
Derivadas

1 Definición. Reglas de derivación

Ejercicio 1. Calcula la tangente de las siguientes curvas en los puntos dados:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ en el origen

c) $y = x^2 + 1$ en $(3, 10)$

b) $y = \cos(x)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$

d) $y = |x|$ en $(1, 1)$

Solución 1.

a) $y'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \implies y'(0) = 1$ con lo que la recta tangente en el origen es $y = x$.

b) $y'(x) = -\operatorname{sen}(x) \implies y'(\frac{\pi}{2}) = -1$ y la recta tangente que se pide es $y = -(x - \frac{\pi}{2})$.

c) $y'(x) = 2x \implies y'(3) = 6$. y la recta tangente es $y = 10 + 6(x - 3)$.

d) $y'(x) = 1$ en \mathbb{R}^+ y, por tanto, $y'(1) = 1$, y la recta tangente que se pide es $y = x$.

Ejercicio 2. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}(x + 3)$

e) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

b) $y = \cos^2(x)$

f) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

c) $y = \frac{1}{\cos(x)}$

d) $y = \sec(x)$

Solución 2.

a) $y'(x) = \cos(x + 3)$.

b) $y'(x) = -2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$.

c) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

d) $y'(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$.

e) $y'(x) = \sqrt{\frac{1}{(1-x)^3(1+x)}}$.

f) $y'(x) = \frac{2}{3}x(x^2 + 1)^{-2/3}$.

Ejercicio 3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.
 b) $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$.
 c) $f(x) = x^4 e^x \log(x)$.
 d) $f(x) = x^x$.
 e) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.
 f) $f(x) = \frac{1}{2}x |x|$.

Solución 3.

- a) $f'(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^4 \left(x^{-4/5} + x^{-6/5}\right)$.
 b) $f'(x) = -\sin(\cos(\cos(x))) \sin(\cos(x)) \sin(x)$.
 c) $f'(x) = 4x^3 e^x \log(x) + x^4 e^x \log(x) + x^3 e^x$.
 d) $f'(x) = x^x (\log(x) + 1)$.
 e) $f'(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} \log(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.
 f) $f'(x) = |x|$.

Ejercicio 4. Comprueba que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

es continua pero no es derivable en el origen.

Solución 4. Es inmediato comprobar que la función es continua y que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$$

Por tanto, la función no es derivable en el origen.

Ejercicio 5. Calcula los puntos donde la recta tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ es paralela al eje OX .

Solución 5. Buscamos dónde se anula la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2, -1.$$

Ejercicio 6. Sea $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - \sin(x)) - 2 \log(\cos(x))}{\sin(x)},$$

si $x \neq 0$ y $f(0) = a$. Estudia para qué valor de a la función f es continua en cero.

Solución 6. Calculamos el límite de f en el cero aplicando la regla de L'Hôpital y nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\cos(x)}{1-\sin(x)} + \frac{2\sin(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)} = -1.$$

Por tanto, f es continua en cero si, y sólo si, $a = -1$.

E Ejercicio 7. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right), & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\log(x)}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Calcula la imagen de la función.

Solución 7. La función f es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Para estudiar la continuidad y derivabilidad en 0 y 1, utilizamos límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan\left(\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) = \arctan(0) = 0, \quad y \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x^2+1} = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, f es continua en cero. Veamos en 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^2+1} = 1, \quad y \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 + \frac{\log(x)}{x} = 1. \end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en toda la recta real.

La derivada, salvo en 0 y 1, vale

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^3}}{1 + \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}, & \text{si } x < 0, \\ \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \frac{1-\log(x)}{x^2}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Las derivadas laterales en 0 son

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{2}{x^3}}{1 + \exp\left(\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2} = 0, \quad y \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 2, \end{aligned}$$

que no coinciden y, por tanto, f no es derivable en 0. En 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0, \quad y$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \log(x)}{x^2} = 1.$$

Por tanto f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Para terminar el problema vamos a calcular la imagen de f . Como

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 0]) \cup f([0, 1]) \cup f([1, +\infty[),$$

calculamos la imagen de cada una de estos tres intervalos por separado

a) En \mathbb{R}^- , $f'(x) < 0$ y, por tanto, $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [0, \frac{\pi}{4}[$.

b) En $]0, 1[$, la derivada es positiva: $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$.

c) Por último, en $[1, +\infty[$, $f'(x) = 0 \iff x = e$. Evaluando la derivada, es muy sencillo comprobar que f es creciente en $[1, e]$ y decreciente en $[e, +\infty[$. Por tanto,

$$f([1, +\infty[) = [f(1), f(e)] \cup \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right].$$

Uniando todos los resultados anteriores, la imagen de f es $f(\mathbb{R}) = [0, 1 + \frac{1}{e}]$.

2 Teorema del valor medio

Ejercicio 8. Prueba que $\arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

Solución 8. Sea $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsen(x) + \arccos(x)$. Como f es derivable en $] -1, 1[$ y además $f'(x) = 0$, $\forall x \in] -1, 1[$ tenemos que f es constante en el intervalo $] -1, 1[$. Si evaluamos la función en el cero, obtenemos $f(x) = \frac{\pi}{2}$, para todo $x \in] -1, 1[$. Utilizando la continuidad de f en todo $[-1, 1]$, se deduce que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo cerrado.

Ejercicio 9. Demuestra que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) < x$$

para cualquier x positivo.

Solución 9. Este ejercicio se puede hacer de varias formas. Vamos a hacerlo de dos maneras. En primer lugar aplicaremos directamente el teorema del valor medio y acotaremos la derivada. Para la segunda manera, demostraremos cada una de las desigualdades por separado.

a) Sea x un número positivo fijo y consideremos la función $f: [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(t) = \arctan(t)$. El teorema del valor medio nos dice que existe $c \in [0, x]$

verificando que $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$, o sea, $\arctan(x) = \frac{x}{1+c^2}$. Ahora acotemos

$$\begin{aligned} 0 \leq c \leq x &\iff 0 \leq c^2 \leq x^2 \\ &\iff 1 \leq 1 + c^2 \leq 1 + x^2 \\ &\iff \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+c^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x) = \frac{x}{1+c^2} < x.$$

b) Vamos a comprobar cada desigualdad por separado.

i) Para demostrar que $\frac{x}{1+x^2} < \arctan(x)$ para cualquier $x > 0$, vamos a estudiar la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$. Esta función es derivable y

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

y, por tanto, f es estrictamente creciente. En particular $f(x) > \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

ii) Similar al apartado anterior, pero estudia la función $f(x) = x - \arctan(x)$.

E Ejercicio 10. Calcula el número de soluciones de la ecuación $x + e^{-x} = 2$.

Solución 10. Para determinar el número de soluciones de la ecuación que nos plantean, vamos a determinar el número de ceros de la función

$$f(x) = x + e^{-x} - 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se trata de una función derivable en todo \mathbb{R} por ser suma de funciones derivables y su derivada es:

$$f'(x) = 1 - e^{-x}.$$

Observamos que la derivada únicamente se anula en un punto ($1 - e^{-x} = 0 \iff 1 = e^{-x} \iff x = 0$). Utilizando entonces el Teorema de Rolle, si f' sólo tiene un cero, la función f puede tener, como mucho, dos ceros (si tuviera tres ceros, la derivada se tendría que anular en dos puntos, y ése no es el caso). Vamos a comprobar si efectivamente tiene dos ceros.

El punto $x = 0$ es el único punto crítico que tiene f . Calculamos la derivada segunda en dicho punto para decidir si es máximo o mínimo relativo:

$$f''(x) = e^{-x} \implies f''(0) = 1 > 0.$$

Por tanto, en cero la función f alcanza un mínimo relativo, y por tratarse de el único punto de extremo que hemos encontrado, es también su mínimo absoluto. Además, como el comportamiento de f en los extremos de \mathbb{R} es de divergencia a $+\infty$ y $f(0) = -1 < 0$, concluimos, aplicando ahora el Teorema de Bolzano que: existe un punto $x_1 < 0$ donde $f(x_1) = 0$ y, existe otro punto $x_2 > 0$ donde $f(x_2) = 0$. Por tanto, la función f admite dos ceros y, en consecuencia, la ecuación planteada admite dos soluciones reales.

Ejercicio 11. Calcula el número de ceros y la imagen de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

Solución 11. Consideramos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$. Calculamos los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = 6x^5 - 6x = 6x(x^4 - 1) = 0 \iff x = -1, 0, 1.$$

Además tenemos que en -1 y en 1 hay dos ceros de f ($f(-1) = f(1) = 0$). Si hubiera algún cero más, por el teorema de Rolle habría más de tres puntos críticos de la función. Por tanto, la función f tiene solamente dos ceros.

E **Ejercicio 12.** Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x).$$

Calcula su imagen.

Solución 12. La función a la que tenemos que calcularle la imagen es una función continua. Si estuviera definida en un intervalo el teorema del valor intermedio nos diría que su imagen es un intervalo; sin embargo $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ no es un intervalo. Sí es cierto que está formado por dos intervalos, $]-\infty, -1[$ y $]-1, +\infty[$, así que la imagen de la función, restringida a cada uno de los intervalos $]-\infty, -1[$ y $]-1, +\infty[$ tiene que ser un intervalo. Por otra parte la función, en cada uno de los dos intervalos anteriores, es derivable así que para calcular la imagen vamos a estudiar la derivada. Esto sabemos que nos da información sobre crecimiento, extremos relativos, etc.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{-2}{2+2x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

y la función es constante (en cada uno de los intervalos donde está definida).

Para conocer las dos constantes basta entonces con evaluar en un punto de cada uno de los intervalos. En el intervalo $]-1, +\infty[$ no hay ningún problema ya que fácilmente $f(0) = \arctan(1) + \arctan(0) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$. En el otro intervalo no parece tan fácil ya que no se ve un número en $]-\infty, -1[$ en el que sea fácil evaluar la función. En

este caso lo que podemos hacer es calcular el límite de la función, o bien en $-\infty$ o bien en -1 por la izquierda. Por ejemplo en $-\infty$ tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x) = \arctan(-1) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}.$$

Así que la imagen es el conjunto $\left\{-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

Ejercicio 13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- Encuentra las condiciones que deben verificar los parámetros para que f alcance un máximo y un mínimo relativo.
- Si se verifica el enunciado anterior, demuestra que en el punto medio del segmento que une los puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo relativo se alcanza un punto de inflexión.

Solución 13.

- La derivada de la función f es $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dicha derivada se anula en dos puntos si, y sólo si, $4b^2 - 12ac > 0$ y, efectivamente, estamos ante un polinomio de segundo grado, esto es, $a \neq 0$.
- Olvidemos por un momento el enunciado concreto del problema y pensemos lo que tenemos y lo que queremos demostrar. La derivada de f es un polinomio de grado dos (una parábola); el máximo y el mínimo relativos de f se alcanzan en los puntos de corte de la parábola con el eje OX , esto es, en los puntos que anulan a la derivada y queremos demostrar que en el punto medio la segunda derivada de f vale cero. Para simplificar (esperemos) la notación, sean α y β los puntos donde se alcanza dichos extremos. Entonces $f'(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$ para conveniente constante $k \neq 0$. Para terminar es suficiente con calcular la segunda derivada en el punto medio:

$$f''(x) = k(2x - (\alpha + \beta)) \implies f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0.$$

E **Ejercicio 14.** Calcula la imagen de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}(x^2 - 3)$.

Solución 14. La función f es continua y derivable en toda la recta real. Para estudiar su monotonía, calculamos la derivada y vemos cuándo se anula

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} - (x^2 - 3)2xe^{-x^2} \\ &= e^{-x^2}2x(4 - x^2) = 0 \iff x = 0, \pm 2. \end{aligned}$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en los intervalos $]-\infty, -2]$, $[-2, 0]$, $[0, 2]$, $[2, +\infty[$. Para averiguar qué tipo de monotonía tenemos podemos evaluar la derivada en un punto de cada uno de dichos intervalos

intervalo	x	signo de $f'(x)$	monotonía de f
$] -\infty, 0 - 2]$	-5	+	estrictamente creciente
$[-2, 0]$	-1	-	estrictamente decreciente
$[0, 2]$	1	+	estrictamente creciente
$[2, +\infty[$	5	-	estrictamente decreciente

De modo que su imagen es

$$\begin{aligned}
 f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty, -2]) \cup f([-2, 0]) \cup f([0, 2]) \cup f([2, +\infty[) \\
 &= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-2) \right] \cup [f(0), f(-2)] \cup [f(0), f(2)] \cup \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2) \right] \\
 &=]0, e^{-4}] \cup [-3, e^{-4}] = [-3, e^{-4}]
 \end{aligned}$$

usando que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, que $f(0) = -3$ y que $f(2) = f(-2) = e^{-4}$.

Observación: Podíamos habernos ahorrado algunos cálculos utilizando que la función f es par y, por tanto, $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+)$.

Ejercicio 15. Sea $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Estudia la continuidad de f y los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

b) Calcula la imagen de f .

Solución 15. La función es derivable por ser composición de funciones derivables. Vamos a calcular los límites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Para calcular su imagen en primer lugar estudiamos la monotonía. Como la función arcotangente es creciente, sólo tenemos que fijarnos en $\frac{1+x}{1-x}$ y

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Esto nos dice que f es estrictamente creciente *si estamos en un intervalo*. En otras palabras, f es estrictamente creciente en $] -\infty, 1[$ y en $]1, +\infty[$. Su imagen será

$$f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = f(]-\infty, 1]) \cup f([1, +\infty[) = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[= \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ejercicio 16. Calcula la imagen de $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

Solución 16. Esta función es continua y derivable en todo \mathbb{R}^+ . Calculamos su derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{x} x^{1/x-1} - \frac{1}{x^2} x^{1/x} \log(x) = x^{1/x-2} (1 - \log(x)).$$

Por tanto $f'(x) = 0 \iff x = e$. En este punto se tiene un punto de máximo relativo (la función pasa de creciente en el intervalo $]0, e[$ a ser decreciente en $]e, +\infty[$). Calculando los límites en los extremos del dominio ($\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$) se deduce que como $f(e) = e^{1/e} > 1$, la imagen de la función es $f(\mathbb{R}^+) =]0, e^{1/e}]$.

Ejercicio 17. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Demuestra que la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real única.

Solución 17. Definimos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se trata de una función polinómica de grado impar luego, por el teorema de Bolzano, sabemos que al menos se anula en un punto de la recta real. Estudiamos la derivada para deducir la unicidad de la solución de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando el teorema de Rolle.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \iff x = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 12b}}{6}.$$

Teniendo en cuenta que $a^2 < 3b \implies 4a^2 - 12b < 0$; se tiene que la derivada no se anula en ningún punto real, por lo que la solución de la ecuación $f(x) = 0$ que teníamos es única ya que la función es estrictamente creciente.

3 Reglas de L'Hôpital

Ejercicio 18. Calcula los siguientes límites:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 4} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \end{array}$$

Solución 18.

a) Usando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} = \frac{1}{6} \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 4} = \frac{1}{6}.$$

b) Aplicamos las reglas de L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(3x)}{1} = 3 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3x)}{x} = 3$.

c) Usamos las reglas de L'Hôpital. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{-\text{sen}(x)} = -2 \implies \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x - \pi}{\cos(x)} = -2$.

d) Aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cos(x) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 19. Calcula los siguientes límites

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x} & \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(2x)} & \end{array}$$

Solución 19.

a) Aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 3}{2} = \frac{3}{2} \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) + 3x - 1}{2x} = \frac{3}{2}.$$

b) Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, por tanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1$, con lo que si multiplicamos y dividimos por $2x$ nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x \sin(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{2x^2} \quad (\text{aplicamos la regla de L'Hôpital}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin(x)}{4x} \quad (\text{regla de L'Hôpital de nuevo}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos(x)}{4} = 1. \end{aligned}$$

c) Usamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1/x}{\log(x)}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\log(x)} = 0.$$

Ejercicio 20. Calcula los límites de las siguientes funciones en el punto indicado:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \sin(3x))^{\frac{1}{x}} & \text{d)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \sin(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} & \\ \text{c)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \cos(x)} & \end{array}$$

Solución 20.

a) Utilizamos la regla del número e y estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) + 2 \sin(3x) - 1}{x} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación la resolvemos utilizando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(x) + 6 \cos(3x)}{1} = 6,$$

con lo que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) + 2 \operatorname{sen}(3x))^{\frac{1}{x}} = e^6$.

b) Usando que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 1$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(1 - \cos(x))}{x^3} \cdot \frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{2}(1 - \cos(x))}{x^2}. \end{aligned}$$

Este último límite se resuelve aplicando la primera regla de L'Hôpital y se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x)) \operatorname{sen}(4x)}{x^3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = 2\sqrt{2}.$$

c) Si aplicamos la regla de L'Hôpital, llegamos al límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}$ que no existe y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite original. En cambio, dividiendo numerador y denominador por x se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 - \frac{\cos(x)}{x}} = 1,$$

usando que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$.

d) Estamos ante una indeterminación del tipo " 1^∞ ". Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \right) = L.$$

Calculemos el límite de la derecha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \end{aligned}$$

y, como $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 1} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Para resolver este último límite aplicamos la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{-\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

y por tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) - 1\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \implies \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{-1}.$$

Ejercicio 21. Estudia el comportamiento de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a) $A =]2, +\infty[, f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}, \alpha = 2.$

b) $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1}, \alpha = 1.$

c) $A =]1, +\infty[, f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - \log(x)}, \alpha = 1.$

Solución 21.

a) Aplicando la primera regla de L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x^2-4}}{2x\sqrt{x}(x-2)}$$

simplificando el factor $\sqrt{x-2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x})\sqrt{x+2}}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}.$

b) Como $f(x) = \frac{1}{\log(x)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\log(x)}{(x-1)\log(x)}$, si aplicamos L'Hôpital nos queda

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x \log(x) + x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \log(x) + x - 1}.$$

Volviendo a aplicar L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log(x)+2} = \frac{1}{2}$. Por tanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}.$

c) Aplicamos L'Hôpital y nos queda $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x(1+\log(x))-1}{-1-1/x} = 0$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

Ejercicio 22. Estudia el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f, g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a) $f(x) = \frac{\log(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}},$

b) $g(x) = (a^x + x)^{1/x}$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Solución 22.

a) Para estudiar el límite de f en $+\infty$ aplicamos la segunda regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{2+3e^x} \frac{\sqrt{2+3x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Por tanto el límite de f es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Vamos a calcular ahora el límite en $+\infty$ de la función g . Para ello, aplicamos logaritmos y estudiamos la función $h(x) = \frac{\log(a^x+x)}{x}$. Discutimos en función del parámetro a :

i) Si $a = 1$, entonces $h(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$, y aplicando L'Hôpital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

ii) Si $a > 1$, utilizando la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x \log(a) + 1}{a^x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(a) + 1/a^x}{1 + x/a^x} = \log(a).$$

Por tanto, en este caso $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e^{\log(a)} = a$.

iii) En el caso en que $a < 1$, repetimos los cálculos del caso anterior, pero teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ y por tanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e^0 = 1$.

Ejercicio 23. Estudia el comportamiento en el punto cero de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

- a) $A = \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{x}}$, c) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \left(\cos(x) + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
b) $A =]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = (\sin(x) + \cos(x))^{1/x}$

Solución 23.

a) Aplicamos L'Hôpital y obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \sin(x) = 0$$

b) Teniendo en cuenta la regla del número e , $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \cos(x) - 1}{x} = L$. Por tanto, y aplicando L'Hôpital a la última expresión,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) - \sin(x)) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e.$$

c) Razonando igual que en el caso anterior

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x) + x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{2x} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Luego $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = e^0 = 1$.

E **Ejercicio 24.** Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}}$.

Solución 24. Calculamos a qué tiende la base aplicando la primera regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(x) - 3 \cos(x) + 3x \sin(x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Dado que tenemos una indeterminación del tipo “ 1^∞ ”, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} - 1 \right) = L.$$

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x) - x^3}{x^4}$$

aplicando la 1ª regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x) - 3x}{4x^2}$$

aplicamos la primera regla de L'Hôpital de nuevo

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos(x) - 3}{8x}$$

una última vez...

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin(x)}{8} = 0$$

con lo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \sin(x) - 3x \cos(x)}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

4 Optimización

Ejercicio 25. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones indicando los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

a) $y = 6 - 2x - x^2$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$ c) $y = (x - 1)^3$

Solución 25.

- a) La función alcanza su máximo absoluto en $x = -1$ y no tiene puntos de inflexión.
- b) La función alcanza su mínimo en $x = 1$ y puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 24/36$.
- c) No tiene extremos y tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

Ejercicio 26. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 20 y su producto sea máximo.

Solución 26. Sean x e y dichos números. Entonces $x + y = 20$. Como $y = 20 - x$, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = x(20 - x)$. Derivamos y calculamos sus puntos críticos:

$$f'(x) = 20 - 2x = 0 \iff x = 10.$$

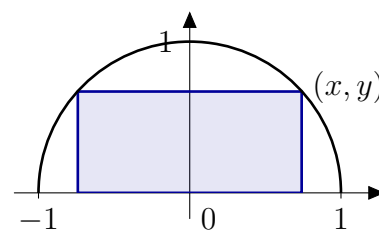
Puesto que $f''(x) = -2$, la función tiene su máximo en $x = 10$ y los dos números que estábamos buscando son 10 y 10.

Ejercicio 27. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio r .

Solución 27.

Salvo multiplicar por 4, podemos trabajar en el primer cuadrante. Tenemos que maximizar la función $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x\sqrt{r^2 - x^2}$. Los puntos críticos son

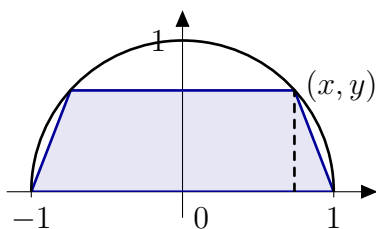
$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \iff r^2 - 2x^2 = 0 \\ &\iff x = \frac{r}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Es inmediato comprobar que en dicho punto la función alcanza el máximo.

E Ejercicio 28. Calcula las dimensiones del trapecio con mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio 1.

Solución 28.



Vamos a escribir el área que queremos que sea máxima como una función de una variable. Hay varias posibilidades de hacerlo aunque el resultado, evidentemente, tiene que ser el mismo.

El área del trapecio será la media aritmética de la base mayor M y la base menor m multiplicado por la altura h ; $A = \frac{M+m}{2}h$. Si llamamos (x, y) al vértice del trapecio que se aprecia en el dibujo tendremos que

$$A = \frac{2 + 2x}{2}y = (1 + x)y.$$

Si no se recuerda el área del trapecio siempre puede hacerse sumando el área del rectángulo central y los dos triángulos simétricos que quedan a los lados. Esta función anterior depende de dos variables pero es claro que el punto (x, y) está en la circunferencia de radio 1 y por tanto $x^2 + y^2 = 1$ de donde $y = \sqrt{1 - x^2}$ con lo que la función a considerar es $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$. Esta función es continua en el intervalo de definición y por tanto alcanza máximo y mínimo absoluto. Además es claro que el mínimo se alcanza cuando $x = 1$, que el área vale 0. Para calcular el máximo vamos a calcular los puntos críticos (obsérvese que la función no es derivable en 0).

$$f'(x) = \sqrt{1 - x^2} + (1 + x) \frac{(-x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall x \in [0, 1[.$$

Y $f'(x) = 0 \iff 2x^2 + x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ o $x = -1$. Evidentemente el valor que nos interesa es $x = \frac{1}{2}$. Además si $0 < x < 1/2$ se tiene que $f'(x) > 0$ y si $1/2 < x \leq 1$ $f'(x) < 0$ con lo que f alcanza máximo (relativo y absoluto) en $x = 1/2$ (entonces la altura será $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$) y el área máxima es $f(1/2) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

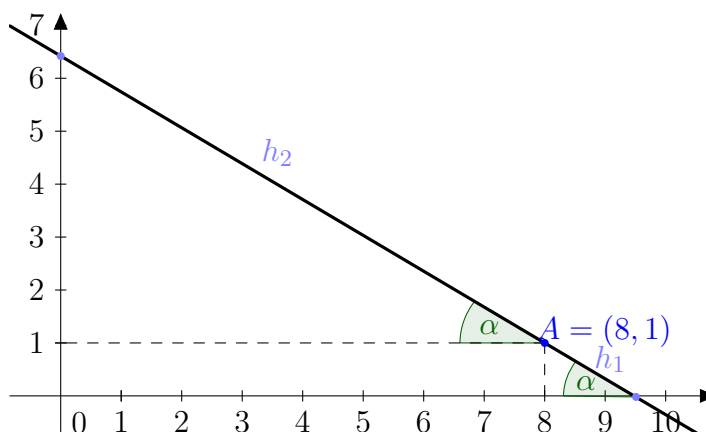
Ejercicio 29. ¿Cuál es la longitud mínima del segmento que tiene un extremo en el eje x , otro extremo en el eje y , y pasa por el punto $(8, 1)$?

Solución 29. Consideramos el triángulo rectángulo formado por una recta que pase por $(8, 1)$ y corte a los ejes OX y OY , y llamamos α al ángulo que forma la hipotenusa con el eje OX . Haciendo uso de las funciones coseno y seno tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{1}{h_1} \implies h_1 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} \\ \cos(\alpha) &= \frac{8}{h_2} \implies h_2 = \frac{8}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

La función que queremos optimizar es $f(\alpha) = h_1 + h_2 = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} + \frac{8}{\cos(\alpha)}$, con $\alpha \in]0, \pi/2[$.

Vamos a calcular los puntos críticos de la función f :



$$f'(\alpha) = -\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \frac{8 \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{8 \sin^3(\alpha) - \cos^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha) \cos^2(\alpha)}$$

y esta función se anula siempre y cuando $8 \sin^3(\alpha) - \cos^3(\alpha) = 0$, es decir $8 \sin^3(\alpha) = \cos^3(\alpha)$. De aquí deducimos que

$$\tan^3(\alpha) = \frac{1}{8} \iff \tan(\alpha) = \frac{1}{2} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por la monotonía creciente de la función tangente podemos deducir que la derivada $f'(\alpha) < 0$ cuando $0 < \alpha < \arctan(\frac{1}{2})$, y $f'(\alpha) > 0$ cuando $\arctan(\frac{1}{2}) < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Por tanto, en el punto $\arctan(\frac{1}{2})$ tenemos que la función alcanza un mínimo relativo que, por ser el único punto crítico es también el mínimo absoluto. Entonces, el segmento de longitud mínima que nos piden es:

$$f\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 8\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = 5\sqrt{5},$$

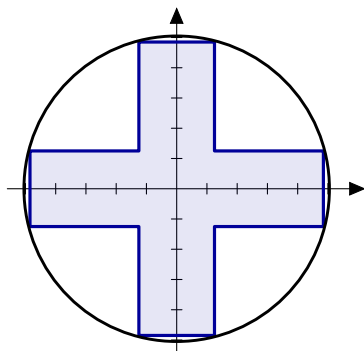
donde hemos utilizado que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \implies \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin(\alpha) &= \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}} \implies \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Ejercicio 30. Demuestra que la suma de un número positivo y su recíproco es al menos 2.

Solución 30. Tenemos que demostrar que la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x + \frac{1}{x}$ verifica que $f(x) \geq 2$, para todo $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Calculemos su imagen. f es una función derivable y $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$. Por tanto $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 1$. Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f alcanza su mínimo absoluto en $x = 1$, o lo que es lo mismo $f(x) \geq f(1) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ como queríamos demostrar.

E



Ejercicio 31. Calcula las dimensiones de la cruz simétrica respecto de los ejes y con área máxima que se puede inscribir en una circunferencia de radio 1.

Solución 31. Utilizando la simetría de la cruz respecto de los ejes y llamando (x, y) al vértice de la cruz que se apoya sobre ella, la función área sería cuatro veces la que escribimos a continuación:

$$xy + x(y - x)$$

y, considerando que (x, y) está en la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, se tiene que $x^2 + y^2 = 1$. Por tanto, la función que vamos a maximizar es:

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} + x(\sqrt{1-x^2} - x) = 2x\sqrt{1-x^2} - x^2, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Se trata de una función continua en $[0, 1]$ y derivable en $]0, 1[$. Está claro que el máximo no lo puede alcanzar en los extremos ($f(0) = 0$, $f(1) = -1$); por tanto, lo vamos a encontrar en el intervalo abierto $]0, 1[$ sin más que encontrar los puntos críticos de f .

Calculamos la derivada de f y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 2 \left(\frac{1 - 2x^2 - x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Por tanto, la derivada de f se anula siempre y cuando se verifique:

$$1 - 2x^2 = x\sqrt{1-x^2} \implies 5x^4 - 5x^2 + 1 = 0 \implies x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}} \text{ ó } x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

Evalutando la función f en ambos puntos críticos, obtenemos que las dimensiones de la cruz así construida de área máxima son:

$$x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}} \text{ e } y = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

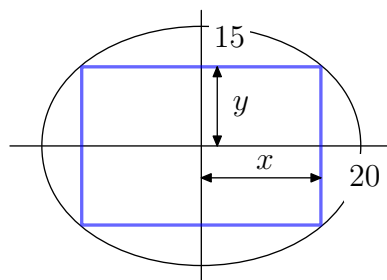
Ejercicio 32. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Halla las dimensiones del rectángulo para que

- a) el área sea máxima,
- b) el perímetro sea máximo.

Solución 32.

En cualquiera de los dos casos, la simetría nos permite trabajar en el primer cuadrante. En ambos casos usaremos que, utilizando la notación de la figura,

$$\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{225} = 1 \implies y = \frac{15}{20} \sqrt{400 - x^2}.$$



- a) El área que queremos maximizar es $4xy$, por tanto vamos a estudiar la función $f: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{15}{20} x \sqrt{400 - x^2}.$$

Si derivamos,

$$f'(x) = \frac{15}{20} \sqrt{400 - x^2} - \frac{15}{20} \frac{x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \iff 400 = 2x^2 \iff x = \sqrt{200}.$$

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su máximo y mínimo absolutos. Los posibles candidatos son 0 , 20 y $\sqrt{200}$. Es suficiente con comprobar que $f(\sqrt{200}) > f(0)$, $f(20)$ para asegurar que el máximo se alcanza en $\sqrt{200}$.

- b) El perímetro es $4(x + y)$. La función a maximizar es $f: [0, 20] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x + \frac{15}{20} \sqrt{400 - x^2},$$

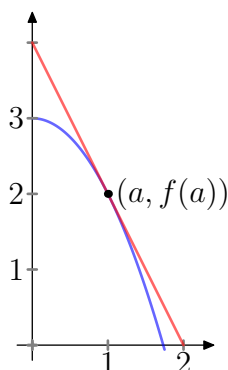
o sea, $x + y$. Veamos cuándo se anula la derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{15}{20} \frac{x}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \iff x = \frac{400}{\sqrt{400 + 225}}.$$

Como f es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su máximo y mínimo absolutos. Los posibles candidatos son 0 , 20 y $\frac{400}{\sqrt{400+225}}$. Es suficiente con comprobar que $f\left(\frac{400}{\sqrt{400+225}}\right) > f(0)$, $f(20)$ para asegurar que el máximo se alcanza en $\frac{400}{\sqrt{400+225}}$.

- E Ejercicio 33.** Calcula el punto (a, b) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la recta tangente a la parábola en dicho punto y los ejes de coordenadas tenga área mínima.

Solución 33. Para poder calcular el triángulo de área mínima que genera la tangente a la parábola $y = 3 - x^2$ y los ejes tenemos que, en primer lugar, calcular la recta tangente en un punto a que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es positivo. La recta tangente que pasa por el punto $(a, f(a))$ es $y - (3 - a^2) = -2a(x - a)$.



Los puntos de corte con los ejes son:

a) Si $x = 0$, entonces $y = a^2 + 3$, y

b) si $y = 0$, entonces $x = \frac{a^2+3}{2a}$.

Por tanto, la función a la que tenemos que calcularle el mínimo es, en función del punto a ,

$$f(a) = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{(a^2 + 3)^2}{4a},$$

con $a \in]0, \sqrt{3}]$. Su derivada vale

$$f'(a) = \frac{3a^4 + 6a^2 - 9}{4a^2} = 0 \iff a^4 + 2a^2 - 3 = 0.$$

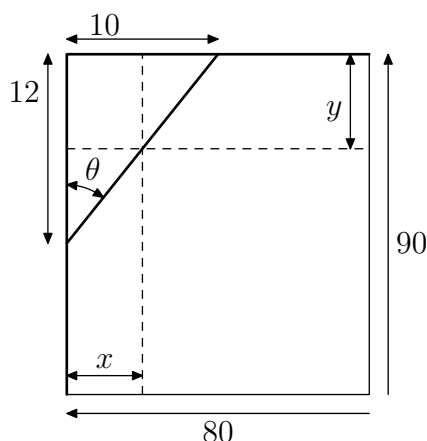
Resolvemos este polinomio bicuadrático mediante el cambio usual $a^2 = 1$ y obtenemos que la única solución positiva es $a = 1$. ¿Es aquí donde f alcanza su mínimo absoluto? Observa que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

y que, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, 1]$. En cambio, como $f'(\sqrt{3}) > 0$, f es estrictamente creciente en $[1, \sqrt{3}]$. En consecuencia, f alcanza su mínimo absoluto en $a = 1$.

E Ejercicio 34. A un espejo rectangular de medidas 80x90 cm. se le rompe (accidentalmente) por una esquina un triángulo de lados 10x12cm. Calcula las medidas del espejo de mayor área de forma rectangular que se puede obtener de la pieza restante.

Solución 34.



El área del trozo de espejo que queremos maximizar es $(80 - x)(90 - y)$. Podemos relacionar x e y la tangente del ángulo θ :

$$\frac{x}{12 - y} = \frac{10}{12} \implies y = 12 - \frac{6}{5}x$$

Por tanto, tenemos que buscar el máximo de la función $f(x) = (80 - x)(78 + \frac{6}{5}x)$ con $x \in [0, 10]$. Calculamos los puntos críticos:

$$f'(x) = -78 + \frac{6}{5}x + \frac{6}{5}(80 - x) = -\frac{12}{5}x + 18 = 0 \iff x = \frac{15}{2}.$$

Como $f''(\frac{15}{2}) = -\frac{12}{5} < 0$, la función alcanza un máximo relativo en dicho punto. El máximo absoluto se alcanza en este punto, en $x = 0$ o en $x = 10$. Como

$$f(0) = 6240, \quad f\left(\frac{15}{2}\right) = 6307.5 \text{ y } f(10) = 6300$$

el máximo absoluto se alcanza en $x = \frac{15}{2}$.

5 Polinomio de Taylor

Ejercicio 35. Expresar el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $(x - 2)$.

Solución 35. Vamos a calcular el polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $a = 2$ de $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \implies & f(2) &= -16, \\ f'(x) &= 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7 \implies & f'(2) &= -33, \\ f''(x) &= 12x^2 - 30x - 6 \implies & f''(2) &= -18, \\ f'''(x) &= 24x - 30 \implies & f'''(2) &= 18, \\ f^{(4)}(x) &= 24 \implies & f^{(4)}(2) &= 24. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\ &= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + (x-2)^4. \end{aligned}$$

Ejercicio 36. Calcular un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:

a) $\alpha = \sqrt{e}$,

b) $\alpha = \sin\left(\frac{1}{2}\right)$.

Solución 36.

a) Consideramos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Lo que se nos pide es el valor aproximado de $f(1/2)$ con un error menor que 10^{-2} . Aplicando el teorema de Taylor en el punto cero, sabemos que existe $c \in]0, 1/2[$ verificando

$$f(1/2) = 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \cdots + \frac{1}{2^n n!} + R_n(1/2)$$

donde $R_n(x)$ representa el resto de Taylor de la función exponencial de orden n , y por tanto

$$R_n(1/2) = \frac{e^c}{2^{n+1} (n+1)!}.$$

Entonces, sólo nos queda encontrar el n suficiente para que $|R_n(1/2)|$ sea menor que 10^{-2} . Como $e < 3$ y $c < 1/2$, entonces $e^c < 2$. Luego, si encontramos el natural suficiente para que

$$\frac{1}{2^n (n+1)!} < 10^{-2} \iff 2^n (n+1)! > 100$$

y para ello basta que $n \geq 3$.

El valor aproximado que se nos pide es: $\sqrt{e} \sim 1 + 1/2 + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} = 1,6458$.

- b) Repetimos el ejercicio anterior, pero ahora la función es $f(x) = \text{sen}(x)$, la desarrollamos en torno al cero, y calculamos su valor aproximado en $x = 1/2$. Como el desarrollo de Taylor de la función seno en el cero es

$$\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + R_n(x)$$

donde $R_n(x) = \text{sen}\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, al ser la función seno una función acotada en valor absoluto por 1, sólo tenemos que exigir que

$$|R_n(1/2)| < \frac{1}{2^{n+1} (n+1)!} < 10^{-2} \iff 100 < 2^{n+1} (n+1)! \iff n \geq 3.$$

Por tanto, el valor aproximado que se nos pide es $\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 3!} = 0.479$.

Ejercicio 37. Utilizar el polinomio de Taylor para calcular $\sqrt{102}$ con un error menor que 10^{-2} .

Solución 37. Para calcular $\sqrt{102}$ vamos a desarrollar la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 100$. Comencemos calculando derivadas de f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}x^{-3/2}, \\ f'''(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}x^{-5/2}, \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}x^{-7/2} \end{aligned}$$

En general,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}.$$

El error es

$$R_n(102) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (102 - 100)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) c^{-(2n+1)/2}}{2^{n+1} (n+1)!} 2^{n+1}, \quad (1)$$

donde $c \in [100, 102]$. La función $g(x) = x^{-(2n+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{x^{2n+1}}}$ es decreciente y, por tanto, su valor máximo en el intervalo $[100, 102]$ lo alcanza en 100. Sustituimos en la ecuación 1 y obtenemos que

$$|R_n(102)| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(n+1)! 10^{2n+1}}.$$

Para $n = 1$, $R_1(102) \leq \frac{1}{2 \cdot 10^3}$ es un error suficientemente pequeño. ¿Cuánto vale $\sqrt{102}$?

$$\sqrt{102} \approx P_1(102) = f(100) + f'(100)(102 - 100) = 10 + \frac{1}{10} = 10.1.$$

E Ejercicio 38. Calcula una aproximación de $\cosh(\frac{1}{2})$ con un error menor que 10^{-4} .

Solución 38. Usando el polinomio de Taylor de la función exponencial, es sencillo calcular el polinomio de Taylor de la función coseno hiperbólico. Como

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{-x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + R'_n(x) \end{aligned}$$

siendo $R_n(x)$ y $R'_n(x)$ los correspondientes restos de Taylor para cada una de las funciones. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n + (-1)^n x^n}{2(n!)} + \frac{R_n(x) + R'_n(x)}{2} \end{aligned}$$

Observa que todos los términos con potencia impar son cero.

Para acotar el error, $\frac{1}{2}(R_n(x) + R'_n(x))$, necesitamos acotar el valor de las sucesivas derivadas de la función en el intervalo $[0, 1/2]$. De nuevo, si acotamos e^x y e^{-x} tenemos el trabajo resuelto: como la primera es creciente y la segunda decreciente,

$$|e^x| \leq \sqrt{e} \leq 3 \quad \text{y} \quad |e^{-x}| \leq e^0 = 1, \quad \forall x \in]0, 1/2[.$$

Por tanto, si $c_1 \in]0, 1/2[$ y $c_2 \in]0, 1/2[$,

$$|e^{c_1} - e^{-c_2}| \leq |e^{c_1}| + |e^{-c_2}| \leq 3 + 1 = 4.$$

Pasamos a acotar el error:

$$\left| \frac{R_n(\frac{1}{2}) + R'_n(\frac{1}{2})}{2} \right| = \left| \frac{e^{c_1} - e^{-c_2}}{2(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{4}{2(n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)! 2^n}.$$

Es suficiente con que $(n+1)! 2^n > 10^4$ para que tengamos lo pedido. Se puede comprobar que basta con tomar $n = 5$.

E Ejercicio 39. Sea f una función cuyo polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 es

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en cero de la función $g(x) = xf(x)$.

Solución 39. Recordemos que el polinomio de grado 3 de la función f centrado en 0 es

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Despejando en la fórmula anterior se tiene que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$ y $f'''(0) = 2$.

Para calcular el polinomio de Taylor de la función $g(x) = xf(x)$ centrado en el origen y de orden 3 necesitamos el valor de las 3 primeras derivada en 0:

$$\begin{aligned} g(x) &= xf(x) & \implies g(0) &= 0, \\ g'(x) &= f(x) + xf'(x) & \implies g'(0) &= 1 \\ g''(x) &= 2f'(x) + xf''(x) & \implies g''(0) &= 2, \text{ y} \\ g'''(x) &= 3f''(x) + xf'''(x) & \implies g'''(0) &= 3. \end{aligned}$$

Por tanto, el polinomio de orden 3 de g es

$$g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$