3-COL est NP-complet

17 février 2021 18:41

① 3-COL $\in$ NP, car un coloriage $c: V(G) \to \{1,2,3\}$ peut-être donné comme certificat. Il est facile de vérifier en temps poly(n) que $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

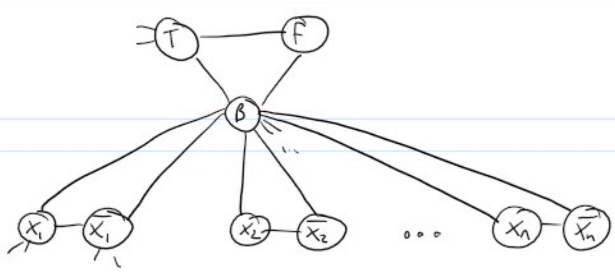
② Réduction via 3-SAT.

Soit φ une instance de 3-SAT. $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ les variables et $C_1, C_2, \dots, C_m$ les clauses.

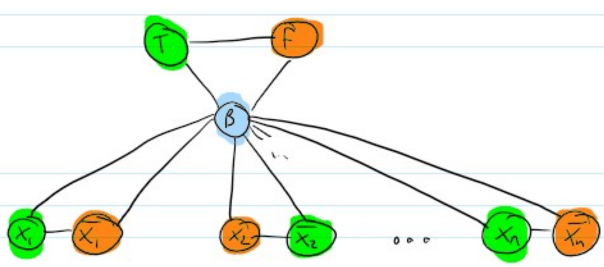
On transforme φ en G, une instance de 3-COL. ($\varphi \in$ 3-SAT $\Leftrightarrow G \in$ 3-COL)

On commence avec le sous graphe suivant:



Idée: si $\exists$ 3-coloriage, un de x_i ou $\bar{x}_i$ est de la même couleur que T
$\Rightarrow$ les x_i ou $\bar{x}_i$ à T = assignation

ex:

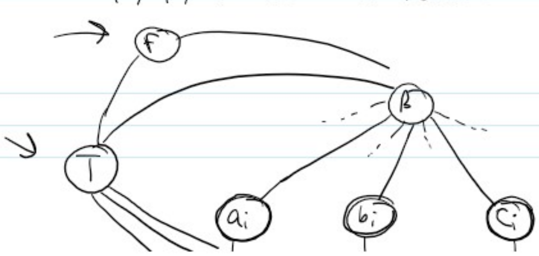


(correspondra à $x_1 = T$, $x_2 = F$, $x_n = T$)

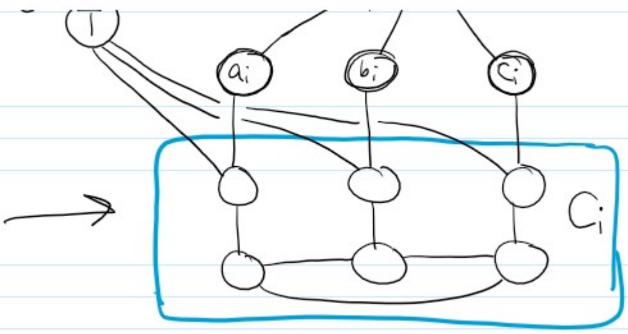
On a un "gadget" correspondant à une assignation.

Prochain but: lier "l'assignation" à "satisfaire toutes les clauses"

Pour chaque clause $C_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$, où a_i, b_i, c_i sont des variables ou leur négation, connecter a_i, b_i, c_i avec un nouveau sous-graphe comme suit:



] les $(x_i)(\bar{x}_i)$

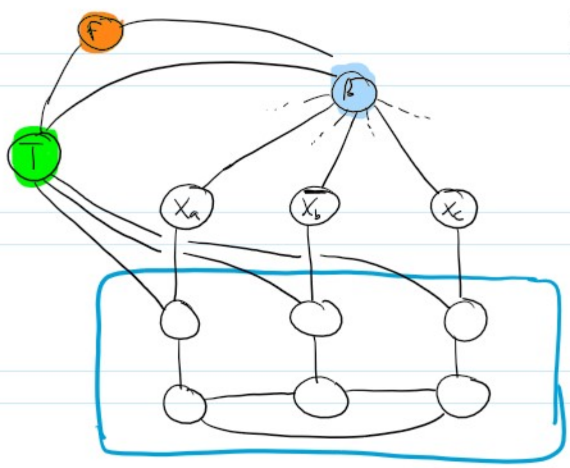


] les x_i $\bar{x}_i$

sous-graphe pour C_i (gadget pour C_i)

[Idée: il faut avoir choisi a_i, b_i ou c_i de la même couleur que T, sinon pas 3-coloriable.

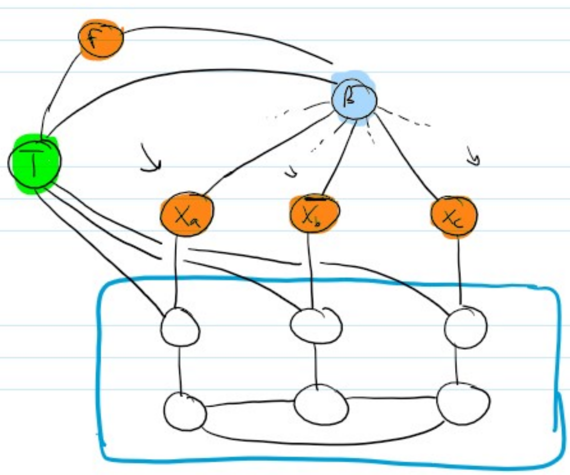
ex: $C_i = x_a \vee \bar{x}_b \vee x_c$

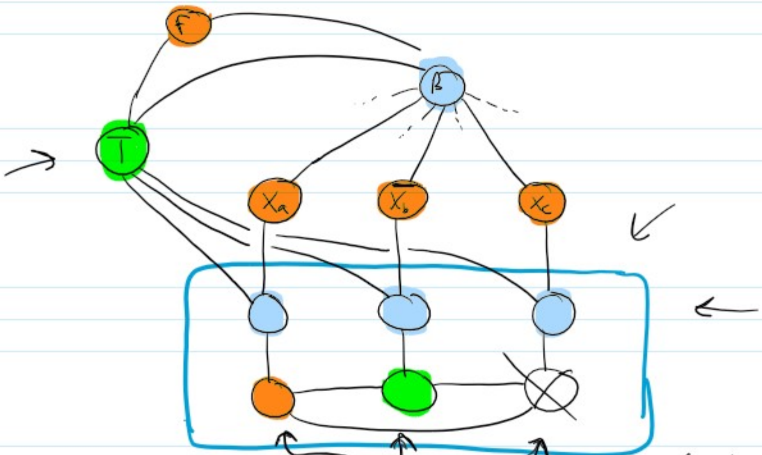


Supposons que
T est vert
B est bleu
F est rouge/orange
(sans perdre de généralité)

gadget pour C_i

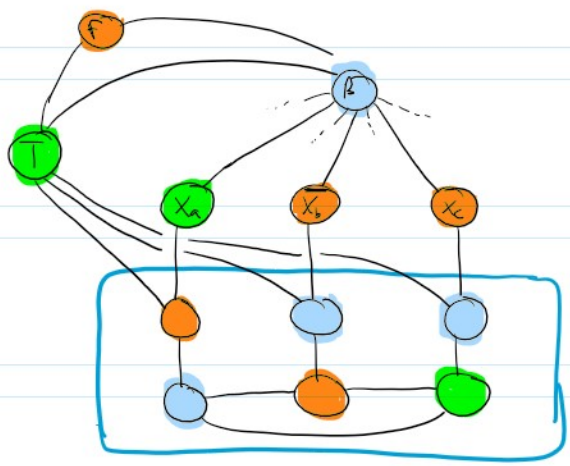
Si on a "choisi" aucun de x_a, $\bar{x}_b$, x_c de la même couleur que T.

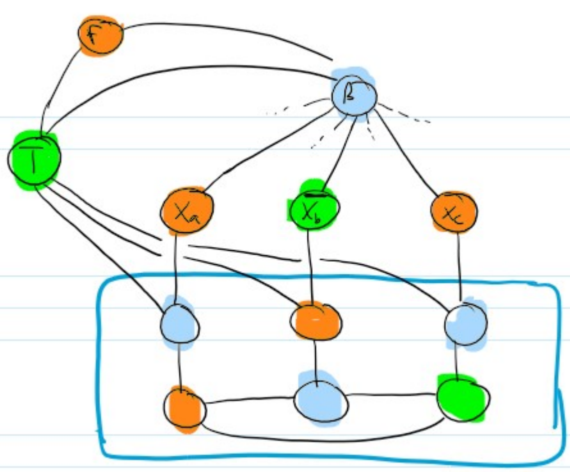


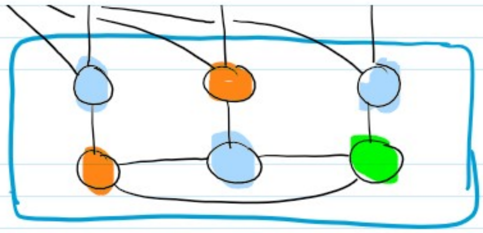


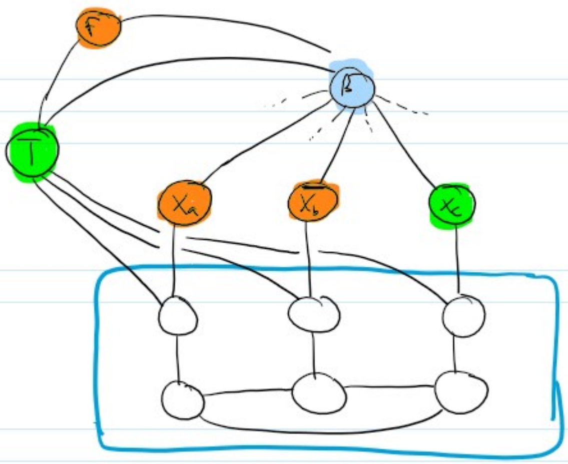
pas bleu ⇒ pas 3-coloriable

Si on a "choisi au moins 1 de x_a, $\bar{x}_b$, x_c





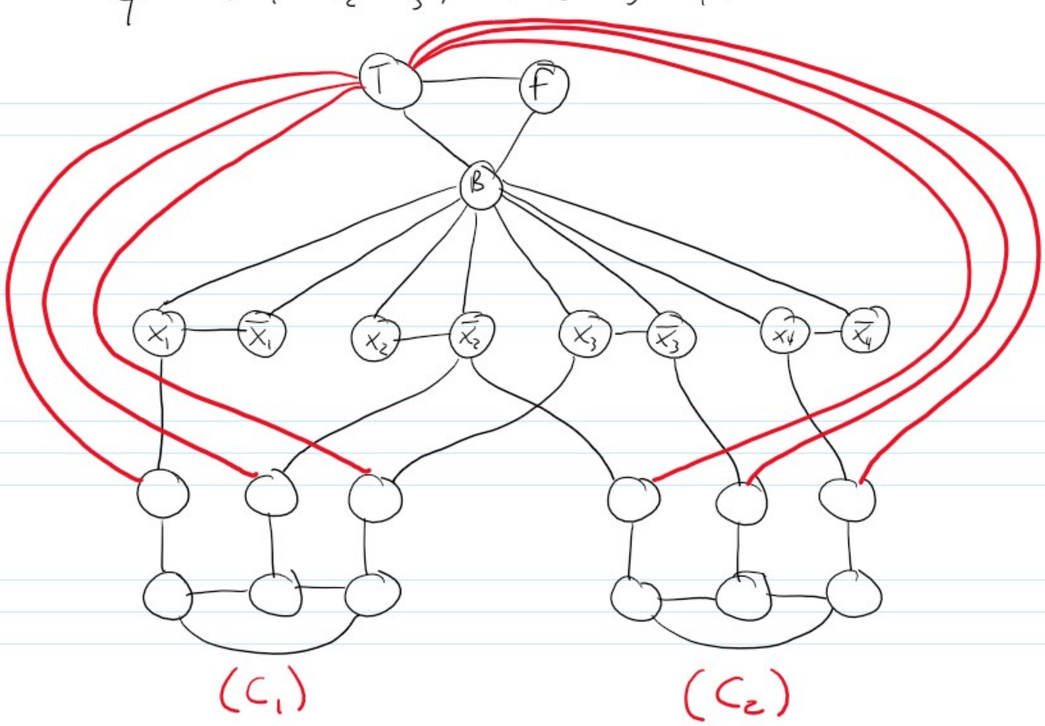




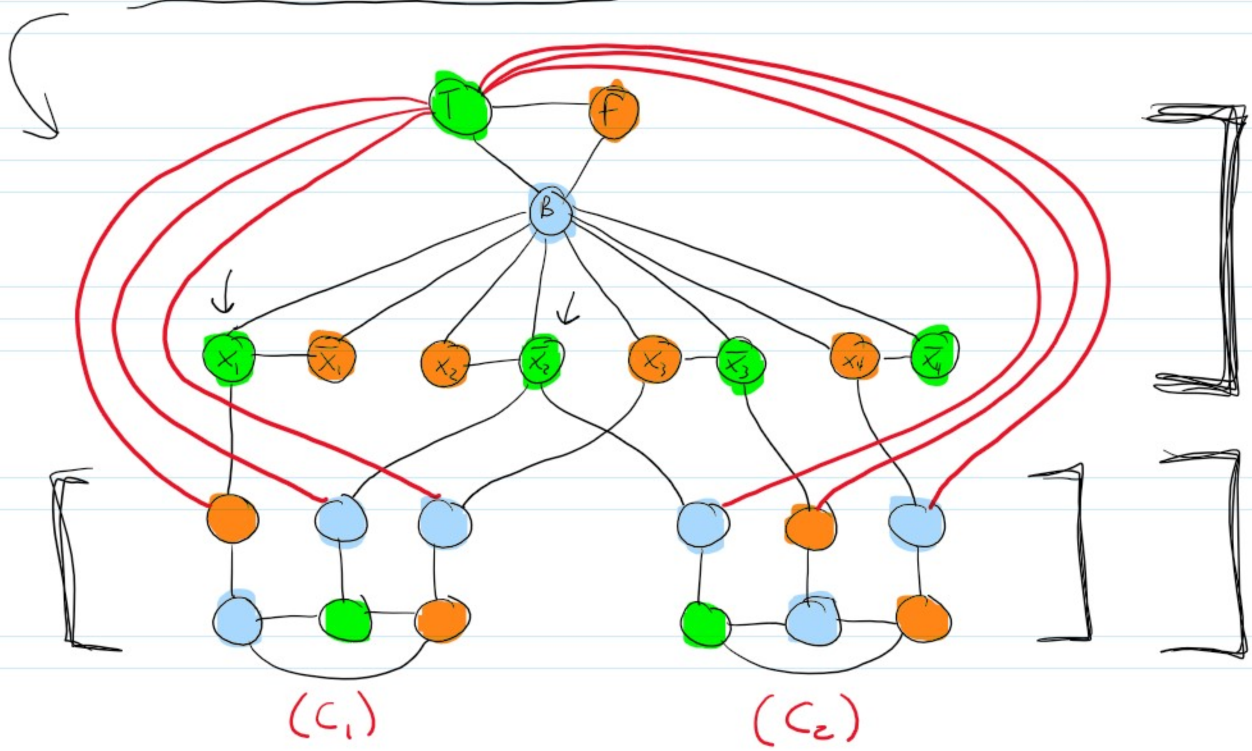
Autres cas à gérer : 2 de choisis, ou 3 de choisis

Il faut ajouter un tel gadget $\forall C_i$

$\varphi = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$



$x_1 = T$, $x_2 = F$, $x_3 = F$, $x_4 = F$ satisfait φ $\qquad \varphi \in SAT \Rightarrow G \in 3\text{-COL}$



En principe, il faudrait :

- décrire la transformation $\varphi \to G$ en mots (+ figures à l'appui)
- montrer que $\varphi \in 3\text{-SAT} \Rightarrow G \in 3\text{-COL}$

  Idée : assignation correspond à choix des x_i ou $\bar{x}_i$ verts
  chaque clause satisfaite $\Rightarrow$ chaque gadget-clause coloriable
- montrer que $G \in 3\text{-COL} \Rightarrow \varphi \in 3\text{-SAT}$

  Idée : pour 3-colorier, il faut avoir choisi un x_i ou $\bar{x}_i$ vert pour satisfaire chaque clause.
  x_i et $\bar{x}_i$ jamais verts tous les deux
  $\Rightarrow$ les verts = assignation valide qui satisfait chaque clause