

RECUBRIMIENTO MINIMAL DE UN GRAFO

Pablo Moreno Megías, Diego Lerena García, Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre, Francisco Navarro Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David Redondo Correa

Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial.
Universidad de Granada

2017



Universidad de Granada

Agenda



Universidad de Granada

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

¿En qué consiste el problema de recubrimiento de un grafo (por vértices)?

Consideremos un grafo no dirigido $G = (V, E)$. Un conjunto $U \subseteq V$ se dice que es un recubrimiento de G si cada arista en E incide en, al menos, un vértice o nodo de U . Es decir $\forall (x, y) \in E$, bien $x \in U$ o bien $y \in U$.

Un conjunto de nodos es un recubrimiento minimal de G si es un recubrimiento con el menor número posible de nodos. Se pide diseñar e implementar un algoritmo greedy que solucione este problema. Como salida, se deberá proporcionar el conjunto de nodos que forman el recubrimiento junto con el coste (número de nodos).

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

2 Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

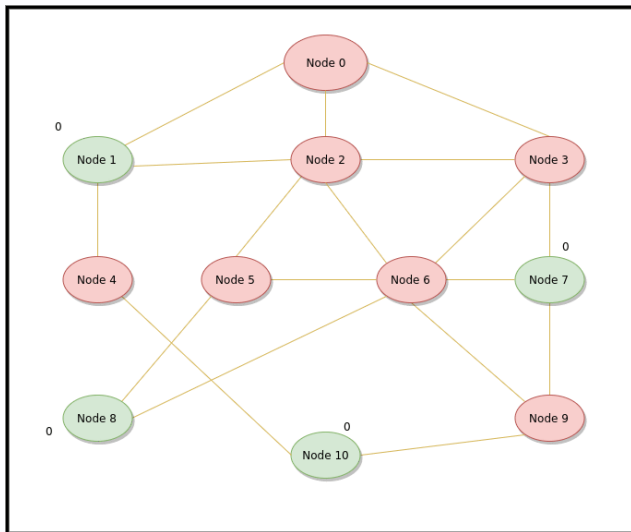
Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa



3 Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Diseño de la solución.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Conjunto de candidatos a seleccionar: El conjunto de vértices de los que se compone el problema

Conjunto de candidatos seleccionados: Conjunto de vértices que forman el recubrimiento del grafo.

Función solución: Todas las aristas están conectadas por al menos 2 vértices, es decir, no quedan aristas sueltas.

Función Factibilidad: El problema siempre es factible, sean cuales sean los vértices seleccionados.

Función Selección: Seleccionaremos el vértice que tenga mayor grado (al que lleguen más aristas).

Función Objetivo: Que la suma de vértices del conjunto seleccionado sea la menor posible.

4

Análisis del problema.
Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Esqueleto del algoritmo Greedy.



Universidad de Granada

Sea G un grafo y R el conjunto de vértices que forman la solución (inicialmente vacío)

$R = 0$

Sea un Grafo $G = (V, A)$, y C el conjunto recubrimiento solución inicialmente vacío:

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

5

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Esqueleto del algoritmo Greedy.



Universidad de Granada

Sea G un grafo y R el conjunto de vértices que forman la solución (inicialmente vacío)

$R = 0$

Sea un Grafo $G = (V, A)$, y C el conjunto recubrimiento solución inicialmente vacío:

- Elegir en cada paso del algoritmo el vértice $v \in V$ de mayor grado.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

5

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

Esqueleto del algoritmo Greedy.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

5

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Sea G un grafo y R el conjunto de vértices que forman la solución (inicialmente vacío)

$R = 0$

Sea un Grafo $G = (V, A)$, y C el conjunto recubrimiento solución inicialmente vacío:

- ▶ Elegir en cada paso del algoritmo el vértice $v \in V$ de mayor grado.
- ▶ Borrar el vértice v del grafo G

Esqueleto del algoritmo Greedy.



Universidad de Granada

Sea G un grafo y R el conjunto de vértices que forman la solución (inicialmente vacío)

$R = 0$

Sea un Grafo $G = (V, A)$, y C el conjunto recubrimiento solución inicialmente vacío:

- ▶ Elegir en cada paso del algoritmo el vértice $v \in V$ de mayor grado.
- ▶ Borrar el vértice v del grafo G
- ▶ Marcar las aristas incidentes del vértice seleccionado como cubiertas y reducir el grado de los vértices que conectaban en uno.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

5

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

Esqueleto del algoritmo Greedy.



Universidad de Granada

Sea G un grafo y R el conjunto de vértices que forman la solución (inicialmente vacío)

$R = 0$

Sea un Grafo $G = (V, A)$, y C el conjunto recubrimiento solución inicialmente vacío:

- ▶ Elegir en cada paso del algoritmo el vértice $v \in V$ de mayor grado.
- ▶ Borrar el vértice v del grafo G
- ▶ Marcar las aristas incidentes del vértice seleccionado como cubiertas y reducir el grado de los vértices que conectaban en uno.
- ▶ Repetir este paso hasta que no queden aristas por cubrir.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

5

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

Funcionamiento:

Se comienza calculando los grados de los vértices. A continuación se va seleccionando el nodo con mayor grado y se eliminan los vértices que lo conectan, reduciendo en uno el grado de los vértices conectados al vértice seleccionado. Se repite hasta que no quedan aristas sin eliminar.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

6 Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

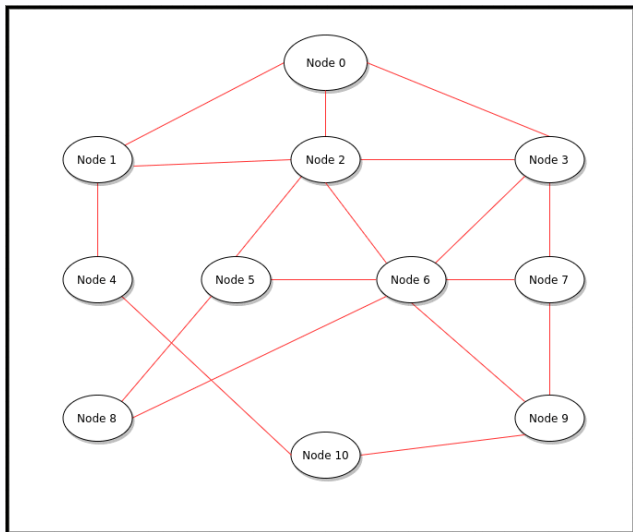
Esqueleto del algoritmo Greedy.

7 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

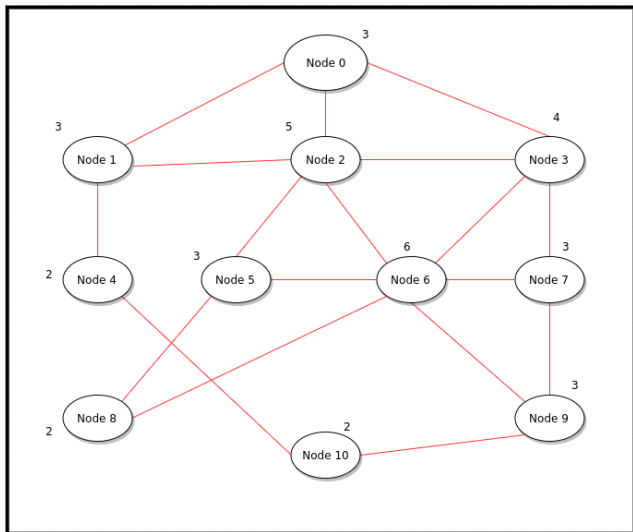
Esqueleto del algoritmo Greedy.

8 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

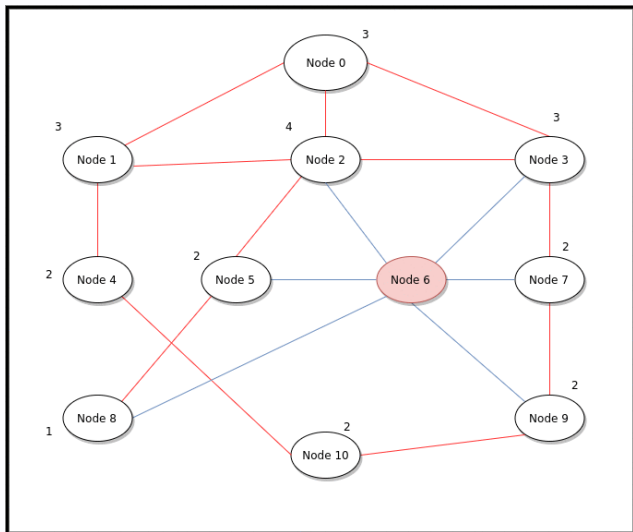
Esqueleto del
algoritmo Greedy.

9 Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

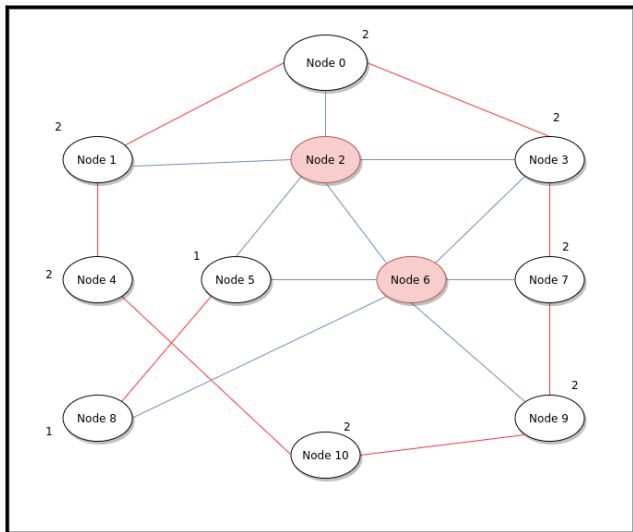
Esqueleto del algoritmo Greedy.

10 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

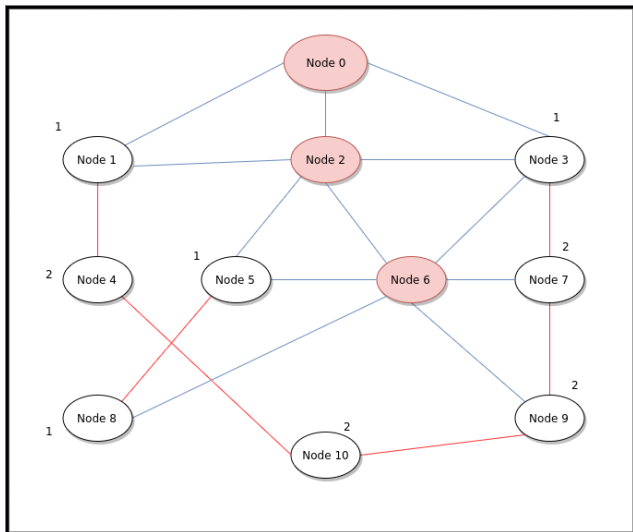
Esqueleto del algoritmo Greedy.

11 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

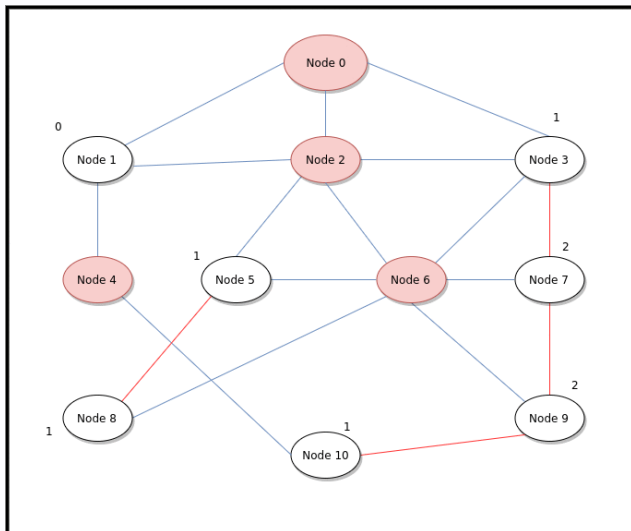
Esqueleto del algoritmo Greedy.

12 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

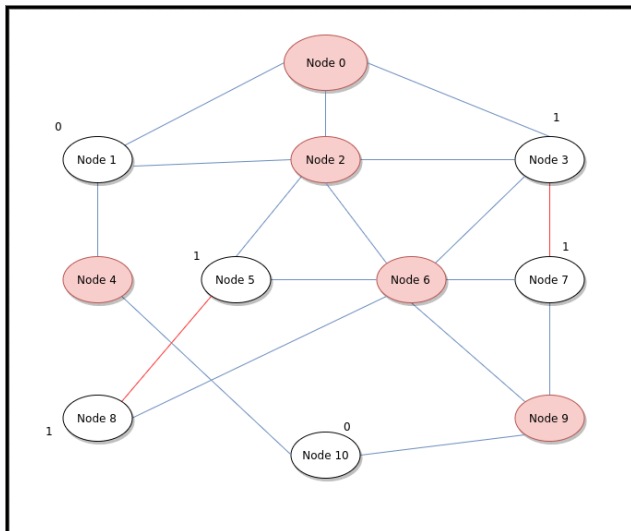
Esqueleto del algoritmo Greedy.

13 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

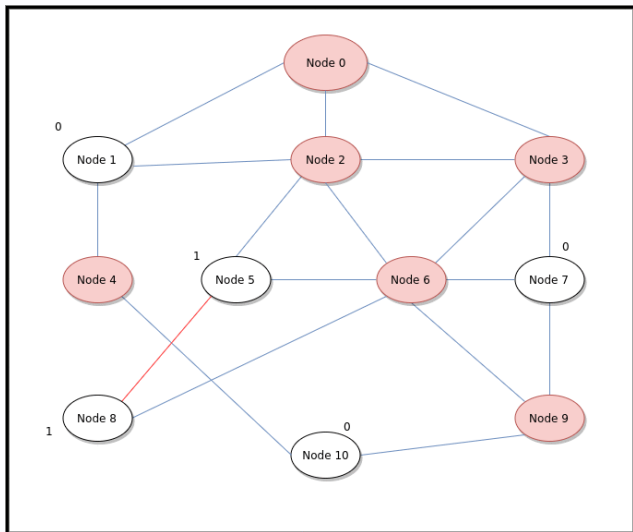
Esqueleto del algoritmo Greedy.

14 Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

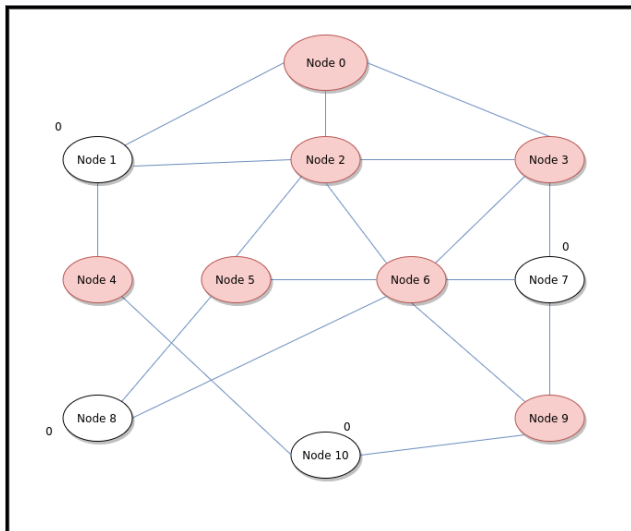
Esqueleto del
algoritmo Greedy.

15 Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Funcionamiento del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

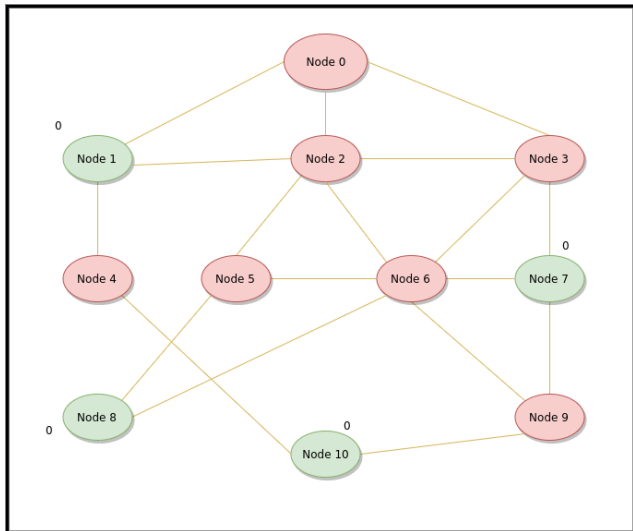
Esqueleto del
algoritmo Greedy.

16 Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

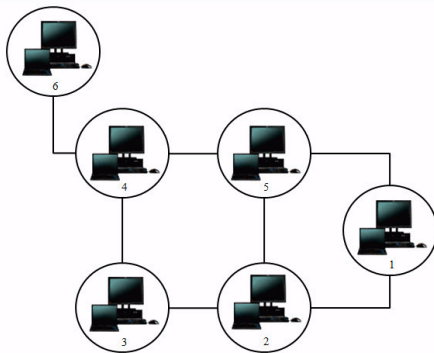
Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código



Caso real de uso.



Universidad de Granada



Un equipo de informáticos liderados por Eric Filiol en el 'and Cryptology Lab, ESAT' utilizó recientemente algoritmos para obtener la cobertura por vértices de un grafo para simular la propagación de 'gusanos' en grandes redes informáticas y diseñar estrategias para optimizar la protección de las redes contra ataques de estos virus en tiempo real.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

17 Caso real de uso.

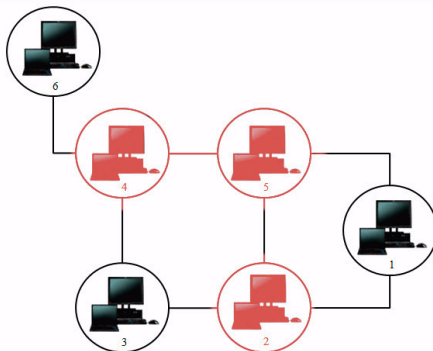
Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

Caso real de uso



Universidad de Granada



Sea un grafo en el que los vértices son los servidores de ruta y las aristas las conexiones entre estos, los vértices que forman un recubrimiento minimal son aquellos de vitales para la seguridad de la red. Es decir, que resolviendo el problema de recubrimiento del grafo se puede saber qué servidores son más vulnerables requieren mayor compromiso por parte de los encargados de la seguridad de la red.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

18 Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.



Universidad de Granada

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

19

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

```
while(recubrimiento.size() < p.N and !solucion) {      → for(i=0; i < p.N && !solucion;
i++)          →  $\sum_{i=1}^{(n-1)} n = O(n^2)$ 
    nodo_seleccionado = getMaximo(grados, p.N);      → O(n)
    solucion = añadirNodo(nodo_seleccionado);          → O(n)
}
}
```

En el peor de los casos se ejecutan n iteraciones de complejidad $O(n)$, luego la complejidad teórica del algoritmo es $O(n^2)$.

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Hemos programado el algoritmo Greedy en un único archivo .cpp llamado recubrimiento.cpp que bastará con compilar con g++. El programa recibe como parámetro el nombre del fichero que contiene los datos del problema con el formato:

- ▶ Una primera línea con el número de nodos, N.
- ▶ N líneas con la matriz de adyacencia del grafo (en la posición i,j hay un 1 si los nodos son adyacentes o un 0 si no).

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del
algoritmo Greedy.

Funcionamiento del
algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de
eficiencia teórico del
algoritmo.

20 Instrucciones sobre
cómo compilar y
ejecutar el código

Ejemplo de ejecución.



Universidad de Granada

Un ejemplo de ejecución y salida con el problema que hemos entregado como prueba (que es el nodo del ejemplo de la seguridad de servidores):

```
pinguino@1N0: ~/UGR/SEGUNDO/2/algorithmica/practicas/practica3/entrega
File Edit View Search Terminal Help
pinguino 1N0 ~ UGR > ... > practicas > practica3 > entrega master 9
12:34 % g++ recubrimiento.cpp -o recubrimiento 9:55 pinguino@1N0
pinguino 1N0 ~ UGR > ... > practicas > practica3 > entrega master 9
12:34 % ./recubrimiento ejemplo.txt 9:55 pinguino@1N0

Evaluando problema.

Número de nodos necesarios: 3

Nodos necesarios: -4-3-1-
pinguino 1N0 ~ UGR > ... > practicas > practica3 > entrega master 9
12:34 %
```

ALGORITMO GREEDY

Pablo Moreno Megías,
Diego Lerena García,
Manuel Vallejo Felipe,
Ángel Díaz de la Torre,
Francisco Navarro
Morales, Marcel Kemp
Muñoz y David
Redondo Correa

Análisis del problema.

Diseño de la solución.

Esqueleto del algoritmo Greedy.

Funcionamiento del algoritmo.

Caso real de uso.

Cálculo del orden de eficiencia teórico del algoritmo.

21 Instrucciones sobre cómo compilar y ejecutar el código

Gracias por escuchar!



Universidad de Granada