COSMOLOGIE NEWTONIANĂ

Scopul acestei probleme este de a descrie foarte schematic maniera în care se comportă universul şi soarta finală a universului, utilizând concepte simple de mecanică newtoniană. Pentru aceasta, vom începe prin a presupune valabilitatea aşa-numitului *Principiu al Cosmologiei*, care afirmă caracterul omogen şi izotrop al universului. De asemenea, va trebui să acceptăm ca adevărat faptul că universul a fost inițiat de Big Bang.

Considerațiile de mai sus ne conduc la concluzia că, văzută din orice punct al spațiului, expansiunea universului trebuie descrisă printr-un unic *factor de scară*, $R(t)$, care este independent de poziție. Cu alte cuvinte, dat fiind un punct oarecare având actualmente vectorul de poziție $\mathbf{r}_0$, la orice alt moment de timp poziția lui a fost/va fi caracterizată de

$$\vec{r}(t) = R(t)\cdot\vec{r}_0 \ .$$

(Termenul tehnic folosit de matematicieni pentru o astfel de transformare a spațiului este *omotetie*.) Evident, în clipa de față t_0, $R(t_0) = 1$, iar în momentul Big Bang-ului, $R(0) = 0$.

Scopul principal al problemei este de a stabili modurile posibile de comportare ale lui $R(t)$.

1. *Legea lui Hubble* stabileşte relația care trebuie să existe între vectorul de poziție $\mathbf{r}$ şi viteza $\mathbf{v}$ ale oricărui punct din spațiu, pentru ca expansiunea universului să fie omogenă şi izotropă. Modul în care viteza depinde de vectorul de poziție este exprimat prin intermediul unui factor multiplicativ având unități de măsură convenabile, numit *constanta Hubble*, H. Cu toate acestea, acest factor nu este o constantă, ci depinde de timp, aşa ca şi $R(t)$. Vom nota $H(t_0) = H_0$.

a. Deduceți Legea lui Hubble.

b. Arătați că, în aproximația mecanicii newtoniene, Legea lui Hubble este valabilă pentru orice observator care se consideră a fi „în repaus“ într-un punct oarecare al universului.

c. Valoarea actuală a constantei Hubble, H_0, poate fi determinată experimental măsurând distanța până la o galaxie oarecare şi viteza cu care ea se îndepărtează de noi. Astfel, ne găsim în situația de a putea face o primă şi grosolană aproximare a vârstei universului, t_0. Pentru aceasta, să presupunem (în mod incorect!) că vitezele actuale ale punctelor spațiului au fost tot timpul aceleaşi încă din momentul Big Bang-ului. Exprimați t_0 în funcție de H_0. (Este interesant de menționat faptul că valoarea observată a lui H_0 ne dă o estimare a lui t_0 în jurul valorii de $1{,}38\cdot10^{10}$ ani. În cele ce urmează, această valoare va fi numită *timpul Hubble*, t_H.)

2. Vom studia acum un model ca de „praf lipsit de presiune“ al universului. Prin „praf“ se înțelege că universul conține doar substanță obişnuită, fără radiații (fotoni), fără neutrini, fără materie nebarionică sau orice altceva. Prin „lipsit de presiune“ se

înțelege că fiecare punct al spațiului este înzestrat cu o aceeaşi densitate ρ dependentă de timp, şi că masa totală a universului are o valoare fixată. Ca atare, densitatea variază doar ca urmare a expansiunii universului.
d. Găsiți relația dintre $\rho(t)$ şi $R(t)$ în funcție de densitatea actuală, $\rho(t_0) = \rho_0$.
e. Fie o pătură sferică infinit de subțire, de masă m şi rază actuală r_0. Exprimați energia totală a păturii la un moment oarecare de timp în funcție de m, r_0, $R(t)$, $H(t)$, $\rho(t)$, şi constanta atracției universale G.
f. Definim aşa-numita *densitate critică*, ρ_c, ca fiind valoarea pentru care energia de mai sus este zero. Distincția între diferitele tipuri de universuri este făcută prin intermediul unei mărimi fizice numite *parametru al densității*, $\Omega(t)$, care reprezintă raportul dintre densitatea propriu-zisă a universului şi densitatea critică la acel moment de timp.
Precizați cum se comportă universul dacă $\Omega > 1$ (univers „închis“), dacă $\Omega = 1$ (univers „plat“), şi dacă $\Omega < 1$ (univers „deschis“).
g. Exprimați energia totală E a păturii sferice în funcție de m, r_0, $R(t)$, $H(t)$, şi $\Omega(t)$, şi arătați că tipul universului nu se schimbă în timp.
h. Folosind Legea lui Hubble, găsiți ecuația implicită pentru variația în timp a lui $R(t)$ în funcție de H_0 şi $\Omega_0 = \Omega(t_0)$. Arătați că la momentul Big Bang-ului comportarea universului era în esență oricât de apropiată de cea a unui univers plat.

3. Suntem acum în situația de a face o aproximare ceva mai exactă a vârstei universului, în ipoteza unui univers plat ($\Omega_0 = 1$).
i. Rezolvați ecuația de la punctul **h** pentru a găsi în mod explicit $R(t)$, şi exprimați t_0 în funcție de t_H.
j. Reprezentați schematic pe un grafic factorul de scară în funcție de timpul măsurat în unități t_H.

4. Vom studia acum cazurile ceva mai complexe ale unui univers închis ($\Omega_0 > 1$) şi respectiv deschis ($\Omega_0 < 1$).
k. Pentru $\Omega_0 > 1$, găsiți dependența inversă, a timpului în funcție de factorul de scară, în funcție de H_0 şi Ω_0.
Indicație:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \arcsin(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1-x)} + C\,.$$

l. Pentru a putea studia $R(t)$, vom căuta să parametrizăm funcția. Pentru aceasta, notăm funcția *arcsin* de mai sus cu $p/2$. Exprimați $R(p)$ şi $t(p)$.
m. Exprimați vârsta universului T în momentul final al Big Crunch-ului (opusul Big Bang-ului) în funcție de t_H şi Ω_0.
n. Găsiți dimensiunea maxima (adică R maxim) a universului în funcție de Ω_0.
o. Pentru $\Omega_0 = 2$, reprezentați schematic R în funcție de timpul t măsurat în unități t_H.
p. Pentru $\Omega_0 < 1$, găsiți dependența inversă $t(R)$, în funcție de H_0 şi Ω_0.
Indicație:

$$\int \sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = -\operatorname{arcsinh}(\sqrt{x}) + \sqrt{x(1+x)} + C\,.$$

q. Notați funcția *arcsinh* de mai sus cu $p/2$, şi exprimați $R(p)$ şi $t(p)$.
r. Arătați că, într-un final, expansiunea universului tinde către un ritm uniform, şi exprimați această rată în funcție de H_0 şi Ω_0.
s. Pentru $\Omega_0 = 0{,}5$, reprezentați schematic $R(t)$.