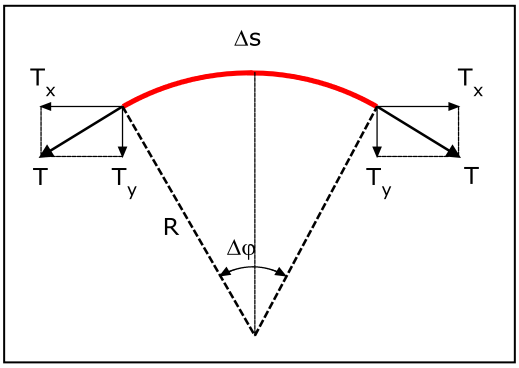
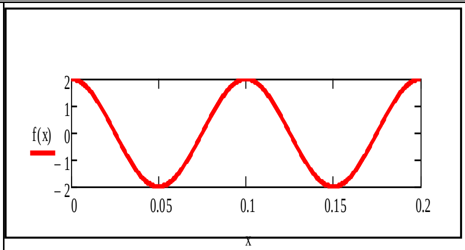
Olimpiada Naţională de Fizică
31 martie - 5 aprilie 2013
Proba teoretică

XI

Barem de evaluare şi de notare
Se punctează oricare altă modalitate de rezolvare corectă a problemei

Problema I
Unde transversale

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 1*	Punctaj
1.a.	O porţiune foarte mică de coardă poate fi considerată ca un arc de cerc de lungime Δs . Componentele T_x se anulează reciproc şi asupra elementului de coardă acţionează forţa centripetă $F_{cp} = 2T_y$.Deci $\frac{\Delta m \cdot v^2}{R} = 2T\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = T\Delta\varphi = T\frac{\Delta s}{R}$ $\frac{\mu\Delta s \cdot v^2}{R} = T\frac{\Delta s}{R}$ De aici $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  Pentru a nu face confuzii cu alte notaţii ulterioare notăm viteza perturbaţiei cu *c* şi tensiunea din coardă cu *F*.	
1.b.	Evident, constanta $\eta = 1$.	

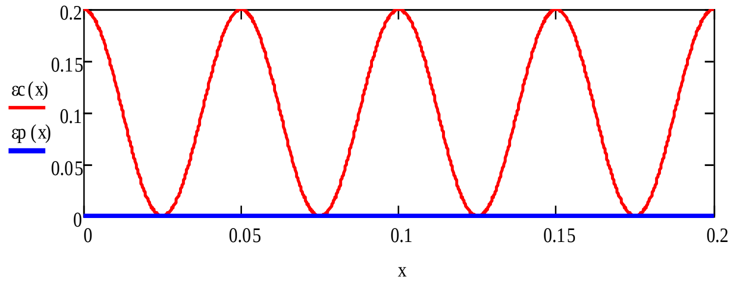
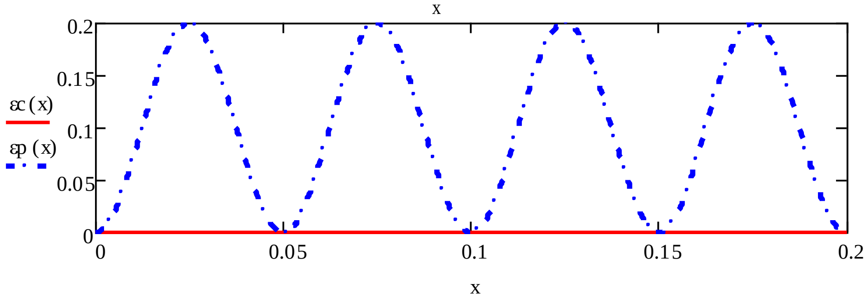
Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 2*	Punctaj
2.a.	Considerând ecuaţia dată şi folosind identitatea trigonometrică $\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ obţinem $y(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx) + \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx)$	
2.b.	 Un grafic pentru A = 2 unităţi convenţionale şi λ = 0,1 m este cel din figura alăturată. Poate fi desenat şi un grafic pur calitativ.	

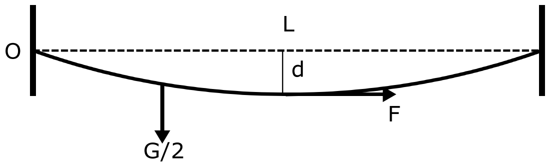
Barem de evaluare şi de notare
Se punctează oricare altă modalitate de rezolvare corectă a problemei

2.c.	Cele două unde care interferă sunt două unde identice cu amplitudinea $\frac{A}{2}$ care se propagă în sensuri opuse pe coardă. Sursele celor două unde trebuie să oscileze în fază.	
2.d.	Viteza oscilaţiilor unui punct de pe coardă este $$\mathrm{v} = \frac{dy}{dt} = -\omega A\cos kx \sin \omega t$$ iar deformaţia relativă este $$\varepsilon = \frac{dy}{dx} = -kA\sin kx\cos\omega t$$ Energia cinetică a unui element de masă al coardei şi densitatea de energie vor fi $$dE_c = \frac{dm}{2}\mathrm{v}^2 = \frac{dm}{2}\omega^2A^2\cos^2 kx\sin^2\omega t = \frac{\mu dl}{2}\omega^2A^2\cos^2 kx\sin^2\omega t$$ $$\varepsilon_c = \frac{dE_c}{dl} = \frac{\mu\omega^2A^2}{2}\cos^2 kx\sin^2\omega t$$ Energia potenţială de deformaţie a unui element de coardă este $dE_p = \frac{\kappa(dy)^2}{2}$, în care $\varepsilon = \frac{dy}{dl}$ şi $F = \kappa dl$, κ fiind constanta elastică. Mai departe se obţine $$dE_p = \frac{F}{dl}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^2 dl^2 \text{ şi } \varepsilon_p = \frac{dE_p}{dl} = \frac{F\varepsilon^2}{2} = \frac{F}{2}k^2A^2\sin^2 kx\cos^2\omega t$$ Pe de altă parte $$\frac{k}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{v}}$$ $$\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2} = \frac{\mu}{F}$$ De aici $$\varepsilon_p = \frac{\mu\omega^2A^2}{2}\sin^2 kx\cos^2\omega t$$	

Barem de evaluare şi de notare

Se punctează oricare altă modalitate de rezolvare corectă a problemei

2.e.	La $t=\frac{T}{4}$  La $t=\frac{T}{2}$  Graficele pot fi reprezentate calitativ.	

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 3*	Punctaj
3.a.	 Conform figurii alăturate, aplicând pentru o jumătate de coardă ecuaţia de echilibru pentru momentele forţelor faţă de capătul O al corzii, rezultă $\mu\frac{L}{2}g\frac{L}{4}=Fd$ de unde $F=\frac{\mu L^2 g}{8d}$	
3.b.	Frecvenţa undelor sonore emise de coardă este $\nu=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{F}{mL}}$, cu n = 1 pentru frecvenţa fundamentală. În cazul 1, $L_1=L+p_1L=L(1+p_1)$ În cazul 2, analog $L_2=L(1+p_2)$ Forţele de tensiune elastică vor fi $F_1=\kappa(p_1L)$, respectiv $F_2=\kappa(p_2L)$. În aceste condiţii $\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{\sqrt{\frac{\kappa p_1 L}{mL(1+p_1)}}}{\sqrt{\frac{\kappa p_2 L}{mL(1+p_2)}}}=\sqrt{\frac{p_1(1+p_2)}{p_2(1+p_1)}}$ De aici rezultă $\frac{\nu_1}{\nu_2}=0,706\approx\frac{\sqrt{2}}{2}$	
3.c.	Dacă $\nu_1=440Hz$,rezultă că $\nu_2=\sqrt{2}\nu_1=440\sqrt{2}\approx 622,5Hz$ Calculând pe rând, rezultă Nota La# $\nu=440\cdot 2^{1/12}=466,164Hz$ Nota Si $\nu=440\cdot 2^{2/12}=493,883Hz$ Nota Do $\nu=440\cdot 2^{3/12}=523,251Hz$ Nota Do# $\nu=440\cdot 2^{4/12}=554,365Hz$ Nota Re $\nu=440\cdot 2^{5/12}=587,33Hz$ Nota Re# $\nu=440\cdot 2^{6/12}=440\sqrt{2}=622,254Hz$ Deci nota emisă va fi Re diez din octava C5.	

Barem de evaluare şi de notare propus de: prof. Liviu Arici – Colegiul Naţional „N.Bălcescu” - Brăila

Problema a II-a
Cordon elastic

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 1*	Punctaj
1.a.	Volumul cordonului elastic este $$V=\pi r^2 l=\pi(r_0-\Delta r)^2(l_0+\Delta l)=\pi r_0^2 l_0\left(1-\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right)=V_0\left(1-\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\left(1+\frac{\Delta l}{l_0}\right).$$	0,50 p
	Deoarece $\frac{\Delta l}{l_0}=\varepsilon$ și $\frac{\Delta r}{r_0}=\mu\varepsilon$, atunci	0,25 p
	$$\boxed{\frac{\Delta V}{V_0}=(1-2\mu)\varepsilon}.$$	0,25 p
1.b.	**i.** La echilibru, legea lui Hooke se scrie: $$\frac{mg}{S}=E\frac{\Delta l_0}{l_0},$$	0,25 p
	de unde $$mg=E\frac{\Delta l_0}{l_0}S=ES_0\frac{\Delta l_0}{l_0}\left(1-\frac{\Delta r_0}{r_0}\right)^2=ES_0\frac{\Delta l_0}{l_0}\left(1-\mu\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^2\cong ES_0\frac{\Delta l_0}{l_0}.$$	0,25 p
	După alungirea cordonului cu y față de starea de echilibru, ecuația de mișcare a sistemului este: $$ma=mg-F,$$	0,50 p
	unde forța elastică este $$F=ES\frac{\Delta l_0+y}{l_0}\cong ES_0\left[\frac{\Delta l_0}{l_0}+\left(1-4\mu\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)\frac{y}{l_0}\right].$$	1,00 p
	În aceste circumstanțe, ecuația de mișcare de mai sus devine $$ma=-ES_0\left(1-4\mu\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)\frac{y}{l_0}=-ky,$$	0,25 p

	unde constanta elastică echivalentă a sistemului este $$k=\frac{ES_0}{l_0}\left(1-4\mu\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)=\frac{1}{l_0}\left(ES_0-4\mu mg\right),$$ așa încât perioada proprie de oscilație este $$\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{ES_0-4\mu mg}}\cong 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{ES_0}}\left(1+2\mu\frac{mg}{ES_0}\right)}.$$	0,25 p 0,50 p
ii.	Soluția ecuației de mișcare a corpului este $$y(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0),$$ condițiile inițiale fiind $$y(0)=-\Delta l_0 \text{ și } v(0)=0.$$ În acest caz $$\varphi_0=0 \text{ și } A=-\Delta l_0=-\frac{mgl_0}{ES_0},$$ astfel încât $$y(t)=-\frac{mgl_0}{ES_0}\cos\omega t.$$ Cum $$\frac{\Delta V}{V_0}=(1-2\mu)\varepsilon\rightarrow V(t)=V_0[1+(1-2\mu)\varepsilon]=V_0\left[1+(1-2\mu)\frac{\Delta l_0+y(t)}{l_0}\right],$$ atunci $$V(t)=V_0\left[1+(1-2\mu)\frac{\Delta l_0}{l_0}(1-\cos\omega t)\right].$$ Prin urmare, volumul cordonului este maxim atunci când $\cos\omega t=-1$ (adică la alungire maximă): $$\boxed{V_{max}=V_0\left[1+2(1-2\mu)\frac{\Delta l_0}{l_0}\right]=V_0\left[1+2(1-2\mu)\frac{mg}{ES_0}\right]}$$	0,25 p 0,25 p 0,50 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p

<table>
<tr><td>1.c.</td><td>Deoarece alungirea cordonului este maximă atunci când acesta trece prin poziția verticală, componenta radială a vitezei corpului este nulă. Prin urmare, viteza v a corpului este orizontală atunci când cordonul este vertical. Rezultanta forțelor care acționează asupra corpului pe direcția cordonului, atunci când acesta este vertical, este de tip centripet

$$m\frac{v^2}{l_0+y}=ky-mg\,.$$

Alegând, de exemplu, nivelul de referință pentru energia potențială gravitațională – nivelul dat de poziția inițială orizontală a cordonului, conservarea energiei sistemului se scrie:

$$0=m\frac{v^2}{2}+k\frac{y^2}{2}-mg\left(l_0+y\right).$$

Eliminând viteza între cele două relații de mai sus se obține:

$$y=\frac{l_0}{4}\left[3\frac{mg}{kl_0}-1+\sqrt{1+9\frac{mg}{kl_0}\left(2+\frac{mg}{kl_0}\right)}\right]=\frac{l_0}{4}\left[3\frac{\Delta l_0}{l_0}-1+\sqrt{1+9\frac{\Delta l_0}{l_0}\left(2+\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)}\right].$$

Deoarece $\frac{\Delta l_0}{l_0}<<1$, atunci

$$y\cong\frac{l_0}{4}\left[3\frac{\Delta l_0}{l_0}-1+\left(1+18\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^{1/2}\right]\cong\frac{l_0}{4}\left[3\frac{\Delta l_0}{l_0}-1+\left(1+9\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)\right],$$

sau

$$\boxed{\frac{y}{\Delta l_0}=3}.$$</td><td>0,75 p

0,75 p

0,25 p

0,25 p</td></tr>
<tr><td>Nr. item</td><td>Sarcina de lucru nr. 2</td><td>Punctaj</td></tr>
<tr><td>2.a.</td><td>În acord cu enunțul

$$F=\alpha\frac{y}{l_0+y}\,.$$

La alungiri foarte mici trebuie regăsită legea lui Hooke:</td><td>0,25 p

0,25 p</td></tr>
</table>

	$$F=\alpha\frac{y}{l_0}\left(1+\frac{y}{l_0}\right)^{-1}\cong\alpha\frac{y}{l_0}\equiv ES_0\frac{y}{l_0},$$	
	de unde, $$\alpha=ES_0,$$ iar expresia forței devine $$\boxed{F=ES_0\frac{y}{l_0+y}}.$$	0,25 p 0,25 p
Oficiu		**1,00p**
TOTAL Problema a II-a		**10p**

Barem de evaluare şi de notare propus de:

Conf. univ. dr. Sebastian POPESCU – Facultatea de Fizică – Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” din Iași

Olimpiada Națională de Fizică
31 martie - 5 aprilie 2013
Proba teoretică

XI

Barem de evaluare și de notare
Se punctează oricare altă modalitate de rezolvare corectă a problemei

Problema a III-a
Pompa de bicicletă

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 1*		Punctaj
1.a.	Pentru:		0,80p
	expresia numărului de moli de aer, aflat inițial în camera roții de bicicletă, la presiunea atmosferică p_0 și la temperatura T_0 $\nu_{initial} = \frac{p_0 \cdot V_r}{R \cdot T_0}$	0,20p	
	expresia numărului de moli de aer introduşi în camera roții de bicicletă, la o singură cursă a pistonului pompei de bicicletă $\begin{cases} \nu_0 = \frac{p_0 \cdot V_p}{R \cdot T_0} \\ \nu_0 = \frac{p_0 \cdot V_r}{R \cdot T_0 \cdot N} \end{cases}$	0,20p	
	expresia numărului de moli de aer din camera roții de bicicletă, după ce Andrei efectuează k pompări $\nu_k = \nu_{initial} + k \cdot \nu_0$	0,20p	
	$\nu_k = \frac{p_0 \cdot V_r}{R \cdot T_0} \cdot \left(1 + \frac{k}{N}\right)$	0,20p	
1.b.	Pentru:		0,40p
	expresia presiunii aerului din camera de bicicletă, după ce Andrei a efectuat k pompări $p_k \cdot V_r = \nu_k \cdot R \cdot T_0$	0,20p	
	$p_k = p_0 \cdot \frac{N + k}{N}$	0,20p	

Nr. item		Punctaj
1.c.	Pentru: legea transformării izoterme aplicată pentru aerul din pompa de bicicletă $p_0 \cdot \frac{V_r}{N} = p_k \cdot S \cdot (\ell - x_{k+1})$ 0,20p $x_{k+1} = \ell \cdot \frac{k}{N+k}$ 0,20p	0,40p
1.d.	Pentru: $p_0 \cdot \frac{V_r}{N} = p(x) \cdot \frac{V_r}{N \cdot \ell} \cdot (\ell - x)$, pentru $0 \le x \le \frac{k \cdot \ell}{N+k}$ 0,20p $p(x) \cdot \left[V_r + (\ell - x) \cdot \frac{V_r}{N \cdot \ell}\right] = p_{k+1} \cdot V_r$, pentru $\frac{k \cdot \ell}{N+k} < x \le \ell$ 0,20p $p(x) = \begin{cases} \frac{p_0}{\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}, & 0 \le x \le \frac{k \cdot \ell}{N+k} \\ \frac{p_0 \cdot (N+k+1)}{(N+1) - \frac{x}{\ell}}, & \frac{k \cdot \ell}{N+k} < x \le \ell \end{cases}$ 0,20p	0,60p

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 2*	Punctaj
2.a.	Pentru: expresia energiei interne a aerului aflat sub pistonul pompei $\begin{cases} U(x) = \nu_1 \cdot C_v \cdot T_0 \\ U(x) = \nu_1 \cdot \frac{R}{\gamma - 1} \cdot T_0 \end{cases}, \quad 0 \le x \le x_{k+1}$ 0,20p $U(x) = \frac{p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1) \cdot N} = const$, pentru $0 \le x \le \frac{k \cdot \ell}{N+k}$ 0,20p $U(x) = \nu(x) \cdot \frac{R}{\gamma - 1} \cdot T_0$, pentru $\frac{k \cdot \ell}{N+k} < x \le \ell$ 0,20p $\frac{p_0 \cdot (N+k+1)}{N + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)} \cdot \frac{V_r}{N \cdot \ell} \cdot (\ell - x) = \nu(x) \cdot R \cdot T_0$ pentru $\frac{k \cdot \ell}{N+k} < x \le \ell$ 0,20p expresia variației energiei interne a aerului din cilindrul pompei în cursul celei de a $(k+1)$ pompări, în funcție de distanța x $U(x) = \begin{cases} U_0 = \frac{p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1) \cdot N}, & \textit{pentru } 0 \le x \le \frac{k \cdot \ell}{N+k} \\ \frac{p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1) \cdot N} \cdot (N+k+1) \frac{\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}{N + \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}, & \textit{pentru } \frac{k \cdot \ell}{N+k} < x \le \ell \end{cases}$ 0,40p	1,20p

Nr. item	*Sarcina de lucru nr. 3*		Punctaj
3.a.	Pentru:		**1,20p**
	$p_{k_0-1} < n \cdot p_0 \le p_{k_0}$	0,20p	
	$p_{k_0} = p_0 \cdot \frac{N+k_0}{N}$	0,20p	
	$k_0 \ge N \cdot (n-1)$, numărul k_0 de curse ale pistonului nu poate fi decât un număr natural	0,20p	
	$k_0 = N \cdot (n-1)$, dacă $N \cdot (n-1)$ este un număr natural sau $k_0 = [N \cdot (n-1)] + 1$, dacă $N \cdot (n-1)$ nu este un număr natural	0,60p	
3.b.	Pentru:		**1,20p**
	expresia lucrului mecanic efectuat de Andrei asupra celor ν_1 moli de aer , care evoluează izoterm de la presiunea p_o la presiunea p_{k-1} $L_{K,I} = \nu_1 \cdot R \cdot T_0 \cdot ln \frac{p_{k-1}}{p_0}$	0,20p	
	$L_{K,I} = \frac{p_0 \cdot V_r}{N} \cdot ln \frac{N+k-1}{N}$	0,20p	
	expresia lucrului mecanic efectuat de Andrei asupra celor ν_k moli de aer, care evoluează izoterm de la presiunea p_{k-1} la presiunea p_k $L_{K,II} = \nu_k \cdot R \cdot T_0 \cdot ln \frac{p_k}{p_{k-1}}$	0,20p	
	$L_{K,II} = \frac{p_0 \cdot V_r \cdot (N+k)}{N} \cdot ln \frac{N+k}{N+k-1}$	0,20p	
	expresia lucrului mecanic total efectuat de Andrei, în cursul pompării cu numărul k $\begin{cases} L_{K,\,total} = L_{K,\,I} + L_{K,\,II} \\ L_{K,\,total} = \frac{p_0 \cdot V_r}{N} \cdot ln \frac{N+k-1}{N} + \frac{p_0 \cdot V_r \cdot (N+k)}{N} \cdot ln \frac{N+k}{N+k-1} \\ L_{K,\,total} = \frac{p_0 \cdot V_r}{N} \cdot \left[ln \frac{N+k-1}{N} + (N+k) \cdot ln \frac{N+k}{N+k-1} \right] \end{cases}$	0,20p	
	expresia lucrului mecanic total efectuat de Andrei, din momentul începerii pompării până când presiunea din camera de bicicletă atinge valoarea $n \cdot p_0$ $L_{total} = \frac{p_0 \cdot V_r}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N \cdot (n-1)} \left[ln \frac{N+k-1}{N} + (N+k) \cdot ln \frac{N+k}{N+k-1} \right]$	0,20p	

3.c.	Pentru: $Q = \Delta U + L$ — 0,20p expresia energiei interne inițiale a aerului din sistemul pompă – cameră de bicicletă $U_{initial} = (\nu_{initial} + \nu_1)\cdot \frac{R\cdot T_0}{\gamma - 1}$ — 0,20p $U_{initial} = \frac{p_0 \cdot V_r \cdot (N+1)}{(\gamma - 1)\cdot N}$ — 0,20p expresia energiei interne a aerului în starea finală $U_{final} = \nu_{k_0} \cdot \frac{R\cdot T_0}{\gamma - 1}$ — 0,20p $U_{final} = \frac{n\cdot p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1)}$ — 0,20p expresia variației energiei interne a aerului din sistemul pompă – cameră de bicicletă $\Delta U = U_{final} - U_{initial} = \frac{p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1)}\cdot\left[n - \frac{N+1}{N}\right]$ — 0,20p expresia lucrului mecanic primit de aerul din sistemul pompă – cameră de bicicletă $L = -\frac{p_0 \cdot V_r}{N}\cdot \sum_{k=1}^{N\cdot(n-1)}\left[ln\frac{N+k-1}{N} + (N+k)\cdot ln\frac{N+k}{N+k-1}\right]$ — 0,20p expresia cantității de căldură schimbată de aerul din sistemul pompă – cameră de bicicletă, cu aerul atmosferic din mediul exterior, din momentul începerii pompării până când presiunea aerului din camera roții de bicicletă atinge valoarea $n\cdot p_0$ $Q = \frac{p_0 \cdot V_r}{(\gamma - 1)}\cdot\left[n - \frac{N+1}{N}\right] - \frac{p_0 \cdot V_r}{N}\cdot \sum_{k=1}^{N\cdot(n-1)}\left[ln\frac{N+k-1}{N} + (N+k)\cdot ln\frac{N+k}{N+k-1}\right]$ — 0,20p	**1,60p**
Nr. item	***Sarcina de lucru nr. 4***	**Punctaj**
4.a.	Pentru: numărul de moli de gaz din camera roții după $k = 10$ pompări $\nu_{10} = 0{,}43\, moli$ — 0,20p	**0,20p**
4.b.	Pentru: valoarea numerică a presiunii din camera roții de bicicletă după zece pompări $p_{10} = 1{,}52\cdot 10^5\ \frac{N}{m^2}$ — 0,20p	**0,20p**
4.c.	Pentru: numărul de pompări pentru care presiunea din camera roții atinge valoarea $n\cdot p_0$ $\begin{cases} k_0 = [20\cdot(2{,}51 - 1)] + 1 \\ k_0 = 31 \end{cases}$ — 0,20p	**0,20p**

4.d.	Pentru: valoarea lucrului mecanic efectuat de Andrei în cursul celei de zecea pompări $\begin{cases} L_{10,\,total} = \dfrac{\left(1{,}01\cdot 10^{5}\ \dfrac{N}{m^{2}}\right)\cdot\left(7{,}00\cdot 10^{-3} m^{3}\right)}{20}\cdot\left[ln\dfrac{29}{20} + 30\cdot ln\dfrac{30}{29}\right] \\ L_{10,\,total} \cong 49{,}1\,J \end{cases}$ 0,20p	**0,20p**
4.e.	Pentru: expresia variației de energie internă a aerului din sistemul pompa – cameră, în cursul celei de-a zecea pompări $\begin{cases} \Delta U_{10} = \nu_0\cdot C_v\cdot T_0 \\ \Delta U_{10} = \dfrac{p_0\cdot V_r}{N}\cdot\dfrac{1}{\gamma - 1}\cdot \end{cases}$ 0,20p $\Delta U_{10} = 88{,}4\,J$ 0,20p expresia cantității de căldură schimbate de aerul din sistemul pompă – cameră de bicicletă, cu mediul exterior, în cursul celei de a zecea pompări $Q_{10} = \Delta U_{10} + L_{10}$ 0,20p $\begin{cases} Q_{10} = 88{,}4\,J - 49{,}1\,J \\ Q_{10} = 39{,}3\,J \end{cases}$ 0,20p	**0,80p**
Oficiu		**1,00p**
TOTAL Problema a III-a		**10p**

© *Barem de evaluare şi de notare propus de:*

Conf. univ. dr. Adrian DAFINEI – Facultatea de Fizică – Universitatea Bucureşti