Домашнее задание на тему: «Дифференцирование функций»
Томчук Г. С., студент гр. 4326

Задание:
1. С помощью интерполяционной формулы Ньютона приближенно найти первую и вторую производные функции f(x) в заданной точке x∗.
2. Используя правила дифференцирования, найти указанные производные функции f(x) аналитически и вычислить их значения в точке x∗.
3. Сравнить результаты расчета производных по приближенным и точным формулам.

Вариант задания:

<table>
<tr><th>ФИО</th><th>f(x)</th><th colspan="5">Таблица значений узлов</th><th>x*</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Томчук Г. С.</td><td rowspan="2">$\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$</td><td>$i$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td rowspan="2">3.18</td></tr>
<tr><td>x_i</td><td>2.70</td><td>2.85</td><td>3.00</td><td>3.15</td><td>3.30</td></tr>
</table>

Решение:

Для выполнения задания была использована вычислительная среда Mathcad.

1. Найдем производные с помощью интерполяционного многочлена. Составим таблицу конечных разностей (где Y_i — значение функции в соответствующей точке):

$$\Delta 1 := \begin{bmatrix} Y_2 - Y_1 \\ Y_3 - Y_2 \\ Y_4 - Y_3 \\ Y_5 - Y_4 \end{bmatrix} \qquad \Delta 2 := \begin{bmatrix} \Delta 1_2 - \Delta 1_1 \\ \Delta 1_3 - \Delta 1_2 \\ \Delta 1_4 - \Delta 1_3 \end{bmatrix} \qquad \Delta 3 := \begin{bmatrix} \Delta 2_2 - \Delta 2_1 \\ \Delta 2_3 - \Delta 2_2 \end{bmatrix} \qquad \Delta 4 := \Delta 3_2 - \Delta 3_1$$

Получим значения конечных разностей:

$$\Delta 1 = \begin{bmatrix} -0.05077 \\ -0.0456 \\ -0.04125 \\ -0.03756 \end{bmatrix} \qquad \Delta 2 = \begin{bmatrix} 0.00518 \\ 0.00434 \\ 0.00369 \end{bmatrix} \qquad \Delta 3 = \begin{bmatrix} -0.000834 \\ -0.000655 \end{bmatrix} \qquad \Delta 4 = 0.0001781$$

Построим многочлен Ньютона:

$$h := X_2 - X_1 \qquad h = 0.15$$

$$P1(x) := Y_1 + \frac{\Delta 1_1}{h}\cdot(x - X_1) \qquad P2(x) := P1(x) + \frac{\Delta 2_1}{2\cdot h^2}\cdot(x - X_1)\cdot(x - X_2)$$

$$P3(x) := P2(x) + \frac{\Delta 3_1}{6\cdot h^3}\cdot(x - X_1)\cdot(x - X_2)\cdot(x - X_3)$$

$$P4(x) := P3(x) + \frac{\Delta 4}{24\cdot h^4}\cdot(x - X_1)\cdot(x - X_2)\cdot(x - X_3)\cdot(x - X_4)$$

Проверим значения многочлена P в узлах:

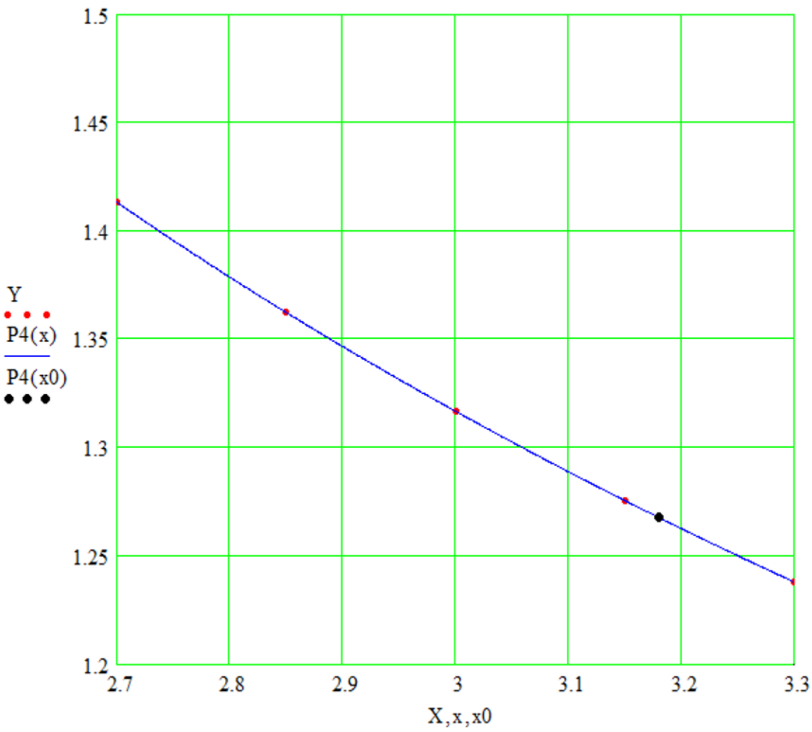
$i := 1..5 \quad P4(X_i) \quad Y_i$

$P4(X_i)$	Y_i
1.41333	1.41333
1.36255	1.36255
1.31696	1.31696
1.27571	1.27571
1.23814	1.23814

Проверим значение многочлена P_4 в точке x_0=3.18:

$$P4(x0) = 1.26792 \qquad f(x0) = 1.26792$$

Построим графики интерполирующего многочлена P_4 и данных точек:



Найдем производные многочлена P_4 и их значения в точке x_0:

$$P'(x) := \frac{d}{dx}P4(x) \qquad P''(x) := \frac{d^2}{dx^2}P4(x)$$

$$P'(x0) = -0.257255 \qquad P''(x0) = 0.158432$$

$$f'(x0) = -0.257235 \qquad f''(x0) = 0.158443$$

Построим интерполяционный многочлен в виде суммы степеней *x*:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad i := 1..5 \qquad j := 1..5$$

$$A_{i,j} := (X_i)^{j-1} \qquad K := A^{-1}\cdot Y \qquad P(x) := \sum_{k=1}^{5} K_k\cdot x^{k-1}$$

Найдем коэффициенты многочлена, начиная со своб. члена:

$$K^T = [\,5.22872\ \ -3.44149\ \ 1.21853\ \ -0.21264\ \ 0.01466\,]$$

Найдем производные от интерполяционного многочлена:

$$P'(x) := \sum_{k=2}^{5} (k-1)\cdot K_k\cdot x^{k-2} \qquad P''(x) := \sum_{k=3}^{5} (k-1)\cdot(k-2)\cdot K_k\cdot x^{k-3}$$

Найдем значения производных в точке x_0:

$$P'(x0) = -0.257255 \qquad P''(x0) = 0.158432$$

Значения совпадают с найденными значениями в форме Ньютона. Найдем относительные погрешности:

$$\delta 1 := \frac{|P'(x0) - f'(x0)|}{|f'(x0)|} \qquad \delta 1 = 0.000079$$

$$\delta 2 := \frac{|P''(x0) - f''(x0)|}{|f''(x0)|} \qquad \delta 2 = 0.000071$$

2. Найдём производные аналитически:

$$\frac{d}{dx}f(x)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \frac{-1}{\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\right]\right]} \qquad f'(x) := \frac{-1}{\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\cdot\left[\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+1\right)\right]\right]}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)\ \mathrm{simplify} \rightarrow \frac{1}{\left[2\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]}\cdot\frac{(3\cdot x-1)}{\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\right]}$$

$$f''(x) := \frac{1}{\left[2\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]}\cdot\frac{(3\cdot x-1)}{\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2\right]}$$

Подставим значение x_0:

$$f'(x0) = -0.257235 \qquad f''(x0) = 0.158443$$

Значения так же практически совпадают со значениями, вычисленными по приближенным формулам.