

Отчёт о выполнении задания по курсу "Практикум на ЭВМ"

Г.В. Мигунов

25 апреля 2018 г.

1. Постановка задачи

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = b \frac{\partial u_1}{\partial x} + c \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases}$$

с начальными условиями:

$$\begin{cases} u_1(0, x) = \varphi_1(x) \\ u_2(0, x) = \varphi_2(x) \end{cases}$$

и краевыми условиями:

$$\begin{cases} u_1(t, 0) = u_1(t, 1) \\ u_2(t, 0) = u_2(t, 1) \end{cases}$$

Требуется найти решение системы, определенное в области $x \in [0, 1], t \in [0, +\infty]$ и удовлетворяющее начальным и краевым условиям. Числа a, b, c и функции φ_1, φ_2 заданы.

2. Преобразование задачи

Введем вектор-функции $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ и $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ и матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Тогда исходную задачу можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) = \varphi(x) \\ u(t, 0) = u(t, 1) \end{cases}$$

Заметим, что матрица A — симметрическая, следовательно, она имеет вещественные собственные значения. Пусть λ_1, λ_2 — эти самые собственные значения, а ξ_1 и ξ_2 — соответствующие им собственные вектора.

Пусть $C = (\xi_1, \xi_2)$ — матрица, по столбцам которой записаны собственные вектора ξ_1 и ξ_2 матрицы A . Тогда следующим преобразованием мы можем привести матрицу A к диагональному виду: $D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Произведем следующую замену: $u = Cv$. Тогда:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial v}{\partial t} &= AC \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= C^{-1}AC \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Таким образом, получим новую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial v}{\partial x} \\ v(0, x) = \psi(x) \\ v(t, 0) = v(t, 1) \end{cases}$$

где $\psi(x) = C^{-1}\varphi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$

В силу диагональности матрицы D данная двумерная задача разбивается на две одномерные задачи вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \omega(0, x) = \nu(x) \\ \omega(t, 0) = \omega(t, 1) \end{cases}$$

Всюду далее мы будем рассматривать задачи именно такого вида.

3. Построение разностных схем

Для задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \omega}{\partial x} \\ \omega(0, x) = \nu(x) \\ \omega(t, 0) = \omega(t, 1) \end{cases}$$

требуется построить три разностные схемы:

1. условно устойчивую
2. безусловно устойчивую
3. безусловно неустойчивую

Будем исследовать решение задачи в ограниченной области $x \in [0, 1], t \in [0, T]$. Для этого построим сетку: зафиксируем натуральные числа N, M и разобьем отрезки $[0, T]$ и $[0, 1]$ на N и M равных отрезков соответственно. Длина шага по оси Ot будет равна $\tau := \frac{T}{N}$, а по оси Ox — $h := \frac{1}{M}$.

Точки получившейся сетки будут иметь координаты: $(t_n, x_m) = (\tau n, hm)$, $n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M}$. Таким образом, любая точка сетки задается своими координатами n и m . Значение решения задачи в точке с координатами (n, m) будем обозначать ω_m^n .

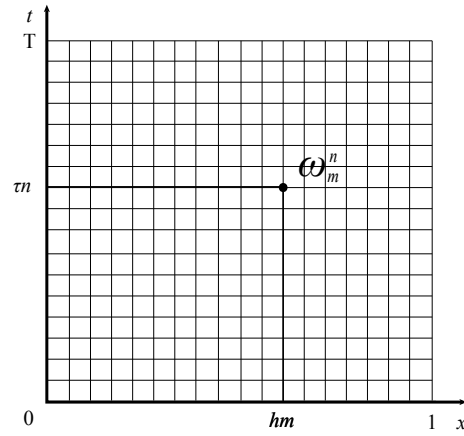


Рис. 1: Решение задачи ω_m^n в точке, заданной координатами n и m

Для построения разностной схемы мы будем пользоваться шеститочечным шаблоном:

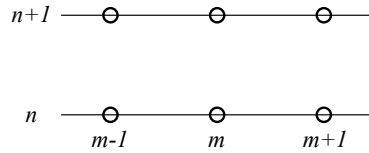


Рис. 2: Шеститочечный шаблон

3.1 Условно устойчивая схема

Для построения условно устойчивой разностной схемы будем использовать значения функции в следующих точках шаблона:

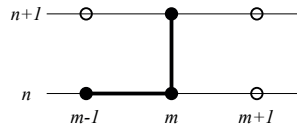


Рис. 3: Схема «Левый треугольник»

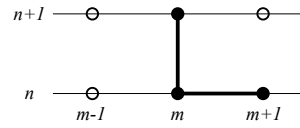


Рис. 4: Схема «Правый треугольник»

Причем тем или иным способом мы будем пользоваться в зависимости от знака λ (см. п. 5). В первом случае (рис. 3) мы имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &\rightarrow \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &\rightarrow \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h}\end{aligned}$$

Получим схему:

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{A})$$

Аналогично, во втором случае (рис. 4):

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_{m+1}^n - \omega_m^n}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{B})$$

В обоих случаях значение ω_m^{n+1} в точке с $n + 1$ - ого слоя выражается через значения в точках с предыдущих слоёв, а так как слой ω_m^0 нам известен из условия задачи, то таким образом мы найдем значения во всех точках сетки.

3.2 Безусловно устойчивая схема

Для построения безусловно устойчивой разностной схемы будем использовать значения функции в следующих точках шаблона:

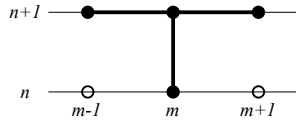


Рис. 5: «Т» - схема

Получим следующую схему:

$$\begin{cases} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} = \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_m^{n+1}}{h} \\ \omega_m^0 = \nu(x_n) \\ \omega_0^n = \omega_M^n \end{cases} \quad (\text{C})$$

4. Порядок аппроксимации

4.1 Схема «Левый треугольник»

Рассмотрим оператор $L_{\tau,h}$:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h}$$

Порядок аппроксимации найдем, подставив в оператор $L_{\tau,h}$ точное решение задачи и оценив получившееся. Точное решение задачи в точке с координатами (n, m) будем обозначать $\omega(n, m)$.

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n, m) - \omega(n, m-1)}{h}$$

Разложим функцию ω в ряд Тейлора в точке (n, m) :

$$\begin{aligned}\omega(n+1, m) &= \omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n, m-1) &= \omega(n, m) - \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2)\end{aligned}$$

Тогда, так как $\omega'_t(n, m) - \lambda\omega'_x(n, m) = 0$ (поскольку $\omega(n, m)$ — точное решение задачи), получим:

$$\begin{aligned}L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) - \omega(n, m)}{\tau} - \\ &\quad - \lambda \frac{\omega(n, m) - (\omega(n, m) - \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2))}{h} = \\ &= \omega'_t(n, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n, m) + \underline{O}(h) = \underline{O}(\tau + h)\end{aligned}$$

4.2 Схема «Правый треугольник»

Так же, как и с предыдущей схемой, произведем аналогичные преобразования:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n, m+1) - \omega(n, m)}{h}$$

Разложим функцию ω в ряд Тейлора в точке (n, m) :

$$\begin{aligned}\omega(n+1, m) &= \omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n, m+1) &= \omega(n, m) + \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n, m) + \omega'_t(n, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) - \omega(n, m)}{\tau} - \\ &\quad - \lambda \frac{\omega(n, m) + \omega'_x(n, m)h + \underline{O}(h^2) - \omega(n, m)}{h} = \\ &= \omega'_t(n, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n, m) + \underline{O}(h) = \underline{O}(\tau + h)\end{aligned}$$

4.3 Схема «Т»

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} = \frac{\omega(n+1, m) - \omega(n, m)}{\tau} - \lambda \frac{\omega(n+1, m+1) - \omega(n+1, m-1)}{h}$$

Разложим функцию ω в ряд Тейлора в точке $(n+1, m)$:

$$\begin{aligned}\omega(n, m) &= \omega(n+1, m) - \omega'_t(n+1, m)\tau + \underline{O}(\tau^2) \\ \omega(n+1, m+1) &= \omega(n+1, m) + \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3) \\ \omega(n+1, m-1) &= \omega(n+1, m) - \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)\end{aligned}$$

Подставим получившиеся разложения в оператор $L_{\tau,h}\omega|_{m,n}$

$$\begin{aligned} L_{\tau,h}\omega|_{m,n} &= \frac{\omega(n+1, m) - (\omega(n, m) = \omega(n+1, m) - \omega'_t(n+1, m)\tau + \underline{O}(\tau^2))}{\tau} - \\ &- \lambda \left[\frac{\omega(n+1, m) + \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)}{2h} - \right. \\ &- \left. \frac{\omega(n+1, m) - \omega'_x(n+1, m)h + \omega''_{xx}(n+1, m)h^2 + \underline{O}(h^3)}{2h} \right] = \\ &= \omega'_t(n+1, m) + \underline{O}(\tau) - \lambda\omega'_x(n+1, m) + \underline{O}(h^2) = \underline{O}(\tau + h^2) \end{aligned}$$

Для определения порядка аппроксимации воспользуемся следующей нормой:

$$\|u\| = h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |u_{m,n}|$$

Аппроксимация исходной задачи схемами (А), (В) и (С) имеет место в том случае, когда

$$\|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| \rightarrow 0, \quad h, \tau \rightarrow 0$$

где:

1. $A_{h,\tau}$ – матрица системы линейных уравнений, соответствующей разностной схеме (А), (В) или (С)
2. $F_{h,\tau}$ – свободный столбец той же системы линейных уравнений
3. $[\omega]_{h,\tau}$ – точное решение исходной задачи, взятое в узлах сетки

Для схемы «Левый треугольник» имеем:

$$F_{h,\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} \|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| &= h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |L_{h,\tau}\omega|_{m,n}| \leq \\ &\leq h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{n,m} \cdot (\tau + h) \leq \\ &\leq \frac{T}{N} \frac{1}{M} \cdot NM \cdot \max_{n,m} C_{n,m} \cdot (\tau + h) = C \cdot (\tau + h) \end{aligned}$$

Таким образом, аппроксимация схемы «Левый треугольник» установлена. Аналогичными рассуждениями устанавливается аппроксимация схемы «Правый треугольник».

Для схемы «Т» имеем:

$$F_{h,\tau} = 0$$

$$\begin{aligned}
\|A_{h,\tau}[\omega]_{h,\tau} - F_{h,\tau}\| &= h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N |L_{h,\tau}\omega|_{m,n}| \leq \\
&\leq h\tau \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N C_{n,m} \cdot (\tau + h^2) \leq \\
&\leq \frac{T}{N} \frac{1}{M} \cdot NM \cdot \max_{n,m} C_{n,m} \cdot (\tau + h^2) = C \cdot (\tau + h^2)
\end{aligned}$$

5. Исследование устойчивости

Для того, чтобы установить устойчивость или неустойчивость схемы, будем пользоваться спектральным признаком устойчивости (СПУ). Пусть на сетке с узлами (n, m) построена разностная схема

$$L_{h,\tau}\omega_{h,\tau}|_{n,m} = 0$$

Если любое частное решение уравнения $L_{h,\tau}\omega_{h,\tau}|_{n,m} = 0$, имеющее вид

$$\omega_m^n = \mu^n e^{im\varphi}$$

для любых φ равномерно ограничено по n , то схема является устойчивой. В противном случае, схема устойчивой не является.

5.1 Схема «Левый треугольник»

Запишем разностную схему для данного случая:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_m^n - \omega_{m-1}^n}{h} = 0$$

Подставим $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$ и выясним, при каких μ эта функция будет являться решением:

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^n e^{im\alpha} - \mu^n e^{i(m-1)\alpha}}{h}$$

Сократим на $\mu^n e^{im\alpha}$ и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{\mu - 1}{\tau} &= \lambda \frac{1 - e^{-i\alpha}}{h} \\
\mu &= 1 + r - r e^{-i\alpha}
\end{aligned}$$

где $r = \frac{\lambda\tau}{h}$.

Очевидно, данная функция равномерно ограничена по n , так как $|\mu| \leq 1 \forall \alpha$. Множество значений μ – окружность Q на комплексной плоскости с центром в точке $1 + r$ и радиуса r . Она касается единичной окружности в точке 1. Поэтому, если $r > 0$, то вся окружность Q лежит вне единичного круга, следовательно, схема неустойчива. В случае, если $|r| < 0$, схема будет устойчива, если $|r| \geq -1$ и неустойчива в остальных случаях.

Вывод:

1. Если $\lambda > 0$, то $r = \frac{\lambda\tau}{h} > 0$ и схема безусловно неустойчива
2. Если $\lambda < 0$, то $r = \frac{\lambda\tau}{h} < 0$. Схема устойчива при $\lambda \geq -\frac{h}{\tau}$ и неустойчива в остальных случаях. Получили условно устойчивую схему.

5.2 Схема «Правый треугольник»

Приведем аналогичные рассуждения. Запишем разностную схему:

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^n - \omega_m^n}{h} = 0$$

Подставим $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$ и выясним, при каких μ эта функция будет являться решением:

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} = \lambda \frac{\mu^n e^{i(m+1)\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{h}$$

Сократим на $\mu^n e^{im\alpha}$ и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 1}{\tau} &= \lambda \frac{e^{i\alpha} - 1}{h} \\ \mu &= 1 - r + r e^{i\alpha} \end{aligned}$$

где $r = \frac{\lambda\tau}{h}$.

Очевидно, данная функция равномерно ограничена по n , так как $|\mu| \leq 1 \forall \alpha$. Множество значений μ – окружность Q на комплексной плоскости с центром в точке $1 - r$ и радиуса r . Она касается единичной окружности в точке 1. Поэтому, если $r < 0$, то вся окружность Q лежит вне единичного круга, следовательно, схема неустойчива. В случае, если $|r| > 0$, схема будет устойчива, если $|r| \leq 1$ и неустойчива в остальных случаях.

Вывод:

1. Если $\lambda < 0$, то $r = \frac{\lambda\tau}{h} < 0$ и схема безусловно неустойчива
2. Если $\lambda > 0$, то $r = \frac{\lambda\tau}{h} > 0$. Схема устойчива при $\lambda \leq \frac{h}{\tau}$ и неустойчива в остальных случаях. Получили условно устойчивую схему.

В итоге при $\lambda < 0$ в качестве условно устойчивой разностной схемы выбираем схему «Левый треугольник», а в качестве безусловно неустойчивой – «Правый треугольник». При $\lambda > 0$ в качестве условно устойчивой разностной схемы выбираем схему «Правый треугольник», а в качестве безусловно неустойчивой – «Левый треугольник».

5.3 Схема «Т»

$$L_{\tau,h}\omega|_{m,n} := \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

Подставим $\omega(n, m) = \omega_m^n = \mu^n e^{im\alpha}$:

$$\frac{\mu^{n+1} e^{im\alpha} - \mu^n e^{im\alpha}}{\tau} - \lambda \frac{\mu^{n+1} e^{i(m+1)\alpha} - \mu^{n+1} e^{i(m-1)\alpha}}{2h} = 0$$

Сократим на $\mu^n e^{im\alpha}$ и преобразуем получившееся равенство:

$$\begin{aligned} \frac{\mu - 1}{\tau} - \frac{\mu \lambda i}{h} \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} &= 0 \\ \frac{\mu - 1}{\tau} - \frac{\mu \lambda i}{h} \sin \alpha &= 0 \\ \mu &= 1 + r \mu i \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $r = \frac{\lambda \tau}{h}$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{1 - r i \sin \alpha} \\ |\mu| &= \left| \frac{1}{1 - r i \sin \alpha} \right| = \left| \frac{1 + r i \sin \alpha}{1 - r^2 \sin^2 \alpha} \right| = 1 \end{aligned}$$

Условие $|\mu| = 1 \leq 1$ выполнено $\forall \alpha$, следовательно данная схема является безусловно устойчивой.

6. Циклическая прогонка

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 y_N - c_1 y_1 + b_1 y_2 = f_1 \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i \quad i = 2, 3, \dots, N-1 \\ a_N y_{N-1} - c_N y_N + b_N y_1 = f_N \end{cases}$$

Требуется найти периодическое ($y_{i+N} = y_i$) решение системы уравнений при следующих условиях:

$$a_{i+N} = a_i, \quad b_{i+N} = b_i, \quad c_{i+N} = c_i, \quad f_{i+N} = f_i$$

Будем предполагать, что условие $|c_i| > |a_i| + |b_i|$ (условие диагонального преобладания) выполняется.

Перепишем систему в векторном виде:

$$A_N \vec{y}_N = \vec{f}_N, \quad \text{где}$$

$$\vec{y}_N = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_N = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ b_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix}$$

Для решения перепишем векторную запись системы:

$$\begin{aligned} A_{N-1}\vec{y}_{N-1} + \vec{u}_{N-1}y_N &= \vec{f}_{N-1} \\ \vec{v}_{N-1}^T \vec{y}_{N-1} - c_N y_N &= f_N, \quad \text{где} \end{aligned} \quad (1)$$

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{N-2} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_{N-1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{N-1} = \begin{pmatrix} b_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_N \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_{N-1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_{N-1} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Решение уравнения $\vec{v}_{N-1}^T \vec{y}_{N-1} - c_N y_N = f_N$ представим в виде:

$$\vec{y}_{N-1} = \vec{p}_{N-1} = y_N \vec{q}_{N-1}, \quad (2)$$

где \vec{p}_{N-1} и \vec{q}_{N-1} — решения задач:

$$A_{N-1}\vec{p}_{N-1} = \vec{f}_{N-1}, \quad A_{N-1}\vec{q}_{N-1} = -\vec{u}_{N-1}, \quad (3)$$

решения которых находятся методом обычной прогонки.

Таким образом, из предыдущих формул получаем:

$$y_N = \frac{-f_N + \vec{v}_{N-1}^T \vec{p}_{N-1}}{c_N - \vec{v}_{N-1}^T \vec{q}_{N-1}}$$

\vec{y}_{N-1} находим из (2).

Метод циклической прогонки является устойчивым, так как решения (3) находятся с использованием метода прогонки, который, в нашем предположении о преобладании диагональных элементов, является устойчивым.

6.1 Реализация циклической прогонки

Методом циклической прогонки нам будет необходимо воспользоваться только в случае схемы «Т». По условию $\omega_0^n = \omega_m^n$ мы можем продолжить решение задачи периодически из области $x \in [0, 1], T \in [0, T]$ в полосу $x \in [-\infty, \infty], T \in [0, T]$. Периодичность запишется следующим образом: $\omega_m^n = \omega_{m+M}^n$.

Значения в $m + 1$ – слое выражаются через значения в m – слое следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_m^{n+1} - \omega_m^n}{\tau} - \lambda \frac{\omega_{m+1}^{n+1} - \omega_{m-1}^{n+1}}{2h} &= 0 \\ \omega_m^{n+1} - \frac{r}{2}\omega_{m+1}^{n+1} + \frac{r}{2}\omega_{m-1}^{n+1} &= \omega_m^n \\ -\frac{r}{2}\omega_{m-1}^{n+1} - \omega_m^{n+1} + \frac{r}{2}\omega_{m+1}^{n+1} &= -\omega_m^n, \end{aligned}$$

где $r = \frac{\lambda\tau}{h}$. На n -ом шаге $n = 0, 1, \dots, N - 1$ значения ω_m^n нам известны. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0 y_{M-1} - c_0 y_0 + b_0 y_1 = f_0 \\ a_i y_{i-1} - c_i y_i + b_i y_{i+1} = f_i \quad i = 2, 3, \dots, M-2 \\ a_{M-1} y_{M-2} - c_{M-1} y_{M-1} + b_{M-1} y_0 = f_{M-1} \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} y_i &= \omega_i^{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \\ f_i &= -\omega_i^n, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \\ a_i &= -\frac{r}{2}, \quad c_i = 1, \quad b_i = \frac{r}{2} \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned}$$

В векторной записи:

$$A_n \vec{y}_n = \vec{f}_n,$$

$$\vec{y}_n = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_n = - \begin{pmatrix} \omega_0^n \\ \omega_1^n \\ \vdots \\ \omega_{M-1}^n \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} -1 & \frac{r}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{r}{2} \\ -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \frac{r}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{r}{2} & -1 & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{r}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Решаем систему методом циклической прогонки, переходим к поиску значений на следующем слое. Сходимость метода прогонки может нарушаться при произ-

вольном выборе параметров τ и h . Необходимо так их подобрать, чтобы выполнялось неравенство:

$$1 = |c_i| > |a_i| + |b_i| = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$$\frac{\lambda\tau}{h} = r < 1$$

7. Начальные условия

1.

$$\varphi_1(x) = \sin 2\pi x, \quad \varphi_2(x) = \cos 2\pi x$$

2.

$$\varphi_1(x) = \sin 2\pi x, \quad \varphi_2(x) = \sin 2\pi x + \frac{1}{10} \sin 100\pi x$$

3.

$$\varphi_1(x) = x(1-x), \quad \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ -2(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{8}, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 1-x, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$