

IFT503/711 – Théorie du calcul

Université de Sherbrooke

Devoir 4

Enseignant: Michael Blondin
 Date de remise: vendredi 20 mars 2020 à 10h30
 À réaliser: individuellement ou à deux au 1^{er} cycle
 individuellement aux cycles supérieurs
 Modalités: à remettre en classe, en copie imprimée ou copie
 manuscrite lisible
 Pointage: sur 20 points au 1^{er} cycle (+ 2pts bonus pour ★)
 sur 25 points aux cycles supérieurs

Question 1.

10 pts

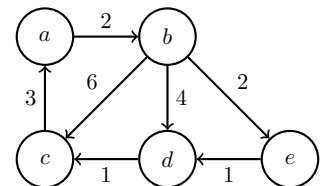
La *distance* d'un sommet s vers un sommet t dans un graphe dirigé pondéré est le coût d'un plus court chemin de s vers t . Par exemple, dans le graphe ci-dessous, la distance de a vers c est de 6.

Montrez que le problème PCC appartient à NC:

PCC

ENTRÉE: un graphe dirigé pondéré $\mathcal{G} = (V, E)$ décrit par une matrice de coûts positifs, deux sommets $s, t \in V$, et un entier positif k sous représentation binaire;

QUESTION: la distance de s vers t dans \mathcal{G} est-elle égale à k ?



Il n'est *pas* nécessaire d'argumenter que votre famille de circuits est uniforme sous espace logarithmique, mais il faut brièvement expliquer pourquoi elle est uniforme sous temps polynomial.

Question 2.

10 pts

Soit X un ensemble fini. Nous disons que $S \subseteq X$ engendre $t \in X$ sous une opération binaire $\star: X \times X \rightarrow X$ s'il est possible d'appliquer \star à partir d'éléments de S jusqu'à l'obtention de t . Par exemple, pour l'opération décrite par la table ci-dessous, $S = \{a, c\}$ engendre e car $(a \star a) \star (c \star a) = b \star d = e$.

Montrez que le problème GÉNÉRATION est P-complet:

GÉNÉRATION

ENTRÉE: un ensemble fini X , une opération binaire $\star: X \times X \rightarrow X$ représentée sous forme de table, un sous-ensemble $S \subseteq X$, et un élément $t \in X$;

\star	a	b	c	d	e
a	b	b	a	a	a
b	b	d	a	e	b
c	d	a	a	a	a
d	c	c	a	d	c
e	c	c	a	d	e

QUESTION: est-ce que S engendre t sous l'opération \star ? Indice: voyez une porte comme deux éléments.

Il n'est *pas* nécessaire d'expliquer pourquoi votre réduction se calcule en espace logarithmique.

★ Question 3. (cycles supérieurs)

★ 5 pts

Montrez un (et un seul) de ces résultats:

— $\text{REG} \subseteq \text{NC}^1$, où REG est l'ensemble des langages réguliers;

Indice: afin de déterminer si un automate accepte un mot w , considérez des sous-mots de w de taille 1, 2, 4, ...

— $\text{L} \subseteq \text{NC}^2$, où L est l'ensemble des langages décidables en espace logarithmique.

Indice: pensez au graphe des configurations d'une machine de Turing.

Vous n'avez *pas* à argumenter que vos familles de circuits sont uniformes, mais elles doivent l'être.