Réductions, réductions, ...

18 février 2021 10:39

DBL-SAT $= \{ \varphi :$ il existe au moins 2 assignations distinctes qui satisfont $\varphi \}$

- N'aide pas
- DBL-SAT est NP-complet

① DBL-SAT $\in$ NP car on peut fournir 2 assignations satisfaisantes comme certificat, ce qui est vérifiable en temps poly.

② DBL-SAT est NP-difficile ($\forall L \in NP$, $L \leq_p$ DBL-SAT)

Réduction via SAT $= \{ \varphi : \varphi$ est satisfaisable $\}$, qui est NP-diff.

$\text{SAT} \xrightarrow{f} \text{DBL-SAT}$ $\quad \varphi \in \text{SAT} \iff f(\varphi) \in \text{DBL-SAT}$

Étant donné $\varphi$, on construit $f(\varphi) = \varphi \wedge (z \vee \bar{z})$

où $z$ est une nouvelle variable (pas dans $\varphi$). Il est clair que $f$ peut s'implémenter en temps poly.

On montre que $\varphi$ est sat. $\iff \varphi \wedge (z \vee \bar{z})$ est doub. sat.

$\Rightarrow$ Supposons que $\varphi$ est sat. par une assignation A.

Alors, on peut satisfaire $\varphi \wedge (z \vee \bar{z})$ en assignant

A avec $z = T$ (A sat. $\varphi$ et $z = T$ sat. $(z \vee \bar{z})$)

ou

A avec $z = F$ (A sat. $\varphi$ et $z = F$ sat. $(z \vee \bar{z})$)

On a donc 2 assignations $\Rightarrow f(\varphi) = \varphi \wedge (z \vee \bar{z}) \in$ DBL-SAT

$\Leftarrow$ Supposons que $\varphi \wedge (z \vee \bar{z})$ est satisfaisable par $A_1$ ou $A_2$.

En particulier, $A_1$ satisfait $\varphi$ peu importe la valeur de $z \Rightarrow \varphi \in$ SAT. ∎

---

SUBSET-SUM $= \{ \langle S, k \rangle :$ S est un ensemble d'entiers encodés binaire, k est un entier encodé binaire, $\exists S' \subseteq S$, $\sum_{s \in S'} s = k \}$

k = somme cible $\quad$ ex: $S = \{1, 8, 14, 15\}$ $\quad k = 30$

$S' = \{1, 14, 15\}$

SUBSET-SUM est NP-complet.

① SUBSET-SUM $\in$ NP, car $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{s \in S'} s = k$ peut servir de certificat vérifiable en temps poly.

② NP-difficile.

Réduction via IND-SET. ($\langle G, k \rangle$  $k=3$)

Sur instance $\langle G, k \rangle$ de IND-SET, on générer $f(\langle G, k \rangle) = \langle S, t \rangle$ de SUBSET-SUM.

- On numérote les arêtes de G : $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
- Pour chaque $u \in V(G)$, définir $E_u = \{ uv \in E(G) : v$ est voisin de $u \}$

  ($E_u$ = arêtes qui touchent $u$)

  On ajoute ensuite l'entier suivant à S

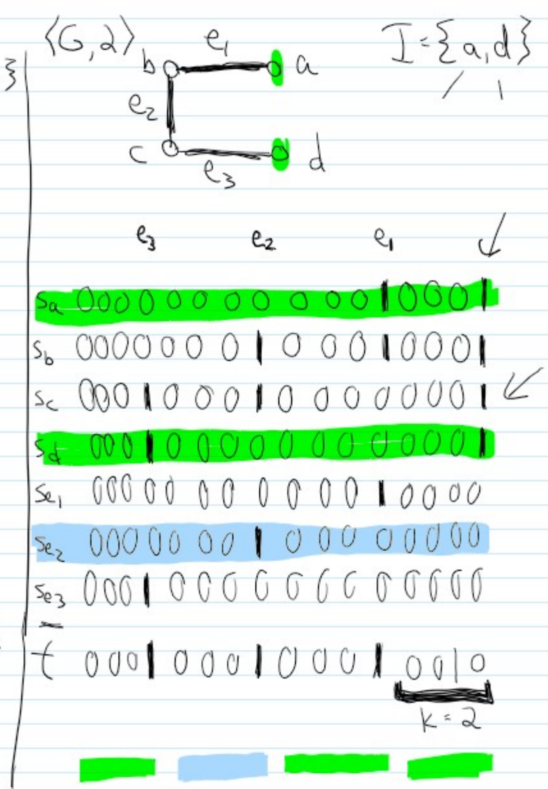
  $s_u = \sum_{e_i \in E_u} 2^{n \cdot i} + 1$

- Pour chaque $e_i \in E(G)$, on ajoute l'entier à S:

  $s_{e_i} = 2^{n \cdot i}$

- On met $t = \sum_{i=1}^{m} 2^{n \cdot i} + k$

$S = \{ s_u : u \in V(G) \} \cup \{ s_{e_i} : e_i \in E(G) \}$




$\Rightarrow \langle G, k \rangle \in$ IND-SET $\Rightarrow \langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM

Soit I un ens. indép. de G, $|I| = k$.

On choisit d'abord dans S' le sous-ensemble $\{ s_u : u \in I \}$. De cette façon,

informel: les n derniers bits somment à k et les positions de chaque $e_i$ sont à 1 pour les $e_i$ touchant à un élément de I. (parce que les sommets de I ne partagent pas d'arête)

Pour les autres $e_i$, on ajoute $s_{e_i}$ à notre solution.

$\rightarrow$ chaque bit $e_i$ est à 1 et les n derniers bit à k $\rightarrow$ on a un sous-ensemble qui somme à t.

ensemble qui somme à $t$.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il $\exists S' \subseteq S$ tel que $\sum_{s \in S'} s = t$.

- Soit $I = \{u : s_u \in S'\}$. Il faut que $|I| = k$ car il faut $k$ entiers parmi $\{s_u : u \in V(G)\}$ dans $S'$ pour que les $n$ derniers bits somment à $k$.
- Aussi, $I$ est indépendant, car s'il existait $u, v \in I$ tel que $uv \in E(G)$, dans quel cas $s_u$ et $s_v$ seraient dans $S'$, Mais alors, le bit correspondant à l'arête $uv$ ne serait pas à 1 dans la somme, ou bien un des bit à gauche aurait été à 1.

Donc, $|I| = k$ et $I$ est indép. $\Rightarrow \langle G, k \rangle \in$ IND-SET ■

---

SET-COVER $= \{ \langle S, U, k \rangle :$ $S$ est une collection d'ensembles, $\exists S' \subseteq S$, $|S'| \leq k$, $\bigcup_{S_i \in S'} S_i = U \}$

ex: $S = \{ \{1,2\}, \{2,3,4\}, \{1,5\} \}$ $U = \{1,2,3,4,5\}$ $k = 2$
$S' = \{ \{2,3,4\}, \{1,5\} \}$

SET-COVER est NP-complet

1. Dans NP: $S' \subseteq S$ sert de certificat (à compléter)
2. NP-difficile. Réduction via 3-SAT.

Soit $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$, où les $C_i$ sont les clauses, sur variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

ex: $C_i = (x_a \vee \bar{x}_b \vee x_c)$

On construit $\langle S, U, k \rangle$:

$U = \{ x_1', x_2', \ldots, x_n', C_1', C_2', \ldots, C_n' \}$

$S = \{ S_1, \bar{S}_1, S_2, \bar{S}_2, \ldots, S_n, \bar{S}_n \}$ ← un ensemble par assignation de variable
$S_1 \equiv x_1 = T$ $\bar{S}_1 \equiv x_1 = F$

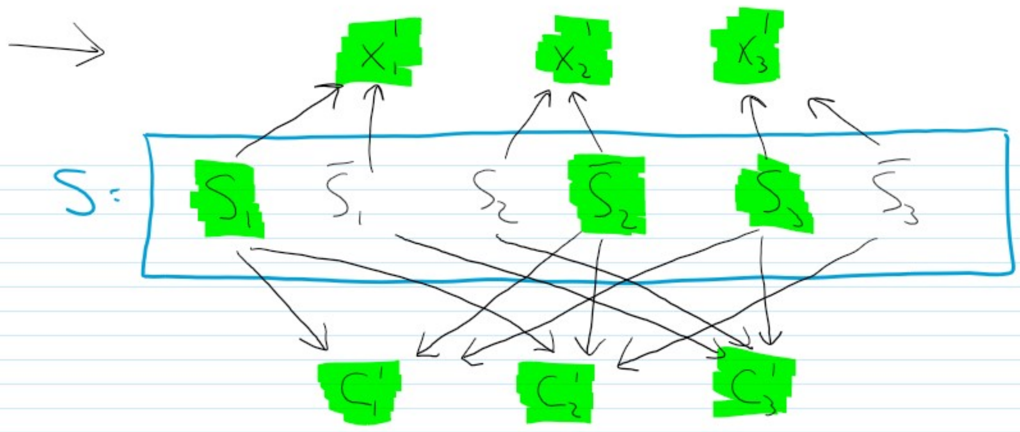
où

$S_i = \{x_i'\} \cup \{ C_j' : x_i = T \text{ satisfait } C_j \}$

$\bar{S}_i = \{x_i'\} \cup \{ C_j' : x_i = F \text{ satisfait } C_j \}$

$k = n$

ex: $\varphi = \underbrace{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1)}_{C_2} \wedge \underbrace{(x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1)}_{C_3}$




↗ veut dire "contient"

sat: $x_1 = T$ $x_2 = F$ $x_3 = T$

$n = 3$

On montre que $\varphi \in$ 3-SAT $\Leftrightarrow \langle S, U, k \rangle \in$ SET-COVER $k = n$

$\Rightarrow$ Soit $A$ une assign. qui satisfait $\varphi$.

Soit $S' = \{ S_i : x_i = T \text{ dans } A \} \cup \{ \bar{S}_i : x_i = F \text{ dans } A \}$

Alors,
- $|S'| = n$, car on choisit exactement un de $S_i$ ou $\bar{S}_i$ $\forall x_i$
- $S'$ couvre tous les $x_i'$ car on choisit un de $S_i$ ou $\bar{S}_i$ $\forall x_i$

Alors, $|S'| = n$, car on choisit exactement un de $S_i$ ou $\bar{S_i}$ $\forall i$

- $S'$ couvre tous les $x_i'$ car on choisit un de $S_i$ ou $\bar{S_i}'$ $\forall x_i$
- $S'$ couvre tous les $C_i'$ car $A$ satisfait chaque clause et donc que chaque $C_i'$ est couvert par un des ensembles $S_i$ ou $\bar{S_i}$.

$\Rightarrow \langle S, \mathcal{U}, k \rangle \in$ SET-COVER

$\Leftarrow$ Soit $S' \subseteq S$ tel que $|S'| = n$ et tel que $\bigcup_{X \in S'} X = \mathcal{U}$.
Puisque $|S'| = n$ et qu'il faut couvrir chaque $x_i'$, il faut choisir exactement un de $S_i$ ou $\bar{S_i}$ dans $S'$ (pas les deux, car sinon on aurait $|S'| > n$).
On peut l'assignation où

$x_i = T$ si $S_i \in S'$

$x_i = F$ si $\bar{S_i} \in S'$

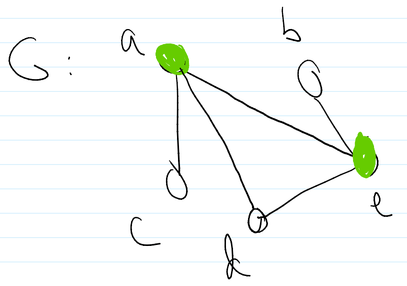
Cette assignation satisfait chaque $C_i$ car $S'$ couvre chaque $C_i'$. (argumenter un peu plus)

$\Rightarrow \varphi \in$ 3-SAT. ∎

---

VERTEX-COVER

Soit $G$ un graphe. On dit que $X \subseteq V(G)$ est un vertex-cover (couverture par sommet) si $\forall uv \in E(G)$, $u \in X$ ou $v \in X$ (ou les deux).

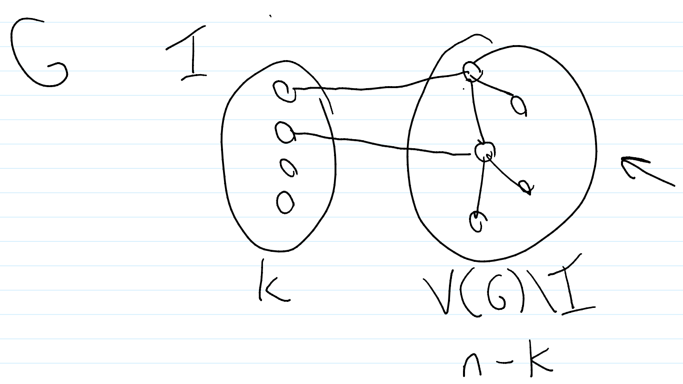


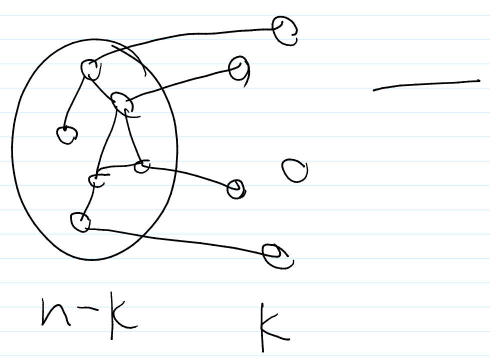

$\{a, e\}$ est un vertex-cover (taille 2)

VERTEX-COVER $= \{ \langle G, k \rangle : G$ a un vertex-cover de taille $k \}$

VERTEX-COVER est NP-complet.

Théorème : Un graphe $G$ a un ensemble indépendant de taille $k$
$\Longleftrightarrow$
$G$ a un vertex-cover de taille $n-k$. $(n = |V(G)|)$




VERTEX-COVER est NP-complet

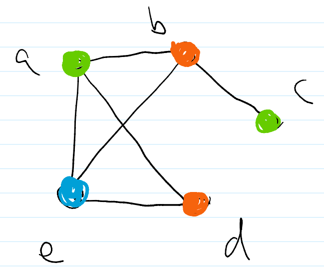
IND-SET $\langle G, k \rangle \xrightarrow{f}$ VERTEX-COVER $\langle G, n-k \rangle$

$\langle G, k \rangle \in$ IND-SET $\Longleftrightarrow \langle G, n-k \rangle \in$ VERTEX-COVER ex: VERTEX-COVER $\leq_p$ SET-COVER

NP-hard "compendium"

## k-COL

Un graphe $G$ est $k$-Coloriable s'il $\exists c: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que $uv \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.



3-coloriable

k-COL = $\{G : G$ est $k$-coloriable$\}$

3-COL est NP-complet

À ne pas oublier (comme moi) : $A \leq_p B$

La fonction de transformation $f$ **doit** prendre un temps polynomial.

Quand on décrit une réduction, il faut s'en assurer (et si ce n'est évident immédiatement, il faut l'argumenter)