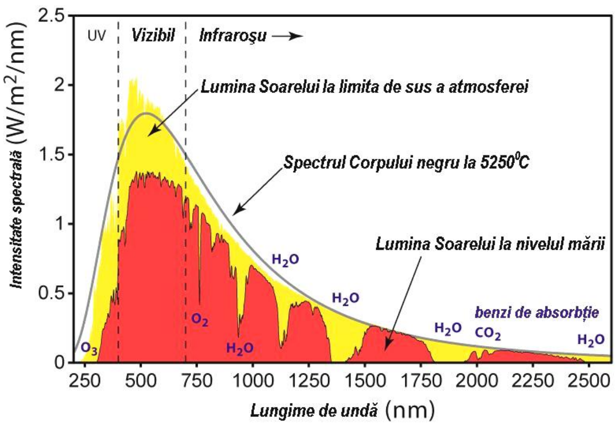
Soluţie - Problema I

Modelarea climei terestre (10 puncte)

Schimbarea climei şi încălzirea globală, vieţuirea speciei umane în condiţii climaterice noi, au devenit subiecte de interes public în ultimele decenii.

La scară cosmică singurele fenomene care intervin în echilibrul energetic al Pământului sunt absorbţia şi emisia radiaţiei. Se poate spune că starea climei terestre se datorează echilibrului delicat dintre energia pe care Pământul o iradiază spre spaţiul cosmic şi energia pe care planeta noastră o captează de la formidabila sursă de energie care este Soarele.



Un corp care absoarbe radiaţia electromagnetică ce ajunge la suprafaţa sa, indiferent de lungimea de undă a acestei radiaţii şi care emite radiaţie electromagnetică în funcţie de temperatura suprafeţei sale se numeşte corp negru. Un corp negru emite energie cu o distribuţie spectrală specifică, dependentă de temperatura proprie. Linia plină, lisă, din graficul din imaginea de mai sus evidenţiază distribuţia spectrală a emisiei de energie a Soarelui (echivalent unui corp negru cu temperatura $T_{Soare} = 5250°C$ *).*

Dacă I *reprezintă energia totală (în întreg spectrul) emisă de unitatea de suprafaţă a unui corp negru în unitatea de timp, iar* T *este temperatura absolută a corpului negru, atunci legea Stefan – Boltzmann statuează că* $I = \sigma \cdot T^4$*. În această expresie* $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ *este constanta Stefan – Boltzmann.*

A. Energia provenită de la Soare determină un flux energetic $w_S = 1370 W \cdot m^{-2}$, pe o sferă cu raza egală cu distanţa de la Pământ la Soare. Utilizează o modelare simplă, în care energia este preluată de la Soare şi este disipată de Pământul considerat un corp negru şi determină temperatura T_P pe care ar avea-o Pământul, în conformitate cu acest model.

B. Modelarea simplă de la punctul A se bazează pe ipoteza că Pământul este un corp negru. Ipoteza este nerealistă, deoarece toate imaginile luate din spaţiu arată Pământul ca un corp luminos. Atmosfera terestră (mai ales norii) reflectă aproximativ 24% din energia care vine de la Soare, iar suprafaţa Pământului (mai ales de zonele cu gheţuri) reflectă încă 6% din energia incidentă. Caracteristica numită albedo măsoară raportul dintre fluxul energetic reflectat şi fluxul energetic incident. Consideră că albedo-ul terestru este $A = 30\%$ şi determină temperatura Pământului, utilizând un nou model, care ia în considerare reflexia parţială a luminii provenite de la Soare.

C. În timp ce Soarele emite energie mai ales în domeniul vizibil, temperatura relativ scăzută a suprafeţei terestre face ca emisia Pământului să fie localizată în zona infraroşie a spectrului. O modelare mai atentă a climei ia în considerare proprietăţile atmosferei. Aceasta este un amestec de gaze cu proprietăţi absorbante specifice. Spectrul prezentat în imaginea de mai sus evidenţiază că în diferite domenii spectrale unele dintre gazele atmosferice pot absorbi radiaţie. Caracterizarea absorbţiei pe domenii spectrale se poate face prin introducerea coeficienţilor de absorbţie în vizibil α_{vis} şi respectiv în infraroşu α_{ir} , exprimaţi prin raportul dintre energia care trece prin atmosferă şi energia care pătrunde în atmosferă. Dacă radiaţia este complet absorbită atunci $\alpha = 0$, iar dacă radiaţia nu este absorbită de loc $\alpha = 1$. Determină temperatura Pământului T_P'' într-un model care se ia în considerare reflexia parţială a luminii provenite de la Soare (albedoul $A = 0{,}3$) şi proprietăţile absorbante ale atmosferei ($\alpha_{vis} = 0{,}8$ şi $\alpha_{ir} = 0{,}1$).

D. Folosind modelul de la punctul C calculează temperatura la suprafaţa Pământului, în situaţia în care albedoul şi coeficienţii de absorbţie au valorile indicate în tabelul 1.Completează acest tabel cu valorile temperaturii la suprafaţa Pământului pe care le-ai obţinut.

Caz	**1**	**2**	**3**	**4**
w_s	1370	1370	1370	1370
α_{vis}	1	1	1	1
α_{ir}	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
$T''_P\,(K)$				
$T''_P\,(°C)$				

Tabel 1

E. Presupune că distanţa dintre Pământ şi Soare ar creşte cu 1% . Care ar fi temperatura Pământului în acest caz (conform modelului de la punctul ***C***), dacă $A = 0{,}3$, $\alpha_{ir} = 0{,}3$ şi $\alpha_{vis} = 0{,}6$.

F. Presupune că în urma unor explozii nucleare în Sahara o parte din nisip s-ar transforma într-o „ o oglindă de sticlă”. Estimează suprafaţa pe care ar trebui să o aibă o astfel de oglindă pentru ca temperatura Pământului să scadă cu 1% . Foloseşte modelarea de la punctul ***C***.

G. Într-o zi însorită de vară, la amiază vrei să aprinzi o bucată de hârtie concentrând razele de lumină provenite de la Soare cu ajutorul unei lupe cu distanţa focală $f = 150\,\text{mm}$ şi diametrul $D = 50\,\text{mm}$.

Cunoscând:

- diametrul unghiular al Soarelui $\alpha = 4{,}6\,\text{mrad}$;
- fluxul termic primit de Pământ de la Soare $J_S = 1400\ W \cdot m^{-2}$;
- temperatura mediului înconjurător $T_0 = 300\,K$;
- masa unităţii de suprafaţă a bucăţii de hârtie $\rho_\sigma = 80\,g \cdot m^{-2}$;
- căldura specifică a hârtiei $c = 10^3\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$;
- raportul dintre puterea absorbită şi cea incidentă $\gamma = 10^{-2}$;
- temperatura de aprindere a hârtiei $T_{aprindere} = 505\,K$

estimează intervalul de timp după care foaia de hârtie se va aprinde.

Soluție

A. Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafaţa efectivă expusă către Soare) trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza R_P şi temperatura T_P , o emite la rândul său.

$$w_S \cdot \pi \cdot R_P^2 = 4\sigma \cdot T_P^4 \cdot \pi \cdot R_P^2 \qquad (1)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_P = \sqrt[4]{\frac{w_S}{4\sigma}} \qquad (2)$$

cu valoarea numerică

$$T_P = \sqrt[4]{\frac{1370}{4 \times 5{,}67 \times 10^{-8}}} \cong 279K = 6°C \qquad (3)$$

Răspunsul, deşi în domeniul de temperaturi rezonabile la suprafaţa Pământului, este nerealist pentru o descriere acurată a climei. Un răspuns acceptabil ar fi o temperatură de aproximativ $16°C$.

B. Energia care vine de la Soare pe un „cerc mare” al Pământului, (suprafaţa efectivă expusă către Soare) este parţial reflectată. Astfel, $1 - A = 70\%$ din energia Soarelui este absorbită la suprafaţa Pământului şi trebuie să fie egalată de energia pe care Pământul, considerat sferă cu raza R_P şi cu temperatura T_P', o emite la rândul său.

$$0{,}7 \times w_S \cdot \pi \cdot R_P^2 = 4\sigma \cdot T'^4_P \cdot \pi \cdot R_P^2 \qquad (4)$$

de unde temperatura Pământului în această modelare este

$$T_P' = \sqrt[4]{\frac{0{,}7 \times w_S}{4\sigma}} \qquad (5)$$

cu valoarea numerică

$$T_P' = \sqrt[4]{\frac{0{,}7 \times 1370}{4 \times 5{,}67 \times 10^{-8}}} \cong 255\mathrm{K} = -18^\circ\mathrm{C} \qquad (6)$$

Rezultatul acestei modelări, evident nerealist trebuie corijat printr-o altă modelare.

C. În condiţiile considerate, energia care ajunge la suprafaţa Pământului venind de la Soare este E_S

$$E_S = \pi \cdot R_P^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} \qquad (7)$$

Energia E_P reemisă de Pământul considerat corp negru la temperatura T_P'' este

$$E_P = 4\pi \cdot \sigma \cdot R_P^2 \cdot T''^4_P \qquad (8)$$

Datorită gazelor care absorb radiaţia din infraroşu, (gaze cu efect de seră), o parte E_a din energia radiată de Pământ este absorbită în atmosferă.
Bilanţul energetic la suprafaţa Pământului conduce – în această modelare – la următoarea expresie

$$\begin{cases} E_S + E_a = E_P \\ \pi \cdot R_P^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_A = 4\pi \cdot R_P^2 \cdot \sigma \cdot T''^4_P \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (4\pi \cdot R_P^2) = T''^4_P \cdot \sigma \end{cases} \qquad (9)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\begin{cases} E_P \cdot \alpha_{ir} + E_a = \pi \cdot R_P^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ 4\pi \cdot R_P^2 \cdot \sigma \cdot T''^4_P \cdot \alpha_{ir} + E_A = \pi \cdot R_P^2 \cdot w_s \cdot (1 - A) \\ \sigma \cdot T''^4_P \cdot \alpha_{ir} + E_A / (4\pi \cdot R_P^2) = (w_s/4) \cdot (1 - A) \end{cases} \qquad (10)$$

Din relaţiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} (w_s/4) \cdot (1 - A) \cdot \alpha_{vis} + E_A / (4\pi \cdot R_P^2) = T''^4_P \cdot \sigma \\ (w_s/4) \cdot (1 - A) - E_A / (4\pi \cdot R_P^2) = \sigma \cdot T''^4_P \cdot \alpha_{ir} \\ (w_s/4) \cdot (1 - A)(\alpha_{vis} + 1) = \sigma \cdot T''^4_P \cdot (\alpha_{ir} + 1) \end{cases} \qquad (11)$$

Şi prin urmare

$$T''_P = \sqrt[4]{\frac{(w_s/4)}{\sigma} \cdot (1 - A) \frac{(\alpha_{vis} + 1)}{(\alpha_{ir} + 1)}} \qquad (12)$$

cu valoarea numerică

$$T''_P = \sqrt[4]{\frac{(1370/4)}{5{,}67 \times 10^{-8}} \cdot 0{,}7 \cdot \frac{1{,}8}{1{,}1}} \cong 288{,}4\mathrm{K} = 15{,}4^\circ\mathrm{C} \qquad (13)$$

D.

Caz	1	2	3	4
w_s	1370	1370	1370	1370
α_{vis}	1	1	1	1
α_{ir}	1	1	0	0
A	0,3	0	0	0,3
$T''_P\,(K)$	255	279	331	303
$T''_P\,(°C)$	-19	5	57	29

E. Deoarece energia provenită de la Soare se împrăştie pe o suprafaţă de $4\pi\cdot(1{,}01\times R)^2$, noua constantă solară w'_S verifică relaţia

$$4\pi\cdot(1{,}01\times R)^2\cdot w'_s = 4\pi\cdot(R)^2\cdot w_s \qquad (14)$$

şi prin urmare

$$w'_s = \frac{w_s}{(1{,}01)^2} \qquad (15)$$

cu valoarea numerică

$$w'_s = 1343\,W\cdot m^{-2} \qquad (16)$$

Pentru noua situaţie

$$\begin{cases} T''_P = \sqrt[4]{\dfrac{(w'_s/4)}{\sigma}\cdot(1-A)\dfrac{(\alpha_{vis}+1)}{(\alpha_{ir}+1)}} \\ T''_P = \sqrt[4]{\dfrac{(1343/4)}{5{,}67\times10^{-8}}\cdot 0{,}7\dfrac{1{,}6}{1{,}3}} \\ T''_P \cong 267K = -6°C \end{cases} \qquad (17)$$

F. Existenţa oglinzii cu suprafaţa $s = x\cdot\pi\cdot R_P^2$ conduce la scăderea suprafeţei „de captură” a energiei solare la valoarea $\pi\cdot R_P^2\cdot(1-x/2)$ şi de asemenea la scăderea suprafeţei emiţătoare la valoarea $\pi\cdot R_P^2\cdot(4-x)$. În modelarea aproximativă, descrisă la punctul C, bilanţul energetic la suprafaţa Pământului este

$$\begin{cases} E_S + E_a = E_P \\ \pi\cdot R_P^2(1-x/2)\cdot w_s\cdot(1-A)\cdot\alpha_{vis} + E_A = \pi\cdot R_P^2\cdot(4-x)\cdot\sigma\cdot T''^4_{P,Sahara} \\ (w_s)\cdot(1-A)\cdot(1-x/2)\cdot\alpha_{vis} + E_A/(\pi\cdot R_P^2) = T''^4_{P,Sahara}\cdot(4-x)\cdot\sigma \end{cases} \qquad (18)$$

La limita de sus a atmosferei

$$\begin{cases} E_P\cdot\alpha_{ir} + E_a = \pi\cdot R_P^2\cdot w_s\cdot(1-A) \\ \pi\cdot R_P^2(4-x)\cdot\sigma\cdot T''^4_{P,\,Sahara}\cdot\alpha_{ir} + E_A = \pi\cdot R_P^2\cdot w_s\cdot(1-A)\cdot\left(1-\dfrac{x}{2}\right) \\ \sigma\cdot T''^4_{P,\,Sahara}\cdot\alpha_{ir}\cdot(4-x) + E_A/(\pi\cdot R_P^2) = (w_s/4)\cdot(1-A)\cdot\left(1-\dfrac{x}{2}\right) \end{cases} \qquad (19)$$

Din relaţiile de mai sus rezultă

$$\begin{cases} w_s \cdot (1-A)\cdot(1-x/2)\cdot\alpha_{vis} + E_A\big/\left(\pi\cdot R_P^2\right) = T''^4_{P,\ Sahara}\cdot(4-x)\cdot\sigma \\ w_s\cdot(1-A)\cdot\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = \sigma\cdot T''^4_{P,\ Sahara}\cdot\alpha_{ir}\cdot(4-x) + E_A\big/\left(\pi\cdot R_P^2\right) \\ w_s\cdot(1-A)(\alpha_{vis}+1)\cdot\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = \sigma\cdot T''^4_{P,\ Sahara}\cdot(\alpha_{ir}+1)\cdot(4-x) \end{cases} \qquad (20)$$

Şi prin urmare

$$T''_{P,Sahara} = \sqrt[4]{\frac{w_s}{\sigma}\cdot(1-A)\frac{(\alpha_{vis}+1)}{(\alpha_{ir}+1)}\cdot\frac{1-x/2}{4-x}} \qquad (21)$$

Temperatura trebuie să scadă cu $1°C$ adică trebuie să aibă valoarea $287{,}4K$

În aceste condiţii

$$\begin{cases} \dfrac{T''_{P,Sahara}}{T''_P} = \sqrt[4]{\dfrac{1-x/2}{1-x/4}} \\ \dfrac{1-x/2}{1-x/4} = \left(\dfrac{T''_{P,Sahara}}{T''_P}\right)^4 = k \end{cases} \qquad (22)$$

Cu valoarea numerică

$$k = 0{,}9862 \qquad (23)$$

rezultă că

$$x = 0{,}0544 \qquad (24)$$

Valoarea absolută a suprafeţei vitroase este

$$\begin{aligned} s &= x\cdot\pi\cdot {R_P}^2 \\ s &= 0{,}0544\times\pi\times 6400^2 \cong 7\times 10^6\,km^2 \end{aligned} \qquad (25)$$

Suprafaţa Saharei este de $9\times 10^6\,km^2$.

G. Problema propune estimarea intervalul de timp necesar încălzirii unei porţiuni dintr-o bucată de hârtie, până la temperatura de aprindere. Încălzirea se realizează utilizând o lupă care focalizează lumina solară într-o zonă de mici dimensiuni de pe bucata de hârtie.

Presupune că Soarele este sferic şi plasat la infinit; astfel imaginea acestuia formată cu ajutorul lupei va fi un disc, situat în planul focal al lupei. Dacă se aşează bucata de hârtie chiar în planul focal al lupei, atunci pe aceasta se va forma un disc luminos cu raza minimă R_0.

Ţinând cont că distanţa focală a lupei este f şi că diametrul unghiular sub care se vede Soarele este α, raza R_0 a discului luminos format în planul focal al lupei are expresia

$$R_0 \cong \frac{f\cdot\alpha}{2} \qquad (26)$$

Notează cu P_c puterea termică provenită de la Soare şi colectată de lupa de diametru *D*

$$P_c = J_S\frac{\pi D^2}{4} \qquad (27)$$

Din această putere, bucata de hârtie absoarbe cantitatea P_{abs}

$$P_{abs} = \gamma\, P_c \qquad (28)$$

a cărei expresie se obţine din combinarea relaţiilor (27) şi (28)

$$P_{abs} = \gamma\cdot J_S\cdot\frac{\pi D^2}{4} \qquad (29)$$

Reţine că această putere revine numai acelei porţiuni din bucata de hârtie care este iluminată de lupă. Masa acestei porţiuni din bucata de hârtie este

$$m = \rho_\sigma \pi R_0^2 \qquad (30)$$

La momentul de timp $t_0 = 0$, la care începe iluminarea bucăţii de hârtie cu ajutorul lupei, energia termică inţială U_0 înmagazinată în zona cu aria πR_0^2 din bucata de hârtie aflată la temperatura mediului ambiant T_0 are expresia

$$U_0 = \rho_\sigma \pi R_0^2 c T_0 \qquad (31)$$

La momentul de timp t de la începerea iluminării bucăţii de hârtie, temperatura acesteia în zona spotului luminos devine $T(t)$, iar energia termică înmagazinată în respectiva zonă are expresia

$$U(t) = \rho_\sigma \pi R_0^2 c T(t) \qquad (32)$$

Întrucât

$$\frac{dU}{dt} = P_{abs} \qquad (33)$$

se obţine

$$U(t) = U_0 + P_{abs} \cdot t \qquad (34)$$

Combinând relaţiile (31), (32) (33) şi (34) rezultă dependenţa de timp a temperaturii bucăţii de hârtie în zona spotului luminos

$$T(t) = T_0 + \frac{P_{abs}}{\rho_\sigma \pi R_0^2 c} \cdot t \qquad (35)$$

Din relaţia (35) se observă că temperatura $T(t)$ a hârtiei în zona spotului luminos este la un moment dat cu atât mai mare cu cât raza R_0 a spotului luminos este mai mică. Aceasta justifică de ce bucata de hârtie ar trebui aşezată chiar în planul focal al lupei.

Intervalul de timp de la începutul focalizării luminii pe bucata de hârtie până la aprinderea acesteia, notat prin $\tau_{aprindere}$ se obţine din relaţia (35), punând condiţia ca

$$T = T_{aprindere} \qquad (36)$$

Acest interval de timp are expresia

$$\tau_{aprindere} = \frac{\rho_\sigma \pi R_0^2 c}{P_{abs}} \left(T_{aprindere} - T_0\right) \qquad (37)$$

$$\tau_{aprindere} = \frac{\rho_\sigma f^2 \alpha^2 c}{\gamma J_S D^2} \left(T_{aprindere} - T_0\right) \qquad (38)$$

Efectuând calculul numeric, pe baza estimării de mai sus se obţine

$$\tau_{aprindere} \cong 0{,}25 s \qquad (39)$$

Observaţii:

Pentru soluţionarea punctului G s-au facut următoarele presupuneri:

- *se neglijează absorbţia luminii în sticla din care este confecţionată lupa*
- *incidenţă normală a luminii pe lupă*
- *temperatura bucăţii de hârtie se modifică numai în zona în care este lumina focalizată de lupă determina apariţia spotului luminos pe hârtie*
- *restul bucăţii de hârtie, deşi este iluminată direct de la Soare (şi absoarbe o anumită putere) nu-şi modifică temperatura*

Soluţie propusă de:

Delia DAVIDESCU – Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar – Ministerul Educaţiei Cercetării şi Inovării