

# Отчёт о выполнении задания по курсу "Практикум на ЭВМ"

Г.В. Мигунов

3 апреля 2018 г.

## 1. Постановка задачи

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} u_1(0, x) = \varphi_1(x) \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

и краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_1(t, 0) = u_1(t, 1) \\ u_2(t, 0) = u_2(t, 1) \end{cases}$$

Требуется найти решение системы, определенное в области  $x \in [0, 1], t \in [0, +\infty]$  и удовлетворяющее начальным и краевым условиям. Числа  $a, b, c$  и функции  $\varphi_1, \varphi_2$  заданы.

## 2. Преобразование задачи

Введем вектор-функции  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  и  $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$  и матрицу  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ . Тогда исходную задачу можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ u(t, 0) = u(t, 1) \end{cases}$$

Заметим, что матрица  $A$  — симметрическая, следовательно, она имеет вещественные собственные значения. Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  — эти самые собственные значения, а  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — соответствующие им собственные вектора.

Пусть  $C = (\xi_1, \xi_2)$  — матрица, по столбцам которой записаны собственные вектора  $\xi_1$  и  $\xi_2$  матрицы  $A$ . Тогда следующим преобразованием мы можем привести матрицу  $A$  к диагональному виду:  $D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

Произведем следующую замену:  $u = Cv$ . Тогда:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial v}{\partial t} &= AC \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= C^{-1}AC \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Таким образом, получим новую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial v}{\partial x} \\ v(0, x) = \psi(x) \\ v(t, 0) = v(t, 1) \end{cases}$$

где  $\psi(x) = C^{-1}\varphi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

В силу диагональности матрицы  $D$  данная двумерная задача разбивается на две одномерные задачи вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \omega(0, x) = \nu(x) \\ \omega(t, 0) = \omega(t, 1) \end{cases}$$

Всюду далее мы будем рассматривать задачи именно такого вида.

### 3. Построение разностных схем

Для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \omega(0, x) = \nu(x) \\ \omega(t, 0) = \omega(t, 1) \end{cases}$$

требуется построить три разностные схемы:

1. условно устойчивую
2. безусловно устойчивую
3. безусловно неустойчивую

Будем исследовать решение задачи в ограниченной области  $x \in [0, 1], t \in [0, T]$ . Для этого построим сетку: зафиксируем натуральные числа  $N, M$  и разобьем отрезки  $[0, T]$  и  $[0, 1]$  на  $N$  и  $M$  равных отрезков соответственно. Длина шага по оси  $Ot$  будет равна  $\tau := \frac{T}{N}$ , а по оси  $Ox$  —  $h := \frac{1}{M}$ .

Точки получившейся сетки будут иметь координаты:  $(t_n, x_m) = (\tau n, hm)$ ,  $n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M}$ . Таким образом, любая точка сетки задается своими координатами  $n$  и  $m$ . Значение решения задачи в точке с координатами  $(n, m)$  будем обозначать  $\omega_m^n$ .

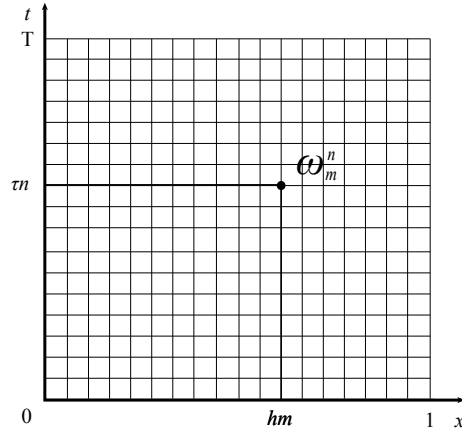


Рис. 1: Решение задачи  $\omega_m^n$  в точке, заданной координатами  $n$  и  $m$

Для построения разностной схемы мы будем пользоваться шеститочечным шаблоном:

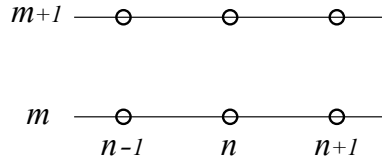


Рис. 2: Шеститочечный шаблон

### 3.1 Условно устойчивая схема

Для построения условно устойчивой разностной схемы будем использовать значения функции в следующих точках шаблона:

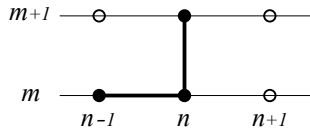


Рис. 3: Схема «Левый треугольник»

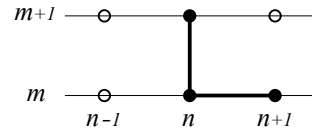


Рис. 4: Схема «Правый треугольник»

Причем тем или иным способом мы будем пользоваться в зависимости от знака  $\lambda$  (см. п. 5). В первом случае (рис. 3) мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &\rightarrow \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &\rightarrow \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h}\end{aligned}$$

Получим схему:

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{A})$$

Аналогично, во втором случае (рис. 4):

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_{m+1}^n - \omega_m^n}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{B})$$

В обоих случаях значение  $\omega_m^{n+1}$  в точке с  $n + 1$  - ого слоя выражается через значения в точках с предыдущих слоёв, а так как слой  $\omega_m^0$  нам известен из условия задачи, то таким образом мы найдем значения во всех точках сетки.

## 3.2 Безусловно устойчивая схема

Для построения безусловно устойчивой разностной схемы будем использовать значения функции в следующих точках шаблона:

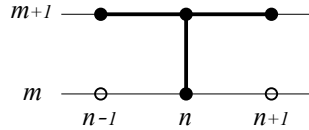


Рис. 5: «Т» - схема

Получим следующую схему:

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_m^{n+1}}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{C})$$

## 4. Порядок аппроксимации

### 4.1 Схема «Левый треугольник»

Рассмотрим оператор  $L_{\tau,h}$ :

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h}$$

Порядок аппроксимации найдем, подставив в оператор  $L_{\tau,h}$  точное решение задачи и оценив получившееся. Точное решение задачи в точке с координатами  $(n, m)$  будем обозначать  $\omega(n, m)$ .

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n, m) - \omega(n, m-1)}{h}$$

Разложим функцию  $\omega$  в ряд Тейлора в точке  $(n, m)$ :

$$\begin{aligned}\omega(n+1, m) &= \omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n, m-1) &= \omega(n, m) - \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2)\end{aligned}$$

Тогда, так как  $\omega'_t(n, m) - \lambda\omega'_x(n, m) = 0$  (поскольку  $\omega(n, m)$  — точное решение задачи), получим:

$$\begin{aligned}L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) - \omega(n, m)}{\tau} - \\ &\quad - \lambda \frac{\omega(n, m) - (\omega(n, m) - \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2))}{h} = \\ &= \omega'_t(n, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n, m) + \underline{O}(h) = \underline{O}(\tau + h)\end{aligned}$$

## 4.2 Схема «Правый треугольник»

Так же, как и с предыдущей схемой, произведем аналогичные преобразования:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n, m+1) - \omega(n, m)}{h}$$

Разложим функцию  $\omega$  в ряд Тейлора в точке  $(n, m)$ :

$$\begin{aligned}\omega(n+1, m) &= \omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n, m+1) &= \omega(n, m) + \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) - \omega(n, m)}{\tau} - \\ &\quad - \lambda \frac{\omega(n, m) + \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2) - \omega(n, m)}{h} = \\ &= \omega'_t(n, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n, m) + \underline{O}(h) = \underline{O}(\tau + h)\end{aligned}$$

## 4.3 Схема «Т»

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n+1, m+1) - \omega(n+1, m-1)}{h}$$

Разложим функцию  $\omega$  в ряд Тейлора в точке  $(n+1, m)$ :

$$\begin{aligned}\omega(n, m) &= \omega(n+1, m) - \omega'_t(n+1, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n+1, m+1) &= \omega(n+1, m) + \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3) \\ \omega(n+1, m-1) &= \omega(n+1, m) - \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)\end{aligned}$$

Подставим получившиеся разложения в оператор  $L_{\tau,h}\omega|_{m,n}$

$$\begin{aligned} L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n+1, m) - (\omega(n, m) = \omega(n+1, m) - \omega'_t(n+1, m)\tau + \underline{O}(\tau^2))}{\tau} - \\ &- \lambda \left[ \frac{\omega(n+1, m) + \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)}{2h} - \right. \\ &- \left. \frac{\omega(n+1, m) - \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)}{2h} \right] = \\ &= \omega'_t(n+1, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n+1, m) + \underline{O}(h^2) = \underline{O}(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Для определения порядка аппроксимации воспользуемся следующей нормой:

$$\|u\| = h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |u_{m,n}|$$

Аппроксимация исходной задачи схемами (А), (В) и (С) имеет место в том случае, когда

$$\|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| \rightarrow 0, \quad h, \tau \rightarrow 0$$

где:

1.  $A_{h,\tau}$  – матрица системы линейных уравнений, соответствующей разностной схеме (А), (В) или (С)
2.  $F_{h,\tau}$  – свободный столбец той же системы линейных уравнений
3.  $[\omega]_{h,\tau}$  – точное решение исходной задачи, взятое в узлах сетки

Для схемы «Левый треугольник» имеем:

$$F_{h,\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} \|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| &= h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |L_{h,\tau}\omega|_{m,n}| \leq \\ &\leq h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{n,m} \cdot (\tau + h) \leq \\ &\leq \frac{T}{N} \frac{1}{M} \cdot NM \cdot \max_{n,m} C_{n,m} \cdot (\tau + h) = C \cdot (\tau + h) \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимация схемы «Левый треугольник» установлена. Аналогичными рассуждениями устанавливается аппроксимация схемы «Правый треугольник».

Для схемы «Т» имеем:

$$F_{h,\tau} = 0$$

$$\begin{aligned}
\|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| &= h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |L_{h,\tau}\omega|_{m,n}| \leq \\
&\leq h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{n,m} \cdot (\tau + h^2) \leq \\
&\leq \frac{T}{N} \frac{1}{M} \cdot NM \cdot \max_{n,m} C_{n,m} \cdot (\tau + h^2) = C \cdot (\tau + h^2)
\end{aligned}$$

## 5. Исследование устойчивости

Для того, чтобы установить устойчивость или неустойчивость схемы, будем пользоваться спектральным признаком устойчивости (СПУ). Пусть на сетке с узлами  $(n, m)$  построена разностная схема

$$L_{h,\tau}\omega_{h,\tau}|_{n,m} = 0$$

Если любое частное решение уравнения  $L_{h,\tau}\omega_{h,\tau}|_{n,m} = 0$ , имеющее вид

$$\omega_m^n = \mu^n e^{im\varphi}$$

для любых  $\varphi$  равномерно ограничено по  $n$ , то схема является устойчивой. В противном случае, схема устойчивой не является.

### 5.1 Схема «Левый треугольник»

Запишем разностную схему для данного случая:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h} = 0$$

Подставим  $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$  и выясним, при каких  $\mu$  эта функция будет являться решением:

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^n e^{im\alpha} - \mu^n e^{i(m-1)\alpha}}{h}$$

Сократим на  $\mu^n e^{im\alpha}$  и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu - 1}{\tau} &= \lambda \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h} \\
\mu &= 1 + r - r e^{-i\alpha}
\end{aligned}$$

где  $r = \frac{\lambda\tau}{h}$ .

Очевидно, данная функция равномерно ограничена по  $n$ , так как  $|\mu| \leq 1 \forall \alpha$ . Множество значений  $\mu$  – окружность  $Q$  на комплексной плоскости с центром в точке  $1 + r$  и радиуса  $r$ . Она касается единичной окружности в точке 1. Поэтому, если  $r > 0$ , то вся окружность  $Q$  лежит вне единичного круга, следовательно, схема неустойчива. В случае, если  $|r| < 0$ , схема будет устойчива, если  $|r| \geq -1$  и неустойчива в остальных случаях.

**Вывод:**

1. Если  $\lambda > 0$ , то  $r = \frac{\lambda\tau}{h} > 0$  и схема безусловно неустойчива
2. Если  $\lambda < 0$ , то  $r = \frac{\lambda\tau}{h} < 0$ . Схема устойчива при  $\lambda \geq -\frac{h}{\tau}$  и неустойчива в остальных случаях. Получили условно устойчивую схему.

## 5.2 Схема «Правый треугольник»

Приведем аналогичные рассуждения. Запишем разностную схему:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^n - \omega_m^n}{h} = 0$$

Подставим  $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$  и выясним, при каких  $\mu$  эта функция будет являться решением:

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^n e^{i(m+1)\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{h}$$

Сократим на  $\mu^n e^{im\alpha}$  и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 1}{\tau} &= \lambda \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} \\ \mu &= 1 - r + r e^{i\alpha} \end{aligned}$$

где  $r = \frac{\lambda\tau}{h}$ .

Очевидно, данная функция равномерно ограничена по  $n$ , так как  $|\mu| \leq 1 \forall \alpha$ . Множество значений  $\mu$  – окружность  $Q$  на комплексной плоскости с центром в точке  $1 - r$  и радиуса  $r$ . Она касается единичной окружности в точке 1. Поэтому, если  $r < 0$ , то вся окружность  $Q$  лежит вне единичного круга, следовательно, схема неустойчива. В случае, если  $|r| > 0$ , схема будет устойчива, если  $|r| \leq 1$  и неустойчива в остальных случаях.

**Вывод:**

1. Если  $\lambda < 0$ , то  $r = \frac{\lambda\tau}{h} < 0$  и схема безусловно неустойчива
2. Если  $\lambda > 0$ , то  $r = \frac{\lambda\tau}{h} > 0$ . Схема устойчива при  $\lambda \leq \frac{h}{\tau}$  и неустойчива в остальных случаях. Получили условно устойчивую схему.

**В итоге** при  $\lambda < 0$  в качестве условно устойчивой разностной схемы выбираем схему «Левый треугольник», а в качестве безусловно неустойчивой - «Правый треугольник». При  $\lambda > 0$  в качестве условно устойчивой разностной схемы выбираем схему «Правый треугольник», а в качестве безусловно неустойчивой - «Левый треугольник».



### 5.3 Схема «Т»

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

Подставим  $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$ :

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} - \lambda \frac{\mu^{n+1} e^{i(m+1)\alpha} - \mu^{n+1} e^{i(m-1)\alpha}}{2h} = 0$$

Сократим на  $\mu^n e^{im\alpha}$  и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 1}{\tau} - \frac{\mu \lambda i}{h} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} &= 0 \\ \frac{\mu - 1}{\tau} - \frac{\mu \lambda i}{h} \sin \alpha &= 0 \\ \mu &= 1 + r \mu i \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $r = \frac{\lambda \tau}{h}$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1 - r i \sin \alpha} \\ |\mu| &= \left| \frac{1}{1 - r i \sin \alpha} \right| = \left| \frac{1 + r i \sin \alpha}{1 - r^2 \sin^2 \alpha} \right| = 1 \end{aligned}$$

Условие  $|\mu| = 1 \leq 1$  выполнено  $\forall \alpha$ , следовательно данная схема является безусловно устойчивой.

## 6. Циклическая прогонка

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = f_1 \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = f_N \end{cases}$$

Требуется найти периодическое ( $y_{i+N} = y_i$ ) решение системы уравнений при следующих условиях:

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i$$

Будем предполагать, что условие  $|c_i| > |a_i| + |b_i|$  (условие диагонального преобладания) выполняется.

Перепишем систему в векторном виде:

$$A_N \vec{y}_N = \vec{f}_N, \quad \text{где}$$

$$\vec{y}_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_N = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix}$$

Для решения перепишем векторную запись системы:

$$\begin{aligned} A_{N-1}\vec{y}_{N-1} + \vec{u}_{N-1}y_N &= \vec{f}_{N-1} \\ \vec{v}_{N-1}^T \vec{y}_{N-1} - c_N y_N &= f_N, \quad \text{где} \end{aligned} \quad (1)$$

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_{N-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{N-1} = \begin{pmatrix} b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{N-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{N-1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Решение уравнения  $\vec{v}_{N-1}^T \vec{y}_{N-1} - c_N y_N = f_N$  представим в виде:

$$\vec{y}_{N-1} = \vec{p}_{N-1} = y_N \vec{q}_{N-1}, \quad (2)$$

где  $\vec{p}_{N-1}$  и  $\vec{q}_{N-1}$  — решения задач:

$$A_{N-1}\vec{p}_{N-1} = \vec{f}_{N-1}, \quad A_{N-1}\vec{q}_{N-1} = -\vec{u}_{N-1}, \quad (3)$$

решения которых находятся методом обычной прогонки.

Таким образом, из предыдущих формул получаем:

$$y_N = \frac{-f_N + \vec{v}_{N-1}^T \vec{p}_{N-1}}{c_N - \vec{v}_{N-1}^T \vec{q}_{N-1}}$$

$\vec{y}_{N-1}$  находим из (2).

Метод циклической прогонки является устойчивым, так как решения (3) находятся с использованием метода прогонки, который, в нашем предположении о преобладании диагональных элементов, является устойчивым.

## 6.1 Реализация циклической прогонки

Методом циклической прогонки нам будет необходимо воспользоваться только в случае схемы «Т». По условию  $\omega_0^n = \omega_m^n$  мы можем продолжить решение задачи периодически из области  $x \in [0, 1], T \in [0, T]$  в полосу  $x \in [-\infty, \infty], T \in [0, T]$ . Периодичность запишется следующим образом:  $\omega_m^n = \omega_{m+M}^n$ .

Значения в  $m + 1$  – слое выражаются через значения в  $m$  – слое следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_{m-1}^{n+1}}{2h} &= 0 \\ \omega_m^{n+1} - \frac{r}{2}\omega_{m+1}^{n+1} + \frac{r}{2}\omega_{m-1}^{n+1} &= \omega_m^n \\ -\frac{r}{2}\omega_{m-1}^{n+1} - \omega_m^{n+1} + \frac{r}{2}\omega_{m+1}^{n+1} &= -\omega_m^n, \end{aligned}$$

где  $r = \frac{\lambda\tau}{h}$ . На  $n$ -ом шаге  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  значения  $\omega_m^n$  нам известны. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 y_{M-1} - c_0 y_0 + b_0 y_1 = f_0 \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i \quad i = 2, 3, \dots, M-2 \\ a_{M-1} y_{M-2} - c_{M-1} y_{M-1} + b_{M-1} y_0 = f_{M-1} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} y_i &= \omega_i^{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \\ f_i &= -\omega_i^n, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \\ a_i &= -\frac{r}{2}, \quad c_i = 1, \quad b_i = \frac{r}{2} \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned}$$

В векторной записи:

$$A_n \vec{y}_n = \vec{f}_n,$$

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n = - \begin{pmatrix} \omega_0^n \\ \omega_1^n \\ \vdots \\ \omega_{M-1}^n \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -1 & \frac{r}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{r}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{r}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Решаем систему методом циклической прогонки, переходим к поиску значений на следующем слое. Сходимость метода прогонки может нарушаться при произ-

вольном выборе параметров  $\tau$  и  $h$ . Необходимо так их подобрать, чтобы выполнялось неравенство:

$$1 = |c_i| > |a_i| + |b_i| = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$
$$\frac{\lambda\tau}{h} = r < 1$$