

IFT503/711 – Théorie du calcul  
Université de Sherbrooke

## Devoir 4

Enseignant: Michael Blondin  
 Date de remise: vendredi 20 mars 2020 à 10h30  
 À réaliser: individuellement ou à deux au 1<sup>er</sup> cycle  
 Modalités: individuellement aux cycles supérieurs  
 à remettre en classe, en copie imprimée ou copie manuscrite lisible  
 Pointage: sur 20 points au 1<sup>er</sup> cycle (+ 2pts bonus pour ★)  
 sur 25 points aux cycles supérieurs

**Question 1.**

10 pts

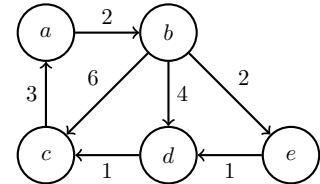
La *distance* d'un sommet  $s$  vers un sommet  $t$  dans un graphe dirigé pondéré est le coût d'un plus court chemin de  $s$  vers  $t$ . Par exemple, dans le graphe ci-dessous, la distance de  $a$  vers  $c$  est de 6.

**Montrez que le problème PCC appartient à NC:**

PCC

ENTRÉE: un graphe dirigé pondéré  $\mathcal{G} = (V, E)$  décrit par une matrice de coûts positifs, deux sommets  $s, t \in V$ , et un entier positif  $k$  sous représentation binaire;

QUESTION: la distance de  $s$  vers  $t$  dans  $\mathcal{G}$  est-elle égale à  $k$ ?



Il n'est pas nécessaire d'argumenter que votre famille de circuits est uniforme sous espace logarithmique, mais il faut brièvement expliquer pourquoi elle est uniforme sous temps polynomial.

**Question 2.**

10 pts

Soit  $X$  un ensemble fini. Nous disons que  $S \subseteq X$  engendre  $t \in X$  sous une opération binaire  $\star: X \times X \rightarrow X$  s'il est possible d'appliquer  $\star$  à partir d'éléments de  $S$  jusqu'à l'obtention de  $t$ . Par exemple, pour l'opération décrite par la table ci-dessous,  $S = \{a, c\}$  engendre  $e$  car  $(a \star a) \star (c \star a) = b \star d = e$ .

**Montrez que le problème GÉNÉRATION est P-complet:**

GÉNÉRATION

ENTRÉE: un ensemble fini  $X$ , une opération binaire  $\star: X \times X \rightarrow X$  représentée sous forme de table, un sous-ensemble  $S \subseteq X$ , et un élément  $t \in X$ ;

$\star$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
<b><math>a</math></b>	$b$	$b$	$a$	$a$	$a$
<b><math>b</math></b>	$b$	$d$	$a$	$e$	$b$
<b><math>c</math></b>	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$
<b><math>d</math></b>	$c$	$c$	$a$	$d$	$c$
<b><math>e</math></b>	$c$	$c$	$a$	$d$	$e$

QUESTION: est-ce que  $S$  engendre  $t$  sous l'opération  $\star$ ? Indice: voyez une porte comme deux éléments.

Il n'est pas nécessaire d'expliquer pourquoi votre réduction se calcule en espace logarithmique.

**★ Question 3. (cycles supérieurs)**

★ 5 pts

**Montrez un (et un seul) de ces résultats:**

— REG  $\subseteq$  NC<sup>1</sup>, où REG est l'ensemble des langages réguliers;

Indice: afin de déterminer si un automate accepte un mot  $w$ , considérez des sous-mots de  $w$  de taille 1, 2, 4, ...

— L  $\subseteq$  NC<sup>2</sup>, où L est l'ensemble des langages décidables en espace logarithmique.

Indice: pensez au graphe des configurations d'une machine de Turing.

Vous n'avez pas à argumenter que vos familles de circuits sont uniformes, mais elles doivent l'être.