Olimpiada de Fizică - Etapa naţională
1 – 6 aprilie 2012
Ilfov

Baraj

Problema a III-a – SOLUȚIE

A. Temperatura exterioară este $T_0 = 273\,\mathrm{K}$, suprafața totală a benzii $S = 4{,}10 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$, iar rezistența sa electrică la temperatura exterioară $R_0 = \rho_0 \dfrac{L}{lh} = 0{,}978\,\Omega$. Conform enunțului, legea de variație a rezistenței electrice a benzii este:

$$R = R_0(1+\alpha t) = R_0\left(1+\frac{1}{T_0}t\right) = \frac{R_0}{T_0}T\,. \tag{1}$$

Legea lui Ohm pentru bandă este

$$u = iR\,, \tag{2}$$

iar bilanțul puterilor, în acord cu legea Stefan - Boltzmann

$$i^2 R = \sigma S\left(T^4 - T_0^4\right). \tag{3}$$

a. Deoarece $T >> T_0$, din (3) și (1) rezultă

$$T = \left(\frac{R_0}{\sigma S T_0}\right)^{1/3} \cdot i^{2/3}. \tag{4}$$

Introducând (4) și (1) în (2) se obține

$$u = \frac{R_0}{T_0}\left(\frac{R_0}{\sigma S T_0}\right)^{1/3} i^{5/3}. \tag{5}$$

De aici se vede că $\beta = 5/3,\ D = 0$ și $C = \dfrac{R_0}{T_0}\left(\dfrac{R_0}{\sigma S T_0}\right)^{1/3} = 0{,}892\ \mathrm{V/A}^{5/3}$.

b. Deoarece $T = T_0 + t, \quad t << T_0$, atunci:

$$R = R_0\left(1+\frac{t}{T_0}\right), \tag{6}$$

$$i^2 R = \sigma S T_0^4\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^4 - 1\right] = \sigma S T_0^4\left[\left(1+\frac{t}{T_0}\right)^4 - 1\right] \cong 4\sigma S T_0^3 \cdot t\,,$$

de unde, folosind (6), se obține

$$i = 2T_0\sqrt{\frac{\sigma S T_0}{R_0}}\cdot\sqrt{t}\,, \tag{7}$$

iar

$$u = iR = 2T_0\sqrt{\sigma S T_0 R_0}\left(1+\frac{t}{T_0}\right)\sqrt{t}\,. \tag{8}$$

Eliminând temperatura *t* între (7) și (8), se găsește dependența căutată

$$u = R_0 i + \frac{R_0^2}{4\sigma S T_0^4} i^3\,. \tag{9}$$

Prin urmare, în acest caz $C = R_0 = 0{,}978\,\Omega$, $D = \dfrac{R_0^2}{4\sigma S T_0^4} = 0{,}185\ \mathrm{V/A^3}$, $\beta = 1$, iar $\delta = 3$.

B. În acord cu enunțul, se poate folosi ec. (9), iar echilibrarea punții se face pentru

$$R_x = R = R_0\left(1+\frac{R_0}{4\sigma S T_0^4} i^2\right) \tag{10}$$

Aplicând legea a II-a a lui Kirchhoff pentru ochiul inferior al circuitului se obține

$$E = iR_x + iR_1 = i\left(R_0 + R_1\right) + \frac{R_0^2}{4\sigma S T_0^4} i^3\,. \tag{11}$$

Această ecuație se scrie numeric astfel $\underbrace{0{,}500 - 1{,}978 i}_{f(i)} = \underbrace{0{,}185 i^3}_{g(i)}$. Pornind cu $i_0 = 0\ \mathrm{A}$ în membrul drept, atunci $g(i_0) = 0\ \mathrm{V}$, de unde $f\left(i_1\right) = g(i_0)$, adică $i_1 = 0{,}253\ \mathrm{A}$. Mai departe, $g(i_1) = 3{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}$, iar din $f\left(i_2\right) = g(i_1)$ rezultă $i_2 = 0{,}251\ \mathrm{A}$. Pentru următoarea iterație, $g(i_2) = 2{,}93\cdot 10^{-3}\ \mathrm{V}$, iar din $f\left(i_3\right) = g(i_2)$ rezultă $i_3 = 0{,}251\ \mathrm{A}$. Prin urmare, soluția ecuației (11), cu 3 cifre semnificative, este $\boxed{i = 0{,}251\ \mathrm{A}}$. În aceste condiții, în acord cu (10), $\boxed{R_x = 0{,}990\ \Omega}$. În fine, introducând această valoare în (1), temperatura benzii este $\boxed{T = 276\ \mathrm{K}}$, sau $\boxed{t = 3\ ^\circ\mathrm{C}}$.

C. Din (1) reiese că

$$T = T_0 \frac{R_x}{R_0} = 290\,\mathrm{K} \quad (17\ ^\circ\mathrm{C}), \tag{12}$$

iar din legea a doua a lui Kirchhoff

$$i = \frac{E}{R_x + R_1} = 0{,}245\,\mathrm{A}. \tag{13}$$

În starea staționară, bilanțul puterilor se scrie

$$P_{solar} + i^2 R_x + \sigma S T_0^4 = \sigma S T^4, \tag{14}$$

de unde $P_{solar} = 0{,}291\,\mathrm{W}$, sau $\boxed{I = 0{,}291\,\mathrm{Wm^{-2}}}$.

D. Deoarece R_x nu se modifică, înseamnă că puntea se echilibrează când temperatura benzii de Pt rămâne nemodificată și egală cu $T = T_0 \frac{R_x}{R_0} = 307\,\mathrm{K} \quad (34\ ^\circ\mathrm{C})$. Din (14) rezultă că

$$\Delta P_{solar} = -\Delta\left(i^2 R_x\right) = -\frac{R_x}{\left(R_x + R_1\right)^2} \cdot 2E\Delta E. \tag{15}$$

Tot din (14) se găsește

$$i = \sqrt{\frac{\sigma S\left(T^4 - T_0^4\right) - P_{solar}}{R_x}} = 0{,}663\,\mathrm{A}, \tag{16}$$

de unde

$$E' = i\left(R_x + R_1\right) = 1{,}39\,\mathrm{V}. \tag{17}$$