

IFT503/711 – Théorie du calcul  
Université de Sherbrooke

## Devoir 5

Enseignant:	Manuel Lafond
Date de remise:	jeudi 2 avril 2020 avant 11h59 PM
À réaliser:	individuellement ou à deux au 1 <sup>er</sup> cycle
	individuellement aux cycles supérieurs
Modalités:	à remettre électroniquement via turnin
Pointage:	sur 40 points au 1 <sup>er</sup> cycle (+ 5pts bonus pour ★) sur 50 points aux cycles supérieurs

### Question 1.

- (a) Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un sous-ensemble  $X \subseteq V$  est appelé *dominant* si, pour tout sommet  $u \in V \setminus X$ , il existe  $v \in X$  tel que  $uv \in E$ . Considérez le problème d'optimisation suivant: 5.5 pts

MIN- $k$ -DOMSET

**Entrée:** un graphe  $G = (V, E)$  dans lequel chaque sommet a exactement  $k$  voisins;

**Sortie:** un ensemble dominant de  $G$  de taille minimum.

Montrez qu'il existe une  $(k + 1)$ -approximation pour le problème MIN- $k$ -DOMSET.

- (b) Nous avons vu que MAX-SAT, qui cherche à maximiser le nombre de clauses satisfaites, admet une  $\frac{1}{2}$ -approximation. Considérez MIN-UNSAT, le problème analogue de minimisation: 5.5 pts

MIN-UNSAT

**Entrée:** une formule booléenne CNF  $\phi$ ;

**Sortie:** une assignation qui minimise le nombre de clauses de  $\phi$  non-satisfaites.

Montrez que si  $P \neq NP$ , il n'existe pas de  $c$ -approximation pour MIN-UNSAT pour toute constante  $c > 1$ .

### Question 2.

- |  |       |
|--|-------|
| (a) Montrez que $PCP(0, 0) = P$ .  | 2 pts |
| (b) Montrez que $PCP(\log n, 0) = P$ (donc que $\log n$ bits aléatoires n'ajoutent pas de puissance à $P$ ). | 5 pts |
| (c) Montrez que si $SAT \in PCP(\log(\log n), 1)$ , alors $P = NP$ .   | 8 pts |

### Question 3.

- |  |       |
|--|-------|
| (a) Soit $\alpha$ une constante. Un graphe $G = (V, E)$ est appelé $\alpha$ -dense si $ E  \geq \alpha V ^2$ . Soit le langage   | 6 pts |
| $\alpha$ -DENSE-CLIQUE = $\{\langle G, k \rangle : G \text{ est un graphe } \alpha\text{-dense qui contient une clique de taille au moins } k\}$   |       |
| Montrez que $\alpha$ -DENSE-CLIQUE est décidable en temps $2^{O(\sqrt{ V + E })}poly( V )$ .   |       |
| (b) En supposant que la ETH est vraie, montrez que pour une certaine constante $\alpha$ , il n'existe pas d'algorithme qui décide $\alpha$ -DENSE-CLIQUE en temps $2^{o(\sqrt{ V + E })}poly( V )$ . | 8 pts |
| En d'autres termes, tout algorithme pour $\alpha$ -DENSE-CLIQUE doit prendre un temps $2^{\Omega(\sqrt{ V + E })}poly( V )$ .  |       |

*Rappel:* la ETH dit que tout algorithme pour 3-SAT sur  $n$  variables et au plus  $cn$  clauses doit prendre un temps  $2^{\Omega(n)}poly(n)$ . Considérez la réduction classique de 3-SAT à CLIQUE.

*Note:* avec un peu de travail, il est possible de montrer que CLIQUE est décidable en temps  $2^{O(\sqrt{|V|+|E|})}poly(|V|)$  (donc même sur les instances qui ne sont pas denses).

**★ Question 4. (cycles supérieurs)**

Dans cette question, nous allons démontrer que MAX-CLIQUE n'admet pas de  $(n^\varepsilon)$ -approximation pour une certaine constante  $\varepsilon$ . Rappelons que dans MAX-CLIQUE, on a en entrée un graphe et on cherche la clique de taille maximum.

Un  $n$ -booster est une collection  $\mathcal{S}$  de sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  telle que:

- $|\mathcal{S}| \leq n^k$  pour une certaine constante  $k \in \mathbb{N}$ ;
- pour tout  $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ , on a

$$|\mathcal{S}| \left( \frac{|A|}{n} - \frac{1}{100} \right)^{\log n} \leq |\{X : X \in \mathcal{S} \text{ et } X \subseteq A\}| \leq |\mathcal{S}| \left( \frac{|A|}{n} + \frac{1}{100} \right)^{\log n}$$

i.e. le nombre de sous-ensembles de  $A$  dans  $\mathcal{S}$  est borné selon la taille de  $A$ , et ce pour tous les  $A$ .

Il a été démontré qu'il existe un algorithme qui, sur entrée  $1^n$ , construit un  $n$ -booster en temps polynomial. Vous pouvez utiliser cet algorithme en boîte noire.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe où on a étiqueté les sommets  $V = \{1, \dots, n\}$ . Soit  $\mathcal{S}$  un  $n$ -booster. On définit le graphe  $H_{G,\mathcal{S}}$  comme suit: les sommets sont les ensembles de  $\mathcal{S}$ , et on ajoute une arête entre les ensembles  $S_i$  et  $S_j$  si  $S_i \cup S_j$  forme une clique dans  $G$ .

- (a) Montrez que si  $k$  est la taille maximum d'une clique dans  $G$ , alors la taille maximum d'une clique dans  $H_{G,\mathcal{S}}$  est entre  $|\mathcal{S}| \left( \frac{k}{n} - \frac{1}{100} \right)^{\log n}$  et  $|\mathcal{S}| \left( \frac{k}{n} + \frac{1}{100} \right)^{\log n}$ . 3 pts
- (b) On sait qu'il est difficile de distinguer si un graphe  $G$  a une clique d'au plus  $n/6$  sommets, ou une clique d'au moins  $n/3$  sommets. Montrez qu'il est difficile de distinguer si un graphe a une clique d'au plus  $f(n)$  sommets, ou une clique d'au moins  $n^\varepsilon f(n)$  sommets pour une certaine fonction  $f$  et une certaine constante  $\varepsilon$ . 7 pts

*Suggestion:* utilisez  $H_{G,\mathcal{S}}$  pour amplifier le “gap”. Aussi, notez que  $c^{\log n} = n^{\log c}$ .