

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

А. В. Аграновский

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ
ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСТРОВЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург
2024

УДК 004.922
ББК 32.973.26-018.2

A25

Рецензенты:
кандидат технических наук, доцент *С. А. Андронов*;
кандидат технических наук, доцент *В. А. Ушаков*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

Протокол №2 от 26 марта 2024 г.

Аграновский, А. В.

A25 Использование методов преобразования координат для
формирования растровых изображений: учеб.-метод. пособие
/ А. В. Аграновский. – СПб.: ГУАП, 2024. – 40 с.

В учебно-методическом пособии приводятся основные теоретические сведения о принципах трансформации двумерных и трехмерных объектов с использованием аффинных преобразований, проективных преобразованиях и последовательности выполнения геометрических построений при формировании изображений. Представленные задания позволяют студентам на практике изучить особенности применения теоретических знаний в указанных областях компьютерной графики.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения, проходящих подготовку по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

УДК 004.922
ББК 32.973.26-018.2

© Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения, 2024

Введение

В настоящее время существует значительное количество программных средств, позволяющих достаточно просто осуществлять практическую реализацию широкого круга задач компьютерной графики. Однако использованные при этом способы решения указанных задач остаются неизвестными для пользователей подобных программных средств, что не только ограничивает техническую эрудицию разработчиков, но и не позволяет заранее оценить эффективность получаемых решений.

Теоретические вопросы компьютерной графики рассмотрены в целом ряде источников, например, в [1–5]. Методы компьютерной графики используются не только для непосредственной реализации реалистичных анимированных изображений в компьютерных играх и симуляторах, но и в разнообразных системах автоматизированного проектирования, для визуализации результатов медицинских и научных исследований, в геодезии и картографии и во многих других областях знаний. В работе [6], например, рассмотрено применение некоторых методов компьютерной графики для реализации графического редактора.

В данном учебно-методическом пособии приводятся основные теоретические сведения о принципах трансформации двумерных и трехмерных объектов с использованием аффинных преобразований, а также о проективных преобразованиях трехмерных объектов. Представленные задания позволяют студентам на практике изучить особенности применения теоретических знаний в указанных областях компьютерной графики.

1. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1.1. Линейные геометрические преобразования изображений

Растровое изображение представляет собой двумерный массив, каждый элемент которого содержит информацию о цвете. Размерность массива совпадает с параметром разрешения изображения. Элементы массива (пиксели) рассматривают с привязкой к прямоугольной системе координат. При этом каждый пиксель имеет в ней целочисленные координаты (x, y) .

Геометрические преобразования удобно рассматривать либо как переход каждого пикселя в новую систему координат, либо как изменение координат пикселя в текущей системе координат с (x, y) на (x', y') .

Большинство преобразований, которым подвергаются изображения, носят линейный характер. Их принято описывать формулами

$$x' = ax + by + c,$$

$$y' = dx + ey + f$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \times \mathbf{T},$$

где матрица преобразования \mathbf{T} имеет вид:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание, что при матричной записи координат пикселя используются нормированные однородные координаты.

Основными типами линейных преобразований на плоскости являются так называемые аффинные преобразования – масштабирование, поворот, перенос, отражение относительно оси.

При масштабировании изображения используют формулы $(a, e > 0)$

$$x' = ax,$$

$$y' = ey$$

или матрицу преобразования

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот на угол φ относительно начала координат определяется выражениями

$$x' = x \cdot \cos \varphi - y \cdot \sin \varphi,$$

$$y' = x \cdot \sin \varphi + y \cdot \cos \varphi$$

и матрица преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

За положительное принимается направление вращения против часовой стрелки.

Отражение относительно оси абсцисс описывается формулами

$$x' = x,$$

$$y' = -y$$

или матрицей преобразования

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом записывается отражение относительно оси ординат.

Перенос (или сдвиг) задается соотношением

$$x' = x + c$$

$$y' = y + f$$

или матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & f & 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что все ранее рассмотренные аффинные преобразования за исключением сдвига могли быть записаны в виде матрицы

размерностью 2×2 . Сдвиг же записывается только матрицей 3×3 , что и вызвало необходимость введения однородных координат, позволяющих единым образом описать все базовые преобразования.

При обработке растровых изображений может использоваться еще одно преобразование – скос. Так, скос вдоль оси OX выражается следующим образом

$$x' = x + by,$$

$$y' = y.$$

Соответствующая матрица скоса в однородных координатах

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Заметим, что для всех аффинных преобразований определитель, составленный из элементов матрицы T , удовлетворяет условию

$$\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \neq 0.$$

В противном случае преобразование будет вырожденным.

1.2. Композиция аффинных преобразований на плоскости

Произвольное линейное преобразование на плоскости можно записать в виде композиции указанных выше простейших аффинных преобразований. Математическая запись сложного аффинного преобразования сводится к последовательному перемножению соответствующих элементарных матриц преобразования, что приводит к некоторой итоговой матрице преобразований. Суперпозиция аффинных преобразований при этом также будет являться аффинным преобразованием, т. е. сохранять прямые линии; сохранять отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых), а также отношения площадей фигур; обеспечивать переход параллельных прямых в параллельные прямые.

Следует обратить внимание, что все рассмотренные преобразования осуществляются относительно либо начала координат либо координатной оси. Если требуется выполнить аналогичные преобразования относительно другой точки или прямой, то предвари-

тельно необходимо совместить их с началом координат или координатной осью с помощью операций сдвига и, возможно, поворота.

Рассмотрим следующий пример: пусть необходимо повернуть треугольник с координатами вершин $(1, 0)$; $(2, 1)$; $(2, -1)$ вокруг точки $(3, 5)$ на угол $\varphi = 90^\circ$ по часовой стрелке.

Для реализации аффинных преобразований на плоскости геометрические фигуры в виде выпуклых многоугольников удобно описывать матрицами, содержащими координаты последовательно соединенных вершин, при этом для замкнутого многоугольника первая из входящих в матрицу вершин также соединена с последней. Для более сложных многоугольников обычно задают также и массив ребер, каждое из которых представляет собой номера соединенных ими точек (более подробно этот вопрос рассмотрен в материалах подраздела 2.2).

Так, матрица нормированных однородных координат вершин треугольника может быть записана следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Поскольку центр вращения не совпадает с началом координат, необходимо выполнить перенос, переводящий точку $(3, 5)$ в точку $(0, 0)$:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

После этого можно выполнить поворот, который описывается матрицей, при построении которой учитываем, что угол поворота по часовой стрелке является отрицательным:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & \sin(-90^\circ) & 0 \\ -\sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Затем необходимо вернуться к исходной системе координат с использованием матрицы переноса, обратной рассмотренной выше матрице \mathbf{T}_1 :

$$\mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Указанные преобразования можно последовательно выполнить над матрицей координат исходного треугольника. Другой возможный вариант – получить матрицу преобразования \mathbf{T} , соответствующую композиции рассмотренных преобразований:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{R} \times \mathbf{T}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

и умножить на нее матрицу координат.

В результате матрица координат преобразованного треугольника приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из графической иллюстрации данного примера (рис. 1) видно, что использованные матричные вычисления действительно позво-

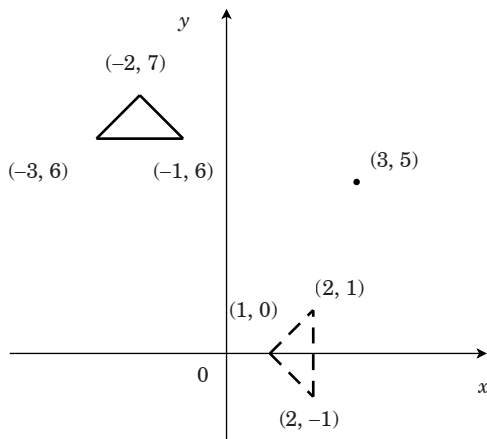


Рис. 1. Пример поворота фигуры на плоскости

лили расчетным путем получить координаты преобразованного треугольника.

Отметим, что для представления фигур на экране однородные координаты каждой точки $(x, y, 1)$ необходимо перевести в пиксели экрана с учетом его разрешения.

1.3. Особенности создания анимированных изображений

При создании с помощью аффинных преобразований анимированного изображения необходимо учесть, что для обеспечения плавного изменения положения фигуры требуется, чтобы частота смены кадров была не менее, чем 24 кадра в секунду. Если выбрать продолжительность анимации T секунд, то при такой частоте кадров необходимо разбить преобразование на $T \times 24$ итерации. При этом одна итерация должна выполняться за $1/24$ секунды. Можно воспользоваться так называемой двойной буферизацией кадра, при которой изображение выводится на экран из одного буфера, а расчет нового кадра ведется в другом буфере. Затем с необходимой частотой смены кадров буферы меняются местами. При использовании двойной буферизации целесообразно синхронизировать смену кадров с началом расчета каждой новой итерации. Также при формировании следующей итерации необходимо не забывать об удалении фигуры с предыдущей позиции.

1.4. Особенности применения аффинных преобразований на плоскости

Остается заметить, что любое аффинное преобразование имеет обратное преобразование, также являющееся аффинным и описываемое матрицей, обратной по отношению к матрице исходного преобразования. Произведение прямой и обратной матриц является единичной матрицей, т. е. все пиксели остаются на месте.

Математически точное описание аффинных преобразований, к сожалению, оказывается не столь просто реализуемо при обработке цифровых изображений из-за растрового характера последних. Дело в том, что большинство рассмотренных выше преобразований может привести к получению нецелых значений x', y' , которые приходится округлять. Кроме того, например, при повороте изображения могут возникать неопределенные пиксели (в которые никакие другие пиксели не преобразовались). Подобные проблемы не возникают лишь при тех преобразованиях, где осуществляется отображение пикселя в пиксель (например, отражение относительно

но оси, поворот на угол 90 или 180 градусов). В остальных случаях приходится использовать более сложные алгоритмы, например, различные методы интерполяции яркости пикселя или алгоритм поворота растровых изображений Оуэна и Македона [7].

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Какие аффинные преобразования являются базовыми?
2. Какие координаты называют однородными?
3. Какие однородные координаты называются нормированными?
4. Какими матрицами описываются базовые аффинные преобразования?
5. Какое двумерное аффинное преобразование невозможно записать в виде матрицы 2×2 ?
6. Каковы свойства аффинных преобразований?
7. Является ли аффинным преобразованием суперпозиция базовых аффинных преобразований?
8. Каковы свойства обратного аффинного преобразования.
9. Причины возникновения артефактов при реализации аффинных преобразований.
10. Как реализовать плавное движение фигуры на плоскости?
11. Как и для чего осуществляется двойная буферизация?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Исследование аффинных преобразований на плоскости

Цель работы: Изучение теоретических основ линейных геометрических преобразований на плоскости. Исследование особенностей практической реализации двумерных аффинных преобразований.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические указания.
2. Выбрать вариант задания в соответствии со своим порядковым номером в списке группы.
3. Написать программу на языке высокого уровня, осуществляющую анимированное аффинное преобразование фигуры на плоскости в соответствии с выбранным вариантом.

Рисование фигур (точек, отрезков) на экране монитора можно, но не обязательно, осуществлять с помощью специализированных библиотек, например, GLUT. Аффинные преобразования необходимо выполнять только путем композиции рассмотренных выше матричных вычислений (можно, но не обязательно, использовать библиотеки программ для матричных вычислений). Использование созданных другими авторами программ аффинных преобразований не допускается.

Варианты заданий к лабораторной работе № 1

1. Изобразить фигурную секундную стрелку часов в виде замкнутой ломаной линии. Осуществить плавный поворот секундной стрелки на 360 градусов относительно точки, находящейся внутри замкнутой ломаной.
2. Изобразить плавное качание маятника, используя в качестве изображения его груза правильный шестиугольник (можно ограничить количество качаний).
3. Изобразить вращение треугольника по часовой стрелке относительно точки, находящейся за его пределами.
4. Изобразить вращение прямоугольника против часовой стрелки относительно одной из его вершин
5. Изобразить плавное масштабирование квадрата вдоль осей OX и OY . Коэффициенты масштабирования по осям различны. Центр квадрата не находится на координатных осях, а стороны квадрата не совпадают с направлением координатных осей.
6. Изобразить вращение правильного пятиугольника относительно его центра, не совпадающего с началом координат.

7. Изобразить плавное увеличение и уменьшение размеров треугольника с центром, не совпадающим с началом координат. Положение центра треугольника не должно меняться при масштабировании.

8. Выполнить плавный перенос правильного треугольника в направлении, не совпадающем с осями координат, на некоторое расстояние. При движении треугольник должен повернуться вокруг своего центра на 360 градусов.

9. Плавно переместить правильный шестиугольник из произвольной точки, не находящейся на координатных осях, в начало координат. При перемещении уменьшить его размер.

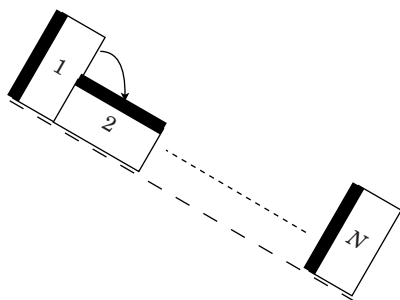
10. Плавно деформировать прямоугольный треугольник, масштабируя его сначала вдоль одного из катетов, затем вдоль гипотенузы. Ни одна из сторон треугольника не должна совпадать с направлением координатных осей.

11. Изобразить плавное вращение квадрата относительно точки, находящейся за его пределами одновременно с вращением квадрата относительно своего центра. При этом одна из сторон квадрата должна быть выделена.

12. Изобразить с использованием замкнутых ломаных линий стилизованный пропеллер с вращающимися лопастями (двумя или более).

13. Изобразить шестиугольник, вершины которого соединены с его центром. Шестиугольник плавно «катится» по наклонной прямой.

14. Изобразить «кувырок» прямоугольной фигуры по наклонной прямой



15. Изобразить плавное перемещение треугольника по прямоугольной спирали (т. е. с использованием операций переноса) из некоторой точки плоскости в начало координат.

16. Изобразить вращающееся колесо обозрения в виде шестиугольника с кабинками в виде квадратов.

17. Изобразить вращающиеся часовую и минутную стрелки.

18. Изобразить качающиеся качели в виде прямой линии с квадратами по краям.

19. Изобразить анимированное отражение квадрата относительно прямой, вращающейся вокруг некоторой точки, находящейся за пределами квадрата.

20. Изобразить движущийся по окружности бумеранг. Начало и окончание движения – в одной точке.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Формулировка задания.
4. Теоретические сведения об аффинных преобразованиях на плоскости.
5. Описание алгоритма решения поставленной задачи.
6. Выбор языка программирования и используемых библиотек.
7. Описание разработанной программы.
8. Скриншоты, иллюстрирующие результаты работы программы.
9. Вывод, в котором подробно раскрывается результат выполненной работы, описываются теоретические знания и навыки, полученные в процессе ее выполнения, а также возникшие проблемы и пути их решения.
10. Список использованных источников.
11. Приложение с листингом программы. Программа должна содержать комментарии, поясняющие ее работу.

2. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

2.1. Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве

Аффинные преобразования в трехмерном пространстве оказываются более сложными, чем на плоскости. Также усложняется визуализация преобразований на экране компьютера, поскольку для этого требуется получить двумерное изображение трехмерной модели.

Как и в двумерном случае любое аффинное преобразование в трехмерном пространстве может быть представлено в виде суперпозиции вращений, растяжений, отражений и переносов. Обобщим рассмотренные ранее материалы раздела 1 на случай трехмерных преобразований.

Точка в трехмерном пространстве (xyz) с использованием нормированных однородных координат представляется как $[xyz1]$. Аффинное преобразование такой точки описывается выражением

$$[x' y' z' 1] = [x y z 1] \times \mathbf{T},$$

где матрица преобразования \mathbf{T} , в отличие от двумерного случая, имеет размерность 4×4 и в общем виде представляется как:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ h & i & j & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Следующие элементы матрицы

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{bmatrix}.$$

отвечают за покомпонентное масштабирование и вращение, а элементы $[l \ m \ n]$ за перенос.

Рассмотрим особенности матрицы \mathbf{T} для элементарных аффинных преобразований.

1. Матрицы вращения в пространстве:

Матрица вращения вокруг оси абсцисс на угол φ :

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица вращения вокруг оси ординат на угол ψ :

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица вращения вокруг оси аппликат на угол θ :

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

За положительное принимается направление против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси вращения в сторону начала координат.

2. Матрица растяжения (сжатия), где элементы $a, e, j > 0$ представляют собой коэффициенты растяжения (сжатия) по оси абсцисс, ординат и аппликат соответственно:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Матрица отражения.

Матрица отражения относительно плоскости XOY

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости YOZ

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица отражения относительно плоскости ZOX

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Матрица переноса на вектор $[l \ m \ n]$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Для выполнения сложного аффинного преобразования его представляют в виде последовательности базовых преобразований, как и в двумерном случае. При этом следует учитывать, что базовые трехмерные аффинные преобразования определены относительно начала координат, координатных осей или координатных плоскостей. Вычисления при сложном аффинном преобразовании могут быть выполнены либо последовательно, либо путем предварительного определения результирующей матрицы преобразований.

2.2. Особенности представления пространственных многогранников в трехмерном пространстве

Аффинные преобразования выполняются над некоторыми трехмерными фигурами. Если такая фигура представляет собой многогранник, то для программной реализации преобразований проще всего задать ее каркас в виде матрицы однородных координат вершин и массива ребер (в виде пар номеров вершин, соединяемых этими ребрами). Например, единичный куб, одной из вершин которого является начало координат, может быть задан матрицей нормированных однородных координат

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Прорисовка данной фигуры определяется массивом ребер, в котором указываются все пары соединяемых ребрами точек (указанные в массиве номера соответствуют порядковому номеру координат соответствующей точки в матрице однородных координат многоугольника)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^T$$

В данном учебно-методическом пособии для упрощения формирования исходной трехмерной фигуры в некоторых заданиях мы воспользуемся так называемыми платоновыми телами – правильными многогранниками, состоящими из одинаковых правильных многоугольников и обладающими пространственной симметрией. Правильный многогранник обладает следующими особенностями:

1. Является выпуклым, т. е. расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности;

Таблица 1

Свойства платоновых тел

Название многогранника	Число вершин	Число ребер	Число граней	Число сторон у грани	Число ребер, прилегающих к вершине
Тетраэдр	4	6	4	3	3
Октаэдр	6	12	8	3	4
Гексаэдр	8	12	6	4	3
Икосаэдр	12	30	20	3	5
Додекаэдр	20	30	12	5	3

2. Все грани одинаковы и являются правильными многоугольниками;

3. В каждой вершине сходится одинаковое число ребер.

Число вершин (B), граней (Γ) и рёбер (P) любого платонова тела связано формулой Эйлера

$$B + \Gamma = P + 2.$$

Доказано, что в трехмерном пространстве существует всего 5 платоновых тел, названия которых определяются числом граней: тетраэдр, гексаэдр (куб), октаэдр, додекаэдр и икосаэдр (табл. 1).

2.3. Порядок определения матрицы сложного аффинного преобразования в пространстве

Рассмотрим пример определения матрицы сложного аффинного преобразования в пространстве. Пусть требуется повернуть объект на угол φ относительно прямой L , проходящей через точку A с координатами (l, m, n) и имеющей направляющий единичный вектор (u, v, w) [8].

Учитывая особенности базовых аффинных преобразований, для решения задачи необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Перенести точку A в начало координат, чтобы прямая L проходила через начало координат.

2. Совместить прямую L с одной из координатных осей, например, с осью Z , для чего

– Повернуть прямую L вокруг OX

– Повернуть прямую L вокруг OY

3. Выполнить поворот объекта вокруг прямой L .

4. Выполнить преобразования п.2 в обратной последовательности и на углы противоположного знака.

5. Перенести точку A в исходное положение.

Матрица переноса точки A в начало координат

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -l & -m & -n & 1 \end{bmatrix}.$$

Для совмещения прямой L с осью Z необходимо определить углы ψ и θ (рис. 2)

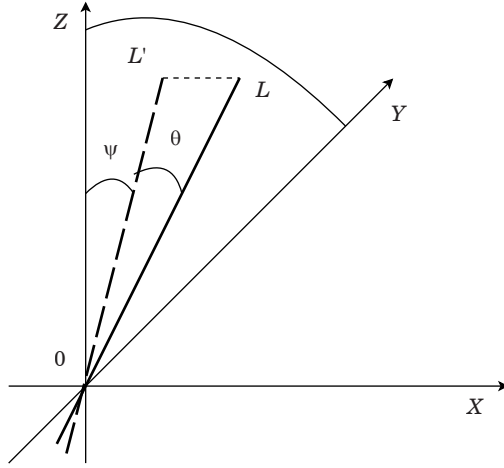


Рис. 2. Определение углов для совмещения прямой L с осью Z

Для нахождения угла ψ рассмотрим прямоугольную проекцию L' прямой L на плоскость YOZ . Направляющий вектор прямой L' легко определяется из направляющего вектора прямой L и равен $(0, v, w)$. Тогда

$$\cos \psi = \frac{w}{d}, \quad \sin \psi = \frac{v}{d},$$

$$d = \sqrt{v^2 + w^2}.$$

При этом матрица вращения вокруг OX на угол ψ имеет вид:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w}{d} & \frac{v}{d} & 0 \\ 0 & -\frac{v}{d} & \frac{w}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

После поворота на угол ψ направляющий вектор прямой L изменится:

$$(u \ v \ w \ 0) \times \mathbf{R}_x = (u \ 0 \ d \ 0).$$

Теперь необходимо повернуть прямую L вокруг OY на угол θ , тригонометрические функции которого с учетом начального условия единичности направляющего вектора

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 1$$

можно определить по формулам

$$\cos \theta = u,$$

$$\sin \theta = d.$$

Тогда матрица вращения вокруг OY на угол θ имеет вид:

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} u & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку после двух рассмотренных выше поворотов прямая L совмещена с осью Z , можно воспользоваться матрицей вращения объекта на угол φ относительно оси аппликат:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее следует вернуться к исходной системе координат, выполнив поворот вокруг OY на угол $-\theta$, затем поворот вокруг OX на угол $-\psi$ и, наконец, перенос на вектор $[l \ m \ n]$ с использованием соответствующих обратных матриц.

Результирующая матрица рассмотренного сложного аффинного преобразования будет иметь вид:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \times \mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_y^{-1} \times \mathbf{R}_x^{-1} \times \mathbf{T}_1^{-1}.$$

Отметим, что для демонстрации результата трехмерных аффинных преобразований необходимо представить его в экранных координатах. Как правило, начало экранных координат O расположено в левом верхнем углу экрана, ось OX проходит горизонтально слева направо, ось OY – сверху вниз, а ось OZ (при необходимости учета третьей координаты) направлена перпендикулярно экрану в сторону наблюдателя (зрителя). Если объект был сформирован в дру-

гой системе координат, может потребоваться переход к экранным координатам, выполняемый с помощью тех же аффинных преобразований.

Следующим необходимым преобразованием для представления результата является проецирование трехмерного объекта на плоскость экрана. Если в дальнейшем не планируется выполнение каких-либо иных действий (например, удаления невидимых граней, формирования сцены, состоящей из нескольких объектов и т. п.), можно ограничиться умножением матрицы нормированных однородных координат получившейся трехмерной фигуры на матрицу ортогографической проекции

$$\mathbf{P}_{z=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На последнем этапе мы должны перевести полученные координаты каждой точки проекции $(x \ y \ 0 \ 1)$ в пиксели на экране с учетом его разрешения.

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Сколько чисел используется в трехмерном пространстве для задания однородных координат точки?
2. Какими матрицами описываются элементарные аффинные преобразования в трехмерном пространстве?
3. Композиция каких элементарных преобразований описывает поворот объекта вокруг произвольной прямой, проходящей через начало координат?
4. Композиция каких элементарных преобразований описывает поворот объекта вокруг произвольной прямой, не проходящей через начало координат?
5. Дайте определение и приведите примеры платоновых тел.
6. Как задается каркас трехмерного многогранника?
7. Как представляется результат трехмерных аффинных преобразований в экранных координатах?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Исследование аффинных преобразований в пространстве

Цель работы: Изучение теоретических основ линейных геометрических преобразований в трехмерном пространстве. Исследование особенностей практической реализации трехмерных аффинных преобразований.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические указания.
2. Выбрать вариант задания в соответствии со своим порядковым номером в списке группы.
3. Написать программу на любом языке высокого уровня, реализующую преобразование фигуры в трехмерном пространстве в соответствии со своим вариантом задания. Результат преобразования представляется в экраннных координатах.

Для всех вариантов фигура должна отображаться в контурном виде без удаления невидимых линий. Рисование контура фигур по матрице координат вершин можно (но не обязательно) осуществлять с помощью специализированных библиотек. Аффинные преобразования необходимо выполнять только путем комбинации рассмотренных выше матричных вычислений (можно, но не обязательно, использовать библиотеки программ для матричных вычислений). Использование созданных другими авторами программ аффинных преобразований не допускается.

Варианты заданий к лабораторной работе №2

1. Вращение тетраэдра относительно одной из координатных осей. Ось вращения не проходит через тетраэдр и не касается его.
2. Вращение октаэдра относительно оси, проходящей через его центр. Направление оси вращения не совпадает с направлением координатных осей
3. Вращение икосаэдра относительно оси, не проходящей через его центр и не касающейся его. Направление оси вращения не совпадает с направлением координатных осей.
4. Вращение додекаэдра относительно оси, не проходящей через его центр. Ось вращения параллельна оси OX , но не совпадает с ней.
5. Вращение правильной четырехугольной пирамиды относительно оси, проходящей через одну из ее вершин. Ось вращения не совпадает с координатными осями.

6. Вращение додекаэдра одновременно относительно осей OY и OZ , не проходящих через додекаэдр и не касающихся его.

7. Вращение икосаэдра относительно двух осей проходящих через его центр и параллельных координатным осям OX и OY , но не совпадающим с ними.

8. Перемещение икосаэдра в направлении, не совпадающем с осями координат.

9. Перемещение треугольной призмы в направлении, не совпадающем с осями координат с одновременным масштабированием призмы.

10. Вращение октаэдра относительно координатной оси OX , проходящей через одну из его вершин, не совпадающую с началом координат, с одновременным масштабированием октаэдра.

11. Перемещение четырехугольной пирамиды вдоль прямой, вращающейся относительно начала координат

12. Перемещение куба вдоль прямой, проходящей через его центр. Прямая не совпадает с координатными осями. Одновременно с перемещением куб вращается вокруг указанной прямой.

13. Перемещение (без вращения) октаэдра по окружности, проходящей через центр фигуры и параллельной одной из координатных плоскостей.

14. Перенос икосаэдра с перемещением его центра в начало координат из некоторой точки, не находящейся на координатных осях.

15. Параллельный перенос куба с перемещением его центра из одной точки пространства в другую. Начальная и конечная точки не находятся на координатных осях.

16. Плавное изменение размеров тетраэдра, центр которого не совпадает с началом координат. Центр тетраэдра не должен перемещаться при изменении его размеров.

17. Плавная деформация куба путем растяжения (сжатия) с неодинаковыми коэффициентами по координатным осям. Начало координат находится вне куба.

18. Последовательное отражение треугольной призмы относительно трех координатных плоскостей. Начало координат находится вне призмы.

19. Отражение тетраэдра относительно плоскости, параллельной XOZ .

20. Отражение икосаэдра относительно плоскости, не параллельной координатным плоскостям. Начало координат находится вне икосаэдра.

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Формулировка задания
4. Теоретические сведения об аффинных преобразованиях в пространстве.
5. Описание алгоритма решения поставленной задачи.
6. Выбор языка программирования и используемых библиотек.
7. Описание разработанной программы.
8. Скриншоты, иллюстрирующие работу программы.
9. Вывод, в котором подробно раскрывается результат выполненной работы, описываются теоретические знания и навыки, полученные в процессе ее выполнения, а также возникшие проблемы и пути их решения.
10. Список использованных источников.
11. Приложение с листингом программы. Программа должна содержать комментарии, поясняющие ее работу.

3. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3.1. Классификация проективных преобразований

Под проецированием (проектированием) принято понимать отображение точек, заданных в системе координат с размерностью N , в точки в системе координат меньшей размерности n ($n < N$). В дальнейшем мы будем рассматривать только проекции трехмерных объектов на плоскость, что соответствует задаче отображения реального мира на плоском экране (рис. 3).

Проекторами (проецирующими лучами) называют отрезки прямых, идущие из центра проекции через каждую точку объекта до пересечения с плоскостью, образующего проекции указанных точек.

В зависимости от расположения центра проекции выделяют:

- **центральное (перспективное) проецирование**, при котором центр проекции находится на конечном удалении от объекта;
- **параллельное проецирование**, при котором центр проекции бесконечно удален, а проецирующие лучи параллельны.

В большинстве графических API параллельное и перспективное проецирование рассматриваются как два разных типа, причем

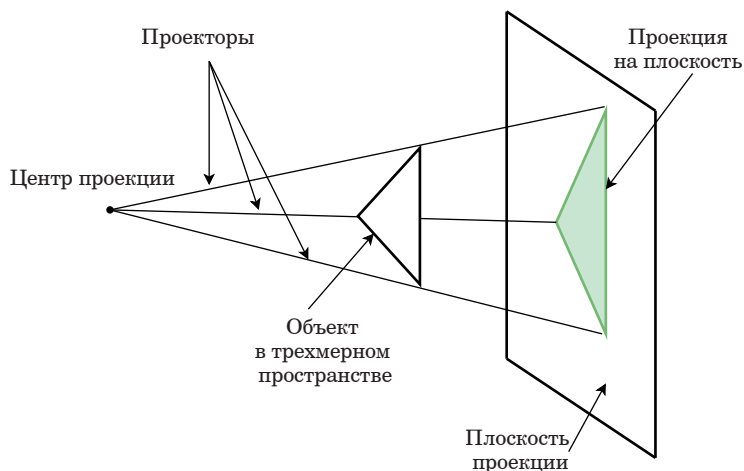


Рис. 3. Проецирование на плоскость

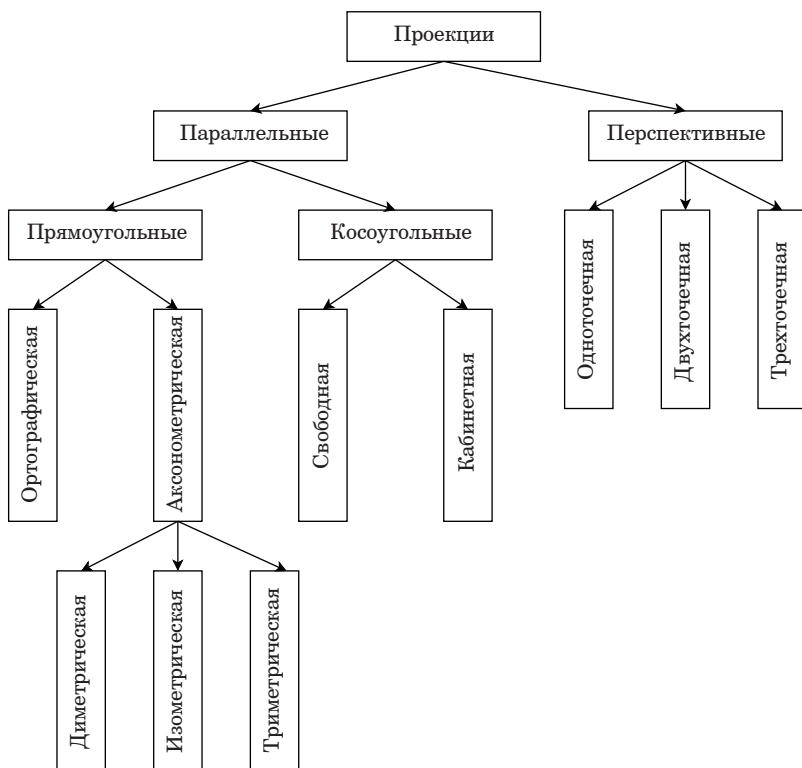


Рис. 4. Классификация проекций

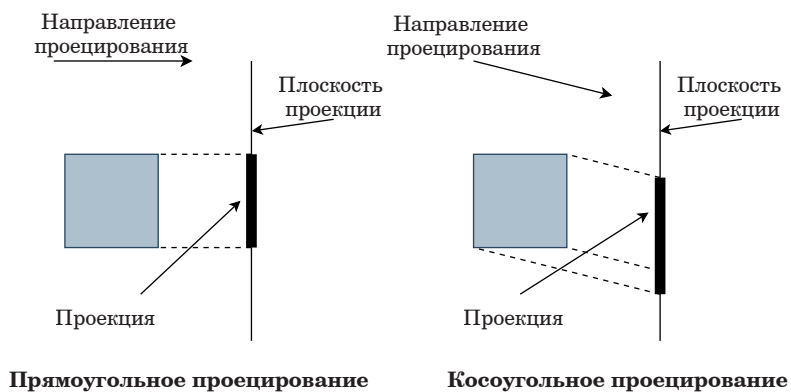


Рис. 5. Прямоугольные и косоугольные проекции

каждому из них соответствует своя функция обработки и набор параметров.

Детальная классификация проекций представлена на рис. 4.

Параллельные проекции делятся на два типа в зависимости от соотношения между направлением проецирования и нормалью к плоскости проекции (рис. 5):

1) прямоугольные (ортографические и аксонометрические) – направление проектора совпадает с направлением нормали к плоскости проекции (иногда называемой картинной плоскостью);

2) косоугольные – направления проектора и нормали к плоскости проекции не совпадают.

Все проективные преобразования вырождены – восстановить объект по его единственной проекции невозможно.

3.2. Ортографические проекции

Рассмотрим сначала ортографические проекции, при которых плоскость проекции совпадает с одной из координатных плоскостей или параллельна ей.

Матрица ортографического проецирования вдоль оси X на плоскость YOZ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если плоскость проекции параллельна YOZ , но не совпадает с ней ($x=l$), то для получения соответствующей матрицы проецирования необходимо умножить \mathbf{P}_x на известную из аффинных преобразований матрицу переноса вдоль оси X :

$$\mathbf{P}_{x=l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом можно записать матрицы проецирования вдоль координатных осей Y и Z на плоскости, параллельные соответствующим координатным плоскостям при $y=m$ и $z=n$ соответственно

$$\mathbf{P}_{y=m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{z=n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Если плоскости проекции совпадают с координатными плоскостями, достаточно заменить в соответствующих матрицах m и n на нули.

Хотя ортографические проекции широко используются при построении технических чертежей, они не позволяют визуально представить внешний вид исходного объекта. Более информативными в этом плане являются аксонометрические и косоугольные проекции.

3.3. Аксонометрические проекции

Аксонометрические проекции отличаются от ортографических тем, что плоскость проекции в них не совпадает с координатными плоскостями и не параллельна им.

В зависимости от взаимного расположения плоскости проекции и координатных осей принято различать три вида аксонометрических проекций:

- изометрию (размеры проекции одинаково изменены по всем трем координатным осям);
- диметрию (размеры проекции одинаково изменены по двум координатным осям из трех);
- триметрию (изменение размеров проекции различно по трем координатным осям).

С точки зрения изученных ранее преобразований получение аксонометрической проекции эквивалентно тому, что исходный объект подвергается комбинации поворотов вокруг координатных осей, после чего выполняется «стандартное» параллельное проецирование.

Нетрудно показать, что поворот на угол ψ относительно оси Y , затем на угол φ вокруг оси X и последующее проецирование на плоскость $Z = 0$ описываются матрицей:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R}_y \times \mathbf{R}_x \times \mathbf{P}_{z=0} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \varphi \cdot \sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin \psi & -\sin \varphi \cdot \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Такая комбинация преобразований приводит к изменению длин единичных ортов координатных осей X , Y , Z , связанных с объектом:

$$(1 \ 0 \ 0 \ 1) \times \mathbf{M} = (\cos \psi \quad \sin \varphi \cdot \sin \psi \quad 0 \ 1),$$

$$(0 \ 1 \ 0 \ 1) \times \mathbf{M} = (0 \quad \cos \varphi \quad 0 \ 1),$$

$$(0 \ 0 \ 1 \ 1) \times \mathbf{M} = (\sin \psi \quad -\sin \varphi \cdot \cos \psi \quad 0 \ 1).$$

Диметрия характеризуется тем, что два из трех ортов сокращаются одинаково. Если на основании формул для ортов записать слева квадрат длины орта X , а справа – квадрат длины орта Y , то можно получить соотношение:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi.$$

Выполним подстановку в обе части полученного уравнения выражения:

$$\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi.$$

После элементарных преобразований получим:

$$\sin^2 \psi = \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Формула задает соотношение между углами для построения диметрической проекции. При этом конкретные значения одного из углов можно выбрать достаточно произвольно. В стандартной диметрии соотношение масштабов – 2:2:1. Пример диметрической проекции представлен на рис. 6.

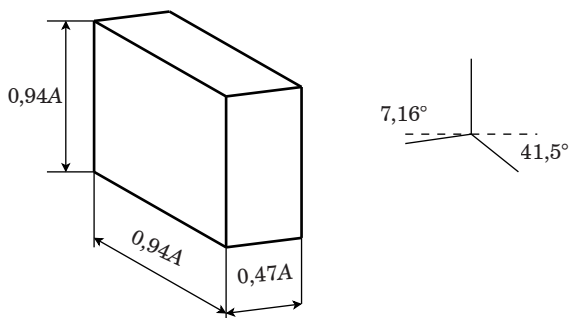


Рис. 6. Диметрическая проекция куба со стороной A

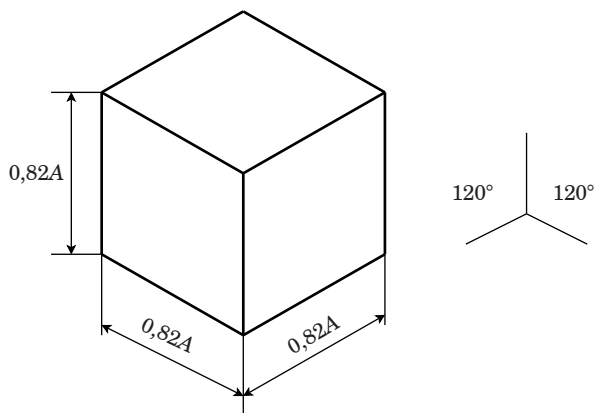


Рис. 7. Изометрическая проекция куба со стороной A

Для получения изометрической проекции ставится условие равного сокращения всех трех координатных осей, т. е. к выражению для диметрии (равенство двух ортов) добавляется выражение для равенства другой пары ортов:

$$\cos^2 \psi + \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi = \cos^2 \varphi,$$

$$\sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi = \cos^2 \varphi.$$

Совместное решение двух уравнений дает:

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{3}.$$

Пример изометрической проекции представлен на рис. 7.

3.4. Косоугольные проекции

Различные типы косоугольных проекций характеризуются величиной отличного от 90° угла между проекторами и плоскостью проекции. Матрица такого проецирования на плоскость XOY имеет вид

$$\mathbf{K}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

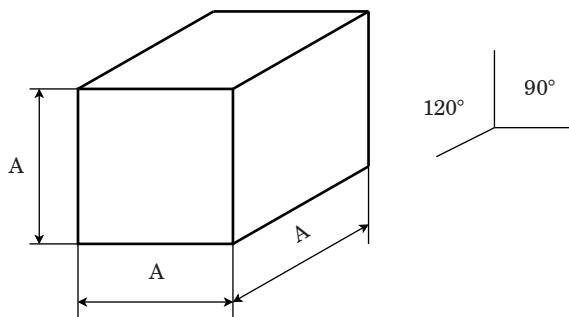


Рис. 8. Свободная проекция куба

Выделяют два типа косоугольных проекций:

- свободную,
- кабинетную.

Свободную проекцию иногда называют косоугольной изометрией. При свободной проекции угол между проекторами и плоскостью проекции равен 45° , т. е.

$$\alpha = \beta = \cos \frac{\pi}{4}.$$

Изображение куба в свободной проекции представлено на рис. 8.

Кабинетная проекция, иногда называемая косоугольной диметрией – частный случай свободной проекции, при котором

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}.$$

Изображение куба в кабинетной проекции представлено на рис. 9.

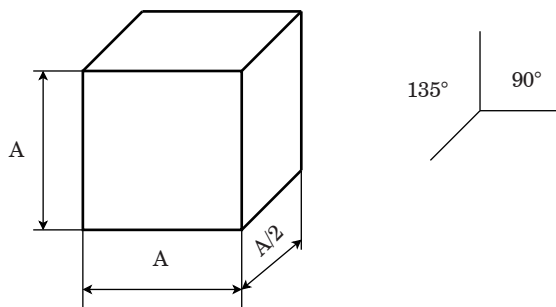


Рис. 9. Кабинетная проекция куба

Рассмотренные выше проекции используются преимущественно в техническом черчении.

3.5. Перспективные проекции

Центральная (перспективная) проекция позволяет получить более реалистичное изображение трехмерных объектов с перспективными искажениями, близкими к присутствующим на реальных фото и видеоизображениях. Подобная проекция позволяет также обеспечить изменение размеров объектов в зависимости от расстояния до наблюдателя, что имеет решающее значение при синтезе изображений в компьютерной графике.

Реализация перспективной проекции на двумерном экране сводится к двум этапам – перспективному преобразованию и последующей ортографической проекции на плоскость, обычно совпадающую с плоскостью экрана.

Центральные проекции параллельных прямых, проходящих под ненулевым углом к плоскости проекции, сходятся в точках схода. В зависимости от количества точек схода принято выделять одно-, двух- и трехточечную проекции. В компьютерной графике наиболее часто используются одноточечная и двухточечная проекции. Рассмотрим математический аппарат, связанный с этими видами проекций.

При одноточечном перспективном преобразовании вдоль оси Z матрица преобразования выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Точка с координатами $(x\ y\ z)$ преобразуется следующим образом:

$$[x\ y\ z\ 1] \times \mathbf{E}_z = \left[\frac{x}{rz+1} \frac{y}{rz+1} \frac{z}{rz+1} \ 1 \right].$$

Нетрудно видеть, что удаление предметов (увеличение координаты z) приводит к уменьшению размера этих предметов с коэффициентом $\frac{1}{rz+1}$.

Определим перспективную проекцию бесконечно удаленной точки, находящейся на оси Z :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} & 1 \end{bmatrix}.$$

Полученные координаты определяют положение точки схода прямых, параллельных оси Z , при одноточечном перспективном преобразовании.

При двухточечном преобразовании существуют две точки схода, а само преобразование описывается матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Точка с координатами $(x y z)$ преобразуется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px + qy + 1} & \frac{y}{px + qy + 1} & \frac{z}{px + qy + 1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты двух точек схода записываются следующим образом:

$$\text{на оси X: } \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{на оси Y: } \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{q} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как уже указывалось, трехточечные проекции редко используются в компьютерной графике из-за специфического ракурса формируемого при этом изображения.

Контрольные вопросы к разделу 3

1. Почему проективные преобразования являются вырожденными и к каким последствиям это приводит?

2. Чем отличаются параллельное и перспективное проецирование?
3. В чем отличие прямоугольных и косоугольных проекций?
4. Комбинация каких известных преобразований позволяет получать аксонометрические проекции?
5. Чем отличаются диметрическая и изометрическая проекции?
6. Чему равен коэффициент искажения при изометрической проекции?
7. Как искажаются размеры модели при кабинетной проекции?
8. Как влияет увеличение координаты z на размеры предметов при одноточечном перспективном проецировании?
9. С какой целью применяется двухточечное перспективное проецирование?
10. Как записываются координаты точек схода при двухточечном перспективном преобразовании?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Исследование проективных преобразований

Цель работы: Изучение теоретических основ проективных преобразований в трехмерном пространстве. Исследование особенностей практической реализации проективных преобразований.

Задание

Написать программу на любом языке высокого уровня, реализующую получение анимированной проекции фигуры в соответствии со своим вариантом задания. Заданный многогранник должен вращаться вокруг указанной оси, не проходящей через сам многогранник и через начало координат, а также не совпадающей с координатными осями. Для всех вариантов фигура должна отображаться в контурном виде без удаления невидимых линий. Рисование контура фигур по матрице координат вершин можно (но не обязательно) осуществлять с помощью специализированных библиотек. Аффинные и проективные преобразования необходимо выполнять только путем рассмотренных выше матричных вычислений (можно, но не обязательно, использовать библиотеки программ для матричных вычислений). Использование специализированных программ геометрических преобразований не допускается.

Порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические указания.
2. Выбрать вариант задания (табл. 2) в соответствии со своим порядковым номером в списке группы.
3. Написать программу на любом языке высокого уровня, реализующую проекцию многогранника, вращающегося относительно оси, не проходящей через многогранник и не касающейся его.

Таблица 2

Варианты заданий к лабораторной работе № 3

№	Фигура	Проекция	Ось вращения
1	Тетраэдр	Изометрия	Параллельна OX
2	Тетраэдр	Диметрия	Параллельна OY
3	Тетраэдр	Одноточечная перспектива	Параллельна OZ
4	Тетраэдр	Двухточечная перспектива	Не параллельна координатным осям

№	Фигура	Проекция	Ось вращения
5	Правильная пирамида	Изометрия	Не параллельна координатным осям
6	Правильная пирамида	Диметрия	Параллельна OX
7	Правильная пирамида	Одноточечная перспектива	Параллельна OY
8	Правильная пирамида	Двухточечная перспектива	Параллельна OZ
9	Треугольная призма	Изометрия	Параллельна OZ
10	Треугольная призма	Диметрия	Не параллельна координатным осям
11	Треугольная призма	Кабинетная	Параллельна OX
12	Треугольная призма	Свободная	Параллельна OY
13	Треугольная призма	Одноточечная перспектива	Параллельна OX
14	Треугольная призма	Двухточечная перспектива	Параллельна OY
15	Куб	Изометрия	Параллельна OZ
16	Куб	Диметрия	Не параллельна координатным осям
17	Куб	Кабинетная	Параллельна OX
18	Куб	Свободная	Параллельна OY
19	Куб	Одноточечная перспектива	Параллельна OZ
20	Куб	Двухточечная перспектива	Не параллельна координатным осям

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Формулировка задания
4. Теоретические сведения о проективных преобразованиях в пространстве.
5. Алгоритм решения поставленной задачи.
6. Выбор языка программирования и используемых библиотек.
7. Описание разработанной программы.
8. Скриншоты, иллюстрирующие работу программы.
9. Вывод, в котором подробно раскрывается результат выполненной работы, описываются теоретические знания и навыки, по-

лученные в процессе ее выполнения, а также возникшие проблемы и пути их решения.

10. Список использованных источников.

11. Приложение с листингом программы. Программа должна содержать комментарии, поясняющие ее работу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Никулин, Е. А.* Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учеб. пособие / Е. А. Никулин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 708 с.
2. *Никулин, Е. А.* Компьютерная графика. Оптическая визуализация / Е. А. Никулин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2023. – 200 с.
3. *Боресков, А. В.* Основы компьютерной графики: учебник и практикум для вузов / А. В. Боресков, Е. В. Шикин. – М.: Юрайт, 2023. – 219 с.
4. Компьютерная графика в САПР / А. В. Приемышев, В. Н. Крутов, В. А. Треяль, О. А. Коршакова. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 196 с.
5. *Колесниченко, Н. М.* Инженерная и компьютерная графика: Учебное пособие / Н. М. Колесниченко, Н. Н. Черняева. – Вологда: Инфра-Инженерия, 2021. – 236 с.
6. *Аграновский, А. В.* Технологии проектирования интерактивных графических приложений : учебное пособие / А. В. Аграновский, В. В. Боженко, Е. Л. Турнецкая. – СПб.: ГУАП, 2021. – 129 с.
7. *Owen, Ch. B.* High quality alias free image rotation / Ch. B. Owen F. Makedon // Proceeding of 30th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers Pacific Grove, California, November 2–6, 1996. URL: <https://digitalcommons.dartmouth.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5030&context=facoa> (дата посещения 22.12.2023).
8. *Перемитина, Т. О.* Компьютерная графика: учеб. пособие / Т. О. Перемитина. – Томск : Эль Контент, 2012. – 144 с.

Содержание

Введение	3
1. Аффинные преобразования на плоскости	4
1.1. Линейные геометрические преобразования изображений	4
1.2. Композиция аффинных преобразований на плоскости	6
1.3. Особенности создания анимированных изображений ...	9
1.4. Особенности применения аффинных преобразований на плоскости	9
Контрольные вопросы к разделу 1	10
Лабораторная работа № 1	
Исследование аффинных преобразований на плоскости	11
2. Аффинные преобразования в пространстве	14
2.1. Базовые аффинные преобразования в трехмерном пространстве	14
2.2. Особенности представления пространственных многогранников в трехмерном пространстве	16
2.3. Порядок определения матрицы сложного аффинного преобразования в пространстве	18
Контрольные вопросы к разделу 2	21
Лабораторная работа № 2	
Исследование аффинных преобразований в пространстве	22
3. Проективные преобразования	25
3.1. Классификация проективных преобразований.....	25
3.2. Ортографические проекции	27
3.3. Аксонометрические проекции	28
3.4. Косоугольные проекции.....	30
3.5. Перспективные проекции.....	32
Контрольные вопросы к разделу 3	33
Лабораторная работа № 3	
Исследование проективных преобразований.....	35
Библиографический список	38

Учебное издание

А. В. Аграновский

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ
ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ РАСТРОВЫХ
ИЗОБРАЖЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка *А. Н. Колешко*

Подписано к печати 07.02.2024. Формат 60 × 84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .

Тираж 50 экз. Заказ №.

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А