

IFT503/711 – Théorie du calcul
Université de Sherbrooke

Devoir 5

Enseignant: Manuel Lafond
 Date de remise: jeudi 2 avril 2020 avant 11h59 PM
 À réaliser: individuellement ou à deux au 1^{er} cycle
 individuellement aux cycles supérieurs
 Modalités: à remettre électroniquement via turnin
 Pointage: sur 40 points au 1^{er} cycle (+ 5pts bonus pour ★)
 sur 50 points aux cycles supérieurs

Question 1.

- (a) Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $X \subseteq V$ est appelé *dominant* si, pour tout sommet $u \in V \setminus X$, il existe $v \in X$ tel que $uv \in E$. Considérez le problème d'optimisation suivant: 5.5 pts

MIN- k -DOMSET

Entrée: un graphe $G = (V, E)$ dans lequel chaque sommet a exactement k voisins;

Sortie: un ensemble dominant de G de taille minimum.

Montrez qu'il existe une $(k + 1)$ -approximation pour le problème MIN- k -DOMSET.

- (b) Nous avons vu que MAX-SAT, qui cherche à maximiser le nombre de clauses satisfaites, admet une $\frac{1}{2}$ -approximation. Considérez MIN-UNSAT, le problème analogue de minimisation: 5.5 pts

MIN-UNSAT

Entrée: une formule booléenne CNF ϕ ;

Sortie: une assignation qui minimise le nombre de clauses de ϕ non-satisfaites.

Montrez que si $P \neq NP$, il n'existe pas de c -approximation pour MIN-UNSAT pour toute constante $c > 1$.

Question 2.

- (a) Montrez que $PCP(0, 0) = P$. 2 pts
- (b) Montrez que $PCP(\log n, 0) = P$ (donc que $\log n$ bits aléatoires n'ajoutent pas de puissance à P). 5 pts
- (c) Montrez que si $SAT \in PCP(\log(\log n), 1)$, alors $P = NP$. 8 pts

Question 3.

- (a) Soit α une constante. Un graphe $G = (V, E)$ est appelé α -dense si $|E| \geq \alpha|V|^2$. Soit le langage 6 pts

α -DENSE-CLIQUE = $\{\langle G, k \rangle : G \text{ est un graphe } \alpha\text{-dense qui contient une clique de taille au moins } k\}$

Montrez que α -DENSE-CLIQUE est décidable en temps $2^{O(\sqrt{|V|+|E|})} \text{poly}(|V|)$.

- (b) En supposant que la ETH est vraie, montrez que pour une certaine constante α , il n'existe pas d'algorithme qui décide α -DENSE-CLIQUE en temps $2^{o(\sqrt{|V|+|E|})} \text{poly}(|V|)$. 8 pts

En d'autres termes, tout algorithme pour α -DENSE-CLIQUE doit prendre un temps $2^{\Omega(\sqrt{|V|+|E|})} \text{poly}(|V|)$.

Rappel: la ETH dit que tout algorithme pour 3-SAT sur n variables et au plus cn clauses doit prendre un temps $2^{\Omega(n)} \text{poly}(n)$. Considérez la réduction classique de 3-SAT à CLIQUE.

Note: avec un peu de travail, il est possible de montrer que CLIQUE est décidable en temps $2^{O(\sqrt{|V|+|E|})} \text{poly}(|V|)$ (donc même sur les instances qui ne sont pas denses).

★ Question 4. (cycles supérieurs)

Dans cette question, nous allons démontrer que MAX-CLIQUE n'admet pas de (n^ε) -approximation pour une certaine constante ε . Rappelons que dans MAX-CLIQUE, on a en entrée un graphe et on cherche la clique de taille maximum.

Un n -*booster* est une collection \mathcal{S} de sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$ telle que:

- $|\mathcal{S}| \leq n^k$ pour une certaine constante $k \in \mathbb{N}$;
- pour tout $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$|\mathcal{S}| \left(\frac{|A|}{n} - \frac{1}{100} \right)^{\log n} \leq |\{X : X \in \mathcal{S} \text{ et } X \subseteq A\}| \leq |\mathcal{S}| \left(\frac{|A|}{n} + \frac{1}{100} \right)^{\log n}$$

i.e. le nombre de sous-ensembles de A dans \mathcal{S} est borné selon la taille de A , et ce pour tous les A .

Il a été démontré qu'il existe un algorithme qui, sur entrée 1^n , construit un n -booster en temps polynomial. Vous pouvez utiliser cet algorithme en boîte noire.

Soit $G = (V, E)$ un graphe où on a étiqueté les sommets $V = \{1, \dots, n\}$. Soit \mathcal{S} un n -booster. On définit le graphe $H_{G, \mathcal{S}}$ comme suit: les sommets sont les ensembles de \mathcal{S} , et on ajoute une arête entre les ensembles S_i et S_j si $S_i \cup S_j$ forme une clique dans G .

- (a) Montrez que si k est la taille maximum d'une clique dans G , alors la taille maximum d'une clique dans $H_{G, \mathcal{S}}$ est entre $|\mathcal{S}| \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{100} \right)^{\log n}$ et $|\mathcal{S}| \left(\frac{k}{n} + \frac{1}{100} \right)^{\log n}$. 3 pts
- (b) On sait qu'il est difficile de distinguer si un graphe G a une clique d'au plus $n/6$ sommets, ou une clique d'au moins $n/3$ sommets. Montrez qu'il est difficile de distinguer si un graphe a une clique d'au plus $f(n)$ sommets, ou une clique d'au moins $n^\varepsilon f(n)$ sommets pour une certaine fonction f et une certaine constante ε . 7 pts

Suggestion: utilisez $H_{G, \mathcal{S}}$ pour amplifier le "gap". Aussi, notez que $c^{\log n} = n^{\log c}$.