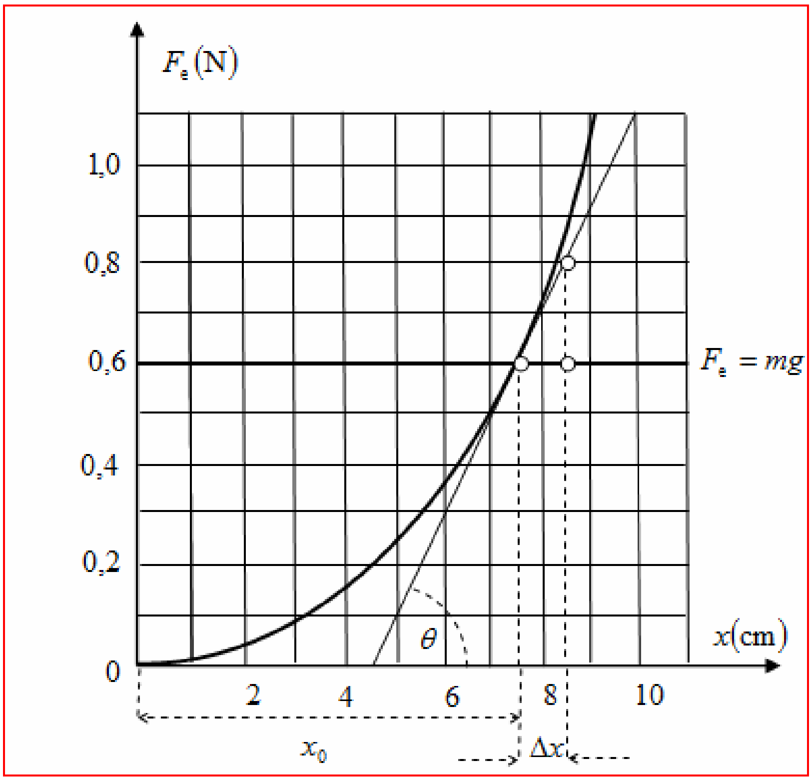
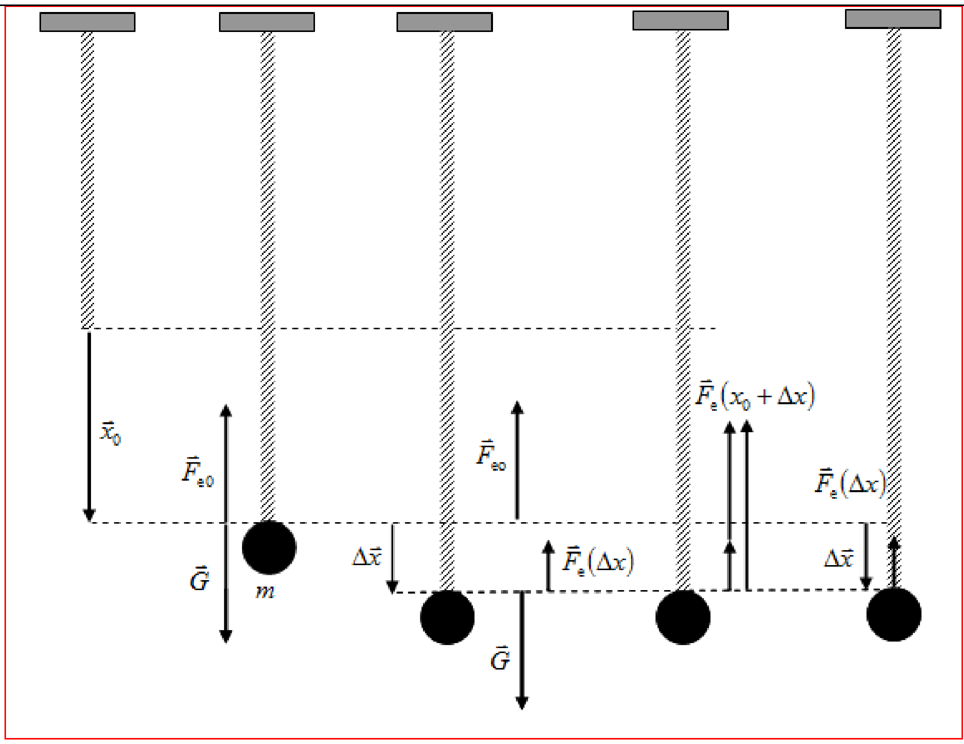
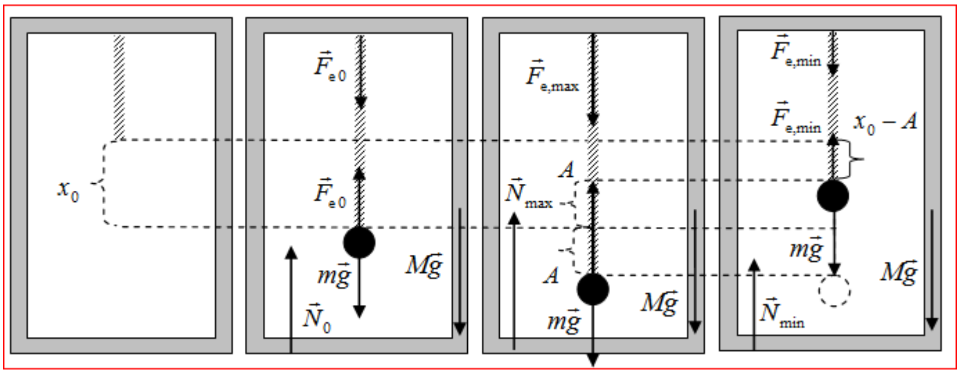
Problema 1	**Parţial**	**Punctaj**
a)		**10p**
$(M+m)g = ky$	0,5p	**3,5p**
Desprinderea corpului de masă m are loc în momentul în care forţa de interacţiune dintre platan şi corp este nulă $\begin{cases} ma = N - mg \\ Ma = F_e - N - Mg \\ N = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -g \\ F_e = 0 \end{cases}$	1,5p	
$\frac{1}{2}k(y+D)^2 = (m+M)g(y+D) + \frac{(m+M)v^2}{2}$	1p	
Rezultat final: $v = \sqrt{\frac{k}{M+m}\left[\frac{(M+m)g}{k} + D\right]^2 - 2g\left[\frac{(M+m)g}{k} + D\right]}$	0,5p	
b)		**5,5p**
$Mg = ky_0$	0,5p	
Viteza bilei imediat înainte de ciocnire $v = \sqrt{2g(H+\ell_0+y_0)}$	0,5p	
Viteza ansamblului după ciocnirea plastică $v_1 = \frac{m}{m+M}\sqrt{2g(H+\ell_0+y_0)}$	1p	
$(M+m)g = ky_1$	0,5p	
$\frac{(M+m)v_1^2}{2} + \frac{ky_0^2}{2} + (M+m)g(A+y_1-y_0) = \frac{k(A+y_1)^2}{2}$	2p	
Rezultat final: $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2M}{M+m} + \frac{2k(H+\ell_0)}{g(M+m)}}$	1p	
Oficiu		**1p**

Problema 2	**Parțial**	**Punctaj**
Barem		**10**
A. a)	**3 p**	
Corespunzător poziției de echilibru, când corpul este suspendat de resort: $\vec{F}_e(x_0)+\vec{G}=0;$ $F_{e0}=F_e(x_0)=mg,$ unde x_0 este alungirea resortului, în acord cu notațiile din figura alăturată, rezultă: $F_e(x_0)=6\cdot10^{-2}\ \mathrm{kg}\cdot10\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}=0{,}6\ \mathrm{N};$ $x_0=7{,}5\,\mathrm{cm}.$  	1p	
După îndepărtarea corpului, față de poziția de echilibru, pe o distanță foarte mică, Δx, așa cum indică secvențele din figura alăturată, forța rezultantă, care determină oscilațiile corpului, este: $\vec{F}=\vec{F}_e(x_0)+\vec{G}+\vec{F}_e(\Delta x)=\vec{F}_e(\Delta x),$ a cărei orientare este opusă elongației $\Delta\vec{x}$.	1 p	

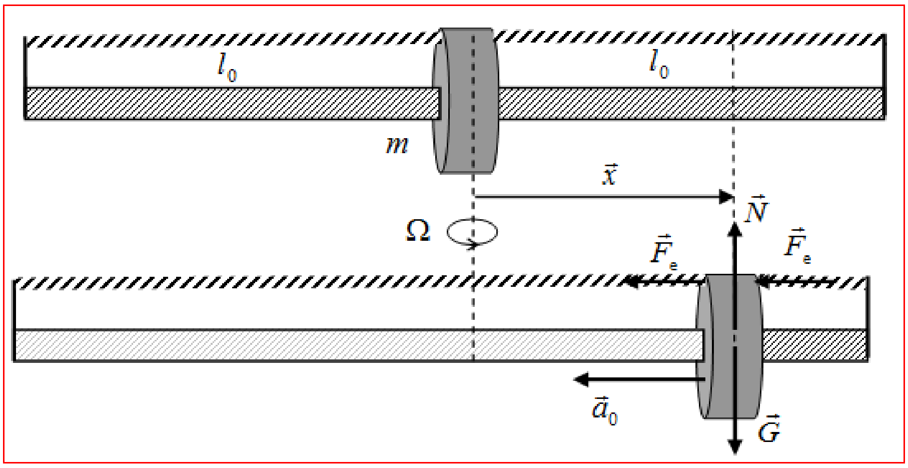
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

		
Ne vom interesa acum de expresia modulului acestei forțe: $F_e(\Delta x) = F_e(x_0+\Delta x) - mg = F_e(x_0+\Delta x) - F_e(x_0).$ Pentru valori mici ale lui Δx, se știe că: $\frac{F_e(x_0+\Delta x) - F_e(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta F_e}{\Delta x} = \tan\theta;$ $F_e(x_0+\Delta x) - F_e(x_0) = \tan\theta \cdot \Delta x;$ $\tan\theta = k = \text{constant};$ $F_e(\Delta x) = k\Delta x;\ \vec{F}_e(\Delta x) = -k\Delta\vec{x},$ ceea ce dovedește că oscilațiile mici ale corpului suspendat de resort sunt oscilații armonice.	0,50 p	
În aceste condiții, rezultă: $k = \tan\theta = \frac{0{,}2\ \text{N}}{0{,}01\ \text{m}} = \frac{1{,}1\ \text{N}}{0{,}055\ \text{m}} = 20\ \frac{\text{N}}{\text{m}};$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\cdot 3{,}14\sqrt{\frac{6\cdot 10^{-2}}{20}}\ \text{s} \approx 0{,}34\ \text{s}.$	0,50 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

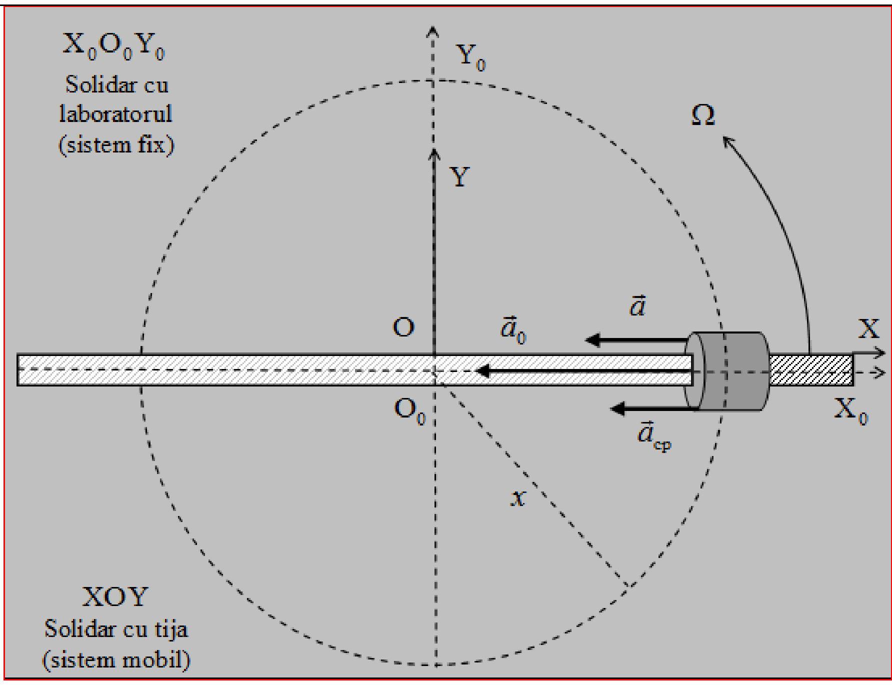
	Parţial	Punctaj
B. b)	**2 p**	
În acord cu detaliile prezentate în secvențele din figura alăturată, rezultă:  $kx_0 = mg;\ N_0 = (M+m)g,$ unde N_0 este reacția suportului asupra cutiei, atunci când bila suspendată de resort trece prin poziția de echilibru; $N_{max} = Mg + F_{e,max} = Mg + k(x_0 + A),$ unde N_{max} este reacția suportului asupra cutiei, atunci când bila suspendată de resort se află în poziția extremă inferioară; $N_{min} = Mg + F_{e,min} = Mg + k(x_0 - A),$ unde N_{min} este reacția suportului asupra cutiei, atunci când bila suspendată de resort se află în poziția extremă inferioară.	1,5 p	
Rezultă: $N_{min} = 0;\ \ 0 = Mg + k(x_0 - A);$ $Mg + kx_0 - kA = 0;\ kx_0 = mg;$ $Mg + mg - kA = 0;$ $A = \frac{(M+m)g}{k};\ \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}};\ \ k = \frac{4\pi^2 m}{T^2};$ $A = \frac{(M+m)gT^2}{4\pi^2 m}.$	0,50 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Parțial	Punctaj
C. c)	**4 p**	
1) Când tija pe care se află mufa se rotește uniform, cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$, iar mufa efectuează oscilații de-a lungul tijei, în raport cu poziția de echilibru, însemnează că, în orice moment, mișcarea mufei, în raport cu laboratorul, este rezultatul compunerii unei mișcări osciatorii cu o mișcare circulară uniformă. Această mișcare este efectul rezultantei tuturor forțelor care acționează asupra mufei, orientarea acesteia fiind pe direcția tijei, spre poziția de echilibru a mufei, imprimându-i mufei accelerația absolută $\vec{a}_0$, orientată spre axul de rotație, așa cum indică desenul din figura alăturată.	0,25 p	
	0,50 p	
În acord cu principiul fundamental al dinamcii, rezultă: $$2\vec{F}_e = m\vec{a}_0 = -2k\vec{x};\ \ F_e = kx,$$ unde x este distanța instantanee de la mufă la axul de rotație (alungirea și respectiv contracția fiecărui resort, adică elongația); $$ma_0 = 2kx.$$ Simultaneitatea celor două mișcări ale mufei, evidențiată în desenul din figura alăturată, presupune că rezultanta forțelor care acționează asupra mufei trebuie să asigure atât accelerația corespunzătoare mișcării oscilatorii armonice, $\vec{a}$, cât și accelerația corespunzătoare mișcării circulare uniforme, $\vec{a}_{cp}$, astfel încât:	0,25 p	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr>
<td>



$$a_0 = a + a_{cp};\ a_{cp} = \Omega^2 x,$$
$$a_0 = a + a_{cp} = a + \Omega^2 x;$$
$$ma_0 = 2kx;$$
$$m\left(a + \Omega^2 x\right) = 2kx;$$
$$a + \Omega^2 x = \frac{2k}{m}x;$$
$$a = \left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)x;\ a = \omega^2 x;$$
$$\left(\frac{2k}{m} - \Omega^2\right)x = \omega^2 x;\ \frac{2k}{m} - \Omega^2 = \omega^2;$$
$$\omega^2 = \frac{2k}{m} - \Omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2};$$
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \Omega^2}} = 0{,}7\ \text{s}.$$

</td>
<td>1,5 p</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

2) Dacă cele două resorturi sunt deformate inițial prin comprimare, așa cum indică secvențele din figura alăturată, rezultă:

$$l_1 = l_0 - x_0 + x = l_0 + \left(x - x_0\right);$$
$$\left(\Delta l\right)_1 = l_1 - l_0 > 0;\ \left(\Delta l\right)_1 = x - x_0 > 0,$$

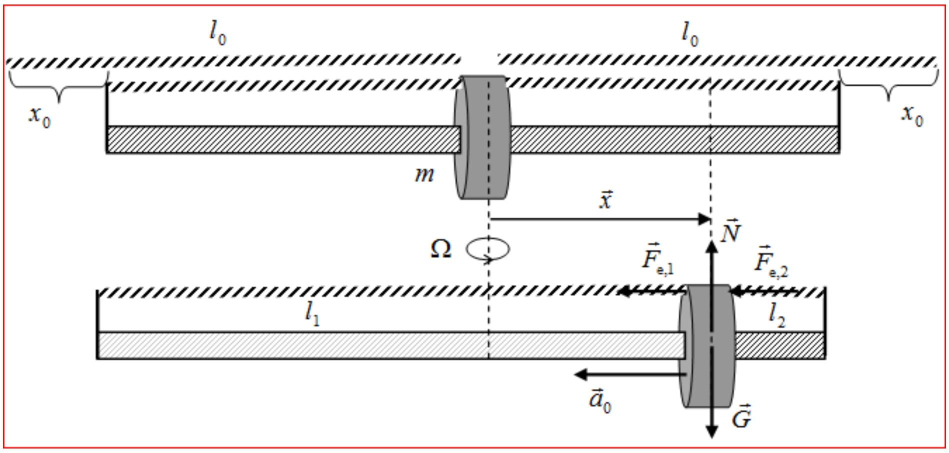
ceea ce presupune că resortul 1 este deformat prin întindere;

$$l_2 = l_0 - x_0 - x = l_0 - \left(x + x_0\right);$$
$$\left(\Delta l\right)_2 = l_2 - l_0 < 0;\ \left(\Delta l\right)_2 = -\left(x + x_0\right) < 0,$$

ceea ce presupune că resortul 2 este deformat prin comprimare.

</td>
<td>0,50 p</td>
<td></td>
</tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

<table>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>În aceste condiții, orientările celor două forțe elastice sunt identice, așa cum indică desenul din figura alăturată, astfel încât rezultanta lor este:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{e,1} + \vec{F}_{e,2};$$

$$F_e = k(x - x_0) + k(x + x_0) = 2kx,$$

aceeași ca și în cazul anterior, când inițial cele două resorturi erau nedeformate.

Se demonstrează asemănător că și în cazul când cele două resorturi identice sunt deformate inițial prin întindere, rezultanta celor două forțe elastice este aceeași.

Concluzie: perioada oscilațiilor mufei când inițial cele două resorturi identice sunt deformate prin comprimare/întindere, este:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2k}{m} - \Omega^2}} = 0{,}7\,\mathrm{s}.$$</td><td>0,25 p</td><td></td></tr>
<tr><td>3) Pentru valori ale lui Ω din ce în ce mai mari, dar $\Omega < \sqrt{2k/m}$, perioada oscilațiilor armonice ale mufei, T, are valori din ce în ce mai mari. Există o valoare maximă a lui Ω, pentru care perioada oscilațiilor mufei devine, $T \to \infty$, ceea ce însemnează că atunci oscilațiile mufei încetează.

Aceasta se întâmplă dacă:

$$\frac{2k}{m} - \Omega^2 = 0;\ \Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10\,\mathrm{rad/s}.$$

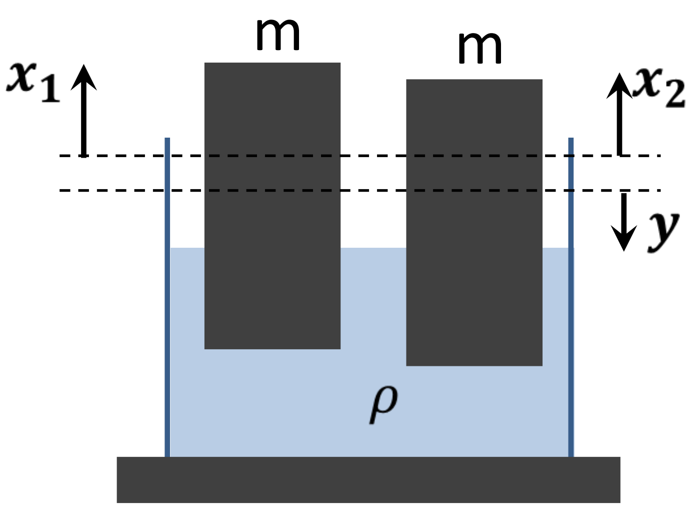
Concluzie: oscilațiile mufei de-a lungul tijei încetează dacă viteza unghiulară a rotației tijei este:

$$\Omega \geq \sqrt{\frac{2k}{m}};\ \ \Omega \geq 10\,\mathrm{rad/s}.$$</td><td>0,75 p</td><td></td></tr>
<tr><td>Oficiu</td><td></td><td>1 p</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

1. Barem Problema 3		10p

3p



a.

Dacă h_{1e} și h_{2e} sunt porțiunile din înălțimea flotoarelor aflate sub apă la echilibru, atunci:

$$mg = \rho g s h_{1e} = \rho g s h_{2e}. \qquad (1)$$

Considerând o axă verticală Ox, cu originea la suprafața apei la echilibru și sensul pozitiv îndreptat pe verticală în sus, atunci, la un moment t oarecare, dacă x_1 și x_2 sunt deplasările pozitive (în sus) ale flotoarelor, conservarea volumului de apă dă coborârea (y) a nivelului liber al apei din vas:

$$sx_1 + sx_2 = -y(S-2s), \qquad (2)$$

1p

unde $y < 0$.

Dacă la momentul t flotoarele sunt imersate cu h_1, respectiv h_2, unde

$$h_1 = h_{1e} - x_1 + y = h_{1e} - \frac{1}{S-2s}\left[(S-s)x_1 + sx_2\right], \qquad (3)_1$$

1p

respectiv

$$h_2 = h_{2e} - x_2 + y = h_{2e} - \frac{1}{S-2s}\left[sx_1 + (S-s)x_2\right], \qquad (3)_2$$

atunci ecuațiile de mișcare ale celor două flotoare se scriu:

$ma_1 = \rho g s h_1 - mg$

și

$ma_2 = \rho g s h_2 - mg$,

adică, ținând cont de (1) - (3)

$$ma_1 = -\frac{\rho g s}{S-2s}\left[(S-s)x_1 + sx_2\right], \qquad (4)_1$$

$$ma_2 = -\frac{\rho g s}{S-2s}\left[sx_1 + (S-s)x_2\right]. \qquad (4)_2$$

1p

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

b. Din (4) se observă că mișcările flotoarelor sunt oscilatorii, dar că ele sunt cuplate. Pentru a afla pulsațiile modurilor normale de oscilație se presupune că soluțiile ecuațiilor de mișcare sunt: $x_1 = A_1 \sin \omega t$, (5)1 respectiv $x_2 = A_2 \sin \omega t$, (5)2 Înlocuind (5) în (4) se obține sistemul de ecuații algebrice $\begin{cases} \left(m\omega^2 - \rho g s \frac{S-s}{S-2s}\right)x_1 - \rho g s \frac{s}{S-2s} x_2 = 0 \\ -\rho g s \frac{s}{S-2s} x_1 + \left(m\omega^2 - \rho g s \frac{S-s}{S-2s}\right)x_2 = 0 \end{cases}$ (6) Eliminând una dintre variabile și punând condiția ca ele să fie nenule, se obține condiția $\left(m\omega^2 - \rho g s \frac{S-s}{S-2s}\right)^2 - \left(\rho g s \frac{s}{S-2s}\right)^2 = 0$, ale cărei soluții sunt: $\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{\rho g s}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{\rho g s}{m} \frac{S}{S-2s}} \end{cases}$. (7) Introducând ω_1 din (7) în prima ecuație (6), rezultă $x_1 = -x_2$, adică oscilațiile flotoarelor sunt antisimetrice. Procedând la fel și pentru ω_2, se găsește că $x_1 = x_2$, adică oscilațiile flotoarelor sunt simetrice în acest caz.	1p 1p 0,5p 0,5p	**3p**
c. Din (7) se observă că $\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - 2\frac{s}{S}}}$, *Varianta 1.* Cele două flotoare vor avea un singur mod de oscilație dacă $s << S$ (vasul este foarte larg în comparație cu aria secțiunii transversale a flotoarelor). *Varianta 2.* Condiția ca ω_1 sau ω_2 să tindă la infinit. Singura variantă posibilă este ω_2 să tindă la infinit, adică S=2s. Observaţie! Se va acorda punctaj integral pentru oricare din cele două variante abordate în rezolvare.	1p	**1p**
d. Din (2) se obține că: $y = -\frac{s}{S-2s}(x_1 + x_2)$. Adunând ecuațiile (4) membru cu membru, rezultă: $m(a_1 + a_2) = -\frac{\rho g S}{S-2s}(x_1 + x_2)$, a cărei soluție este $x_1 + x_2 = A\sin(\omega_2 t + \varphi)$	0,5p 0,5p	**2p**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

Amplitudinea A și faza inițială φ se obțin din condițiile inițiale pentru deplasări și viteze: $\begin{cases} x_{10}+x_{20}=A\sin\varphi \\ 0=\omega_1 A\cos\varphi \end{cases}$, adică $\begin{cases} \varphi=\dfrac{\pi}{2} \\ A=x_{10}+x_{20} \end{cases}$. Prin urmare $x_1+x_2=(x_{10}+x_{20})\cos(\omega_2 t)$ adică $y(t)=-\dfrac{s}{S-2s}(x_{10}+x_{20})\cos\sqrt{\dfrac{\rho g s}{m}\dfrac{S}{S-2s}}\cdot t$	0,25p 0,25p 0,5p	
Oficiu		**1p**

Soluţii propuse de
Prof. Florina Bărbulescu *CNEE, Bucureşti*
Prof. dr. Mihail Sandu, Călimănești
Prof. Ion Toma*, C.N. Mihai Viteazul Bucuresti*

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporţional cu conţinutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.