} \cdot \exp\left(E_g / (2k_B \cdot T)\right) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) \qquad (9)$$

Se poate rescrie coeficientul termic al rezistenţei ca

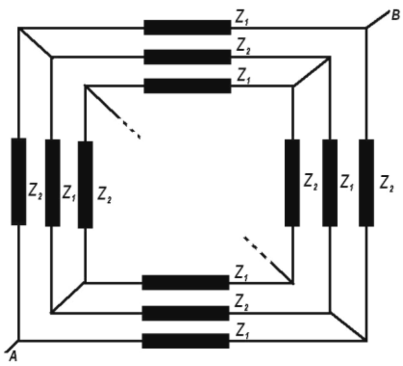
$$\begin{cases} \alpha = \frac{\ell}{S} \cdot \aleph^{-1} \cdot \exp\left(E_g / (2k_B \cdot T)\right) \cdot \left(-\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \right) \Big/ \left(\frac{\ell}{S} \cdot \aleph^{-1} \cdot \exp\left(E_g / (2k_B \cdot T)\right) \right) \\ \alpha = -\frac{E_g}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \\ \alpha = -\frac{1}{2k_B} \cdot \frac{1}{T^2} \cdot \frac{h \cdot c}{\lambda_{prag}} \end{cases} \qquad (10)$$

Valoarea numerică a coeficientului termic este

$$\alpha = -\frac{1}{2 \times 1{,}38 \times 10^{-23}} \cdot \frac{1}{300^2} \cdot \frac{6{,}64 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{1{,}7 \times 10^{-6}} \approx -0{,}047 K^{-1} \qquad (11)$$

B. .. şi circuit de curent alternativ (5 puncte)

Reţeaua din figură este alcătuită dintr-un număr care tinde la infinit de celule pătrate având pe laturi impedanţe Z_1 şi Z_2, legate în modul sugerat în desenul alăturat. Consideră situaţia în care impedanţa Z_1 este o bobină (eventual reală) iar impedanţa Z_2 este un condensator ideal .Circuitul este legat la o sursă de tensiune electrică alternativă pentru care valoarea instantanee a tensiunii are expresia $u(t) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ - unde U este o constantă iar pulsaţia ω poate fi variată. Oricare ar fi valoarea iniţială a pulsaţiei, puterea reactivă a circuitului, necunoscută, rămâne neschimbată la dublarea pulsaţiei. Puterea activă a circuitului are valoarea P.



a. Determină în funcţie de Z_1 şi Z_2 expresia impedanţei echivalente Z_{AB} a reţelei .

b. Determină valoarea puterii reactive a circuitului

c. Determină expresiile impedanţelor Z_1 şi Z_2 în funcţie de P, U şi $\omega_0 = 1/\sqrt{C \cdot L}$ (capacitatea C a condensatorului şi inductanţa L a bobinei care nu sunt cunoscute).

Soluţie

a. Din invarianţa impedanţei la adăugarea unei noi celule rezultă că valoarea impedanţei circuitului este

$$Z^2{}_{echivalent} = Z_1 \cdot Z_2$$

dacă

$$\begin{cases} \overline{Z_1} = R + jL\omega \\ \overline{Z_2} = -\,j/(C\cdot\omega) \\ \overline{Z_1}\cdot\overline{Z_2} = \dfrac{L}{C} - j\dfrac{R}{C\cdot\omega} \end{cases} \tag{12}$$

iar

$$\overline{Z_{echivalent}} = R_e + X_e\cdot j \tag{13}$$

rezultă că

$$\begin{cases} \dfrac{L}{C} = R_e^2 - X_e^2 \\ -\dfrac{R}{C\cdot\omega} = 2R_e\cdot X_e \end{cases} \tag{14}$$

Ridicând la pătrat relaţiile rezultă

$$\begin{cases} \left(\dfrac{L}{C}\right)^2 = R_e^4 + X_e^4 - 2R_e^2\cdot X_e^2 \\ \left(\dfrac{R}{C\cdot\omega}\right)^2 = 4R_e^2\cdot X_e^2 \end{cases} \tag{15}$$

şi în consecinţă

$$\left(R_e^2 + X_e^2\right) = \sqrt{\left(\frac{L}{C}\right)^2 + \left(\frac{R}{C\cdot\omega}\right)^2} \tag{16}$$

astfel că

$$\begin{cases} R_e = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot\omega}\right)^2} + \dfrac{L}{C}\right)} \\ X_e = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot\omega}\right)^2} - \dfrac{L}{C}\right)} \end{cases} \tag{17}$$

b. Puterea reactivă are expresia

$$P_{reactiv} = \mathrm{Im}\frac{U^2}{\overline{\overline{Z_{echivalent}}}} = \mathrm{Im}\frac{U^2}{R_e + X_e\cdot j} = \mathrm{Im}\frac{U^2(R_e - X_e\cdot j)}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2X_e}{R_e^2 + X_e^2} \tag{18}$$

$$P_{reactiv} = \frac{-U^2X_e}{R_e^2 + X_e^2} = \frac{-U^2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot\omega}\right)^2} - \dfrac{L}{C}\right)}}{\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot\omega}\right)^2}} \tag{19}$$

Dublarea frecvenţei conduce la o nouă expresie a puterii reactive

$$P_{reactiv}(2\omega) = \frac{-U^2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot 2\omega}\right)^2} - \dfrac{L}{C}\right)}}{\sqrt{\left(\dfrac{L}{C}\right)^2 + \left(\dfrac{R}{C\cdot 2\omega}\right)^2}} \tag{20}$$

Care nu poate conduce la o aceeaşi valoare decât dacă

$$\frac{R}{C \cdot 2\omega} \equiv \frac{R}{C \cdot \omega} \tag{21}$$

ceea ce este posibil *numai* dacă

$$R \equiv 0 \tag{22}$$

Bobina din circuit este – prin urmare – ideală.
Impedanţa echivalentă a circuitului este pur rezistivă şi are valoarea

$$\overline{Z_{echivalent}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{23}$$

independentă de frecvenţă.
Puterea reactivă a circuitului este nulă pentru oricare frecvenţă.

$$P_{reactiv}(\omega) = 0\,\mathrm{Var} \tag{24}$$

Puterea activă a circuitului are expresia

$$P = \frac{U^2}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{25}$$

Se poate scrie că

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U^2}{P} \\ \sqrt{C \cdot L} = 1/\omega_0 \end{cases} \tag{26}$$

astfel că

$$\begin{cases} L = \dfrac{U^2}{P \cdot \omega_0} \\ C = \dfrac{P}{U^2 \cdot \omega_0} \end{cases} \tag{27}$$

Soluţie propusă de
Dr. Constantin COREGA , Liceul Emil Racoviţă Cluj - Napoca
Dr. Adrian DAFINEI, Facultatea de Fizică, Universitatea din Bucureşti