Вычисление несобственного интеграла с помощью квадратурных формул

Г.В. Мигунов

3 ноября 2017 г.

1. Постановка задачи

Требуется приближенно вычислить интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln{(1+x)}} e^{-x^3} dx \tag{1}$$

с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.

2. Доказательство сходимости интеграла

Прежде чем приступить к вычислению интеграла, необходимо убедиться в его сходимости во всей области интегрирования. Для этого исследуем подынтегральную функцию $f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln{(1+x)}} e^{-x^3}$ в особых точках на промежутке $[0, +\infty)$. Рассмотрим три особые точки: $x = 0$, $x = 1$, $x \to \infty$:

1. $x = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln{(1+x)}} e^{-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3-1)(x+o(x))^3}{\sqrt{x}\ln x (x+o(x))} =$$
$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x^2+o(x^2)}{\sqrt{x}\ln x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x^{3/2}}{\ln x} + o(x^{3/2}) = 0$$

   Таким образом, $x = 0$ является устранимой особой точкой. Это значит, что в нуле мы можем доопределить $f(x)$ до непрерывной функции, поэтому интеграл не является несобственным в точке $x = 0$.

2. $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln{(1+x)}} e^{-x^3} = \frac{\sin^3 1}{e \ln 2} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{\ln x} =$$
$$= \frac{\sin^3 1}{e \ln 2} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)+o(x-1)} = \frac{\sin^3 1}{e \ln 2} \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = \frac{3\sin^3 1}{e \ln 2}$$

Аналогично предыдущей точке, $x = 1$ является устранимой особой точкой.

3. $x \to \infty$

   $\exists$ такое большое число C, что:

$$\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_C^{+\infty} \left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln(1+x)} e^{-x^3}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_C^{+\infty} \left|\frac{x^3}{\sqrt{x}} e^{-x^3}\right| dx \leqslant \int_C^{+\infty} \left|x^{3/2} e^{-x^{5/2}}\right| dx = \frac{2}{5} e^{-C^{5/2}} < \infty$$

   Сходимость интеграла на бесконечности доказана.

Таким образом, мы доказали, что данный интеграл сходится на промежутке $[0, +\infty)$.

3. Оценки параметров δ_1, δ_2 и C

Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon/5 = 2 \cdot 10^{-3}$ и разобьем наш промежуток интегрирования на 5 частей: $[0, \delta_1), [\delta_1, 1-\delta_2), [1-\delta_2, 1+\delta_2), [1+\delta_2, C), [C, +\infty)$.

Теперь нам необходимо подобрать числа δ_1, δ_2 и C таким образом, чтобы $\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_1$, $\left|\int_{1-\delta_2}^{1+\delta_2} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_3$ и $\left|\int_C^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon_5$. Тем самым, задача сведется к вычислению интегралов $\tilde{I}_2 = \int_{\delta_1}^{1-\delta_2} f(x)dx$ с точностью ε_2 и $\tilde{I}_4 = \int_{1+\delta_2}^{C} f(x)dx$ с точностью ε_4.

1. Оценим δ_1.
   Будем пользоваться следующими фактами:

$$\sin(x) \leqslant x$$

и

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x < x - 1$$

$$\left|\int_0^{\delta_1} f(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\delta_1} |f(x)|\, dx \leqslant \int_0^{\delta_1} \left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln(1+x)} e^{-x^3}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\delta_1} \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)x(x+1)x^3}{\sqrt{x}(x-1)x}\right| dx = \int_0^{\delta_1} \left|(x^2+x+1)(x+1)x^{5/2}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant 6 \int_0^{\delta_1} x^{5/2} dx = \frac{12}{7} \delta_1^{7/2} \leqslant \varepsilon_1$$

   Следовательно,

$$\delta_1 \leqslant \left(\frac{7}{12}\varepsilon_1\right)^{2/7}$$

   Подставив $\varepsilon_1 = 2 \cdot 10^{-3}$, получим $\boldsymbol{\delta_1 = 0.146}$.

2. Оценим δ_2.
   Будем считать, что $\delta_2 < 0.04 < \frac{\pi}{3} - 1$. При таких δ_2 имеют место следующие оценки:

   (a) $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$
   (b) $e^{-x^3} < \frac{1}{2}$
   (c) $\frac{1}{\ln(2+x)} \leqslant \frac{2+x}{1+x} \leqslant \{x > 1 - 0.04\} \leqslant \frac{74}{49}$
   (d) $\sqrt{x+1} \leqslant \frac{x+2}{2}$
   (e) $\max_{x\in[-\delta_2;\delta_2]} |(x^2+3x+3)(x+2)| < 7$

   Тогда, получаем:

$$\left|\int_{1-\delta_2}^{1+\delta_2} f(x)dx\right| \leqslant \int_{1-\delta_2}^{1+\delta_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{1-\delta_2}^{1+\delta_2} \left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln(1+x)} e^{-x^3}\right| dx =$$
$$= \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \left|\frac{(x+1)^3-1}{\sqrt{x+1}} \frac{sin^3(x+1)}{\ln(x+1)\ln(x+2)} e^{-(x+1)^3}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{74\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{49\cdot 2\cdot 8} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \left|\frac{(x^3+3x^2+3x)(1+x)}{x\sqrt{x+1}}\right| dx \leqslant \frac{111\sqrt{3}}{784} \int_{\delta_2}^{\delta_2} \left|(x^2+3x+3)(x+2)\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{111\sqrt{3}}{784} \max_{x\in[-\delta_2;\delta_2]} \left|(x^2+3x+3)(x+2)\right| \cdot 2\delta_2 \leqslant \frac{1554\sqrt{3}}{784} \cdot \delta_2 \leqslant \varepsilon_3$$

   Подставив $\varepsilon_3 = 2\cdot 10^{-3}$, получим $\boldsymbol{\delta_2 = 0.0005}$.

3. Оценим C.
   Заметим, что $x^{5/2}e^{-x^3} \leqslant x^{1.85}e^{-x^{2.85}}$ при $x \geqslant 1.7$. Тогда:

$$\left|\int_{C}^{+\infty} f(x)dx\right| \leqslant \int_{C}^{+\infty} \left|\frac{x^3-1}{\sqrt{x}} \frac{sin^3 x}{\ln x \ln(1+x)} e^{-x^3}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\ln^2 C} \int_{C}^{+\infty} \left|x^{5/2}e^{-x^3}\right| dx \leqslant \frac{1}{\ln^2 C} \int_{C}^{+\infty} \left|x^{1.85}e^{-x^{2.85}}\right| dx = \frac{100}{285} \frac{e^{-C^{2.85}}}{\ln^2 C} = F(C) \leqslant \varepsilon_5$$

   Далее, заметим, что $F(1.8839) \approx 0.002001$, а $F(1.884) \approx 0.001999$. Так как $F(C)$ монотонно убывает на всей числовой оси, получаем, что можно взять $\mathbf{C = 1.884}$.

4. Квадратурные формулы для I_2 и I_4

Будем вычислять I_2 и I_4 по составной формуле прямоугольников. Для функции $f(x)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$ интеграл от нее приближенно вычисляется по формуле:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx S_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b-a)\frac{i-1/2}{N}\right)$$

5. Оценка погрешности квадратурных формул

Погрешностью квадратурной формулы является величина:

$$R_N(f) = I(f) - S_N(f)$$

Для формулы прямоугольников справедлива следующая оценка:

$$|R_N(f)| \leqslant A\frac{(b-a)^2}{4N},$$

для некоторого числа A, такого, что $|f'(x)| \leqslant A$ на $[a,b]$. Таким образом, для вычисления необходимого числа отрезков разбиения нам необходимо оценить $|f'(x)|$ на $[a,b]$.

6. Оценка производной

Рассмотрим производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^3-1}{\sqrt{x}}\frac{\sin^3 x}{\ln x \ln(1+x)}e^{-x^3}\right)' = &-\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{\sqrt{x}(x+1)\ln x\ln(1+x)} + \frac{3e^{-x^3}(x^3-1)\sin^2 x\cos x}{\sqrt{x}\ln x\ln(1+x)} - \\ &-\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{x^{3/2}\ln^2 x\ln(1+x)} + \frac{3e^{-x^3}x^{3/2}\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)} - \\ &-\frac{3e^{-x^3}x^{3/2}(x^3-1)\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)} - \frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{2x^{3/2}\ln x\ln(1+x)}\end{aligned}$$

Будем оценивать $|f'(x)|$ отдельно на $[\delta_1, 1-\delta_2]$ и $[1+\delta_2, C]$. При оценке будем пользоваться следующими неравенствами:

1. $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2},\ x \in [\delta_1, 1-\delta_2]$
2. $\frac{x^3-1}{\ln x}$ монотонно возрастает на $[0,+\infty]$
3. $\frac{(1+x)}{\ln(1+x)}$ монотонно убывает на $[0,1]$

Оценим $|f'(x)|$ на $[\delta_1, 1-\delta_2]$:

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{\sqrt{x}(x+1)\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}\left|\frac{e^{-x^3}\sqrt{x}(x+1)}{\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}\left|\frac{e^{-\delta_1^3}(1+\delta_1)\sqrt{1-\delta_2}}{\ln(1+\delta_1)}\right| \leqslant \mathbf{5.4437}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}(x^3-1)\sin^2 x\cos x}{\sqrt{x}\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{9}{4}\left|\frac{e^{-x^3}(x+1)^3}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{9}{4}\left|\frac{e^{-\delta_1^3}(2-\delta_2)^3}{\sqrt{\delta_1}}\right| \leqslant \mathbf{46.9267}$$

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{x^{3/2}\ln^2 x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}\left|\frac{e^{-\delta_1^3}(2-\delta_2)^3}{\sqrt{\delta_1}\delta_2}\right| \leqslant \mathbf{27093.1}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}x^{3/2}\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}\left|\frac{e^{-x^3}x^{3/2}(1+x)}{(x-1)}\right| \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}\left|\frac{e^{-\delta_1^3}(1-\delta_2)^{3/2}(2-\delta_2)}{\delta_2}\right| \leqslant \mathbf{3877.24}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}x^{3/2}(x^3-1)\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}\left|e^{-x^3}x^{3/2}(1+x)^3\right| \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}\left|e^{-\delta_1^3}(1-\delta_2)^{3/2}(2-\delta_2)^3\right| \leqslant \mathbf{15.4936}$$

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{2x^{3/2}\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}\left|\frac{e^{-x^3}(x+1)^2}{\sqrt{x}\ln(1+x)}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{16}\left|\frac{e^{-\delta_1^3}(1+\delta_1)(2-\delta_2)}{\sqrt{\delta_1}\ln(1+\delta_1)}\right| \leqslant \mathbf{14.2433}$$

Получили оценку: $|f'(x)| \leqslant A_1 = 31052.447$ на $[\delta_1, 1-\delta_2]$.
Теперь оценим $|f'(x)|$ на $[1+\delta_2, C]$:

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{\sqrt{x}(x+1)\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{e^{-(1+\delta_2)^3}(C^3-1)}{2\ln C\ln 2}\right| \leqslant \mathbf{2.3792}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}(x^3-1)\sin^2 x\cos x}{\sqrt{x}\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{3e^{-(1+\delta_2)^3}(C^3-1)}{\ln C\ln 2}\right| \leqslant \mathbf{14.2749}$$

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{x^{3/2}\ln^2 x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{e^{-(1+\delta_2)^3}(C+1)^2}{\ln 2\ln(1+\delta_2)}\right| \leqslant \mathbf{8817.74}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}x^{3/2}\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{3e^{-(1+\delta_2)^3}C^{3/2}}{\ln(1+C)\ln(1+\delta_2)}\right| \leqslant \mathbf{5382.27}$$

$$\left|\frac{3e^{-x^3}x^{3/2}(x^3-1)\sin^3 x}{\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{3e^{-(1+\delta_2)^3}C^{3/2}(C^3-1)}{\ln(1+C)\ln C}\right| \leqslant \mathbf{24.1574}$$

$$\left|\frac{e^{-x^3}(x^3-1)\sin^3 x}{2x^{3/2}\ln x\ln(1+x)}\right| \leqslant \left|\frac{e^{-(1+\delta_2)^3}(C+1)^2}{2\ln 2}\right| \leqslant \mathbf{2.2039}$$

Таким образом, $|f'(x)| \leqslant A_2 = 14243.025$ на $[1+\delta_2, C]$.

7. Таблица параметров

Вычислим N_1 и N_2:

$$N_1 = \frac{A_1(1-\delta_1-\delta_2)^2}{4\varepsilon_3} = 2827567$$

$$N_2 = \frac{A_2(C-1-\delta_2)^2}{4\varepsilon_4} = 1389714$$

Запишем полученные выше результаты в таблицу:

δ_1	δ_2	C	A_1	A_2	N_1	N_2
0.146	0.0005	1.884	31052.447	14243.025	2827567	1389714

8. Результаты расчёта

$\tilde{I}_2$	$\tilde{I}_4$	$\tilde{I}$
0.46678	0.30756	0.77434

9. Правило Рунге

Пусть I - точное значение интеграла, а S_N - его приближенное значение, вычисленное с использованием N обращений к подынтегральной функции. Предположим, что известен главный член погрешности квадратурной формулы:

$$I - S_N = CN^{-m} + o(N^{-m}),$$

где m - известно, а C - нет. Тогда, подставляя в формулы выше N_1 и $N_2 = 2N_1$, получим:

$$\begin{gathered}
I - S_{N_1} = CN_1^{-m} + o(N_1^{-m}) \\
I - S_{N_2} = CN_2^{-m} + o(N_2^{-m}) \\
S_{N_1} - S_{N_2} \approx C\frac{N_2^m - N_1^m}{N_2^m N_1^m} \Rightarrow \\
C \approx \frac{S_{N_1} - S_{N_2}}{N_2^m - N_1^m} N_2^m N_1^m \Rightarrow \\
I - S_{N_2} = \frac{S_{N_1} - S_{N_2}}{N_2^m - N_1^m} N_1^m
\end{gathered}$$

Тогда, если взять $N_2 = 2N_1 = 2N$ получим:

$$|I - S_{2N}| = \frac{|S_{2N} - S_N|}{2^m - 1} \leqslant \varepsilon$$

10. Результаты по правилу Рунге

$\hat{N}_1$	$\hat{I}_2$	$\hat{N}_2$	$\hat{I}_4$	$\hat{N}$	$\hat{I}$
128	0.46984	128	0.30431	256	0.77415