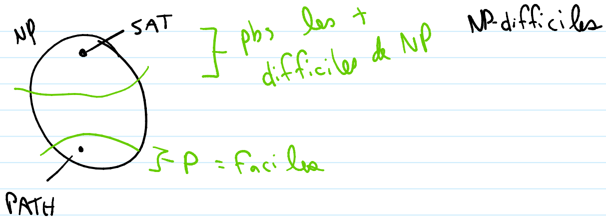
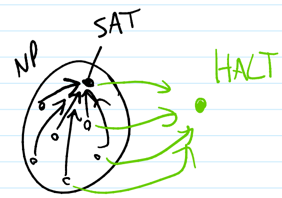
Problèmes NP-complets

4 février 2022 11:05



- Pour définir NP-difficile, on utilise une réduction polynomiale $\leq_p$
- Soit A, B deux langages. On dit $A \leq_p B$ s'il existe une fct $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ telle que $w \in A \iff f(w) \in B$ et f est calculable en temps polynomial.



<u>Déf</u> : un langage L est NP-difficile si :
$\forall L' \in NP$, on a $L' \leq_p L$.

De plus, si $L \in NP$, alors L est NP-complet.

<u>Thm</u> : s'il existe une MT en temps poly pour un L NP-difficile, alors $\forall L' \in NP$, on a $L' \in P$.

Si $L \in P$, alors tout $L' \in NP$ est dans P.

- Supposons qu'un L NP-difficile est dans P. Donc, $\exists$ MT M pour décider L en temps $O(n^k)$.

Soit $L' \in NP$. On sait $L' \leq_p L$, et donc $\exists f$ calculable en $O(n^{k'})$ telle que

$$w \in L' \iff f(w) \in L.$$

Pour décider L', on construit la MT :

sur entrée w : $(w \in L'\ ?)$
- $O(n^{k'})$ calculer $f(w)$
- $O(n^k)$ Passer $f(w)$ à M
- $O(1)$ accepter ssi M a accepté

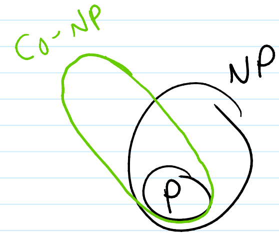
L' w

$\updownarrow$

L $f(w)$ M

co-NP

Un langage L est dans co-NP si son complément $\bar{L}$ est dans NP.
$(\bar{L} = \{w : w \notin L\})$

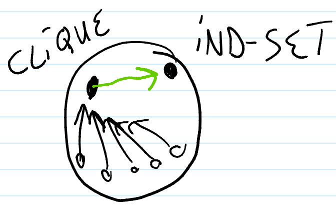


ex: $\text{UNSAT} = \{\varphi : \varphi$ est une formule bool. non-satisfaisable$\}$

$\overline{\text{UNSAT}} = \text{SAT}$ Puisque $\text{SAT} \in \text{NP}$, alors $\text{UNSAT} \in$ co-NP.

$\text{IND-SET} = \{\langle G,k\rangle : G$ a un ensemble indép. de taille $k\}$
est NP-complet.

Pour prouver que IND-SET est NP-difficile, on va utiliser un autre langage NP-difficile et le réduire à IND-SET.



Thm: CLIQUE est NP-difficile. (boîte noire)

On veut montrer que $\text{CLIQUE} \leq_p \text{IND-SET}$

On veut trouver f t.q. $\langle G,k\rangle \in \text{CLIQUE} \Leftrightarrow f(\langle G,k\rangle) \in \text{IND-SET}$

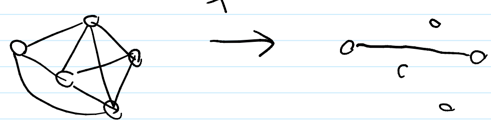
Soit $\langle G,k\rangle$ une instance de CLIQUE.
On définit $f(\langle G,k\rangle)$ comme $\langle \bar{G},k\rangle$, où
$\bar{G}$ est le complément de G, c'est-à-dire $V(\bar{G}) = V(G)$
$E(\bar{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$.

$\langle G,k\rangle \xrightarrow{f} \langle \bar{G},k\rangle$

Il est facile de voir que

$\overline{E}(G) = \{uv : uv \notin E(G)\}$.

$\langle G, k \rangle \xrightarrow{f} \langle \overline{G}, k \rangle$



Il est facile de voir que f est calculable en temps poly.

Il faut montrer que G a une clique de taille k
$\iff$ $\overline{G}$ a un ens. indep. de taille k

$\Rightarrow$ Supposons que G a une clique de taille k. Soit C une telle clique. On voit C est un ens. indep. de $\overline{G}$ car il n'y aura aucune arête entre les sommets de C dans $\overline{G}$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\overline{G}$ a un ens. indep. de taille k. Soit C un tel ens. indép. Alors C est une clique de taille k dans G. ∎

Recette générale pour montrer qu'un langage L est NP-complet.

1. $L \in NP$. Souvent trivial avec certificat.
2. L est NP-difficile. Trouver un langage NP-difficile A. Réduire A à L (montrer que $A \leq_p L$)
   - 2.1 · Décrire la transformation f de A à L.
   - 2.2 · Montrer $w \in A \Rightarrow f(w) \in L$
   - 2.3 · Montrer $f(w) \in L \Rightarrow w \in A$

<u>Thm</u>: CLIQUE est NP-complet.

Pour le prouver, on va utiliser une réduction via 3-SAT.

3-SAT $= \{ \varphi : \varphi$ est une formule booléene en 3-$\underbrace{\text{CNF}}_{\text{conjunctive normal form}}$ satisfaisable $\}$

CNF: φ est un ensemble de clauses liées par des $\wedge$

de ses variables liées par des $\vee$

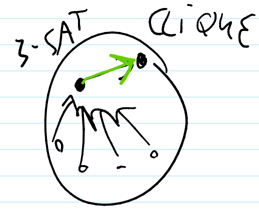
CNF: φ est un ensemble de clauses liées par des $\wedge$

clause: variables liées par des $\vee$

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_4 \vee \bar{x}_5) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

clauses clause clause

3-CNF: chaque clause a 3 variables.



<u>Thm</u>: 3-SAT est NP-complet. (boîte noire)