Приближенное решение дифференциального уравнения

Г.В. Мигунов

9 ноября 2017 г.

1. Постановка задачи

Требуется найти приближенное обобщенное решение задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = f(x), \quad x \in [0, 10], \text{ где}$$

$$f(x) = \cos x$$
$$k(x) = \begin{cases} 1, x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 3, x \in (3, 7) \end{cases}$$
$$q(x) = \begin{cases} 3, x \in [0, 3] \cup [7, 10] \\ 1, x \in (3, 7) \end{cases}$$

с краевыми условиями

$$k(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = 0$$
$$u(x)\Big|_{x=10} = 0$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

Решением данной задачи является такая функция u, что функции u и ku' непрерывны на $[0, 10]$. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что при кусочно гладких коэффициентах $k(x), q(x)$ и $f(x)$ данная задача имеет единственное решение.

2. Построение разностной схемы для уравнения и краевых условий

Пусть $N \in \mathbb{N}$ – количество отрезков, на которые разбивается исходный отрезок $[a, b]$. Возьмем шаг $h = \frac{b-a}{N}$, узлы сетки $x_n = a + nh$, y_n – приближение к значениям

$u_n = u(x_n)$. Приблизим уравнение на узлах сетки следующей разностной схемой:

$$L_N(y) = \frac{a_n(y_{n+1} - y_n) - a_{n-1}(y_n - y_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n y_n = \tilde{f}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \text{ где } \quad (1)$$

$$a_n = \left(\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},$$

$$\tilde{q}_n = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x)dx,$$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x)dx.$$

Будем считать, что N нацело делится на $b-a$, тогда коэффициенты $k(x)$ и $q(x)$ постоянны на каждом отрезке $[x_n, x_{n+1}]$. В таком случае, мы можем явно выписать $a_n, \tilde{q}_n$ и $\tilde{f}_n$:

$$a_n = \left(\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}\right)^{-1} = k_{n+1/2},$$

$$\tilde{q}_n = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} q(x)dx = \frac{q_{n-1/2} + q_{n+1/2}}{2},$$

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{h}\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x)dx = \frac{1}{h}(\sin x_{n+1/2} - \sin x_{n-1/2}).$$

3. Аппроксимация граничных условий

Аппроксимируем граничные условия следующим образом:

$$\frac{k_0(y_1 - y_0)}{h} - \frac{h}{2}(q_0 y_0 + f_0) = 0, \quad (2)$$

$$y_N = 0 \quad (3)$$

4. Оценки погрешностей аппроксимаций

4.1 Погрешность аппроксимации уравнения

Рассмотрим такие n, что x_n не попадает в точки разрыва $k(x)$ и $q(x)$. Для таких n на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ справедливы следующие разложения по формуле Тейлора:

$$u_{n+1} = u_n + hu'_n + \frac{h^2}{2}u''_n + \frac{h^3}{6}u'''_n + O(h^4),$$

$$u_{n-1} = u_n - hu'_n + \frac{h^2}{2}u''_n - \frac{h^3}{6}u'''_n + O(h^4).$$

Преобразуем данные разложения следующим образом:

$$a_n\frac{u_{n+1} - u_n}{h} = k_{n+1/2}\left(u'_n + \frac{h}{2}u''_n + \frac{h^2}{6}u'''_n + O(h^3)\right)$$

$$a_{n-1}\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = k_{n-1/2}\left(u'_n - \frac{h}{2}u''_n + \frac{h^2}{6}u'''_n + O(h^3)\right)$$

Так как $k(x)$ не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$,

$$\frac{a_n(u_{n+1}-u_n) - a_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{h^2} = k_n(u_n'' + O(h^2))$$

Далее, так как $q(x)$ не меняет значения на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, получим:

$$L_N(u) - \tilde{f}_n = \frac{a_n(u_{n+1}-u_n) - a_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n = k_n u_n'' - q_n u_n + O(h^2) = \\ = f_n - \tilde{f}_n + O(h^2) = O(h^2),$$

так как

$$f_n - \tilde{f}_n = \cos x_n - \frac{1}{h}(\sin x_{n+1/2} - \sin x_{n-1/2}) = \\ = \cos x_n - \frac{1}{h}\left(\left(\sin x_n \cos\frac{h}{2} + \cos x_n \sin\frac{h}{2}\right) - \left(\sin x_n \cos\frac{h}{2} - \cos x_n \sin\frac{h}{2}\right)\right) = \\ = \cos x_n - \frac{2}{h}\cos x_n \sin\frac{h}{2} = \frac{2}{h}\cos x_n\left(\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}\right) = \frac{2}{h}\cos x_n \cdot O\left(\left(\frac{h}{2}\right)^3\right) = O(h^2)$$

Таким образом, для таких n, при которых x_n не попадает в точки разрыва $k(x)$ и $q(x)$ погрешность аппроксимации составляет $O(h^2)$.

Рассмотрим теперь такие n, что $k(x)$ и $q(x)$ разрывны в точках x_n. В x_n функция u имеет непрерывные правые и левые производные, следовательно, можно записать:

$$u_{n+1} = u_n + hu'_{n,r} + \frac{h^2}{2}u''_{n,r} + O(h^3),$$
$$u_{n-1} = u_n - hu'_{n,l} + \frac{h^2}{2}u''_{n,l} + O(h^3),$$

где вторые нижние индексы у производных u обозначают правую (r) и левую (l) производные соответственно. Далее:

$$a_n\frac{u_{n+1}-u_n}{h} = k_{n+1/2}\left(u'_{n,r} + \frac{h}{2}u''_{n,r} + O(h^2)\right)$$
$$a_{n-1}\frac{u_n - u_{n-1}}{h} = k_{n-1/2}\left(u'_{n,l} - \frac{h}{2}u''_{n,l} + O(h^2)\right)$$

Из условия непрерывности ku' имеем $k_{n+1/2}u'_{n,r} = k_{n-1/2}u'_{n,l}$. Воспользовавшись вышедоказанным равенством $f_n - \tilde{f}_n = O(h^2)$, получим:

$$L_N(u) - \tilde{f}_n = \frac{a_n(u_{n+1}-u_n) - a_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{h^2} - \tilde{q}_n u_n - \tilde{f}_n \\ = \frac{1}{2}(k_{n+1/2}u''_{n,r} + k_{n-1/2}u''_{n,l}) - \frac{q_{n+1/2} + q_{n-1/2}}{2}u_n - \tilde{f}_n + O(h) = \\ = \frac{1}{2}(k_{n+1/2}u''_{n,r} - q_{n+1/2}u_n) + \frac{1}{2}(k_{n-1/2}u''_{n,l} - q_{n-1/2}u_n) - \tilde{f}_n + O(h) = \\ = f_n - \tilde{f}_n + O(h) = O(h)$$

Таким образом, в точках разрыва $k(x)$ и $q(x)$ погрешность аппроксимации уравнения составляет $O(h)$.

Вычислим теперь погрешность аппроксимации в норме L_1. В $N-3$ точках погрешность равна $O(h^2)$, а в двух других – $O(h)$. Тогда погрешность в норме L_1 равна:

$$(N-3)hO(h^2) + 2hO(h) = NhO(h^2) + O(h^3) + O(h^2) = O(h^2),$$

то есть разностная схема (1) имеет **второй порядок аппроксимации.**

4.2 Погрешность аппроксимации граничных условий

На отрезке $[x_0, x_1]$ точное решение $u \in C^2$, следовательно справедливо следующие разложение по формуле Тейлора:

$$u_1 = u_0 + hu_0' + \frac{h^2}{2}u_0'' + O(h^3)$$

Из уравнения следует, что $k_0 u_0'' = q_0 u_0 + f_0$ и $k_N u_N'' = q_N u_N + f_N''$, причем поскольку $k(x) > 0$ получим:

$$u_1 = u_0 + hu_0' + \frac{h^2}{2}\frac{q_0 u_0 + f_0}{k_0} + O(h^3)$$

Отсюда

$$u_0' = \frac{u_1 - u_0}{h} - \frac{h(q_0 u_0 + f_0)}{2h_0} + O(h^2)$$

Подставим данное выражение в первое граничное условие исходной задачи:

$$k(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=0} = k_0 u_0' = \frac{k_0(u_1 - u_0)}{h} - \frac{h}{2}(q_0 u_0 + f_0) + O(h^2)$$

Таким образом, мы получили, что аппроксимация первого граничного условия имеет **второй порядок**.

Аппроксимация второго граничного условия, очевидно, абсолютно точна:

$$u(x)\Big|_{x=10} = u_N$$

5. Метод прогонки

5.1 Описание метода прогонки

Система уравнений (1), (2), (3) записывается в виде $Ay = b$, где

$$\begin{pmatrix} -\beta_0 & \gamma_0 & & & & & \\ \alpha_1 & -\beta_1 & \gamma_1 & & & & \\ & \alpha_2 & -\beta_2 & \gamma_2 & & & \\ & & \alpha_3 & -\beta_3 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \gamma_{N-2} & \\ & & & & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & \gamma_{N-1} \\ & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_{N-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\beta_0 = \frac{k_0}{h} + \frac{hq_0}{2}$$
$$\gamma_0 = \frac{k_0}{h}$$
$$\delta_1 = \frac{hf_0}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{a_{n-1}}{h^2}$$
$$\beta_n = \frac{a_{n-1} + a_n}{h^2} + \tilde{q}_n$$
$$\gamma_n = \frac{a_n}{h^2}$$

Отметим, что все $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ положительны.

Исключим неизвестные от y_0 до y_{N-1}. Для этого сначала решим каждое уравнение относительно y_n:

$$y_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0} y_1 - \frac{\delta_1}{\beta_0}$$
$$y_n = C_n y_{n+1} + \varphi_n, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{5}$$

Теперь подставим полученное выражение вместо y_n в следующее уравнение, возникающее вследствие перемножения матрицы A и столбца $\bar{y}$:

$$(-\beta_{n+1} + \alpha_{n+1} C_n) y_{n+1} + \gamma_{n+1} y_{n+2} = b_{n+1} - \alpha_{n+1} \varphi_n$$

и тем самым получим:

$$y_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n} y_{n+2} + \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$
$$C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \varphi_0 = \frac{-\delta_1}{\beta_0}$$
$$C_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$
$$\varphi_{n+1} = \frac{\alpha_{n+1}\varphi_n - b_{n+1}}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n}$$

На последнем шаге получим уравнение:

$$y_{N-1} = C_{N-1} y_N + \varphi_{N-1}$$

Подставим вместо y_N граничное условие:

$$y_{N-1} = C_{N-1} \cdot 0 + \varphi_{N-1} = \varphi_{N-1}$$

Остальные y_n находятся в порядке $n = N-2, N-3, \ldots, 1, 0$ с использованием (5).

5.2 Устойчивость метода прогонки

Докажем устойчивость метода. Под устойчивостью метода будем понимать, что если в процессе вычислений некоторое значение y_n было получено с ошибкой, а дальнейшие вычисления точны, то ошибка в вычисляемых далее y_n не будет увеличиваться.

Как видно из (5), для этого достаточно, чтобы

$$0 \leqslant C_n \leqslant 1, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

Доказательство. Докажем формулу (6) по индукции:
База индукции: $C_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}$, $0 \leqslant C_0 < 1$, так как все $k_0, q_0, h > 0$
Переход индукции. Пусть $0 \leqslant C_n < 1$. Тогда $0 \leqslant C_{n+1} < 1$.

$$\gamma_{n+1} + \alpha_{n+1} C_n < \gamma_{n+1} + \alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$$
$$0 < \gamma_{n+1} < \beta_{n+1} - \alpha_{n+1} C_n$$
$$0 < \frac{\gamma_{n+1}}{\beta n + 1 - \alpha_{n+1} C_n} < 10 < C_{n+1} < 1$$

Значит формула (6) доказана и, соответственно, доказана устойчивость метода прогонки. □

6. Сходимость

Теорема 1. *Если задача $A_h u_h = F_h$ линейна, то из аппроксимации порядка k и устойчивости метода следует сходимость порядка k.*

Доказательство.
Пусть y – точное решение задачи $A_h y = F_h$, а u – точное решение приближаемой задачи.
Из аппроксимации следует, что $\|A_h u - F_h\| \leqslant C_1 h^k$ для некоторого C_1, начиная с некоторого h.
Положим $\tilde{F}_h = A_h u$. Тогда $\tilde{y} = [u]_h$ является решением задачи $A_h \tilde{y} = \tilde{F}_h$.
Из устойчивости метода следует, что:

$$\|y - \tilde{y}\| \leqslant C_2 \|F_h - \tilde{F}_h\| = C_2 \|A_h u - F_h\| \leqslant C_1 C_2 h^k$$

Таким образом, имеет место сходимость порядка k. □

7. Результаты счёта

Воспользуемся правилом Рунге. Будем запускать программу для $N = 10,\ 20,\ 40, \ldots, 10 \cdot 2^n$, получая численные решения $y^{(10)},\ y^{(20)},\ y^{(40)},\ \ldots,\ y^{(10 \cdot 2^n)}$, где каждое $y^{(N)} = \{y_i^{(N)}\}_{i=0}^N$, пока не найдем такое N, что:

$$\frac{10}{2N}\left(\sum_{i=1}^{N-1}\left|y_i^{(N)} - y_{2i}^{(2N)}\right| + \sum_{i=1}^{N}\left|\frac{y_i^{(N)} + y_{i-1}^{(N)}}{2} - y_{2i-1}^{(2N)}\right|\right) + \left|y_0^{(N)} - y_0^{(2N)}\right| + \left|y_N^{(N)} - y_{2N}^{(2N)}\right| < \varepsilon = 10^{-2}$$

Метод Рунге завершил свою работу при $N = 640$. График полученного решения представлен ниже на Рис. 1.

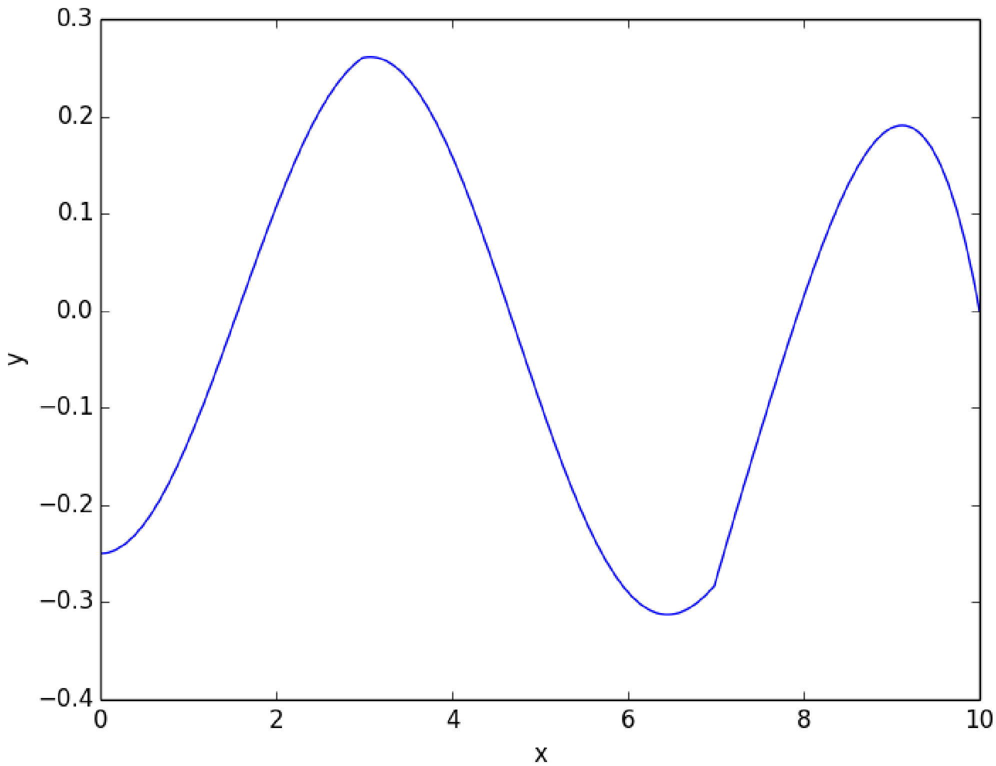

Рис. 1: График построенного приближенного решения