

Bernsteinpolynome & Catmull-Clark

von Peter Dick, Jan-Hendrik Sünderkamp, Ruben Meinhardt
und Alexander Jaksties

Bernsteinpolynome

Inhalt

1. Allgemeine Formel
2. Binomialkoeffizient
3. Startwert & Definitionsbereich
4. Partition der 1
5. Eigenschaften
6. Matrixform
7. Beispiel

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Allgemeine Formel

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

mit \mathbf{b}_i als Kontrollpunkte der Bézierkurve

und $B_i^n(t)$ als Bernsteinpolynome n-ten Grades

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

mit $0 \leq k \leq n$, $k, n \in \mathbb{N}$.

Der Binomialkoeffizient ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Salopp:

Wie viele verschiedene Ergebnisse kann ich durch Ziehen von k Elementen aus einer n-elementigen Menge erhalten?

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Startwert und Definitionsbereich

$$B_0^0(t) \equiv 1$$

$$B_j^n(t) \equiv 0 \quad \text{für } j \notin \{0, \dots, n\}$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Rekursions-Eigenschaft

Eine wichtige Eigenschaft von Bernsteinpolynomen ist, dass sie folgende Rekursionsgleichung erfüllen:

$$B_i^n(t) = (1 - t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Beweis der Rekursion

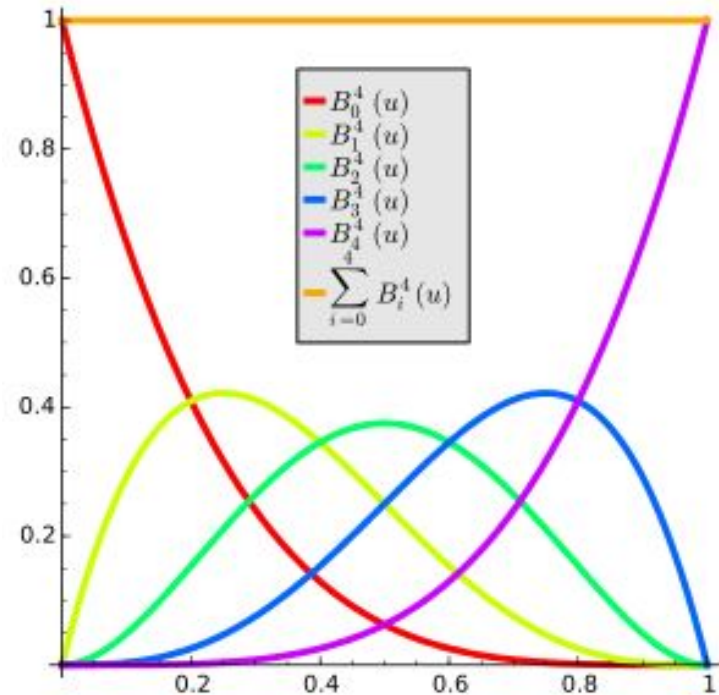
$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t) B_i^{n-1}(t) + t B_{i-1}^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Partition der 1

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1$$

$$1 = [t + (1 - t)]^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$



Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Eigenschaften

Affine Invarianz

- Durch "Partition der 1" bildet eine Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen baryzentrische Kombinationen
⇒ Bézierkurven sind invariant unter affinen Abbildungen
- Invariant bei affiner Parametertransformation

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Eigenschaften

Invarianz unter baryzentrischen Kombinationen

Folgende Bézierkurven sind äquivalent:

1. Die Kontrollpunkte einer Bézierkurve bestehen aus einer baryzentrischen Kombination
2. Die Kurvenpunkte zweier Bézierkurven werden baryzentrisch kombiniert

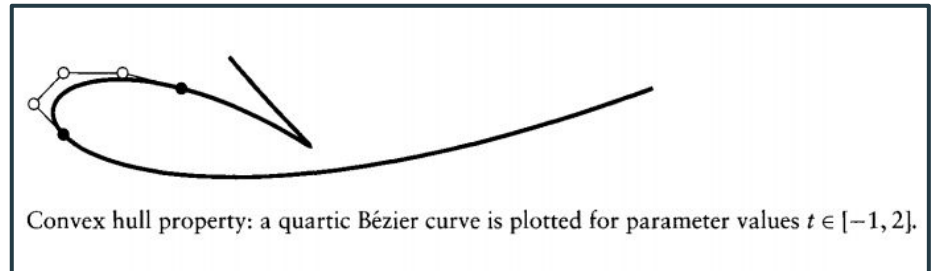
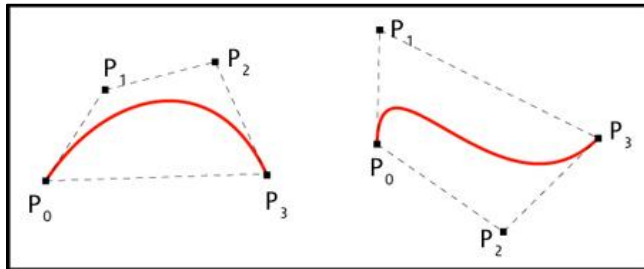
$$\sum_{i=0}^n (\alpha \mathbf{b}_i + \beta \mathbf{c}_i) B_i^n(t) = \alpha \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) + \beta \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i B_i^n(t)$$
$$\alpha + \beta = 1$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Eigenschaften

Konvexe Hülle

Für $t \in [0, 1]$ erhält man eine Konvexe Hülle, da die Bernsteinpolynome alle nicht negativ sind.

Für $t \notin [0, 1]$ gilt diese Eigenschaft nicht.



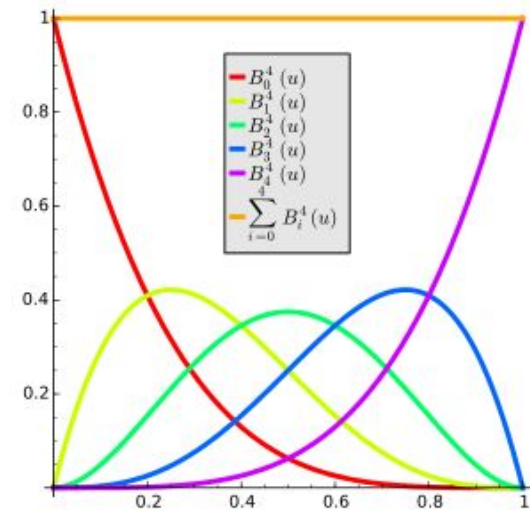
Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Eigenschaften

Endpunkt Interpolation

Die Bézierkurve geht genau durch den ersten und letzten Kontrollpunkt.

$$\mathbf{b}(0) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(u) = \mathbf{b}_0$$

$$\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_n$$



Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Eigenschaften

Symmetrie

Es macht keinen Unterschied, ob die Kontrollpunkte in aufsteigender $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ oder in absteigender Folge $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \mathbf{b}_0)$ durchgegangen werden. Die entstehenden Bézierkurven unterscheiden sich nur in der Richtung.

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{n-i} B_i^n(1-t)$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Matrixform

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \Leftrightarrow x(t) = (\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_n) \begin{pmatrix} B_0^n(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} B_0^n(t) \\ \vdots \\ B_n^n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^0 \\ \vdots \\ t^n \end{pmatrix}, \quad t^i \in \{1, t, t^2, \dots, t^n\}, \quad m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i}$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Matrixform

- Nur auf diesem Weg wirkliche Bezierkurve! Durch Einsetzen eher eine **Monom Form**
 - In der Algebra ist ein **Monom** ein Polynom, das nur aus einem Glied besteht.
 - $5x^2$ ist ein Monom, x^2 eine Monom-Basis
- Numerisch instabil! Form ist zu vermeiden, wenn Genauigkeit bei der Berechnung wichtig ist!
 - Gleitkommazahlen bringen große Fehlerfortpflanzung mit sich, insbesondere bei der Addition

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Beispiel

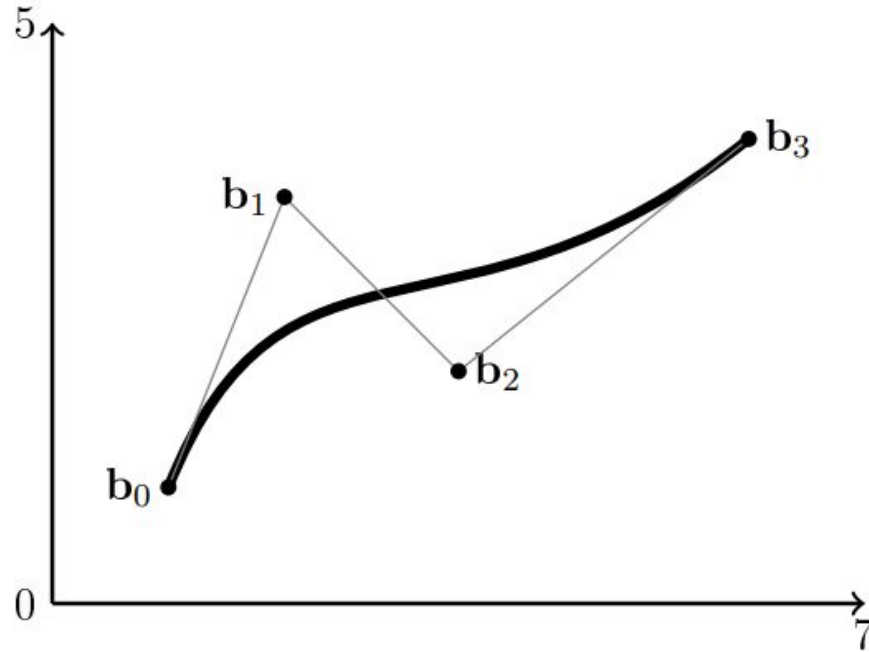
$$B_0^3(t) = (1-t)^3, \quad B_1^3(t) = 3(1-t)^2t, \quad B_2^3(t) = 3(1-t)t^2, \quad B_3^3(t) = t^3$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}_0 B_0^3(t) + \mathbf{b}_1 B_1^3(t) + \mathbf{b}_2 B_2^3(t) + \mathbf{b}_3 B_3^3(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} (1-t)^3 \\ (1-t)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6(1-t)^2t \\ 10.5(1-t)^2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10.5(1-t)t^2 \\ 6(1-t)t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t^3 \\ 4t^3 \end{pmatrix}$$

Bézierkurve mit Bernsteinpolynomen - Beispiel



Catmull-Clark Unterteilung

Inhalt

1. B-Splines
2. Wichtige Matrizen
3. Beliebige Topologie v. Meshes
4. Bedeutsame Eigenschaften

B-Splines

- B-Spline ist die Kurzform von Basis-Spline
- Eine B-Spline vom Grad k mit $n+1$ Kontrollpunkten P_i besteht aus $n-k+1$ Bézierkurven
 - Bsp. Kubisch($k=3$) mit 6 ($n+1$) Kontrollpunkten:
 - $n-k+1 = 5-3+1 = 3$ Bézierkurven
- Splines sind über sogenannte Knoten definiert (t_i). Diese entstammen dem Knotenvektor T .
 - Die Anzahl der Knoten $m+1$ ist abhängig vom Grad und der Anzahl der Kontrollpunkte:
 - $m = k+n+1$, k = Grad der Spline, $(n+1)$ = Anzahl der Kontrollpunkte
 - Eine B-Spline heißt **uniform**, wenn die Abstände zwischen den t_i gleich groß sind
 - Bsp. Kubisch mit 6 Kontrollpunkten:
 - $m = 3+5+1 = 9 \Rightarrow T = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$

B-Splines

- Analog zur berechnung von Bézierkurven mit Hilfe von Bernsteinpolynomen erhält man als Gleichung für die B-spline Kurve

$$S(t) := \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) P_i$$

- Sei T gegeben. Die B-Splines erster Ordnung sind definiert als

$$N_{i,0}(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- Höhere Ordnungen ergeben sich durch Rekursion

$$N_{i,j}(t) := \frac{t-t_i}{t_{i+j}-t_i} N_{i,j-1}(t) + \frac{t_{i+j+1}-t}{t_{i+j+1}-t_{i+1}} N_{i+1,j-1}(t)$$

B-Splines - Beispiel

Gesucht: quadratische B-Spline mit Kontrollpunkten (P_0, P_1, P_2) , $T = (0, \dots, 5)$, $N_{0,2}(t)$

$$\begin{aligned} N_{0,2}(t) &= \frac{t-0}{2-0} \cdot N_{0,1}(t) + \frac{3-t}{3-1} \cdot N_{1,1}(t) \\ &= \frac{t}{2} \left[\frac{t-0}{1-0} \cdot N_{0,0}(t) + \frac{2-t}{2-1} \cdot N_{1,0}(t) \right] + \\ &\quad \frac{3-t}{2} \left[\frac{t-1}{2-1} \cdot N_{1,0}(t) + \frac{3-t}{3-2} \cdot N_{2,0}(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[t^2 \cdot N_{0,0}(t) + t(2-t) \cdot N_{1,0}(t) + \right. \\ &\quad \left. (3-t) \cdot (t-1) \cdot N_{1,0}(t) + (3-t)^2 \cdot N_{2,0}(t) \right] \end{aligned}$$

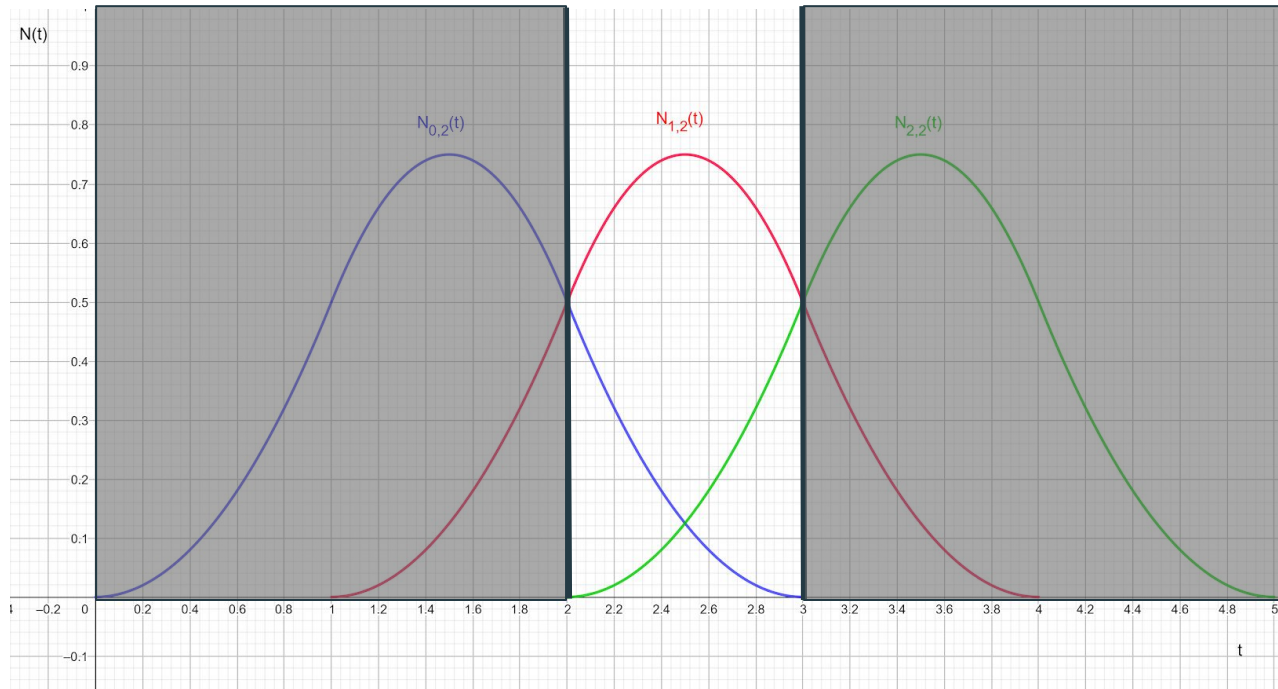
B-Splines - Beispiel

$$N_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}[-2(t-1)^2 + 2(t-1) + 1] & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}[(t-2)^2 - 2(t-2) + 1] & \text{für } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-1)^2 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2}[-2(t-2)^2 + 2(t-2) + 1] & \text{für } 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}[(t-3)^2 - 2(t-3) + 1] & \text{für } 3 \leq t < 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{2,2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t-2)^2 & \text{für } 2 \leq t < 3 \\ \frac{1}{2}[-2(t-3)^2 + 2(t-3) + 1] & \text{für } 3 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2}[(t-4)^2 - 2(t-4) + 1] & \text{für } 4 \leq t < 5 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

B-Splines - Beispiel



B-Splines - Beispiel

$$N_{0,2}P_0 = \frac{1}{2} [(t-2)^2 - 2(t-2) + 1] P_0$$

$$N_{1,2}P_1 = \frac{1}{2} [-2(t-2)^2 + 2(t-2) + 1] P_1$$

$$N_{2,2}P_2 = \frac{1}{2} (t-2)^2 P_2$$

B-Splines - Beispiel

$$S(t) = (P_0 \quad P_1 \quad P_2) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S(t) = (P_i \quad P_{i+1} \quad P_{i+2}) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Matrizen für Catmull-Clark

$$M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ - Basis Matrix für kubische B-Splines}$$

$$S(u, v) = U M G M^t V^t$$

$$G = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}, \quad U = (u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1), \quad V = (v^3 \quad v^2 \quad v \quad 1)$$

Herleitung der Catmull-Clark Regeln

$$S(u_1, v_1) = USMGM^t S^t V^t \quad \text{mit} \quad u_1 = \frac{u}{2}, \quad v_1 = \frac{v}{2}$$

ist immer noch ein kubischer B-Spline Patch mit eigenem Kontroll-Punkt Mesh G_1 und erfüllt

$$S(u, v) = UMG_1 M^t V^t$$

Wenn $S(u, v)$ mit $S(u_1, v_1)$ gleich gesetzt wird erhalten wir

$$MG_1 M^t = SMGM^t S^t$$

Mit Hilfe der invertierbaren Basismatrix M folgt

$$G = [M^{-1}SM]G[M^tSM^{-t}] = H_1GH_1^t \quad \text{wobei} \quad H_1 = M^{-1}SM$$

Herleitung der Catmull-Clark Regeln

$$H_1 = M^{-1}SM = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = H_1 G H_1^t$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{P_{11}+P_{12}+P_{21}+P_{22}}{4} & \frac{P_{11}+P_{13}+P_{21}+P_{23}}{16} + \frac{3(P_{12}+P_{22})}{8} & \dots \\ \frac{P_{11}+P_{12}+P_{31}+P_{32}}{16} + \frac{3(P_{21}+P_{22})}{8} & \frac{P_{11}+P_{13}+P_{31}+P_{33}}{64} + \frac{3(P_{12}+P_{21}+P_{23}+P_{32})}{32} + \frac{9P_{22}}{16} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Aus dieser Matrix leiten sich die Regeln für die neuen Face- Edge- und Vertexpunkte ab.

Berechnung von Vertex-Punkten im rechteckigen Kontrollpunkt Mesh

- neuer Face-Punkt

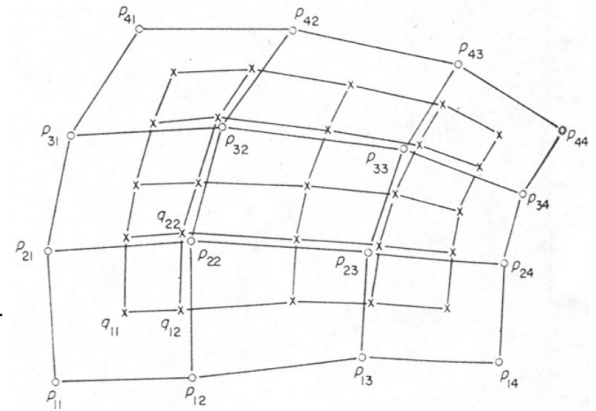
$$q_{11} = \frac{(p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22})}{4}$$

- neuer Edge-Punkt

$$q_{12} = \frac{\frac{(C+D)}{2} + \frac{(p_{12} + p_{22})}{2}}{2} \quad \text{mit} \quad C = q_{11}, D = q_{13} = \frac{(p_{12} + p_{13} + p_{22} + p_{23})}{4}$$

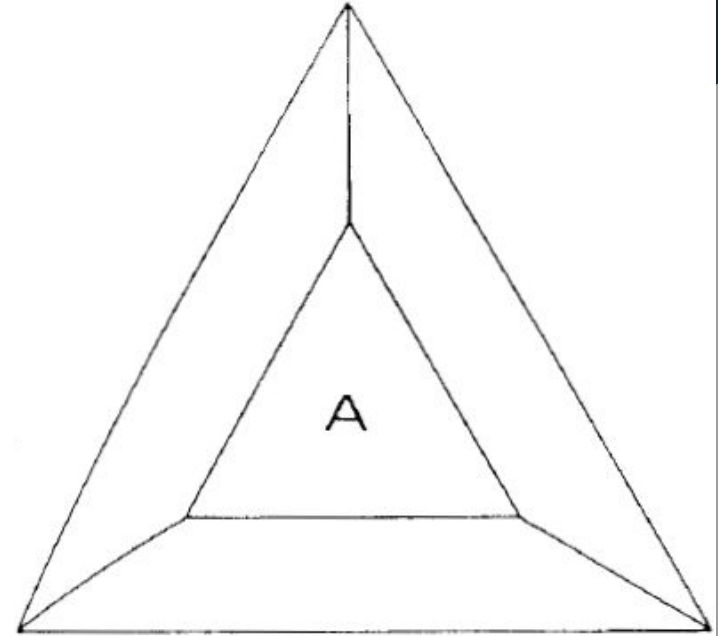
- neuer Vertex-Punkt

$$q_{22} = \frac{Q}{4} + \frac{R}{2} + \frac{p_{22}}{4} \quad \text{mit} \quad Q = \frac{(q_{11} + q_{13} + q_{31} + q_{33})}{4}, R = \frac{1}{4} \left(\frac{(p_{22} + p_{12})}{2} + \frac{(p_{22} + p_{21})}{2} + \frac{(p_{22} + p_{32})}{2} + \frac{(p_{22} + p_{23})}{2} \right)$$



Beliebige Topologie

- Rechenregeln sind abhängig von:
 - der Anzahl der Vertices, die ein Face umgeben (Face-Valenz)
 - der Anzahl der ausgehenden Edges eines Vertex (Vertex-Valenz)



Berechnung von Vertex-Punkten im beliebigen Kontrollpunkt Mesh

- Neue Face-Punkte:
 - Durchschnitt aller alten Vertex-Punkte, die das alte Face bilden
- Neue Edge-Punkte:
 - Durchschnitt des Mittelpunktes der alten Edge und des Durchschnittes der beiden neuen Face-Punkte der anliegenden Faces
- Neue Vertex-Punkte:
 - der Durchschnitt $\frac{Q}{n} + \frac{2R}{n} + \frac{S(n-3)}{n}$

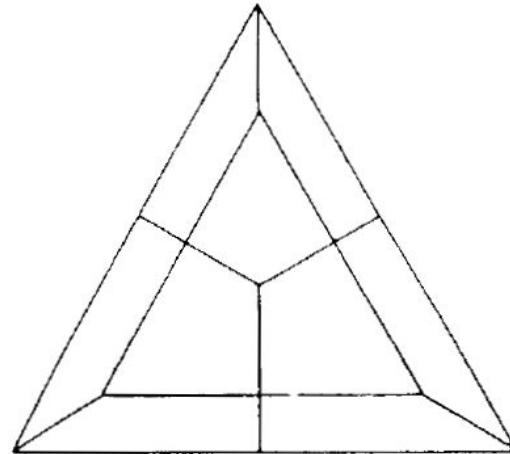
mit

- Q = der Durchschnitt der neuen Face-Punkte aller an den alten Vertex-Punkt angrenzenden Faces
- R = der Durchschnitt der Mittelpunkte aller alten, von dem alten Vertex-Punkt ausgehenden, Edges
- S = der alte Vertex-Punkt
- n = Vertex-Valenz

Bilden von Edges und Faces

- Neue Edges werden gebildet durch:
 - Verbinden der neuen Face-Punkte mit den neuen Edge-Punkten der Edges, die das alte Face bilden
 - Verbinden der neuen Vertex-Punkte mit den neuen Edge-Punkten der ausgehenden Edges, des alten Vertex-Punktes

- Neue Faces sind die Flächen, die von neuen Edges eingeschlossen werden

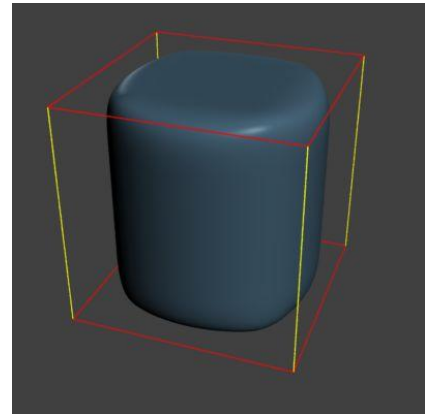
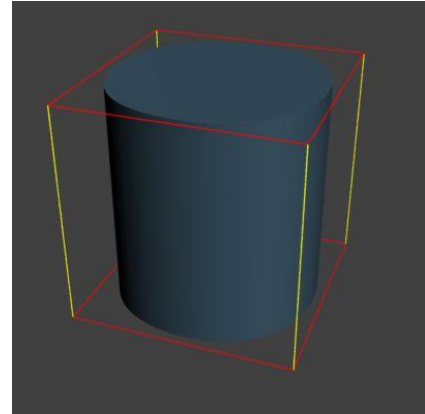


Scharfe Kanten

Scharfe Kanten sind Kanten die als Kante sichtbar bleiben sollen.

Für jede als scharf markierte Kante ist der neue Vertex der Durchschnitt der Endpunkte der Kante. Die neuen Unterkanten werden auch als scharf markiert. Die anderen Kanten verwenden die normale Unterteilungsregel.

Es gibt auch Regeln für halbscharfe Kanten.



Limitpunkte

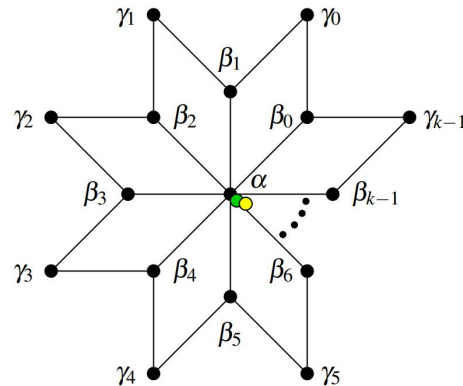
Bei einer unendlichen Verfeinerung eines Meshes durch den Catmull-Clark Algorithmus konvergieren die entstehenden Punkte gegen eine Limitfläche. Für einen Kontrollpunkt des Meshes lässt sich sein zugehöriger Punkt auf der Limitfläche bestimmen, die dazu benötigten Regeln heißen Limitpunktregeln.

$$\alpha = 1 - \frac{5}{k+5}$$

$$\beta_i = \frac{4}{(k+5)k}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{(k+5)k}$$

mit k = Vertexvalenz



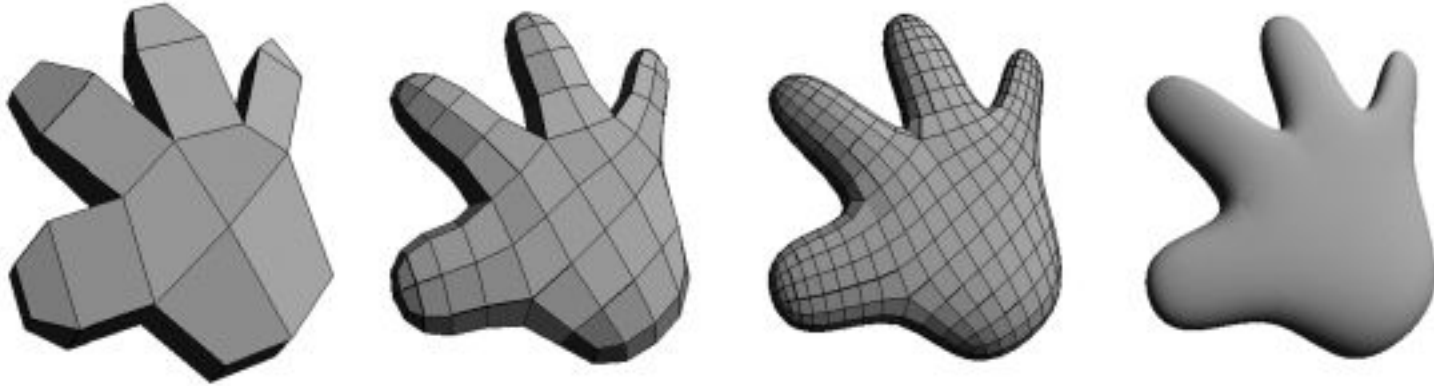
Bedeutsame Eigenschaften

- Nach einer Iteration haben alle Faces eine Valenz von vier
- Anzahl der Faces wächst exponentiell
- Das Vorgehen erhält die Stetigkeit des Meshes
 - a. an irregulären Punkten C^1 -Stetigkeit
 - b. an regulären C^2 -Stetigkeit
- Die Anzahl der irregulären Punkte (Vertex Valenz $\neq 4$) bleibt **nach** der ersten Iteration konstant
- Nur an diesen irregulären Punkten ist das resultierende Mesh keine Standard B-Spline Oberfläche

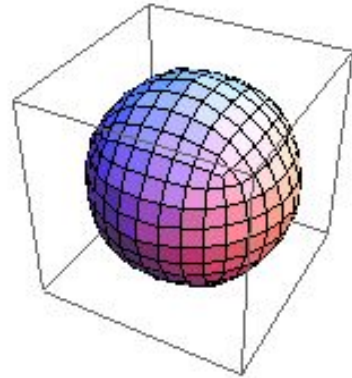
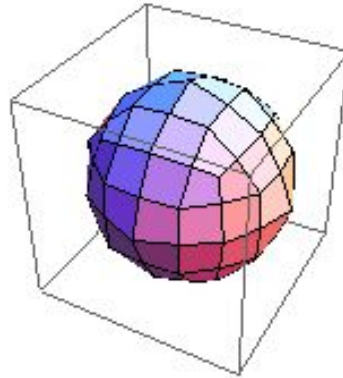
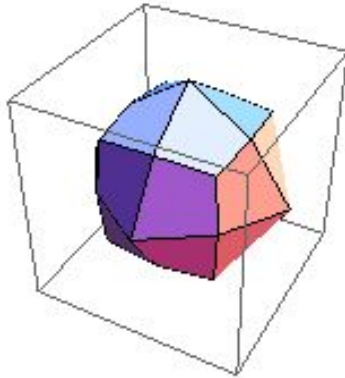
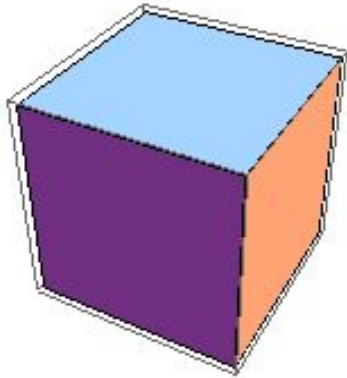
Nachfolgende Veröffentlichungen

- Erst in nachfolgenden Veröffentlichungen wurde bewiesen:
 - a. Die entstehenden Flächen konvergieren gegen sog. Limitflächen
 - b. Das Verfahren erhält die Stetigkeit (s. Folie zuvor)
 - c. Das Verfahren funktioniert für beliebige Topologien

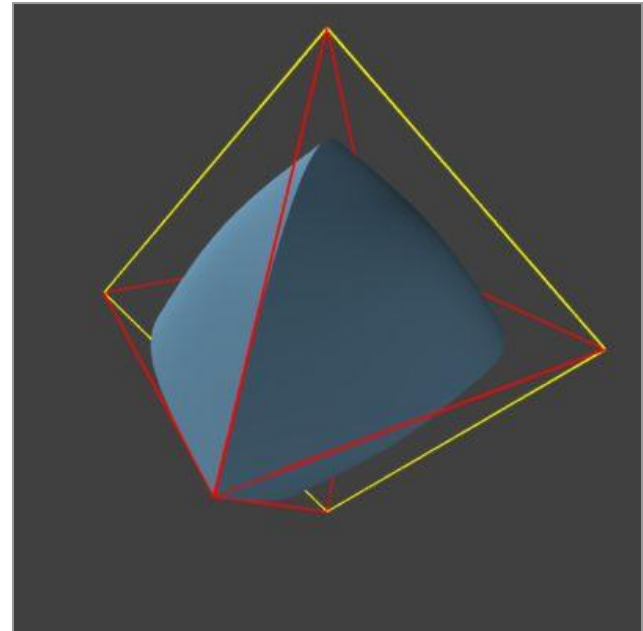
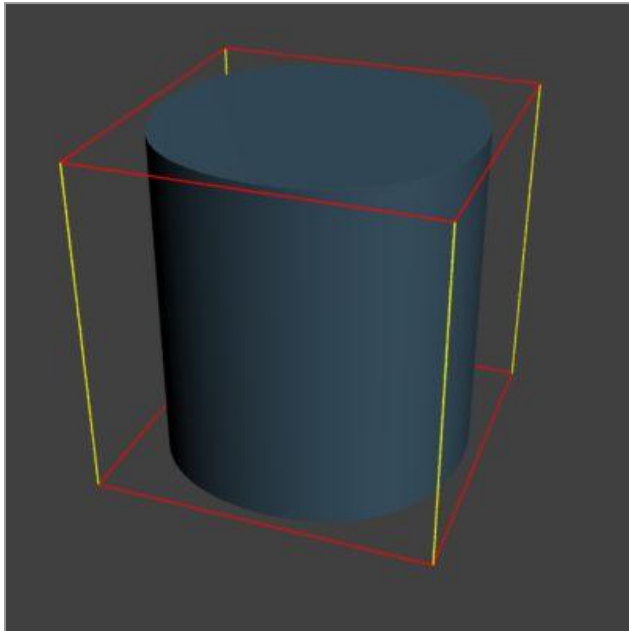
Beispiele



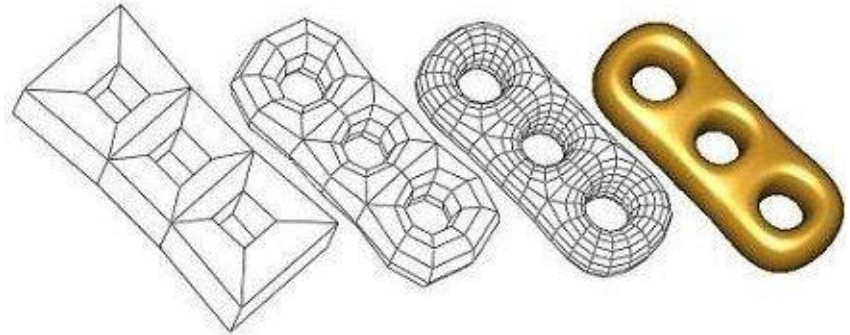
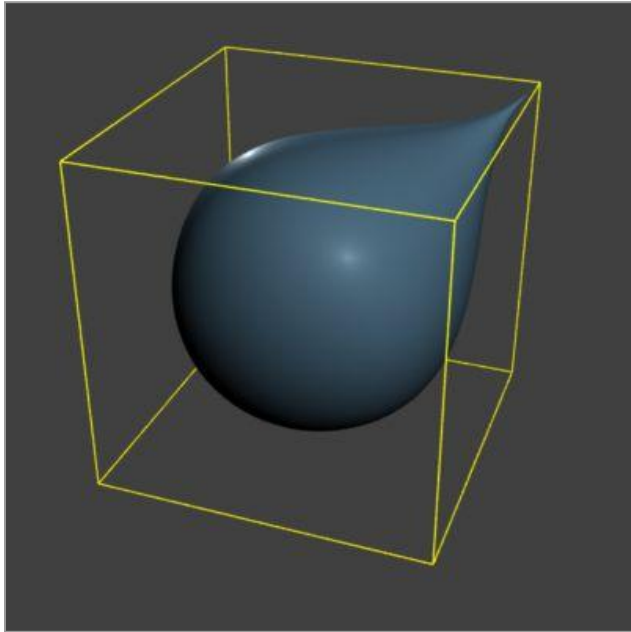
Beispiele



Beispiele



Beispiele



Beispiele

