



Barem de corectare

Subiectul I

	barem	parțial	total
A	$H = \frac{v_0^2 sin^2 \alpha_0}{2g} ,$ $D = \frac{2v_0^2 sin \alpha_0 cos \alpha_0}{g} $ $H_1 = \frac{v_0^2 sin^2 \alpha}{2g} si D_1 = \frac{2v_0^2 sin \alpha cos \alpha}{g} ,$ $H_2 = \frac{v^2 sin^2 \beta}{2g} si D_2 = \frac{2v^2 sin \beta cos \beta}{g} $	1p	
	La ciocnirea din punctul A apar forțele de contact: $\overline{F_f}$ – forța de frecare pe direcția orizontală, respectiv \overline{N} – normala și greutatea \overline{G} , pe direcția verticală $\overline{V_0}$,	2p	4 p
	$\mu = \frac{1}{4} \frac{-\frac{D_2}{\sqrt{H_2}} + \frac{D_1}{\sqrt{H_1}}}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}}$	1p	
В	a . Randamentul ciclului Carnot: $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2 }{Q_1} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$ Eficiența mașinii frigorifice: $\varepsilon = \frac{Q_2}{ L } = \frac{Q_2}{ Q_1 - Q_2} = \frac{1 - \eta}{\eta} = \frac{T_{\min}}{T_{\max} - T_{\min}}$ La funcționarea mașinii frigorifice între $T_{aer} = T_{\max}$ și $T = T_{\min}$, pentru un ciclu, eficiența va fi: $\varepsilon = \frac{T}{T_{aer} - T}$	1p	5p

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 1 din 7





total		10p
oficiu		1p
$ L = mc \left(T_{aer} \ln \frac{T_0}{T_{aer}} + T_{aer} - T_0 \right) + m\lambda \frac{T_{aer} - T_0}{T_0}$		
$ L = mcT_{aer} \ln \frac{T_0}{T_{aer}} - mc (T_0 - T_{aer}) + m\lambda \frac{T_{aer} - T_0}{T_0},$		
În final:		
$\left L_{solidificae}\right =m\lambdarac{T_{aer}-T_0}{T_0}$		
$\varepsilon = \frac{Q_s}{ L_{solidificate} } = \frac{m\lambda}{ L_{solidificate} } = \frac{T_0}{T_{aer} - T_0}$ de unde se obține:		
	1p	
Solidificarea are loc la temperatura T_0 astfel încât eficiența se poate scrie sub forma		
$ L_{racire} $ se găsește din rezultatul de la punctul b) ținând cont că $T_1 = T_{aer}$ și $T_2 = T_0$.		
$ L = L_{racire} + L_{solidificae} $		
rece căldura de solidificare $m\lambda$:		
c. Procesul poate fi împărțit în două: 1) răcirea apei de la T_{aer} la T_0 și 2) solidificarea apei la temperatura T_0 , în care se extrage de la sursa		
$\Rightarrow \left L_{total} \right = mcT_{aer} \ln \frac{T_2}{T_1} - mc \left(T_2 - T_1 \right) = mc \left(T_{aer} \ln \frac{T_2}{T_1} + T_1 - T_2 \right)$		
În final se obține:		
unde $T(i = 1) = T_1$ si $T(i = N) = T_2$.		
$\left L_{total} \right \approx \sum_{i=1}^{N} \left(mcT_{aer} \frac{\Delta T_i}{T_i} - mc \cdot \Delta T_i \right) = mcT_{aer} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta T_i}{T_i} - mc \sum_{i=1}^{N} \Delta T_i$	3p	
parcurse fiind foarte mare (N):		
La funcționarea mașinii frigorifice între T_1 și T_2 , numărul de cicluri		
$\left L_{ciclui} \right = Q_{ciclui} \cdot \frac{T_{aer} - T_i}{T_{\cdot}} = mc \cdot \Delta T_i \cdot \frac{T_{aer} - T_i}{T_{\cdot}} = mc T_{aer} \frac{\Delta T_i}{T_{\cdot}} - mc \cdot \Delta T_i$		
b . La repetarea fiecărui ciclu, lucrul mecanic (elementar) primit este:		

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 2 din 7





Subjectul II

	barem	parțial	total
Situația 1	a . Deoarece pistoanele sunt mobile rezultă că $p_1 = p_2 = \cdots = p_i =$		
	$\cdots = p_n$. Deoarece pistoanele $P_2, P_3 \dots P_{i-1} \dots P_{n-1}$ sunt termoconductoare rezultă că $T_2 = \cdots = T_i = \cdots = T_n$, atunci $V_2 = \cdots = V_i = \cdots = V_n$.	1p	
	Gazul din compartimentul i suferă aceeași transformare ca ansamblul $2 \div n$, adică o transformare descrisă prin $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_i V_k^{\gamma-1}$ cu $k=2 \div n$ Astfel, $V_i = \frac{vRT_0}{n_0} \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$ și $p_k = p_0 \left(\frac{T_i}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ cu $k=1 \div n$.	1p	
	Din conservarea volumului rezultă că $nV_0 = (n-1)V_i + V_1$, astfel că: $V_1 = \frac{vRT_0}{p_0} \left[n - (n-1) \left(\frac{T_0}{T_i} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right],$	1p	5р
	$T_{1} = T_{0} \left(\frac{T_{i}}{T_{0}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[n - (n-1) \left(\frac{T_{0}}{T_{i}}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right],$ $\Delta U_{1} = \nu \frac{R}{\gamma-1} (T_{1} - T_{0}) \text{ si}$ $\Delta U_{i} = \nu \frac{R}{\gamma-1} (T_{i} - T_{0}) = \Delta U_{2} = \dots = \Delta U_{n}.$	-	
	$\begin{array}{l} \mathbf{b}. \ Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_n \\ Q = \Delta U_1 + (n-1)\Delta U_2. \\ \text{Prin urmare, } Q = (n-1)\nu \frac{R}{\nu-1}(T_i - T_0) + \nu \frac{R}{\nu-1}(T_1 - T_0). \end{array}$	1p	
	c. Pentru gazul din compartimentul (1) $Q=Q_1=\Delta U_1+L_{1,2},$ rezultă că $L_{1,2}=(n-1)\nu\frac{R}{\gamma-1}(T_i-T_0)$	1p	
Situația 2	a. Deoarece pistoanele sunt mobile rezultă că $p_1 = p_2 = \cdots = p_i = \cdots = p_n$; Deoarece pistoanele P_1, P_2, \dots, P_{i-1} sunt termoconductoare rezultă că $T_1 = T_2 = \cdots = T_{i-1}$ și deoarece pistoanele P_{i+1}, \dots, P_n sunt termoconductoare rezultă că $T_{i+1} = \cdots = T_n$. Aceasta conduce la faptul că $V_1 = V_2 = \cdots = V_{i-1}$ și $V_{i+1} = \cdots = V_n$.	0,5p	
	Gazul din compartimentul i suferă aceeași transformare ca ansamblul de la $i+1$ la n , adică o transformare descrisă prin $T_0V_0^{\gamma-1}=T_iV_k^{\gamma-1}$ cu $k=i\div n$. Prin urmare parametrii gazului din compartimentul (i) sunt aceeași cu ai gazului din oricare din compartimentele $i,i+1$ n . Astfel $V_i=\dots=V_n=V_0\left(\frac{T_0}{T_i}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, $p_1=\dots=p_i=\dots=p_n=p_0\left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ și $T_i=\dots=T_n$.	0,5p	4p

- 1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
- 2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

 Pagina 3 din 7





Din conservarea volumului $nV_0=(i-1)V_1+(n-i+1)V_i$, de unde $V_1=\frac{nV_0-(n-i+1)V_i}{(i-1)}$, $V_1=V_0\frac{n-(n-i+1)\left(\frac{T_0}{T_i}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(i-1)}.$	0,5p	
Din ecuația de stare pentru gazul din compartimentul (1) rezultă că $T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}, \text{ sau}$ $T_1 = T_0 \left(\frac{T_i}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{n - (n-i+1)\left(\frac{T_0}{T_i}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(i-1)}.$ Variația energiei interne $\Delta U_1 = \dots = \Delta U_{i-1} = \nu \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$ $\Delta U_i = \dots = \Delta U_n = \nu \frac{R}{\gamma-1} (T_i - T_0).$ b. $Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_n$	0,5p	
$\mathbf{b}. \ Q = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \dots + \Delta U_n \\ Q = (i-1)\Delta U_1 + (n-i+1)\Delta U_i \\ Q = \nu \frac{R}{\gamma - 1} [(i-1)T_1 + (n-i+1)T_i - nT_0]$	1p	
c. $Q = \Delta U_1 + L_{1,2}$, prin urmare $L_{1,2} = \nu \frac{R}{\gamma - 1} [(i-2)T_1 + (n-i+1)T_i - (n-1)T_0]$	1p	
oficiu		1p
total		10

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 4 din 7





Subiectul III

Se calculează, din grafic, aria de sub graficul procesului între fiecare două		
stări succesive și axa volumului.		
3p M-punctul de tangenta pt. adiabata		
p_{1}^{2} , p_{2}^{2} = = = p_{1}^{2} N - punctul de tangenta pt. izoterma p_{1} , p_{2} p_{3} p_{4} p_{1}		
· 1 · M		
	1	
$p=aV ; p_1=aV_1, p_2=aV_2; p=aV_1, \frac{5}{2}p=aV ; V_1=\frac{2}{5}V $	1р	
$L_{1,2} = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p + \frac{5}{2}p}{2} (V - \frac{2}{5}V) = \frac{21}{20}pV.$		9p
2 2 7		
	1p	
(20 1 1 1)		
Pentru determinarea randamentului trebuie să estimăm căldura schimbată de		
gaz cu sursele de căldură și mai ales Q_{abs} și Q_{cedat} .		
$Q_{1,2} = L_{1,2} + \Delta U_{1,2}$, $Q_{1,2} = L_{1,2} + \frac{3}{2} \left(\frac{5}{2} pV - \frac{2}{5} pV \right)$; $Q_{1,2} = \frac{21}{5} pV$.	1p	
$Q_{2,3} = L_{2,3} + \Delta U_{2,3}$, $Q_{2,3} = L_{2,3} + \frac{3}{2} \left(6pV - \frac{5}{2}pV \right)$; $Q_{2,3} = 8pV$.		
	N-punctul de tangenta pt. izoterma $P_{N} = \frac{1}{2} = \frac$	M-punctul de tangenta pt. adiabata N-punctul de tangenta pt. izoterma n. izoterma N-punctul de tangenta pt. izoterma N-punctul de tangenta pt. izoterma n. izote

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 5 din 7





2p

Pe transformarea (3,4), o transformare liniară cu pantă negativă, gazul pe prima parte a destinderii primește căldură, iar de la o stare intermediară cedează căldură. Determinarea parametrilor acestei stări se face determinând maximul funcției de căldură și este punctul în care adiabata corespunzătoare destinderii acestei cantități de gaz este tangentă la dreapta transformării, adică starea M din figură.

Vom nota parametrii stării de la care se schimbă sensul căldură schimbate cu exteriorul: V_x , p_x .

Determinarea parametrilor funcției liniare ce descrie transformarea (3,4) se face din faptul că cele două stări aparțin acestei transformări:

$$p=mV+n$$
, $p_3=mV_3+n$, $p_4=mV_4+n$; $n=6p$, $m=-\frac{3p}{2V}$; $p_x-\frac{3p}{2V}V_x+6p$

Atunci:

$$Q_{3,x} = L_{3,x} + \Delta U_{3,x} , Q_{3,x} = L_{3,x} + \frac{3}{2} (p_x V_x - p_3 V_3) .$$

$$Q_{3,x} = \frac{p_3 + p_x}{2} (V_x - V_3) + \frac{3}{2} (p_x V_x - p_3 V_3) .$$

$$Q_{3,x} = 2p_x V_x - 2p_3 V_3 + \frac{1}{2} p_3 V_x - \frac{1}{2} p_x V_3 =$$

$$= 2(mV_x + n) V_x - 2p_3 V_3 + \frac{1}{2} p_3 V_x - \frac{1}{2} (mV_x + n) .$$

$$Q_{3,x} = 2\left(-\frac{3p}{2V} V_x + 6p\right) V_x - 6pV + \frac{3}{2} pV_x - \frac{1}{2} \left(-\frac{3p}{2V} V_x + 6p\right) .$$

$$Q_{3,x} = -\frac{3p}{V} V_x^2 + 15pV_x - 18pV$$

Maximul de absorție de căldură este pentru:

$$V_x = V_M = -\frac{b}{2a} = -\frac{15p}{-\frac{6p}{V}} = \frac{5}{2}V$$
, $p_x = p_M = \frac{9}{4}p$,

$$Q_{3,M} = \frac{3}{4} pV$$

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.
Pagina 6 din 7





	Pe porțiunea (M,4) gazul cedează căldură sursei reci :		
	$Q_{M,4} = L_{M,4} + \Delta U_{M,4}$, $Q_{M,4} = L_{M,4} + \frac{3}{2} (p_3 V_4 - p_M V_M)$.		
	2		
	$Q_{3,M} = \frac{p_4 + p_M}{2} (V_4 - V_M) + \frac{3}{2} (p_3 V_4 - p_M V_M).$	1p	
	$Q_{3,M} = -\frac{3}{4} pV$		
	$Q_{abs} = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,M} = \frac{21}{5} pV + 8pV + \frac{3}{4} pV = \frac{259}{20} pV$		
	$Q_{\text{cedat}} = Q_{\text{M,4}} + Q_{4,1} = -\left(\frac{3}{4}pV + \frac{47}{5}pV\right) = -\frac{203}{20}pV,$		
	$\left Q_{\text{cedat}}\right = \frac{203}{20} \text{pV}.$		
	203	1p	
	$\eta = 1 - \frac{ Q_{\text{cedat}} }{Q_{\text{obs}}} = 1 - \frac{\frac{203}{259}}{259} = 1 - \frac{203}{259} = \frac{56}{259} = 0,216$, $\eta = 21,6\%$		
	$Q_{abs} = \frac{259}{20} = 259 = 259$		
c.	Pe transformarea (3,4) se atinge temperatura maximă, adică starea N		
	din desen. Parametrii stării N vor fi: (V _T ,p _T)		
	$p_T V_T = \nu R T_{max}$, starea N se află pe dreapta 3-4 deci:		
	$p_{\mathrm{T}} = mV_{\mathrm{T}} + n = -\frac{3p}{2V}V_{\mathrm{T}} + 6p$		
	$ \left(-\frac{3p}{2V} V_{T} + 6p \right) V_{T} = vRT_{max} , -\frac{3p}{2V} V_{T}^{2} + 6pV_{T} - vRT_{max} = f(V_{T}) . $		
	Funcția are un maxim când: $\Delta = 0$	2p	
	$\Delta = b^2 - 4ac$, $36p^2 - 4\left(-\frac{3p}{2V}\right)\left(-vRT_{max}\right) = 0$,		
	$T_{\text{max}} = \frac{6pV}{vR} = T_3$		
	Randamentul Carnot:		
	$\eta = 1 - \frac{T_{\text{min}}}{T_{\text{max}}}$, $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_{\text{max}}} = \frac{14}{15} = 0,933$		
oficiu			1p
Total			10p

Subiecte propuse de:

Conf. univ. dr. **Paul BARVINSCHI**, Universitatea de Vest din Timișoara Prof. **Ioan POP**, Colegiul Național Mihai Eminescu, Satu Mare Prof. **Constantin GAVRILĂ**, Colegiul Național Sf. Sava, București

^{1.} Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.

^{2.} Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Pagina 7 din 7